arXiv:2302.09623v1 [math.CV] 19 Feb 2023

单位圆盘上调和函数偏导数的估计

´ADEL KHALFALLAH 和 MIODRAG MATELJEVIC

Abstract. 令 $f = P[F]$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 F的泊松积分，其中 F是单位圆 $\mathbb{T}$ 上的绝对连续函数，且 $\dot{F} \in L^p$（$\mathbb{T}$），其中 $\dot{F}$（e^{it}）$= \frac{d}{dt}F$（e^{it}），并且 $p \in [1, \infty]$。最近，Chen 等人[1]（《几何分析杂志》，2021年）扩展了 Zhu 的结果 [15]（《几何分析杂志》，2020年），并证明：（i）如果 f 是调和映射且 $1 \leq p < \infty$，那么 f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}} \in B^p$（$\mathbb{D}$），即 $\mathbb{D}$的 Bergman空间。此外，（ii）在附加条件下，例如 f 是 [15] 中的调和拟正则映射，或 f 是 [1], 中的调和椭圆映射，他们证明了对于 $1 \leq p \leq \infty$， f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}} \in H^p$（$\mathbb{D}$），即 $\mathbb{D}$ 的哈代空间。本文旨在通过证明以下结论来扩展这些结果：对于 $p \in$（1，∞），无需任何额外条件，（ii）成立；对于 $p = 1$ 或 $p = \infty$， f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}} \in H^p$（$\mathbb{D}$）当且仅当 H（F）$\in L^p$（T）时成立，即 F的希尔伯特变换，并且在这种情况下，它给出 $zf_z = P[^{\dot{F}+iH}$（$\dot{F}$）$_{2i}$]。

1. Preliminaries

我们用 $\mathbb{D}$ 表示单位圆盘，用 $\mathbb{T} := \partial\mathbb{D}$ 表示单位圆周。对于 $z = x + iy \in \mathbb{C}$，两个复微分算子定义如下：

$$\partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ and } \overline{\partial}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

此外，我们用 $h(\mathbb{D})$（分别用 $H(\mathbb{D})$）表示$\mathbb{D}$上的调和（分别为解析）函数集合。

1.1. 哈代空间与伯格曼空间。

对于 $p \in [1, \infty]$，调和哈代空间 $h^p(\mathbb{D})$由所有从$\mathbb{D}$到 $\mathbb{C}$的调和函数组成，这些函数满足：对所有 $r \in (0, 1)$， $M_p(r, f)$均存在，且 $\|f\|_p < \infty$，其中

$$M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}$$

and

$$\|f\|_p = \begin{cases} \sup\{M_p(r, f) : \ 0 < r < 1\} & \text{if } p \in [1, \infty), \\ \sup\{|f(z)| : \ z \in \mathbb{D}\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

解析哈代空间 $H^p(\mathbb{D})$是 $h^p(\mathbb{D})$ 中所有解析元素的集合。（参见 [2, 3]）。

记 将所有从 $\mathbb{T}$ 到 $\mathbb{C}$ 的可测函数 F 组成的空间记为 $L^p(\mathbb{T})$ $(p \in [1, \infty])$ h

21-2-2023 2010年数学主题分类。主要分类：30C62、31A05；次要分类：30H10、30H20。
关键词和短语：泊松积分、哈代空间、Bergman空间、调和共轭函数。

$$\|F\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty), \\ \sup\{|F(e^{i\theta})| : \theta \in [0,2\pi)\} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

对于 $z \in \mathbb{D}$，令

$$P(z) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

设为泊松核。对于映射 $F \in L^1(\mathbb{T})$， F 的泊松积分定义为

$$f(z) = P[F](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(ze^{-i\theta})F(e^{i\theta})d\theta.$$

众所周知，函数 f 属于 $h^p(\mathbb{D})$ $(1 < p \leq \infty)$ 当且仅当 $f = P[\phi]$，其中 $\phi \in L^p(\mathbb{T})$。并且，如果 $f = P[\phi]$, $\phi \in L^p(\mathbb{T})$，那么

$$\|f\|_p = \|\phi\|_p, \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

and

$$f_*(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}) = \phi(e^{i\theta}) \quad a.e.$$

因此，对于 $p \in (1,\infty]$, P: $L^p(\mathbb{T}) \to h^p(\mathbb{D})$ 是一个等距映射，参见 [2, 4, 7]。

