arXiv:2302.09695v1 [math.GR] 19 Feb 2023

由 Conway and Sloane 构造的复反射群34的基本不变量

Manabu Oura* Jiro Sekiguchi†

摘要

本文研究了 Conway and Sloane 构造的复反射群34的基本不变量，该群在 Shephard-Todd 的列表中编号为34 [10]。

关键词：复反射群，不变量理论。MSC2020：主要分类 20F55；次要分类 13A50。

1 引言

本文研究 Shephard 和 Todd 列表中的第 34 号复反射群 [10]（本文将该群记作 ST34），其阶为 $6^5 \cdot 7!$，不变量的次数为 6、12、18、24、30、42。若 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_6)$ 是 ST34 的 6 维表示空间的线性坐标，则基本不变量是 x 的多项式。Conway and Sloane [3] 构造了这类基本不变量，记为 $\mu_j (j = 6, 12, 18, 24, 30, 42)$。由于表达式冗长，很难将它们写成 x 的多项式。本文的主要目的是以较为简洁的形式写出这些多项式。下面简要说明我们实现这一目标的思路。设 $G(3, 3, 6)$ 是秩为 6 的非本原复反射群。由于 $G(3, 3, 6)$ 是 ST34 的子群，$\mu_j (j = 6, 12, 18, 24, 30, 42)$ 中的每一个都可写成 $G(3, 3, 6)$ 的基本不变量的多项式，分别记作p_3、p_6、p_9、p_{12}、p_{15}、s_6。将 p_3、p_6、p_9、p_{12}、p_{15}、s_6 写成 x 的多项式很容易。沿着这一思路，我们成功地将 $\mu_j (j = 6, 12, 18, 24, 30, 42)$ 写成了p_3、p_6、p_9、p_{12}、p_{15}、s_6 的多项式，且形式较为简洁。根据定义可知，每个μ_j 都在 ST34 的作用下保持不变；不过，我们将借助 S_6不变多项式另行证明其不变性（见定理1）。

ST34 的判别式可表示为 μ_j（$j = 6$，12，18，24，30，42）的多项式。已知（参见 [1]），复反射群 G 的判别式可表示为 G的斋藤矩阵的行列式。在 ST34 情形中，Terao 和 Enta [11] 提出了一种算法，用于计算基本不变量 μ_j（$j = 6$，12，18，24，30，42）的斋藤矩阵；沿着这一思路，Bessis 和 Michel 实际上显式地计算出了该矩阵（未发表）。另一方面，Kato、Mano 和 Sekiguchi（[4], [5]）提出了平坦结构这一概念

*日本金泽大学科学与工程研究所。电子邮箱：oura@se.kanazawa-u.ac.jp

†日本东京农工大学荣休教授。电子邮箱：jinomino@yahoo.co.jp

它是 Frobenius 流形结构的一种推广。将其应用于复反射群 G，当 G 满足关于不变量的某些条件时，可以构造 G 平坦坐标的斋藤矩阵。在 ST34 情形中， [4] 构造了一个对应于 6 变量势向量场的斋藤矩阵，其权重与 ST34 的基本不变量次数相同；若将这些变量视为一组适当的基本不变量，则预期该斋藤矩阵的行列式就是 ST34 的判别式。定理 2 指出这一点确实成立。定理 2 本身与 [8]中的结果相同，但其证明不同于 [8]中给出的证明（见正文中的注释 2）。

本文余下部分将讨论两个与ST34群相关的主题。其一是Coxeter-Todd格的全部极小向量与ST34的伪反射之间的对应关系。我们将描述二者之间一种自然的6对1对应关系。其二是将基本不变量 μ_j($j = 6$, 12, 18, 24, 30, 42)限制到ST33群的表示空间上；ST33群是 [10]中的第33号复反射群。ST33的基本不变量最初由H. Burkhardt构造（参见 [6]）。

本文结构如下。第2节介绍Conway-Todd格及其极小向量，并引入Conway and Sloane构造的ST34基本不变量 μ_j ($j = 6$, 12, 18, 24, 30, 42)。第3节首先引入一些多项式，它们写成复反射群G(3, 3, 6)的基本不变量 p_3, p_6, p_9, p_{12}, p_{15}, s_6 的多项式，并记为 m_j($j = 6$, 18, 24, 30, 42)。接着，我们将在定理1中证明 m_j 与 μ_j 相差一个常数因子。第4节介绍Terao、Enta、Bessis和Michel关于ST34不变量及其判别式的两项结果。第5节根据ST34的平坦坐标描述ST34的判别式（参见 [4], [5], [8]）。我们保留这两节内容，供对ST34判别式描述感兴趣的读者参考。第6节讨论ST34的两个主题。其一是Conway-Sloane格的全部极小向量与由ST34伪反射固定的超平面之间的对应关系。其二是ST33群的基本不变量与Conway and Sloane构造的ST34基本不变量之间的关系。第7节将提及本文结果在 E_7-奇点变形中的一项应用。此主题将另文讨论。

关于 ST34 群基本不变量的历史， [3], §10 中有所介绍。关于 ST34 的判别式，H. Terao 和 Y. Enta [11]、P. Orlik 和 H. Terao [7] 均有相关研究。此外，受 [11], D. Bessis 和 J. Michel 的思路启发，Conway and Sloane 计算了这些不变量的斋藤矩阵（未发表）。最近，Kato、Mano 和 Sekiguchi [4], [5] 提出了 Frobenius 流形结构的一种推广，并定义了良生成复反射群的平坦坐标等概念。对于 ST34 群，第二作者（J.S.）构造了平坦坐标对应的斋藤矩阵。由此，建立了 ST34 群判别式关于平坦坐标的行列式表达式（参见 [8]）。

最后提及，本文使用 Mathematica、Maple 和 Magma 等软件 [2] 来获得研究结果。

致谢。第二位作者获得 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 17K05269。

2 Conway-Sloane 的基本不变量

根据 Shephard-Todd 对复反射群的分类 [10], , 已知复反射群分为三个无限系列，以及编号为 1、2、.....、37 的三十四个散在群。本文将重点关注第 34 号群，记作 ST34。ST34 的基本不变量在[3] 的定理 10 中构造，并记为 μ_j ($j = 6, 12, 18, 24, 30, 42$)。下面简要介绍其中一种构造方法。设 $\Lambda^{(3)}$ 为由 3-基给出的 Coxeter-Todd格（见 [3]）。那么它的自同构群恰好就是 ST34。本文中，我们不加说明地使用$\omega = e^{2\pi i/3}$ 和$\theta = \omega - \overline{\omega} = \sqrt{-3}$。 $\Lambda^{(3)}$的极小向量由以下向量组成

$$\pm(\omega^a\theta, -\omega^b\theta, 0, 0, 0, 0),$$
$$(\omega^a, \omega^b, \ldots, \omega^f),\ a + b + \cdots + f \equiv 0 \pmod 3$$

其中第一类考虑了所有可能的坐标变换。第一类有 $2\cdot 3^2\cdot\binom{6}{2}$ =270 个极小向量，而第二类有 $2 \cdot 3^5 = 486$ 个极小向量。总共有 756 个 $\Lambda^{(3)}$ 的极小向量。我们设

$$\mu_k = \sum (v_1x_1 + \cdots + v_6x_6)^k,\ k = 0, 1, 2\ldots,$$

其中 $v = (v_1, \ldots, v_6)$ 遍历 $\Lambda^{(3)}$ 的 756 个极小向量。 [3] 中的定理10指出，ST34 的不变量环由以下元素生成:

$$\mu_6, \mu_{12}, \mu_{18}, \mu_{24}, \mu_{30}, \mu_{42}.$$

我们汇总 ST34 的基本性质。ST34 中有 756 个伪反射。ST34 的伪反射所固定的超平面为

$$\begin{aligned}
45 &\qquad x_i - \omega^a x_j = 0,\\
30 &\qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \omega x_5 + \omega^2 x_6 = 0,\\
20 &\qquad x_1 + x_2 + x_3 + \omega(x_4 + x_5 + x_6) = 0,\\
30 &\qquad x_1 + x_2 + \omega(x_3 + x_4) + \omega^2(x_5 + x_6) = 0,\\
1 &\qquad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0
\end{aligned}$$

其中左侧的数字表示每种类型的基数。ST34 可由 [10]第298页给出的 P_1、P_2、P_3、Q_1、R_1、R_2 生成。生成元所固定的超平面为

$$\begin{aligned}
P_1 &: x_2 - x_3 = 0,\\
P_2 &: x_3 - x_4 = 0,\\
P_3 &: x_4 - x_5 = 0,\\
Q_1 &: x_1 - x_2 = 0,\\
R_1 &: x_1 - \omega x_2 = 0,\\
R_2 &: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.
\end{aligned}$$

ST34 的中心 Z_{34} 的阶为 6，由 $-\omega I_6$ 生成，其中 I_6 是 6 阶单位矩阵。

3 从 G(3,3,6) 到 ST34

由于群 G(3, 3, 6) 是 ST34 的子群，且这两个群的秩相同，因此 ST34 的每个不变量都是 G(3, 3, 6) 的基本不变量的多项式。

已知， G(3, 3, 6) 的基本不变量可取为 $p_{3j}(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ 和由下式定义的 s_6

$$p_{3j} = x_1^{3j} + x_2^{3j} + x_3^{3j} + x_4^{3j} + x_5^{3j} + x_6^{3j}\ (j = 1, 2, 3, 4, 5),\ s_6 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6.$$

设 $m_j(j = 1, 2, 3, 4, 5, 7)$ 为 $p_j(j = 3, 6, 9, 12, 15)$ 的多项式，并由以下恒等式定义 s_6。如下文将要证明的，这些 m_j 确实是 ST34 的不变量。

$$\begin{aligned}
m_1 &= -5p_3^2 + 6p_6 - 180s_6, m_2 = \tfrac{1}{17}(-10125p_{12} + 1925p_3^4 - 10395p_3^2p_6 + 6237p_6^2 + 12375p_3p_9 + 51975p_3^2s_6 - 40095p_6s_6 + 935550s_6^2)\\
m_3 &= \tfrac{1}{3644}(-1088916048p_{15}p_3 + 1401597270p_{12}p_3^2 - 52286707p_3^6 - 3171150p_{12}p_6 + 498415005p_3^4p_6\\
&\quad -723353895p_3^2p_6^2 + 9550629p_6^3 - 961539480p_3^3p_9 + 936512280p_3p_6p_9 - 16804260p_9^2 + 2817424620p_{12}s_6\\
&\quad -804053250p_3^4s_6 + 3721617900p_3^2p_6s_6 - 1435481190p_6^2s_6 - 4300536240p_3p_9s_6 - 13894040160p_3^2s_6^2 + 8931882960p_6s_6^2 - 99578658960s_6^3),\\
m_4 &= \tfrac{1}{984160}(-616868762940p_{12}^2 + 13316119811280p_{15}p_3^3 - 16940634571080p_{12}p_3^4 + 594592089355p_3^8\\
&\quad -21567358775952p_{15}p_3p_6 + 28072219631940p_{12}p_3^2p_6 - 6811339217958p_3^6p_6 - 368171695980p_{12}p_6^2\\
&\quad +18219805403580p_3^4p_6^2 - 14058186924870p_3^2p_6^3 + 98666056665p_6^4 + 9579454289856p_{15}p_9\\
&\quad -13482219282840p_{12}p_3p_9 + 11937182241204p_3^5p_9 - 34871337186840p_3^3p_6p_9 + 24742879985340p_3p_6^2p_9\\
&\quad +9126295239600p_3^2p_9^2 - 8204834872080p_6p_9^2 + 417113860322016p_{15}p_3s_6 - 559068289484760p_{12}p_3^2s_6\\
&\quad +24970204832364p_3^6s_6 + 17333883551160p_{12}p_6s_6 - 219949713575460p_3^4p_6s_6 + 302052795820380p_3^2p_6^2s_6\\
&\quad -8679490869060p_6^3s_6 + 401008538842560p_3^3p_9s_6 - 376118508300480p_3p_6p_9s_6 + 1336769866080p_9^2s_6\\
&\quad -732306533056560p_{12}s_6^2 + 311680371562560p_3^4s_6^2 - 1202195718884160p_3^2p_6s_6^2 + 386420052498480p_6^2s_6^2\\
&\quad +1238625892183680p_3p_9s_6^2 + 3635549644541760p_3^2s_6^3 - 1960702790302080p_6s_6^3 + 14488157891797920s_6^4)
\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}
m_5 &= \tfrac{1}{106288160}(-8558297914454928 00p_{12}{}^2p_3{}^2 + 2089201018632300p_{12}{}^2p_6 + 1165675074483701520p_{12}p_{15}p_3\\
&\quad +13819214550649698 0p_{12}p_3{}^6 - 877484405515505400p_{12}p_3{}^4p_6 + 13799873187830430 00p_{12}p_3{}^3p_9\\
&\quad +90365670105246900 0p_{12}p_3{}^2p_6{}^2 - 1000122875204029200p_{12}p_3p_6p_9 - 906698664553500p_{12}p_6{}^3\\
&\quad +580661494716600p_{12}p_9{}^2 - 38675938615750828 8p_{15}{}^2 - 10316435735879978 4p_{15}p_3{}^5\\
&\quad +631029397643881200p_{15}p_3{}^3p_6 - 965383545286463760p_{15}p_3{}^2p_9 - 618935794330532 40p_{15}p_3p_6{}^2\\
&\quad +662798218317617520p_{15}p_6p_9 - 372103223524142 8p_3{}^{10} + 569297355547385 25p_3{}^8p_6\\
&\quad -100670803599215340p_3{}^7p_9 - 269791048596035610p_3{}^6p_6{}^2 + 754513827309400680p_3{}^5p_6p_9\\
&\quad +455456084098977900p_3{}^4p_6{}^3 - 540975355278457500p_3{}^4p_9{}^2 - 125858200446614970 0p_3{}^3p_6{}^2p_9\\
&\quad -237876161937857550p_3{}^2p_6{}^4 + 824140299141199800p_3{}^2p_6p_9{}^2 + 530150266143331200p_3p_6{}^3p_9\\
&\quad -157057655983200p_3p_9{}^3 + 168811773953535p_6{}^5 - 285007424484525300p_6{}^2p_9{}^2)\\
&\quad -\tfrac{2349}{5314408}(3336381283590p_{12}{}^2 - 90991170059715p_{12}p_3{}^4 + 132473392247970p_{12}p_3{}^2p_6(\\
&\quad -60473056848750p_{12}p_3p_9 - 3642116633685p_{12}p_6{}^2 + 69747109280496p_{15}p_3{}^3\\
&\quad -96145773383952p_{15}p_3p_6 + 39062903267592p_{15}p_9 + 3483778065289p_3{}^8 - 38013477459228p_3{}^6p_6\\
&\quad +65401030889973p_3{}^5p_9 + 94878525690540p_3{}^4p_6{}^2 - 173998725667650p_3{}^3p_6p_9\\
&\quad -66633212619360p_3{}^2p_6{}^3 + 42238214518500p_3{}^2p_9{}^2 + 110872962731835p_3p_6{}^2p_9 + 987000196815p_6{}^4 - 32583765485700p_6p_9{}^2)s_6\\
&\quad -\tfrac{221240565}{5314408}(-14731974630p_{12}p_3{}^2 + 693432090p_{12}p_6 + 10397417904p_{15}p_3 + 842268971p_3{}^6 + 86329800p_9{}^2)s_6^2\\
&\quad -6659025525p_3{}^4p_6 + 11239209720p_3{}^3p_9 + 8453844855p_3{}^2p_6{}^2 - 9972788040p_3p_6p_9 - 348684345p_6{}^3\\
&\quad \tfrac{98415}{1328602}(7805322022518p_{12} - 4961331496841p_3{}^4 + 16060185954756p_3{}^2p_6 - 14673183959034p_3p_9() - \tfrac{231176835}{664301}(9206527958p_3{}^2 - 4219165557p_6\ s_6^4(),\\
&\quad -4333560899931p_6{}^2\ s_6^3 \qquad\qquad -\tfrac{5437195842606312330}{664301}s_6^5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m_7 \;=\;& \tfrac{1}{619872782080}\,(-6815570260684255778574 5p_3{}^{14}+1432379563699839285857067p_6p_3{}^{12}\\
&-2557436825642562030969900p_9p_3{}^{11}-10698541080341814802394019p_6{}^2p_3{}^{10}\\
&+3582500028944048652957174p_{12}p_3{}^{10}-2730902888436717092575680p_{15}p_3{}^9\\
&+3270877640292957790594464 0p_6p_9p_3{}^9+3492428338712520551172118 5p_6{}^3p_3{}^8\\
&-2565441812131570591625070 0p_9{}^2p_3{}^8-4168022028067743450601185 0p_{12}p_6p_3{}^8\\
&+3136946588084589261334617 6p_{15}p_6p_3{}^7-1237404849994202353849652 40p_6{}^2p_9p_3{}^7\\
&+6976931832965472849982224 0p_{12}p_9p_3{}^7-5276214603172062123339055 5p_6{}^4p_3{}^6\\
&-4725774876639567859111710 0p_{12}{}^2p_3{}^6+1267806332971741665489345 00p_{12}p_6{}^2p_3{}^6\\
&+1301623530839386196326416 00p_6p_9{}^2p_3{}^6-5230745500839402624775632 0p_{15}p_9p_3{}^6\\
&-3475878993607928684234976 0p_9{}^3p_3{}^5-9262702858135296452114131 2p_{15}p_6{}^2p_3{}^5\\
&+7071481314402670368006451 2p_{12}p_{15}p_3{}^5+1863540042422406303348590 40p_6{}^3p_9p_3{}^5\\
&-2681915681918525158600099 20p_{12}p_6p_9p_3{}^5+3329959023527325532859722 5p_6{}^5p_3{}^4\\
&-1277706355697677585347675 00p_{12}p_6{}^3p_3{}^4-2642181512572974563876160 0p_{15}{}^2p_3{}^4\\
&-2018984748960883676496174 00p_6{}^2p_9{}^2p_3{}^4+1132984735160806798023600 00p_{12}p_9{}^2p_3{}^4\\
&+1223488931270561552719521 00p_{12}{}^2p_6p_3{}^4+1905433300151784420117609 60p_{15}p_6p_9p_3{}^4\\
&+8781208674056549580112704 0p_{15}p_6{}^3p_3{}^3+6266561405016979998247680 0p_6p_9{}^3p_3{}^3\\
&-7402341630285548325509760 0p_{15}p_9{}^2p_3{}^3-1679642960413943655109728 00p_{12}p_{15}p_6p_3{}^3\\
&-1063388667785300756238339 00p_6{}^4p_9p_3{}^3-1115543712858793132321764 00p_{12}{}^2p_9p_3{}^3\\
&+2620639735090697448338616 00p_{12}p_6{}^2p_9p_3{}^3-5126918175165039183578025p_6{}^6p_3{}^2\\
&+2793162384921246295494915 0p_{12}p_6{}^4p_3{}^2-2315241872513135879040 0p_9{}^4p_3{}^2\\