对于 $p \in [1,\infty]$，Bergman空间 $B^p(\mathbb{D})$ 由所有解析函数 f 组成，其中： $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$满足

$$\|f\|_{b^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \in [1,\infty), \\ \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\} & \text{if } p = \infty, \end{cases}$$

其中 $d\sigma(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$ 表示 $\mathbb{D}$上的归一化勒贝格面积测度。显然，对于每个 $p \in [1,\infty]$, $H^p(\mathbb{D}) \subset B^p(\mathbb{D})$（参见 [8]）。

1.2. 调和共轭函数与 M. Riesz 里斯定理。如果 f 是定义在$\mathbb{D}$上的调和函数，给定为

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

那么其调和共轭函数定义为

$$\tilde{f}(re^{i\theta}) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n c_n r^{|n|} e^{in\theta},$$

˜其中 $m_n = -i$ 符号 n；特别地， $f(0) = 0$。此外，我们有

$$f(z) + i\tilde{f}(z) = -f(0) + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1.1}$$

该表达式表达式 $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ 称为 f 的黎斯投影，记作 $P_+ f$。即：

$$P_+ : h(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$$

定义为

$$P_+(f)(z) := \sum_{n\geq 0} c_n z^n.$$

因此，公式（1.1）可改写为

$$f + i\tilde{f} = -f(0) + 2P_+(f). \tag{1.2}$$

接下来，假设 $f = P[\phi], \phi \in L^1(\mathbb{T})$，与 $P[\phi]$ 共轭的函数等于

$$\tilde{P}[\phi](z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{P}(ze^{-i\theta})\phi(e^{i\theta})d\theta,$$

˜其中 P 表示共轭泊松核，

$$\tilde{P}(z) = \operatorname{Im}\frac{1+z}{1-z} = \frac{2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos(\theta)}, \quad z = re^{i\theta}.$$

黎斯投影 P_+ 也可写成柯西型积分，

$$P_+(P[\phi])(z) = C(\phi)(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\phi(w)}{w-z}\,dw, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{1.3}$$

注意，在 $f = P[\phi]$ 的情形下，公式（1.2）可改写为

$$P[\phi] + i\tilde{P}[\phi] = P[\phi](0) + 2P_+(\phi). \tag{1.4}$$

此外，如果 $\phi \in L^1(\mathbb{T})$，那么 $\tilde{P}[\phi]$ 几乎处处存在径向极限，并且有如下关系

$$\lim_{r\to 1^-} \tilde{P}[\phi](re^{i\theta}) = \tilde{\phi}(e^{i\theta}),$$

˜其中， ϕ 是 ϕ 的希尔伯特变换，定义为

$$H(\phi)(e^{i\theta}) = \tilde{\phi}(e^{i\theta}) := \frac{1}{2\pi}\,\text{p.v.}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi(e^{i\theta})}{\tan(\frac{\theta-t}{2})}\,dt.$$

希尔伯特算子将 $L^1(\mathbb{T})$映射到 $L^p(\mathbb{T})$，对任意 $p < 1$均成立，但不能映射到 $L^1(\mathbb{T})$，因此˜在一般情况下， ϕ 的泊松积分没有意义。然而，我们有

定理 A. [10] 如果 $\phi \in L^1(\mathbb{T})$且 $\tilde{\phi} \in L^1(\mathbb{T})$，那么

$$P[\tilde{\phi}] = \tilde{P}[\phi].$$

考虑以下问题是很自然的：如果 f 在 $\mathbb{D}$ 中是调和的，且 $f \in h^p(\mathbb{D})$，˜$1 \leq p \leq \infty$，那么 $f \in h^p(\mathbb{D})$（或 $P_+(f) \in H^p(\mathbb{D})$）吗？对于所有 $1 < p < \infty$，这个问题的答案都是肯定的。这就是 M. Riesz 证明的著名定理的内容， [12], 另见 Rudin [13,定理 17.26]。

定理 1.1.（M. Riesz）对于 $1 < p < \infty$，黎斯投影 P_+

$$P_+ : L^p(\mathbb{T}) \to H^p(\mathbb{D})$$

是 $L^p(\mathbb{T})$ 上的连续算子，也就是说，存在常数 A_p 使得

$$\|P_+(f)\|_p \leq A_p\|f\|_p \tag{1.5}$$

对 $f \in L^p(\mathbb{T})$ 成立。

等价地，对于每个 $p \in (1,\infty)$，都存在一个常数 B_p，使得

$$\|u + i\tilde{u}\|_p \le B_p \|u\|_p,$$

对于任意调和函数 $u \in h^p(\mathbb{D})$，此结论均成立，而 $\tilde{u}$ 是其经 $\tilde{u}(0) = 0$归一化的调和共轭函数。