&+2969260487003955009598740 0p_{12}{}^3p_3{}^2-5020187770376120786482710 0p_{12}{}^2p_6{}^2p_3{}^2\\
&+1030653716246307531529200 00p_6{}^3p_9{}^2p_3{}^2-1150149697956057916960920 00p_{12}p_6p_9{}^2p_3{}^2\\
&+5697392549671153913813683 2p_{15}{}^2p_6p_3{}^2-1699300720892596259052417 60p_{15}p_6{}^2p_9p_3{}^2\\
&+1355744703857512880323641 60p_{12}p_{15}p_9p_3{}^2-1484548161308168365789632 0p_{15}p_6{}^4p_3\\
&-2794550650939338741666720 0p_6{}^2p_9{}^3p_3+3458638453208730704640 0p_{12}p_9{}^3p_3\\
&+5182428911365705714122240 0p_{12}p_{15}p_6{}^2p_3+6587725957335445956526080 0p_{15}p_6p_9{}^2p_3\\
&-4423137229872149454691200 0p_{12}{}^2p_{15}p_3+1259486681800622123948400 0p_6{}^5p_9p_3\\
&-4407550745804301353514480 0p_{12}p_6{}^3p_9p_3-3883615957454474043831168 0p_{15}{}^2p_9p_3\\
&+3774214844026662581330400 0p_{12}{}^2p_6p_9p_3+8412055796321522927556p_6{}^7-6381502411588805286450p_{12}p_6{}^5\\
&+2083720093943276880000 0p_6p_9{}^4+1259188306008816296610 0p_{12}{}^2p_6{}^3-1853693471545927772544 0p_{15}p_9{}^3\\
&+1639136725458585925925606 4p_{12}p_{15}{}^2-1065916598825933940976934 4p_{15}{}^2p_6{}^2\\
&-7683466994926210007484300p_6{}^4p_9{}^2-8464031877608794242000p_{12}{}^2p_9{}^2\\
&+1197608222517467429763360 0p_{12}p_6{}^2p_9{}^2+4971887755839338531400p_{12}{}^3p_6\\
&+1809498874561563524232096 0p_{15}p_6{}^3p_9-2802951000987273455806368 0p_{12}p_{15}p_6p_9)\\
&+\tfrac{2583}{309936391040}\,(-8266503279350430558 61p_3{}^{12}+1442592588542291842228 2p_6p_3{}^{10}\\
&-2545200127200571929954 0p_9p_3{}^9-8335188844040225530300 5p_6{}^2p_3{}^8+3519734305214542245921 0p_{12}p_3{}^8\\
&-2641703808698760820276 8p_{15}p_3{}^7+2429112152627970357326 40p_6p_9p_3{}^7+1865068354198754141589 00p_6{}^3p_3{}^6\\
&-1837414564399689655053 60p_9{}^2p_3{}^6-2984299894075648256233 20p_{12}p_6p_3{}^6\\
&+2204205736359654793899 36p_{15}p_6p_3{}^5-5630000450541490408964 40p_6{}^2p_9p_3{}^5\\
&+4931301020356899155844 00p_{12}p_9p_3{}^5-1611102220551878160912 75p_6{}^4p_3{}^4\\
&-3287497457729384247393 00p_{12}{}^2p_3{}^4+4850973529851701112273 00p_{12}p_6{}^2p_3{}^4\\
&+4290947799585436247580 00p_6p_9{}^2p_3{}^4-3618952537493232182433 60p_{15}p_9p_3{}^4\\
&-2058287862089593900800 0p_9{}^3p_3{}^3-3473765514092401313047 20p_{15}p_6{}^2p_3{}^3\\
&+4793495626824661819454 40p_{12}p_{15}p_3{}^3+4286185737320900417040 00p_6{}^3p_9p_3{}^3\\
&-6738920395803826475616 00p_{12}p_6p_9p_3{}^3+3629777941326832463025 0p_6{}^5p_3{}^2\\
&-1431665725239762232698 00p_{12}p_6{}^3p_3{}^2-1735685706663578732232 96p_{15}{}^2p_3{}^2\\
&-2933440691458129311924 00p_6{}^2p_9{}^2p_3{}^2+4306679040532559914800 0p_{12}p_9{}^2p_3{}^2\\
&+1411430573265072153603 00p_{12}{}^2p_6p_3{}^2+4696768195830530261193 60p_{15}p_6p_9p_3{}^2\\
&+9070384269865556883960 0p_{15}p_6{}^3p_3+1916376506670062649600 0p_6p_9{}^3p_3\\
&-2296289821676538011904 0p_{15}p_9{}^2p_3-1784846209411002281284 80p_{12}p_{15}p_6p_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-810292697107001313777 00{p_6}^4{p_9}{p_3}-19161435544300302037200{p_{12}}^2{p_9}{p_3}\\
&+16920269086916363100840 0{p_{12}}{p_6}^2{p_9}{p_3}-4445415058421567587 5{p_6}^6+2367554395045022302 50{p_{12}}{p_6}^4\\
&-9553475106512640 0{p_9}^4+2365498512383748570 00{p_{12}}^3-4139692103496753567 00{p_{12}}^2{p_6}^2\\
&+4386040199445219504120 0{p_6}^3{p_9}^2-1186977993500726650800 0{p_{12}}{p_6}{p_9}^2+5358995411230732975603 2{p_{15}}^2{p_6}\\
&-9727858648475385318576 0{p_{15}}{p_6}^2{p_9}+1421941087109823484320 0{p_{12}}{p_{15}}{p_9})s_6\\
&-\tfrac{637362999}{15496819552}\ 485745267018586 6{p_3}^{10}-6528237829576110 9{p_6}{p_3}^8+1089073441946880 00{p_9}{p_3}^7\ (\\
&+2602959825548428 20{p_6}^2{p_3}^6-1444435513204299 48{p_{12}}{p_3}^6+1052684876017065 60{p_{15}}{p_3}^5\\
&-6441812697435733 44{p_6}{p_9}{p_3}^5-3676039060967250 30{p_6}^3{p_3}^4+3844989674081222 40{p_9}^2{p_3}^4\\
&+6785550208390172 40{p_{12}}{p_6}{p_3}^4-4639557878496927 36{p_{15}}{p_6}{p_3}^3+8954308332039297 60{p_6}^2{p_9}{p_3}^3\\
&-8800179111853646 40{p_{12}}{p_9}{p_3}^3+1530221605086676 50{p_6}^4{p_3}^2+4720314541800391 20{p_{12}}^2{p_3}^2\\
&-5418599217118889 40{p_{12}}{p_6}^2{p_3}^2-5055154656198163 20{p_6}{p_9}^2{p_3}^2+5688584139637209 60{p_{15}}{p_9}{p_3}^2\\
&+1078387051311360{p_9}^3{p_3}+3337370059756348 80{p_{15}}{p_6}^2{p_3}-5736064507733070 72{p_{12}}{p_{15}}{p_3}\\
&-2988090602684064 00{p_6}^3{p_9}{p_3}+5191375189081406 40{p_{12}}{p_6}{p_9}{p_3}-7404813961907 85{p_6}^5\\
&+2897609287598280{p_{12}}{p_6}^3+1631318448411440 64{p_{15}}^2+1331169243349176 00{p_6}^2{p_9}^2\\
&-7696504764216 00{p_{12}}{p_9}^2-2833333167373020{p_{12}}^2{p_6}-2952062396166216 96{p_{15}}{p_6}{p_9})s_6^2\\
&-\tfrac{137781}{7748409776}\ 212849412401280527467{p_3}^8-2056737692333330079912{p_6}{p_3}^6+3301675794233514997830{p_9}{p_3}^5\ (\\
&+4487246757920672916210{p_6}^2{p_3}^4-4310703736169475684240{p_{12}}{p_3}^4+3103075441442929625568{p_{15}}{p_3}^3\\
&-7542458411263968569940{p_6}{p_9}{p_3}^3-2624550943988148988320{p_6}^3{p_3}^2+1648635226201837343160{p_9}^2{p_3}^2\\
&+5112301708617615116280{p_{12}}{p_6}{p_3}^2-3259289326066664689728{p_{15}}{p_6}{p_3}+3870577632979310328810{p_6}^2{p_9}{p_3}\\
&-2142794233908947745900{p_{12}}{p_9}{p_3}+6689366340193655437 5{p_6}^4+1939913067124272205 80{p_{12}}^2\\
&-2306541271370642816 40{p_{12}}{p_6}^2-9036630401156307637 20{p_6}{p_9}^2+1073610002137218186960{p_{15}}{p_9})s_6^3\\
&-\tfrac{457570701}{3874204888}\ 393541072937010113{p_3}^6-2483580961309967805{p_6}{p_3}^4+3573657602659051360{p_9}{p_3}^3\ (\\
&+2671680990475403505{p_6}^2{p_3}^2-4136783742478404450{p_{12}}{p_3}^2+263294169009206 3712{p_{15}}{p_3}\\
&-2833712226159225840{p_6}{p_9}{p_3}-136991407212027225{p_6}^3+52735937047941600{p_9}^2+2668606230342044 70{p_{12}}{p_6})s\\
&+\tfrac{125452159093170}{484275611}\ -1416246125627{p_3}^4+3374374908123{p_6}{p_3}^2-2450724434568{p_9}{p_3}\ )-\tfrac{9039811410}{484275611}\ 1058680473319710 14{p_3}^2-3663082538504621 1{p_6}\ s_6^6\ )^6\\
&-673355559033{p_6}^2+1069099330203{p_{12}}\ s_6^5 \qquad -\tfrac{12664094659813992533335790610}{484275611}s_6^7.
\end{aligned}
$$