最近，Hollenbeck 和 Verbitsky [9] 证明，黎斯不等式 (1.5) 中的最佳常数为 $A_p = \csc(\frac{\pi}{p})$。

It 事实证明，里斯定理对于 $p = 1$ 和 $p = \infty$并不成立。事实上，如果

$$f_1(z) = \frac{1+z}{1-z}. \quad f_2(z) = i\log(1-z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

那么 Re $f_1 = P$ 是泊松核，因此 Re $f_1 \in h^1$，且 Re $f_2 \in h^\infty$。然而 $f_1 \notin H^1$，因为其边界函数不可积，而 f_2 显然无界。

由 M. Riesz 定理可推得，对于 $p \in (1,\infty)$，希尔伯特变换将 $L^p(\mathbb{T})$ 映入 $L^p(\mathbb{T})$。

2. Main results

在 [15], Zhu 研究了以下问题：

边界函数 F 满足什么条件，才能确保其调和延拓 $f = P[F]$ 的偏导数，即 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$，属于空间 $\mathcal{B}^p(\mathbb{D})$（或 $H^p(\mathbb{D})$），其中 $p \in [1,\infty]$?

作者仅针对 $p \in [1,2)$ 证明了定理 B，随后 Chen 等人在 [1]将其推广到 $[1,\infty)$。

定理 B. ([15, 定理 1.2]),[1, 定理 1.1]) 设 $f = P[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射，且 $F \in L^p(\mathbb{T})$，其中 F 是一个绝对连续函数。

(1) 若 $p \in [1,\infty)$，则 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$ 均属于 $\mathcal{B}^p(\mathbb{D})$。(2) 若 $p = \infty$，则存在调和映射 $f = P[F]$，满足 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$，使得 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$ 均不属于 $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{D})$。

此外，在满足关于 f 的一些附加条件时，他们证明了对于 $p \in [1,\infty]$，偏导数属于 $H^p(\mathbb{D})$。

定理 C.（[15, 定理 1.3],[1, 定理 1.2]）假设 $p \in [1,\infty]$ 且 $f = P[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 中的一个 (K,K')-椭圆映射，满足 $F \in L^p(\mathbb{T})$，其中 F 是一个绝对连续函数，$K \ge 1$ 且 $K' \ge 0$。那么 f_z 和 $\overline{f_{\overline{z}}}$ 都属于 $H^p(\mathbb{D})$。

在 [1], 中，作者证明了定理 C 对调和椭圆映射同样成立，而调和椭圆映射比调和拟正则映射更一般。

我们的第一个主要结果是对前两个定理的改进。我们证明，对于$1 < p < \infty$， f_z 和$\overline{f_{\overline{z}}}$ 都属于 $H^p(\mathbb{D})$，且无需对 f施加任何额外条件。

定理 2.1. 假设 F是 $\mathbb{T}$ 上的绝对连续函数，且 $f = P[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射，并且 $F \in L^p(\mathbb{T})$。

(1) 若 $p \in (1, \infty)$，则 f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}}$ 都属于 $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$。此外，存在常数 A_p ，使得

$$\max(\|f_z\|_p, \|\overline{f_{\bar{z}}}\|_p) \leq A_p \|\dot{F}\|_p.$$

(2) 若 $p = 1$ 或 $p = \infty$，则 f_z 和 $\overline{f_{\bar{z}}}$ 都属于 $\mathcal{H}^p(\mathbb{D})$，当且仅当 $H(F) \in L^p(\mathbb{T})$。此外

$$2iz f_z(z) = P[\dot{F} + iH(\dot{F})](z).$$

设 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$。复值函数 f 的极导数如下

$$\begin{cases} f_\theta(z) := \dfrac{\partial f(z)}{\partial \theta} = i\big(z f_z(z) - \overline{z} f_{\bar{z}}(z)\big) \\ f_r(z) := \dfrac{\partial f(z)}{\partial r} = f_z(z) e^{i\theta} + f_{\bar{z}}(z) e^{-i\theta}. \end{cases}$$

因此，若 f 是调和函数，则 f_θ 和 rf_r 也都是调和函数，并且

$$2iz f_z = f_\theta + ir f_r. \tag{2.1}$$

这里，我们应提及以下基本观察： rf_r 是 f_θ 的调和共轭函数。

下一个引理表明，对于 $f = P[F]$， $f_\theta \in h^p(\mathbb{T})$；对于 $p \in [1, \infty]$， $F \in L^p(\mathbb{T})$。

引理 2.1。 [15, 引理 2.3] 设 $1 \leq p \leq \infty$, $f = P[F]$ 是$\mathbb{D}$ 上的调和映射，其绝对连续边界函数为 F，并满足 $F \in L^p(\mathbb{T})$。则

$$f_\theta = P[\dot{F}].$$

特别地， $f_\theta \in h^p(\mathbb{D})$ 且 $\|f_\theta\|_p \leq \|F\|_{L^p}$。

作为推论，我们可以得到关于调和函数 rf_r的一些信息，其中 rf_r是 f_θ的调和共轭函数。

推论 2.2。设 F是一个绝对连续函数，且 $f = P[F]$ 是 $\mathbb{D}$ 中的调和映射，并且 $F \in L^p(\mathbb{T})$。

(1) 如果 $p \in (1, \infty)$，则 $rf_r \in h^p(\mathbb{D})$。(2) 如果 $p = 1$ 或 $p = \infty$，则 $rf_r \in h^p(\mathbb{D})$ 当且仅当 $H(F) \in L^p(\mathbb{T})$。

3. Proofs

下一个结果给出了 f_z 和 $f_{\bar{z}}$ 关于 F 的 Riesz 投影的积分表示。

命题 3.1。设 $f = P[F]$，其中 F 是定义在 $\mathbb{T}$ 上的绝对连续函数。那么

$$f_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(w)}{w - z} |dw|,$$

and

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(w)}{\bar{w} - \bar{z}} |dw|.$$

Thus

$$izf_z = P_+[\dot{F}](z), \quad and \quad iz\overline{f_{\bar{z}}}(z) = P_+[\overline{\dot{F}}](z). \tag{3.1}$$

证明。设 P 为泊松核。那么

$$P_z = \partial P(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Thus

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \partial P(ze^{-it})e^{-it}F(e^{it})dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{-it}}{(1-ze^{-it})^2}F(e^{it})dt.$$

As

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-ze^{-it}}\right) = \frac{-ize^{-it}}{(1-ze^{-it})^2},$$

且 F 绝对连续，利用分部积分，我们得到

$$izf_z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(e^{it})}{1-ze^{-it}}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(w)}{w-z}\,dw = C[\dot{F}] = P_+[\dot{F}].$$

因此,

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{e^{-it}}{1-ze^{-it}}\dot{F}(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(w)}{w-z}\,|dw|.$$

类似的计算给出了 $f_{\bar{z}}$的表达式。 □

定理 2.1 的证明。

(1) 令 $p \in (1,\infty)$ 且 $f = P[F]$ 满足 $F \in L^p(\mathbb{T})$。结合命题 3.1 和Riesz 定理，我们得出 $P_+[F] = izf_z$ 是 H^p 的一个元素，并且存在一个常数 A_p 使得 $\|zf_z\|_p \le A_p\|F\|_{L^p}$. 由于 $\|zf_z\|_p = \|f_z\|_p$，我们推得 $f_z \in H^p$以及 $\|f_z\|_p \le A_p\|F\|_{L^p}$.

(2) 令 $p = 1$或 $p = \infty$。令 $h = P[F]$。显然 h是调和函数，且 $h(0) = 0$。因此由(1.2)可得 $h + ih = 2P_+(h)$，即

$$P[\dot{F}] + i\tilde{P}[\dot{F}] = 2P_+(\dot{F}) = 2izf_z. \tag{3.2}$$

假设 $f_z \in H^p(\mathbb{D})$，则其边界 $(f_z)_*$ 属于取径向极限所得的 $L^p(\mathbb{T})$，即，$(f_z)_*(\xi) = \lim_{r\to 1} f_z(r\xi)$ 几乎处处成立。由于 $h_* = F$，由(3.2)可推出 $\tilde{h}_* = (P[F])_* = H(F) \in L^p(\mathbb{T})$。

反之，假设 $H(F) \in L^p(\mathbb{T})$，则 $P[F] = P[H(F)]$.因此，$2izf_z = P[F + iH(F)]$属于 $H^p(\mathbb{D})$，因为 $F + iH(F) \in L^p(\mathbb{T})$。□