以下定理是本文的主要结果。

定理1 多项式 $m_j\,(j=1,2,3,4,5,7)$ 是 ST34 的不变量。

证明。ST34群可由伪反射 P_1,P_2,P_3,Q_1,R_1,R_2 生成。显然， $p_{3j}(j=1,2,3,4,5)$ 和 s_6 在 P_1,P_2,P_3,Q_1,R_1 的作用下保持不变，因此 $m_j\,(j=1,2,3,4,5,7)$ 也是如此。

因此，只需证明每个 m_j 都是R_2作用下的不变量。为此，我们引入多项式

$$q_j=\sum_{k=1}^{6}x_k^j\quad(j=1,2,3,4,5).$$

那么，$p_{3j}\,(j=1,2,3,4,5)$ 是关于 $q_j\,(j=1,2,3,4,5)$ 和 s_6 的多项式。事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
p_3 &= q_3, p_6 = \tfrac{1}{120}(q_1^6 - 15q_1^4q_2 + 45q_1^2q_2^2 - 15q_2^3 + 40q_1^3q_3 - 120q_1q_2q_3 + 40q_3^2 - 90q_1^2q_4 + 90q_2q_4 + 144q_1q_5 - 720s_6)\\
p_9 &= \tfrac{1}{720}\,q_1^9 - 9q_1^7q_2 - 27q_1^5q_2^2 + 135q_1^3q_2^3 + 33q_1^6q_3 + 45q_1^4q_2q_3 - 135q_1^2q_2^2q_3 - 135q_2^3q_3 + 120q_1^3q_3^2 - 360q_1q_2q_3^2\,(\\
&\quad +80q_3^3 - 54q_1^5q_4 - 270q_1^3q_2q_4 - 270q_1^2q_3q_4 + 270q_2q_3q_4 + 54q_1^4q_5 + 324q_1^2q_2q_5 + 162q_2^2q_5 + 432q_1q_3q_5\\
&\quad +324q_4q_5 - 1080q_1^3s_6 - 3240q_1q_2s_6 - 2160q_3s_6), p_{12} = \tfrac{1}{43200}(\\
&\quad \cancel{\quad} q_1^{12} - 12q_1^{10}q_2 + 90q_1^8q_2^2 - 900q_1^6q_2^3 + 2025q_1^4q_2^4 + 80q_1^9q_3 - 720q_1^7q_2q_3 + 3600q_1^5q_2^2q_3 - 3600q_1^3q_2^3q_3\\
&\quad +1680q_1^6q_3^2 - 3600q_1^4q_2q_3^2 + 3600q_1^2q_2^2q_3^2 - 3600q_2^3q_3^2 + 3200q_1^3q_3^3 - 9600q_1q_2q_3^3 + 1600q_3^4 - 45q_1^8q_4 + 180q_1^6q_2q_4\\
&\quad -6750q_1^4q_2^2q_4 + 8100q_1^2q_2^3q_4 - 2025q_2^4q_4 - 2880q_1^5q_3q_4 + 7200q_1^3q_2q_3q_4 - 21600q_1q_2^2q_3q_4 - 7200q_1^2q_3^2q_4\\
&\quad +7200q_2q_3^2q_4 - 16200q_1^2q_2q_4^2 + 8100q_2^2q_4^2 + 2700q_4^3 + 288q_1^7q_5 - 3456q_1^5q_2q_5 + 12960q_1^3q_2^2q_5 + 11520q_1^4q_3q_5\\
&\quad -17280q_1^2q_2q_3q_5 + 11520q_1q_3^2q_5 - 17280q_1^3q_4q_5 + 25920q_1q_2q_4q_5 + 17280q_3q_4q_5 + 20736q_1^2q_5^2 + 10368q_2q_5^2\\
&\quad -1440q_1^6s_6 - 64800q_1^2q_2^2s_6 - 57600q_1^3q_3s_6 - 57600q_3^2s_6 - 129600q_2q_4s_6 - 207360q_1q_5s_6 + 259200s_6^2), p_{15} = \tfrac{1}{1036800}(\\
&\quad \cancel{\quad} 13q_1^{15} - 330q_1^{13}q_2 + 2565q_1^{11}q_2^2 - 4500q_1^9q_2^3 - 15525q_1^7q_2^4 + 44550q_1^5q_2^5 - 10125q_1^3q_2^6 + 895q_1^{12}q_3\\
&\quad -12090q_1^{10}q_2q_3 + 22275q_1^8q_2^2q_3 + 78300q_1^6q_2^3q_3 - 165375q_1^4q_2^4q_3 - 20250q_1^2q_2^5q_3 + 10125q_2^6q_3 + 16000q_1^9q_3^2\\
&\quad -36000q_1^7q_2q_3^2 - 64800q_1^5q_2^2q_3^2 + 108000q_1^3q_2^3q_3^2 + 108000q_1q_2^4q_3^2 + 24800q_1^6q_3^3 - 84000q_1^4q_2q_3^3 + 108000q_1^2q_2^2q_3^3\\
&\quad -36000q_2^3q_3^3 + 32000q_1^3q_3^4 - 96000q_1q_2q_3^4 + 12800q_3^5 - 1710q_1^{11}q_4 + 19800q_1^9q_2q_4 - 2700q_1^7q_2^2q_4\\
&\quad -178200q_1^5q_2^3q_4 + 101250q_1^3q_2^4q_4 - 58050q_1^8q_3q_4 - 16200q_1^6q_2q_3q_4 + 337500q_1^4q_2^2q_3q_4 + 81000q_1^2q_2^3q_3q_4\\
&\quad -101250q_2^4q_3q_4 - 43200q_1^5q_3^2q_4 + 216000q_1^3q_2q_3^2q_4 - 432000q_1q_2^2q_3^2q_4 - 72000q_1^2q_3^3q_4 + 72000q_2q_3^3q_4\\
&\quad +56700q_1^7q_4^2 + 113400q_1^5q_2q_4^2 - 121500q_1^3q_2^2q_4^2 + 40500q_1^4q_3q_4^2 - 405000q_1^2q_2q_3q_4^2 + 121500q_2^2q_3q_4^2 - 81000q_1^3q_4^3\\
&\quad +81000q_3q_4^3 + 2196q_1^{10}q_5 - 22140q_1^8q_2q_5 - 33480q_1^6q_2^2q_5 + 243000q_1^4q_2^3q_5 + 72900q_1^2q_2^4q_5 - 24300q_2^5q_5\\
&\quad +77760q_1^7q_3q_5 + 60480q_1^5q_2q_3q_5 - 302400q_1^3q_2^2q_3q_5 - 388800q_1q_2^3q_3q_5 + 216000q_1^4q_3^2q_5 - 432000q_1^2q_2q_3^2q_5\\
&\quad -43200q_2^2q_3^2q_5 + 115200q_1q_3^3q_5 - 136080q_1^6q_4q_5 - 550800q_1^4q_2q_4q_5 + 97200q_1^2q_2^2q_4q_5 + 97200q_2^3q_4q_5\\
&\quad -259200q_1^3q_3q_4q_5 + 259200q_1q_2q_3q_4q_5 + 259200q_3^2q_4q_5 - 97200q_1^2q_4^2q_5 + 291600q_2q_4^2q_5 + 82944q_1^5q_5^2\\
&\quad +414720q_1^3q_2q_5^2 + 311040q_1q_2^2q_5^2 + 414720q_1^2q_3q_5^2 + 207360q_2q_3q_5^2 + 311040q_1q_4q_5^2 + 41472q_5^3 - 23400q_1^9s_6\\
&\quad +280800q_1^7q_2s_6 - 226800q_1^5q_2^2s_6 - 1620000q_1^3q_2^3s_6 + 243000q_1q_2^4s_6 - 820800q_1^6q_3s_6 + 216000q_1^4q_2q_3s_6\\
&\quad +3240000q_1^2q_2^2q_3s_6 + 648000q_2^3q_3s_6 - 864000q_1^3q_3^2s_6 + 864000q_1q_2q_3^2s_6 - 576000q_3^3s_6 + 1555200q_1^5q_4s_6\\
&\quad +2592000q_1^3q_2q_4s_6 - 1944000q_1q_2^2q_4s_6 - 2592000q_2q_3q_4s_6 - 972000q_1q_4^2s_6 - 2073600q_1^4q_5s_6\\
&\quad -6220800q_1^2q_2q_5s_6 - 1555200q_2^2q_5s_6 - 4147200q_1q_3q_5s_6 - 1555200q_4q_5s_6 + 10368000q_1^3s_6^2 + 15552000q_1q_2s_6^2 + 5184000q_3s_6^2)。
\end{aligned}
$$

反射 R_2 作用于 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$，其作用方式为

$$R_2 : x_j \mapsto x_j - \frac{1}{3}\sum_{j=k}^{6} x_k \quad (j=1,2,\cdots,6).$$

若 $f=f(x_1,\cdots,x_6)$ 是关于 $(x_1,\cdots,x_6)$ 的多项式，我们将 $f\circ R_2$ 记作 $f(R_2(x_1,\cdots,x_6))$。