推论 2.2 的证明。

(1) 设 $p \in (1,\infty)$。由于 rf_r是 $f_\theta = P[F] \in h^p(\mathbb{D})$ 的调和共轭函数，根据里斯定理，我们可得 $rf_r \in h^p(\mathbb{D})$。

(2) 在 $p = 1$ 或 $p = \infty$的情况下。利用恒等式

$$irf_r(z) = 2izf_z(z) - P[\dot{F}](z),$$

我们推得，$rf_r \in h^p$当且仅当 $f_z \in H^p$，因为 $P[F] \in h^p(\mathbb{D})$。结论由定理 2.1 得出。

例 3.2。我们给出一个调和映射 $f = P[F]$ 的例子，其中 F是一个绝对连续函数，且满足 $F \in L^\infty(\mathbb{T})$，但 f_z 和 $f_{\overline{z}}$ 均不属于 $L^\infty(\mathbb{D})$。

令 $F(t) := |t|$ 在 $[-\pi, \pi]$上。 F是定义在 $\mathbb{T}$ 上的绝对连续函数，并且在$(-\pi, 0)$上 $F = -1$，在 $(0, \pi)$上 $F = 1$。根据命题 3.1， f_z具有如下积分表示

$$izf_z(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt = \sum_{n\geq 0} \widehat{\dot{F}}(n) z^n,$$

其中 $\widehat{\dot{F}}(n)$表示 F 的 n阶傅里叶系数。初等计算可得，对于 $z \in \mathbb{D}$,

$$izf_z(z) = -\frac{2i}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{2i}{\pi}\operatorname{arctanh}(z) = -\frac{2i}{\pi}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

因此，当 $r \to 1$时， $|f_z(r)|$ 趋于 ∞。此外，可以计算出$\dot{F}$的希尔伯特变换。事实上，izf_z的边界函数由 $-\frac{2i}{\pi}\log\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) = -\frac{2i}{\pi}\log(i\cot\frac{\theta}{2}) = \dot{F} + iH(\dot{F})$给出，并且当 $f_z \in H^2$时，$izf_z = P[\dot{F} + iH(\dot{F})]$,。这表明

$$H(\dot{F}) = \frac{2}{\pi}\ln|\tan\frac{\theta}{2}| \notin L^\infty(\mathbb{T}).$$

□

最后，我们仅使用命题 3.1，并且不采用如 [15, 1]中那样转为极坐标的方法，给出定理 B 的一个初等证明。

令 $p \in [1, \infty)$ 和 $f = P[F]$，其中 $F \in L^p(\mathbb{T})$，我们将证明 f_z属于 $L^p(\mathbb{D})$。根据命题 3.1，f_z 有如下积分表示

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(w)}{w - z}|dw|.$$

根据詹森不等式，我们有

$$|f_z(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|\dot{F}(e^{it})|^p}{|1 - ze^{-it}|} dt \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{dt}{|1 - ze^{-it}|}\right)^{p-1}.$$

接下来，根据富比尼定理，我们得到

$$\int_0^{2\pi} |f_z(re^{i\theta})|^p d\theta \leq |\dot{F}|_p^p \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{dt}{|1 - ze^{-it}|}\right)^p. \tag{3.3}$$

当 r 趋于 1 时，我们有（参见 Rudin [14, 命题 1.4.10]）

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{dt}{|1 - ze^{-it}|} \simeq \ln\frac{1}{1 - r^2}, \quad r = |z|.$$

由于 $\left(\ln\frac{1}{1-r^2}\right)^p$ 在 1 附近可积，我们推得 $f_z \in L^p(\mathbb{D})$。我们指出，恒等式 (3.3) 不足以证明 f_z 属于哈代空间 $H^p(\mathbb{D})$，而要得出我们的结论，M. Riesz 定理必不可少。

此外，利用命题 3.1，我们给出了 $|f_z|$ 和 $|f_{\overline{z}}|$ 关于 $\|F\|_p$ 的˙阶逐点估计。

˙命题 3.3. 设 $f = P[F]$ 和 $F \in L^p(\mathbb{T})$，其中 $p \in (1, \infty)$，则存在 $C_p > 0$使得

$$\max(|f_z(z)|, |f_{\overline{z}}(z)|) \leq \frac{C_p \|\dot{F}\|_p}{(1-|z|^2)^{1/p}}.$$