于是，通过直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&p_1\circ R_2 = \tfrac{1}{9}(q_1^3-9q_1q_2+9q_3)p_2\circ R_2 = \tfrac{1}{9720}\Big(\\
&-79q_1^6+585q_1^4q_2+3645q_1^2q_2^2-1215q_2^3-3960q_1^3q_3-9720q_1q_2q_3+3240q_3^2+8910q_1^2q_4+7290q_2q_4-7776q_1q_5-58320s_6\Big),p_3\circ R_2 = \tfrac{1}{524880}\Big(\\
&-1384q_1^9+22707q_1^7q_2-85293q_1^5q_2^2-91125q_1^3q_2^3+98415q_1q_2^4-57375q_1^6q_3+441045q_1^4q_2q_3\\
&+338985q_1^2q_2^2q_3-98415q_2^3q_3-456840q_1^3q_3^2-262440q_1q_2q_3^2+58320q_3^3+82134q_1^5q_4-634230q_1^3q_2q_4\\
&-393660q_1q_2^2q_4+1027890q_1^2q_3q_4+196830q_2q_3q_4-393660q_1q_4^2-53946q_1^4q_5+446148q_1^2q_2q_5+118098q_2^2q_5\\
&-524880q_1q_3q_5+236196q_4q_5+612360q_1^3s_6+3936600q_1q_2s_6-1574640q_3s_6\Big),p_4\circ R_2 = \tfrac{1}{283435200}\Big(\\
&-61441q_1^{12}+1761678q_1^{10}q_2-17211690q_1^8q_2^2+57445200q_1^6q_2^3+2460375q_1^4q_2^4-32476950q_1^2q_2^5\\
&-2696580q_1^9q_3+59428080q_1^7q_2q_3-327612600q_1^5q_2^2q_3-23619600q_1^3q_2^3q_3+64953900q_1q_2^4q_3-34739280q_1^6q_3^2\\
&+553748400q_1^4q_2q_3^2+81356400q_1^2q_2^2q_3^2-23619600q_2^3q_3^2-235612800q_1^3q_3^3-62985600q_1q_2q_3^3+10497600q_3^4\\
&+1843155q_1^8q_4-58480380q_1^6q_2q_4+388739250q_1^4q_2^2q_4+53144100q_1^2q_2^3q_4-13286025q_2^4q_4+19595520q_1^5q_3q_4\\
&-1165233600q_1^3q_2q_3q_4-141717600q_1q_2^2q_3q_4+530128800q_1^2q_3^2q_4+47239200q_2q_3^2q_4+43302600q_1^4q_4^2\\
&+543250800q_1^2q_2q_4^2+53144100q_2^2q_4^2-259815600q_1q_3q_4^2+17714700q_4^3+93312q_1^7q_5+23514624q_1^5q_2q_5\\
&-226748160q_1^3q_2^2q_5+29393280q_1^4q_3q_5+57946752 0q_1^2q_2q_3q_5-201553920q_1q_3^2q_5-113374080q_1^3q_4q_5\\
&-453496320q_1q_2q_4q_5+113374080q_3q_4q_5+52907904q_1^2q_5^2+68024448q_2q_5^2+75232800q_1^6s_6\\
&-692841600q_1^4q_2s_6-1464415200q_1^2q_2^2s_6+1700611200q_1^3q_3s_6+2078524800q_1q_2q_3s_6-377913600q_3^2s_6\\
&-2078524800q_1^2q_4s_6-850305600q_2q_4s_6+1133740800q_1q_5s_6+1700611200s_6^2\Big),p_5\circ R_2 = \tfrac{1}{612220032 00}\Big(\\
&190052q_1^{15}+7543305q_1^{13}q_2-314760330q_1^{11}q_2^2+3315388725q_1^9q_2^3-11699575200q_1^7q_2^4\\
&+4687014375q_1^5q_2^5+3587226750q_1^3q_2^6-597871125q_1q_2^7+41009175q_1^{12}q_3+135576990q_1^{10}q_2q_3\\
&-12521395125q_1^8q_2^2q_3+74175385500q_1^6q_2^3q_3-20512146375q_1^4q_2^4q_3-12356003250q_1^2q_2^5q_3+597871125q_2^6q_3\\
&+1263778200q_1^9q_3^2+7463793600q_1^7q_2q_3^2-163560481200q_1^5q_2^2q_3^2+17950896000q_1^3q_2^3q_3^2+10097379000q_1q_2^4q_3^2\\
&+6796029600q_1^6q_3^3+138332124000q_1^4q_2q_3^3+3070548000q_1^2q_2^2q_3^3-2125764000q_2^3q_3^3-36321696000q_1^3q_3^4\\
&-5668704000q_1q_2q_3^4+755827200q_3^5-124608780q_1^{11}q_4+1213748550q_1^9q_2q_4+7755102000q_1^7q_2^2q_4\\
&-79344141300q_1^5q_2^3q_4+12488863500q_1^3q_2^4q_4+8370195750q_1q_2^5q_4-6226279650q_1^8q_3q_4+17065161000q_1^6q_2q_3q_4\\
&+320016055500q_1^4q_2^2q_3q_4-2657205000q_1^2q_2^3q_3q_4-5978711250q_2^4q_3q_4-55642528800q_1^5q_3^2q_4\\
&-327840048000q_1^3q_2q_3^2q_4-10628820000q_1q_2^2q_3^2q_4+81723816000q_1^2q_3^3q_4+4251528000q_2q_3^3q_4\\
&+5558479200q_1^7q_4^2-30711384900q_1^5q_2q_4^2-150397803000q_1^3q_2^2q_4^2-16740391500q_1q_2^3q_4^2+90020200500q_1^4q_3q_4^2\\
&+214170723000q_1^2q_2q_3q_4^2+7174453500q_2^2q_3q_4^2-44641044000q_1q_3^2q_4^2-35783694000q_3^3q_4^3\\
&-33480783000q_1q_2q_4^3+4782969000q_3q_4^3+122974524q_1^{10}q_5-1648516860q_1^8q_2q_5+569232360q_1^6q_2^2q_5\\
&+41133533400q_1^4q_2^3q_5-11319693300q_1^2q_2^4q_5-1434890700q_2^5q_5+5427259200q_1^7q_3q_5-30377954880q_1^5q_2q_3q_5\\
&-148803480000q_1^3q_2^2q_3q_5+12754584000q_1q_2^3q_3q_5+45381124800q_1^4q_3^2q_5+125278358400q_1^2q_2q_3^2q_5\\
&-2550916800q_2^2q_3^2q_5-24942297600q_1q_3^3q_5-8299927440q_1^6q_4q_5+58741945200q_1^4q_2q_4q_5\\
&+130734486000q_1^2q_2^2q_4q_5+5739562800q_2^3q_4q_5-118475913600q_1^3q_3q_4q_5-127545840000q_1q_2q_3q_4q_5\\
&+15305500800q_3^2q_4q_5+56757898800q_1^2q_4^2q_5+17218688400q_2q_4^2q_5+2781444096q_1^5q_5^2-23128312320q_1^3q_2q_5^2\\
&-24488801280q_1q_2^2q_5^2+34012224000q_1^2q_3q_5^2+12244400640q_2q_3q_5^2-24488801280q_1q_4q_5^2+2448880128q_5^3\\
&+1452897000q_1^9s_6-35980524000q_1^7q_2s_6+213119650800q_1^5q_2^2s_6+172186884000q_1^3q_2^3s_6\\
&-52612659000q_1q_2^4s_6+45885009600q_1^6q_3s_6-807317928000q_1^4q_2q_3s_6-522937944000q_1^2q_2^2q_3s_6\\
&+38263752000q_2^3q_3s_6+530968608000q_1^3q_3^2s_6+289103904000q_1q_2q_3^2s_6-34012224000q_3^3s_6\\
&-20596291200q_1^5q_4s_6+926833104000q_1^3q_2q_4s_6+420901272000q_1q_2^2q_4s_6-833299488000q_1^2q_3q_4s_6\\
&-153055008000q_2q_3q_4s_6+210450636000q_1q_4^2s_6-11337408000q_1^4q_5s_6-510183360000q_1^2q_2q_5s_6\\
&-91833004800q_2^2q_5s_6+326517350400q_1q_3q_5s_6-91833004800q_4q_5s_6-578207808000q_1^3s_6^2-1224440064000q_1q_2s_6^2+306110016000q_3s_6^2\Big),
\end{aligned}
$$

$$
s_6\circ R_2 = (-13q_1^6+180q_1^4q_2-405q_1^2q_2^2-450q_1^3q_3+2812q_1q_2q_3+810q_1q_4-972q_1q_5+14580s_6)/14580.
$$

现在我们从 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5、m_7 中取一个，记作 m_j。可以证明，m_j 和 $m_j\circ R_2$ 都可以表示为关于 q_1、q_2、q_3、q_4、q_5 和 s_6 的多项式。比较这两个表达式可得 $m_j\circ R_2=m_j$。定理得证。

注 1 对 m_j 的规范化选择是：将每个 m_j 视为关于 x 的多项式时，其中都含有系数为 1 的项 x_1^{6j}。这意味着，将 m_j 视为关于 p_3、p_6、p_9、p_{12}、p_{15}、s_6 的多项式时，其在 $p_3=p_6=p_9=p_{12}=p_{15}=1$、$s_6=0$ 处的值为 1。

推论 1 μ_6、μ_{12}、$\cdots$ 与 m_1、m_2、$\cdots$ 之间的关系为

$$\begin{aligned}
\mu_6 &= -1944m_1,\\
\mu_{12} &= 66096m_2,\\
\mu_{18} &= -1770984m_3,\\
\mu_{24} &= 47830176m_4,\\
\mu_{30} &= -1291401144m_5,\\
\mu_{42} &= -941431787784m_7.
\end{aligned}$$

证明。多项式 m_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 7$) 的构造思路与 [3] 中给出的 μ_{6j} ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 7$) 相同。实际上，m_j 与 μ_{6j} 仅相差一个常数因子。通过在特殊取值处计算多项式可确定这些常数，结论由此得出。

4 ST34 的不变量与判别式的两个结果

我们给出两个在本文研究中起重要作用的结果。

4.1 Terao 和 Enta 给出的不变量

我们回顾 Terao 和 Enta [11] 中给出的不变量 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ （另见 [7]）。通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
f_1 &= \tfrac{1}{1944}\mu_6,\\
f_2 &= \tfrac{1}{3888}\mu_{12},\\
f_3 &= \tfrac{1}{1944}\mu_{18},\\
f_4 &= \tfrac{1937160963}{1797549546875}m_1^4 - \tfrac{31670896436}{19773045015625}m_1^2m_2 + \tfrac{233872961}{754856437500}m_2^2 + \tfrac{63038467}{258156875724}m_1m_3 - \tfrac{6151}{205320951}m_4,\\
f_5 &= \tfrac{1}{1944}\mu_{30},\\
f_6 &= \tfrac{1}{1944}\mu_{42},
\end{aligned}$$

其中，f_4 是 f_1 的海森矩阵的一个倍数。

4.2 Bessis 和 Michel 的判别式

关于 ST34 的判别式，H. Terao 和 Y. Enta 有相关研究（[11], [7]）。D. Bessis 和 J. Michel [1] 构造了一些复反射群的 Saito 矩阵。他们指出，[1] 未讨论 ST34 情形，因为 ST34 的 Saito 矩阵过长，无法纳入论文。此外，他们基于 [11], 的思路，明确构造了 Conway and Sloane 的不变量的 Saito 矩阵（未发表）。

J. Michel 教授应第二作者（J. S.）的请求，欣然提供了 ST34 关于基本不变量$\{f_1, f_2, \cdots, f_6\}$ 的斋藤矩阵数据。我们将这个矩阵称为 M_{34}，其行列式等于 ST34 的判别式，差一个非零常数因子。M_{34} 的每个矩阵元素都是 x、y、z、t、u、v 的多项式；按此顺序，它们分别与 Terao 和 Enta 的 f_1、.....、f_6 相同。

5 通过势向量场构造斋藤矩阵

反射群的斋藤矩阵取决于基本不变量的选取。构造 ST34 的斋藤矩阵还有另一种方法。本节首先说明如何为平坦坐标构造斋藤矩阵。详情请参见 [8], [4], [9]。