Thus

$$|D_f(z)| \leq \frac{2C_p \|\dot{F}\|_p}{(1-|z|^2)^{1/p}},$$

with

$$C_p = \left(\frac{\Gamma(q-1)}{\Gamma^2(q/2)}\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 q 是 p的共轭指数。

证明. 根据命题 3.1， f_z 有如下积分表示

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\dot{F}(w)}{w-z} |dw|.$$

因此，由 Hölder 不等式可得

$$|f_z(z)| \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dt}{|1-ze^{-it}|^q}\right)^{\frac{1}{q}} ||\dot{F}||_p.$$

记

$$I_a(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-ze^{-it}|^{a+1}}.$$

在 [6, 命题 1.1], 中，我们证明了如果 $a > 0$，那么

$$I_a(z) \leq \frac{\Gamma(a)}{\Gamma^2(a/2+1/2)} \frac{1}{(1-|z|^2)^a}.$$

Thus

$$|f_z(z)| \leq (I_{q-1}(z))^{1/q} \|\dot{F}\|_p \leq \frac{C_p \|\dot{F}\|_p}{(1-|z|^2)^{1/p}}.$$

□

由此，我们得到以下关于单位圆盘 $\mathbb{D}$上调和函数的利普希茨连续性的结论。在 [11], 中，作者给出了一个判定：圆周上利普希茨函数的泊松变换何时在圆盘上是利普希茨的。

命题 3.4. 设 $f = P[F]$ 和 $\dot{F} \in L^p(\mathbb{T})$ 满足 $p \in (1, \infty)$。则 f在 $\mathbb{D}$上是 $\frac{1}{q}$-H ¨older 连续的，其中 q 是 p的共轭指数。

证明直接由以下命题得出，该命题本质上归功于 Gehring 和 Martio。

命题 3.5. [5] 设 $f \in C^1(\mathbb{D})$ 满足

$$|Df(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|^2)^{1-\alpha}}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

对 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $C > 0$成立。因此， f 在 $\mathbb{D}$上是 α-H ¨older连续的。

References

1. S.L. Chen、S. Ponnusamy 和 X.T. Wang：《关于“调和映射和调和拟正则映射偏导数的范数估计”的若干评述》。《几何分析杂志》31，11051–11060（2021年） 2. P. Duren，《 H^p 空间理论》，第2版，Dover出版社，米尼奥拉，纽约州，2000年。 3. P. Duren，《平面调和映射》，剑桥大学出版社，2004年。 4. J. Garnett，《有界解析函数》，Academic Press出版社，纽约，1981年 5. Gehring FW、Martio O.，《Lipschitz类与拟共形映射》。《芬兰科学院学报：A辑数学》10，203–219（1985年） 6. Khalfallah, A.、Mateljevi´c, M. 和 Mhamdi, M.，《具有一般泊松表示的映射的一些性质》。《地中海数学杂志》18，193（2021年） 7. P. Koosis，《 H^p 空间导论》，第2版，剑桥数学丛书第115卷，剑桥大学出版社，剑桥，英国，1998年 8. H. Hedenmalm、B. Korenblum 和 K. Zhu，《Bergman空间理论》，Springer出版社，纽约，2000年。 9. B. Hollenbeck 和 I.E. Verbitsky，《Riesz投影的最佳常数》，《泛函分析杂志》175（2），370-392。（2000年） 10. J. Mashreghi，《Hardy空间中的表示定理》，伦敦数学会学生教材（74），剑桥大学出版社，2009年 11. M. Mateljevic、M. Arsenovic 和 V. Manojlovic，《空间中的Lipschitz型空间与调和映射》，《芬兰科学院学报》第35卷第2期，2010年，379-387。 12. M. Riesz，《关于共轭函数》，《数学杂志》27，218-244（1927年） 13. W. Rudin：《实分析与复分析》，麦格劳-希尔图书公司，1966年。 14. W. Rudin：，《W. 单位球中的 $\mathbb{C}^n$函数理论》，Springer出版社，1980年 15. J. F. Zhu，《调和映射和调和拟正则映射偏导数的范数估计》，《几何分析杂志》31，5505–5525（2021年）

Department of Mathematics, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran31261, Saudi Arabia电子邮箱：khelifa@kfupm.edu.sa

M. Mateljević, Faculty of mathematics, University of Belgrade, Studentski Trg 16,Belgrade, Republic of Serbia电子邮箱：miodrag@matf.bg.ac.rs