ST34 的斋藤矩阵可以用 [4] 中给出的势向量场表示。为证明这一结果，我们定义以下关于 u_1、u_2、u_3、u_4、u_5、u_6 的多项式 h_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$)。

$$
\begin{aligned}
h_1 =& (20u_1^4u_2^2 + 120u_1^2u_2^3 - 60u_2^4 - 12u_1^5u_3 + 60u_1^3u_2u_3 - 180u_1u_2^2u_3 + 135u_1^2u_3^2 + 135u_2u_3^2 + 120u_1^4u_4 \\
&-180u_1^2u_2u_4 + 540u_2^2u_4 + 270u_1u_3u_4 + 405u_4^2 + 180u_1^3u_5 + 540u_1u_2u_5 + 405u_3u_5 + 405u_1u_6)/405, \\
h_2 =& (\\
&64u_1^9 - 288u_1^7u_2 - 1728u_1^5u_2^2 + 1728u_1^3u_2^3 - 2592u_1u_2^4 + 432u_1^6u_3 + 3888u_1^4u_2u_3 + 3888u_1^2u_2^2u_3 \\
&+1944u_2^3u_3 + 972u_1^3u_3^2 + 729u_3^3 - 1296u_1^5u_4 + 7776u_1^3u_2u_4 + 8748u_1^2u_3u_4 - 2916u_2u_3u_4 - 5832u_1u_4^2 \\
&+3888u_1^4u_5 - 2916u_1^2u_2u_5 - 2916u_2^2u_5 + 4374u_1u_3u_5 + 4374u_4u_5 + 4374u_2u_6)/4374, \\
h_3 =& (\\
&64u_1^{10} + 3456u_1^8u_2 + 6624u_1^6u_2^2 + 2160u_1^4u_2^3 + 3888u_2^5 + 7776u_1^7u_3 + 19440u_1^5u_2u_3 + 32400u_1^3u_2^2u_3 \\
&+7776u_1u_2^3u_3 + 19440u_1^4u_3^2 + 26244u_1^2u_2u_3^2 + 2916u_2^2u_3^2 + 7290u_1u_3^3 + 9504u_1^6u_4 + 38880u_1^4u_2u_4 \\
&-11664u_1^2u_2^2u_4 - 3888u_2^3u_4 + 25272u_1^3u_3u_4 + 34992u_1u_2u_3u_4 + 8748u_3^2u_4 + 5832u_1^2u_4^2 + 8748u_2u_4^2 \\
&+11664u_1^5u_5 + 25272u_1^3u_2u_5 + 17496u_1u_2^2u_5 + 26244u_1^2u_3u_5 + 8748u_2u_3u_5 + 26244u_1u_4u_5 + 6561u_5^2 + 6561u_3u_6)/6561, \\
h_4 =& (\\
&1152u_1^{11} + 832u_1^9u_2 + 23616u_1^7u_2^2 - 13824u_1^5u_2^3 + 34560u_1^3u_2^4 + 7776u_1^8u_3 + 42768u_1^6u_2u_3 + 16200u_1^4u_2^2u_3 \\
&+7776u_1^2u_2^3u_3 - 5832u_2^4u_3 + 17496u_1^5u_3^2 + 27216u_1^3u_2u_3^2 + 23328u_1u_2^2u_3^2 + 13122u_1^2u_3^3 + 2916u_2u_3^3 \\
&+12960u_1^7u_4 - 25920u_1^5u_2u_4 + 103680u_1^3u_2^2u_4 - 31104u_1u_2^3u_4 + 19440u_1^4u_3u_4 + 69984u_1^2u_2u_3u_4 \\
&-5832u_2^2u_3u_4 + 17496u_1u_3^2u_4 + 38880u_1^3u_4^2 - 46656u_1u_2u_4^2 - 4374u_3u_4^2 + 2592u_1^6u_5 + 21384u_1^4u_2u_5 \\
&-5832u_1^2u_2^2u_5 + 11664u_2^3u_5 + 26244u_1^3u_3u_5 + 17496u_1u_2u_3u_5 + 6561u_3^2u_5 - 8748u_1^2u_4u_5 + 17496u_2u_4u_5 + 13122u_1u_5^2 + 13122u_4u_6)/13122, \\
h_5 =& (\\
&10496u_1^{12} + 70656u_1^{10}u_2 + 86976u_1^8u_2^2 + 233856u_1^6u_2^3 - 25920u_1^4u_2^4 - 20736u_2^6 + 71808u_1^9u_3 \\
&+264384u_1^7u_2u_3 + 393984u_1^5u_2^2u_3 + 129600u_1^3u_2^3u_3 + 93312u_1u_2^4u_3 + 165888u_1^6u_3^2 + 408240u_1^4u_2u_3^2 \\
&+221616u_1^2u_2^2u_3^2 + 134136u_1^3u_3^3 + 87480u_1u_2u_3^3 + 10935u_3^4 + 22464u_1^8u_4 + 209088u_1^6u_2u_4 + 38880u_1^4u_2^2u_4 \\
&+233280u_1^2u_2^3u_4 + 23328u_2^4u_4 + 241056u_1^5u_3u_4 + 272160u_1^3u_2u_3u_4 + 139968u_1u_2^2u_3u_4 + 209952u_1^2u_3^2u_4 \\
&+87480u_2u_3^2u_4 + 19440u_1^4u_4^2 + 349920u_1^2u_2u_4^2 - 69984u_2^2u_4^2 + 139968u_1u_3u_4^2 - 17496u_4^3 + 10368u_1^7u_5 \\
&+38880u_1^5u_2u_5 + 93312u_1^3u_2^2u_5 - 23328u_1u_2^3u_5 + 134136u_1^4u_3u_5 + 227448u_1^2u_2u_3u_5 + 52488u_2^2u_3u_5 \\
&+104976u_1u_3^2u_5 + 198288u_1^3u_4u_5 + 104976u_1u_2u_4u_5 + 78732u_3u_4u_5 + 78732u_1^2u_5^2 + 26244u_2u_5^2 + 39366u_5u_6)/39366, \\
h_6 =& (\\
&109056u_1^{14} + 433664u_1^{12}u_2 + 1983744u_1^{10}u_2^2 - 400512u_1^8u_2^3 + 2784768u_1^6u_2^4 - 282240u_1^4u_2^5 \\
&+967680u_1^2u_2^6 + 207360u_2^7 + 403200u_1^{11}u_3 + 2395008u_1^9u_2u_3 + 3709440u_1^7u_2^2u_3 + 6096384u_1^5u_2^3u_3 \\
&-846720u_1^3u_2^4u_3 - 725760u_1u_2^5u_3 + 1611792u_1^8u_3^2 + 4445280u_1^6u_2u_3^2 + 3492720u_1^4u_2^2u_3^2 + 1360800u_1^2u_2^3u_3^2 \\
&+462672u_2^4u_3^2 + 1496880u_1^5u_3^3 + 2857680u_1^3u_2u_3^3 + 734832u_1u_2^2u_3^3 + 489888u_1^2u_3^4 + 91854u_2u_3^4 \\
&+177408u_1^{10}u_4 + 80640u_1^8u_2u_4 + 3499776u_1^6u_2^2u_4 - 3870720u_1^4u_2^3u_4 + 2540160u_1^2u_2^4u_4 - 653184u_2^5u_4 \\
&+1439424u_1^7u_3u_4 + 7039872u_1^5u_2u_3u_4 + 3991680u_1^3u_2^2u_3u_4 + 1741824u_1u_2^3u_3u_4 + 2721600u_1^4u_3^2u_4 \\
&+1388016u_1^2u_2u_3^2u_4 + 244944u_2^2u_3^2u_4 + 857304u_1u_3^3u_4 + 1874880u_1^6u_4^2 - 3175200u_1^4u_2u_4^2 \\
&+5225472u_1^2u_2^2u_4^2 + 925344u_1^3u_3u_4^2 + 2939328u_1u_2u_3u_4^2 + 306180u_3^2u_4^2 + 1469664u_1^2u_4^3 - 816480u_2u_4^3 \\
&-8064u_1^9u_5 + 254016u_1^7u_2u_5 + 217728u_1^5u_2^2u_5 + 362880u_1^3u_2^3u_5 + 544320u_1u_2^4u_5 + 707616u_1^6u_3u_5 \\
&+1632960u_1^4u_2u_3u_5 + 2122848u_1^2u_2^2u_3u_5 - 326592u_2^3u_3u_5 + 1714608u_1^3u_3^2u_5 + 1224720u_1u_2u_3^2u_5 \\
&+183708u_3^3u_5 + 816480u_1^5u_4u_5 + 4572288u_1^3u_2u_4u_5 - 1959552u_1u_2^2u_4u_5 + 2694384u_1^2u_3u_4u_5 \\
&+979776u_2u_3u_4u_5 - 244944u_1u_4^2u_5 + 1102248u_1^4u_5^2 + 979776u_1^2u_2u_5^2 + 489888u_2^2u_5^2 + 734832u_1u_3u_5^2 + 367416u_4u_5^2 + 137781u_6^2)/275562.
\end{aligned}
$$

令 $w_j = j/7$ for $j = 1$、2、3、4、5 和 $w_6 = 1$。那么，如果 w_k 是 $u_k (k = 1$、2、$\cdots$、6) 的权重，则每个 h_j 都是关于 u_1、.....、u_6 的加权齐次多项式。我们将按如下方式定义矩阵 C 和 T。矩阵 $C = (C_{ij})$ 定义为

$C_{ij} = \partial_{u_i} h_j$(i、 $j = 1$、2、 $\cdots 6$)。此时，我们指出 C 的一个重要性质。也就是说，矩阵 $\partial_{u_j} C(j = 1$、.....、6) 彼此可交换。对于 $E = \sum_{j=1}^{6} w_j u_j \partial_{u_j}$，我们令 $T = EC$。于是， T 可视为多项式 $F =$ det(T) 的斋藤矩阵，其中 F 是关于 u_1、 u_2、 u_3、 u_4、 u_5、 u_6 的多项式。若将 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ 视为 ST34 的一组适当的基本不变量，则预期 T 是 ST34 的斋藤矩阵。如下述定理所示，事实确实如此：

定理 2 我们将 u_1、 u_2、 $\cdots$、 u_6 视为 ST34 的基本不变量，它们是由 f_1、 f_2、 $\cdots$、 f_6 定义的多项式，满足以下恒等式：

$$
\begin{cases}
f_1 = k_1 u_1\ ,\ (484u_1^2 + 125u_2)/56,\ f_3 = 3k_1^3 \qquad\qquad (3840232u_1^3 + 1647300u_1u_2 + 466785u_3)/3136, \\
f_2 = 3k_1^2
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
f_4 &= -k_1^4\ 10u_1^2u_2 - 6u_2^2 - 3u_1u_3 + 3u_4\ /175616 \qquad (), \\
f_5 &= 27k_1^5\ 8037231129928u_1^5 + 7056011495960u_1^3u_2 + 923992672120u_1u_2^2 + 4020065168070u_1^2u_3\ (), \\
&\quad +320350835370u_2u_3 + 1029935376420u_1u_4 + 170567816805u_5\ /9834496 \\
f_6 &= 41535291386925640512u_1^7 + 55402268263969532360u_1^5u_2 + 17134764422423982880u_1^3u_2^2 \qquad (), \\
&\quad +1037814693245737680u_1u_2^3 + 3836401938311627958 0u_1^4u_3 + 1384716990663416592 0u_1^2u_2u_3 \\
&\quad +402156952864771860u_2^2u_3 + 1820695718372892075u_1u_3^2 + 1436169703447901604 0u_1^3u_4 \\
&\quad +2535507810645410760u_1u_2u_4 + 3222317416041515750u_3u_4 + 5379672856192622400u_1u_5 \\
&\quad +3068225182274026 95u_2u_5 + 6064365946034056 5u_6\ /120472576
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 $f_6 = (64/5)H/2$ 于是，det(T) 是 ST34 关于其不变量 u_1、 u_2、 $\cdots$、 u_6 的判别式。

证明。首先注意到，根据恒等式 (1)， $\{u_1, u_2, \cdots, u_6\}$ 是 ST34 的一组基本不变量。由于 ST34 在由 ST34 的伪反射固定的超平面集合上的作用是传递的，det(T) 是不可约的。于是，为证明该定理，只需证明当 $x_5 = x_6 = 1$ 时，det(T) $= 0$。

为实现我们的目的，我们需要进行一些准备。我们在 x_1、 x_2、 x_3、 x_4 中定义对称多项式 r_k，如下：

$$r_{3j} = x_1^{3j} + x_2^{3j} + x_3^{3j} + x_4^{3j}\ (j = 1, 2, 3, 4),\ r_4 = x_1x_2x_3x_4,$$

and

$$\tilde{p}_{3j} = p_{3j}|_{x_5=x_6=1}\ (j = 1, 2, 3, 4, 5), \quad \tilde{s}_6 = s_6|_{x_5=x_6=1}.$$

Then

$$\tilde{p}_{3j} = r_{3j} + 2\ (j = 1, 2, 3), \quad \tilde{s}_6 = r_4.$$

and

$$
\begin{aligned}
\tilde{p}_{12} &= \tfrac{1}{6}(12 + r_3^4 - 6r_3^2r_6 + 3r_6^2 + 8r_3r_9 - 24r_3^3), \\
\tilde{p}_{15} &= \tfrac{1}{6}(12 + r_3^5 - 5r_3^3r_6 + 5r_3^2r_9 + 5r_6r_9 - 30r_3r_4^3).
\end{aligned}
$$

˜因此， $T = T|_{x_5=x_6=1}$ 的每个矩阵元素都是 $r_{3j}(j = 1$、2、3) 和 r_4 的多项式。˜利用这一表达式，通过直接计算可得 det(T) $= 0$。

注 2 Kato、Mano 和 Sekiguchi *[4], [5]* 提出了 Frobenius 流形结构的一种推广，并在此基础上引入了良生成复反射群的平坦坐标这一概念。对于群 ST34，第二作者（J.S.）

构造了平坦坐标对应的斋藤矩阵。因此，建立了 ST34 的判别式关于平坦坐标的行列式表达式（参见 *[8]*）。在将 $u_1, u_2, \cdots, u_6$ 识别为 ST34 的基本不变量的过程中，我们使用了 Bessis 和 Michel 构造的斋藤矩阵。值得说明的是这一识别过程。注意到 f_j 的权重假定为 w_j （$=$ deg $f_i/42$），我们通过以下条件确定未定常数 c_{ij} 和 c_0

$$\begin{aligned}
f_1 &= c_{11}u_1, \\
f_2 &= c_{21}u_2 + c_{22}u_1^2, \\
f_3 &= c_{31}u_3 + c_{32}u_1u_2 + c_{33}u_1^3, \\
f_4 &= c_{41}u_4 + c_{42}u_3u_1 + c_{43}u_2^2 + c_{44}u_2u_1^2 + c_{45}u_1^4, \\
f_5 &= c_{51}u_5 + c_{52}u_4u_1 + c_{53}u_3u_2 + \cdots, \\
f_6 &= c_{61}u_6 + c_{62}u_5u_2 + c_{63}u_5u_1^2 + \cdots
\end{aligned}$$

and

$$F = c_0 \det(M_{34}).$$

解这些方程，我们确定常数 c_{ij} 和 c_0。答案见上文的 (1)，该结果已在 *[8]* 中出现。这里特别指出，定理 2 的证明主要依赖于 (1)，且独立于 Bessis 和 Michel 关于斋藤矩阵 M_{34} 显式形式的结果。但 (1) 的确定则深深依赖于 Bessis 和 Michel 的结果。

6 关于群 ST34 的更多内容

6.1 $\Lambda^{(3)}$ 的极小向量与 ST34 的反射

我们考察 $\Lambda^{(3)}$ 的所有极小向量与 ST34 的伪反射所固定的超平面之间的对应关系。由 P_1、P_2、Q_1、R_1、R_2 生成的群可识别为 ST33（[10] 中编号为 33 的群）。若 Z_{34} 表示 ST34 的中心，则 Z_{34} 正规化 ST33，$Z_{34} \cap ST33 = \{1\}$ 且 $|Z_{34}| = 6$。因此，$H = \mathrm{ST33} \cdot Z_{34}$ 可作为一个群良好定义，且 $|H/ST33| = 6$。

陪集空间之间存在一个自然映射

$$ST34/ST33 \longrightarrow ST34/H,$$

换句话说，

$$756 \text{ minimal vectors of } \Lambda^{(3)} \xrightarrow{6:1} 126 \text{ reflections of ST34}.$$

我们将具体构造这个映射。对于一个模 Z_{34} 的元素 $\frac{1}{\sqrt{3}}(\theta, -\omega^b\theta, 0, 0, 0, 0)$，我们将 $x_1 - \omega^b x_2 = 0$ 赋给该向量。我们取 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, \omega^b, \omega^c, \omega^d, \omega^e, \omega^f)$ $b+c+d+e+f \equiv 0$ (模 3)。不失一般性，我们可以假设 $0 \le b \le c \le d \le e \le f \le 2$。在此条件下，我们求解 $b + c + d + e + f \equiv 0$ (模 3)。首先有一个平凡解 $(b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, 0)$，它对应于 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$。

情形 $(b, c, d, e, f) = (0, 0, 0, 0, f)$ $f \neq 0$: 无解。

情形 $(b,c,d,e,f)=(0,0,0,e,f)$ $e\neq 0$: 若 $e=2$，则 $f=2$，这不属于该情形。设 $e=1$。若 $f=2$，则这是与 $x_1+x_2+x_3+x_4+\omega x_5+\omega^2x_6=0$ 对应的情形。情形 $f=1$ 不满足条件。

情形 $(b,c,d,e,f)=(0,0,d,e,f)$ $d\neq 0$: 如果 $d=2$，那么 $(e,f)=(2,2)$ 满足条件，这对应于 $x_1+x_2+x_3+\omega^2(x_4+x_5+x_6)=0$。然而，这与我们将在下文看到的情形属于相同类型，即情形 $(b,c,d,e,f)=(0,0,1,1,1)$。令 $d=1$。如果 $e=2$，那么 $f=2$，这不属于此情形。令 $e=1$。那么 $f=2$ 不成立，但情形 $f=1$ 可行。这对应于 $x_1+x_2+x_3+\omega(x_4+x_5+x_6)=0$。

情形 $(b,c,d,e,f)=(0,c,d,e,f)$ $c\neq 0$: 若 $c=2$，则 $(d,e,f)=(2,2,2)$，但这并非情形。设 $c=1$。若 $d=2$，则 $(e,f)=(2,2)$ 不满足条件。$(d,e,f)=(1,2,2)$ 是这种情形，对应于 $x_1+x_2+\omega(x_3+x_3)+\omega^2(x_5+x_6)=0$。情形 $(e,f)=(1,2)$、$(1,1)$ 不满足条件。

情形 (b,c,d,e,f) $b\neq 0$: 若 $b=2$，则 $(c,d,e,f)=(2,2,2,2)$ 不满足条件。设 $b=1$。若 $c=2$，则 $(d,e,f)=(2,2,2)$ 满足条件，并对应于 $x_1+\omega x_2+\omega^2(x_3+x_4+x_5+x_6)=0$。然而，这种类型已在情形 $(b,c,d,e,f)=(0,0,0,0,1,2)$ 中作为类型 $x_1+x_2+x_3+x_4+\omega x_5+\omega^2x_6=0$ 出现。设$c=1$。若 $d=2$，则 $(e,f)=(2,2)$ 不满足条件。设 $d=1$。情形 $(e,f)=(2,2)$ 不满足条件。情形 $(e,f)=(1,2)$ 满足条件，对应于 $x_1+\omega(x_2+x_3+x_4+x_5)+\omega^2x_6=0$，但这种情形已在情形 $(b,c,d,e,f)=(0,0,0,1,2)$ 中作为类型 $x_1+x_2+x_3+x_4+\omega x_5+\omega^2x_6=0$ 出现。情形 $(e,f)=(1,1)$ 不满足条件。

由此我们得到了以下命题。

命题 1 在 $\Lambda^{(3)}$ 至 Z_{34} 范围内的极小向量与由 ST34 的伪反射固定的超平面之间存在自然的 6 对 1 对应关系。典型的对应关系如下:

$$
\begin{aligned}
(\theta,-\omega^b\theta,0,0,0,0)&\to x_1-\omega^b x_2=0,\\
(1,1,1,1,1,1)&\to x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0,\\
(1,1,1,1,\omega,\omega^2)&\to x_1+x_2+x_3+x_4+\omega x_5+\omega^2x_6=0,\\
(1,1,1,\omega,\omega,\omega)&\to x_1+x_2+x_3+\omega(x_4+x_5+x_6)=0,\\
(1,1,\omega,\omega,\omega^2,\omega^2)&\to x_1+x_2+\omega(x_3+x_4)+\omega^2(x_5+x_6)=0.
\end{aligned}
$$

6.2 ST33 的基本不变量及 ST34 的基本不变量

现在我们来说明群 ST33 的基本不变量与群 ST34 的基本不变量之间的关系。为此，我们回顾定理 2 的证明中引入的关于 x_1、x_2、x_3、x_4 的对称多项式 r_k。若令 $x_5=x_6=y$ 属于 §1 中的 m_j $(j=1,2,3,4,5,7)$，则可得到关于 x_1、x_2、x_3、x_4、y 的多项式。由于我们有

$$
p_{3j}|_{x_5=x_6=y}=r_{3j}+2y^{3j}\ (j=1,2,3,4,5,6),\quad s_6=r_4y^2,
$$

我们可以将 m_j 视为关于 r_3、r_4、r_6、r_9、y 的多项式。此过程为我们给出了 ST33 的不变量。首先，我们设

$$
\begin{aligned}
J_4 &= 3r_4-r_3y+y^4,\\
J_{10} &= \tfrac{1}{2}(r_3^2r_4-3r_6r_4+2r_3^3y-8r_3r_6y+6r_9y+36r_4^2y^2-8r_3r_4y^3-8r_3^2y^4+8r_6y^4+64r_4y^6)
\end{aligned}
$$

and

$$J_{6k} = m_k|_{x_5=x_6=y} \ (k = 1, 2, 3, 4, 5, 7).$$

然后我们得到

$$
\begin{aligned}
J_6 &= -5r_3^2 + 6r_6 - 180r_4y^2 - 20r_3y^3 - 8y^6, J_{12} = \tfrac{1}{34}(\\
&\quad 475r_3^4 - 540r_3^2r_6 + 2349r_6^2 - 2250r_3r_9 + 81000r_3^4 + 103950r_3^2r_4y^2 - 80190r_6r_4y^2\\
&+30800r_3^3y^3 - 83160r_3r_6y^3 + 49500r_9y^3 + 1871100r_4^2y^4 + 415800r_3r_4y^5 + 50820r_3^2y^6\\
&-33264r_6y^6 + 255420r_4y^8 + 6380r_3y^9 + 3676y^{12}), J_{18} = \tfrac{1}{1822}(\\
&\quad -86585r_3^6 + 1859625r_3^4r_6 - 9692055r_3^2r_6^2 + 3982527r_6^3 - 86580r_3^3r_9\\
&+12427020r_3r_6r_9 - 8402130r_9^2 - 80904420r_3^2r_4^3 + 6342300r_6r_4^3 - 167241240r_3^4r_4y^2\\
&+452096640r_3^2r_6r_4y^2 - 13384440r_6^2r_4y^2 - 271985040r_3r_9r_4y^2 - 5634849240r_4^4y^2\\
&-28007160r_3^5y^3 + 97895520r_3^3r_6y^3 - 45110520r_3r_6^2y^3 - 54455760r_3^2r_9y^3 + 29082240r_6r_9y^3\\
&-5768197920r_3r_4^3y^3 - 6947020080r_3^2r_4^2y^4 + 4465941480r_6r_4^2y^4 - 3216213000r_3^3r_4y^5\\
&+7443235800r_3r_6r_4y^5 - 4300536240r_9r_4y^5 - 603515640r_3^4y^6 + 1734248880r_3^2r_6y^6\\
&-18044208r_6^2y^6 - 1099360080r_3r_9y^6 - 60989423040r_4^3y^6 - 27788080320r_3r_4^2y^7\\
&-5927021100r_3^2r_4y^8 + 4572273420r_6r_4y^8 - 1157156000r_3^3y^9 + 3124321200r_3r_6y^9\\
&-2006741880r_9y^9 - 18856197360r_4^2y^{10} - 2278916640r_3r_4y^{11}\\
&-126792120r_3^2y^{12} + 127646064r_6y^{12} - 200564640r_4y^{14} - 5051040r_3y^{15} - 4823744y^{18}).
\end{aligned}
$$

参照 Burkhardt 给出的不变量，或通过直接计算，我们可以证明 $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$ 生成了 ST34 的不变量环。（例如，Burkhardt 不变量见 [6]。）此外，我们可以看到 J_{24}, J_{30}, J_{42} 是 $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$ 的多项式，如下所示。

$$
\begin{aligned}
J_{24} &= \tfrac{1}{362524562500}(\text{————} \ 3749217437791J_{12}^2 - 72606621297375000J_{10}^2J_4 - 5485833609135 00J_{12}J_4^3\\
&\quad +24202207099125000J_4^6 + 2954928140625J_{18}J_6 - 12101103549562500J_{10}J_4^2J_6 - 19382588618832J_{12}J_6^2\\
&+5485833609135 00J_4^3J_6^2 + 13040967602916J_6^4), J_{30} = \tfrac{1}{86134928412500}(\\
&\text{————} \ 39809249183660962500 0J_{10}^3 + 1638875315504600J_{12}J_{18} - 9023429814963151500J_{10}J_{12}J_4^2\\
&-1294894009244625 00J_{18}J_4^3 + 7961849836732195 0000J_{10}J_4^5 - 3829737121534827J_{12}^2J_6\\
&-1003393893372626250 00J_{10}^2J_4J_6 + 25366379163880500J_{12}J_4^3J_6 + 33446463112420875000J_4^6J_6\\
&+1580814161617275J_{18}J_6^2 - 7699801741247286000J_{10}J_4^2J_6^2 - 10484943427856196J_{12}J_6^3 + 1041230217605820 00J_4^3J_6^3 + 11181126000681648J_6^5),\\
J_{42} &= \tfrac{1}{74016525482305140625 00}(\text{————} \ 41739180083362459537482431250 0J_{10}^3J_{12} + 17976584802880303029117 4075J_{12}^2J_{18}\\
&\quad -1545909358443802296593906250 0J_{10}^2J_{18}J_4 - 94608808188954908284960177 50J_{10}J_{12}^2J_4^2\\
&+22245016831722459672845062500000J_{10}^3J_4^3 - 25256901756063221659038750 0J_{12}J_{18}J_4^3\\
&+13390039831862916100008033750 00J_{10}J_{12}J_4^5 + 87709013658941430856078125 00J_{18}J_4^6\\
&-44490033663444919345690125000000J_{10}J_4^8 - 64436641899640481535871 59J_{12}^3J_6\\
&+50438467196607310570312 5J_{18}^2J_6 - 27215413015553817885770625 00J_{10}^2J_{12}J_4J_6\\
&-25765155974063371609898437 50J_{10}J_{18}J_4^2J_6 + 80090644150236766751149725 0J_{12}^2J_4^3J_6\\
&+55612542079306149182112656250 00J_{10}^2J_4^4J_6 - 20983038899424542341187062500J_{12}J_4^6J_6\\
&+12795306283863149426833241250 00J_{10}^3J_6^2 - 37085079050679665915752 5J_{12}J_{18}J_6^2\\
&-19995403641453544837088839500J_{10}J_{12}J_4^2J_6^2 - 29939685288627764525570625 0J_{18}J_4^3J_6^2\\
&+20548408752535874661154935000 00J_{10}J_4^5J_6^2 - 14237902960750897238629098J_{12}^2J_6^3\\
&-69323880439964411839202625000J_{10}^2J_4J_6^3 + 13293255455992669729460805 00J_{12}J_4^3J_6^3\\
&+41380309308849671453485500000J_4^6J_6^3 + 63445090000090696420950J_{18}J_6^4\\
&+17448714170095736727621576000J_{10}J_4^2J_6^4 + 30208710160434535723891548J_{12}J_6^5\\
&-15782661166547247786114840 00J_4^3J_6^5 - 11514378808918757251753416J_6^7)。
\end{aligned}
$$

7 结语

Conway and Sloane 得到的 ST34 的基本不变量 [3]，若将其表示为 x_1、$\cdots$、x_6 的多项式，因表达式冗长而难以处理。本文的目标是

获得这些不变量合理且明确的形式，使其能够利用 G(3,3,6) 的基本不变量来表示。本文结果的一个应用是，可以揭示 ST34 群的“Dynkin 图”的余秩一子图，与 [9] 中构造的、非典范但与 E_7 型代数 Frobenius 流形相关的 E_7 奇点变形族的单参数变形子族之间的关系。这表明 ST34 群与 E_7 型实反射群之间存在深刻联系。

参考文献

[1] D. Bessis 和 J. Michel：例外辫群的显式表示。Experimental Math. (2004), 13, 257-266。[2] W. Bosma、J. Cannon、C. Playoust：Magma 代数系统。I. 用户语言，J. Symbolic Comput. 24 (1997), no. 3-4, 235-265。[3] J. H. Conway 和 N. J. A. Sloane：Coxeter-Todd格、Mitchell 群及相关球堆积。Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1983), 93, 421-440。[4]M. Kato、T. Mano 和 J. Sekiguchi：不含势的平坦结构。Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 60 (2015), 4, 481-505。[5] M. Kato、T. Mano 和 J. Sekiguchi：等单值变形空间上的平坦结构，SIGMA 16(2020), 36页。[6]A. Nagano 和 H. Shiga：通过 Burkhardt 不变量对厄米模形式作几何解释。Transformation Groups (2022). https://doi.org/10.1007/s00031-021-09681-w[7] P. Orlik 和 H. Terao：超平面配置。Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, 柏林, 1992。[8] J. Sekiguchi：扩展 WDVV 方程的解； $ST34$, E_8 情形。Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 64 (2019), 4, 565-583。[9] J. Sekiguchi：代数势与反射群的构造问题，预印本。[10] G. C. Shephard 和 A. J. Todd：有限酉反射群。Canadian J. Math. (1954), 6, 274-304。[11] H. Terao 和 Y. Enta： G_{34}的基本导子，见《复反射的基本导子》（P. Orlik 著）附录，Contemporary Math. (1989), 90, 211-228。