arXiv:2302.09698v1 [math.GR] 20 Feb 2023

可解群中的 Navarro 顶点与提升

LEI WANG 和 PING JIN*

摘要。设 Q 是有限 p-可解群 G 的一个 p-子群，其中 p 是素数，并设 δ 是 Q 的一个线性特征标，满足：每当 $x,\ y \in Q$ 在 G 中共轭时，$\delta(x) = \delta(y)$。在此情形下，我们证明，将特征标限制到 p-正则元素上，定义了一个典范双射：从 G 中具有 Navarro 顶点 $(Q,\ \delta)$ 的不可约普通特征标集合，映到具有 Green 顶点 Q 的 G 的不可约 Brauer 特征标集合。此外，我们利用这一对应关系考察 Brauer 特征标的提升在正规子群下的性质。

1. 引言

设 p 是一个固定的素数，G 是有限 p-可解群。对于每个不可约复特征标 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$，Navarro [17] 引入了与 χ 相关联的典范对 (Q,δ)；该对在模 G-共轭意义下唯一确定，其中 Q 是 G 的一个 p-子群，且 $\delta \in \mathrm{Irr}(Q)$。这样的对 (Q,δ) 称为 χ 的 Navarro 顶点，已被证明在可解群的特征标理论中的许多问题上颇有用处（例如参见 [2, 3, 7, 8, 9, 14, 18, 19] 及其中的参考文献）。

沿用 Navarro 的记号，我们用 $\mathrm{Irr}(G|Q,\ \delta)$ 表示 $\mathrm{Irr}(G)$ 中所有具有 Navarro 顶点 $(Q,\ \delta)$ 的成员组成的集合，并用 $\mathrm{IBr}_p(G|Q)$ 表示 G 的不可约 p-Brauer 特征标集合，其顶点为Q（按 Green 的意义）。此外，我们用 G_δ 表示 $N_G(Q)$ 中稳定 δ 的元素。

Navarro 顶点的一个重要性质是，如果取顶点特征 δ 为主特征 1_Q，那么限制 $\chi \mapsto \chi^0$ 定义了一个典范双射

$$\mathrm{Irr}(G|Q,1_Q) \to \mathrm{IBr}_p(G|Q),$$

其中，χ^0 表示将 χ 限制到 G 的 p-正则元素集上；参见 [17] 的定理 A。

我们的动机是通过用 Q 的某些线性特征标 δ 替换主特征标 1_Q，来推广上述结果。值得一提的是，如果 δ 是线性的，那么对于每个满足 $\chi^0 \in \mathrm{IBr}_p(G)$ 的 $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Q,\delta)$，$\chi^0$ 都有顶点 Q；这也是我们只考虑线性顶点特征标的原因。（或许值得一提的是，$\delta(1) = 1$ 的 Navarro 顶点 (Q,δ) 也曾出现在 [22] 的定理 B 中。）为方便起见，我们称 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 为一个**提升**，如果 $\chi^0 \in \mathrm{IBr}_p(G)$；并称 $\delta \in \mathrm{Irr}(Q)$ 为

2010数学主题分类。主要分类 20C15；次要分类 20C20。关键词和短语。Navarro 顶点、提升、线性特征、Brauer 特征、π-部分特征标。*通讯作者。

稳定 于 G，如果只要 $x, y \in Q$ 在 G 中共轭，就有 $\delta(x) = \delta(y)$。容易看出，如果 δ 在 G 中稳定，那么 δ 在 $N_G(Q)$ 中不变，因此 $G_\delta = N_G(Q)$。

采用上述记号，我们的主要结果可表述如下。

定理 A. 设 Q 是 p-可解群 G的一个 p-子群，其中 p 是一个素数，并设 δ 是 Q的一个线性特征标。若 δ 在 G中稳定，则限制到 p-正则元素上定义了一个典范双射 不可约特征标$(G|Q, \delta) \to$不可约布劳尔特征标$_p(G|Q)$。

事实上，我们将在 Isaacs 的更一般的 π-部分特征标框架下证明定理 A（见定理 3.4）。以下推论 B 是 [20], 的定理 2.1 的一个重要特例，对应用很有用。我们将建立这一结果的 π-版本（见推论 3.5），它也可用于证明关于 π-部分特征标提升的定理。例如，我们可以用推论 [8] 3.5替代 的定理 2.3，从而得到该论文中定理 1.1 和 1.3 的 π-类比结果。

推论 B。 设 $\varphi \in$不可约布劳尔特征标$_p(G|Q)$，其中 G 是一个 p-可解群，且 Q 是 G 的 p-子群。若 $Q \lhd G$，并且 δ 是 Q 的 G-不变线性特征标，则存在 $\chi \in$ 不可约特征标(G) 的唯一提升 φ，其具有 *Navarro* 顶点 $(Q,\ \delta)$。

下一个结果是定理 A 的另一个直接推论。在 [18], Navarro 证明了

$$|\operatorname{Irr}(G|Q, \delta)| \leq |\operatorname{Irr}(G_\delta|Q, \delta)|,$$

并且当 $\delta = 1_Q$ 或 δ 为线性的，且 $Q \in \operatorname{Syl}_p(G)$时等号成立；另见 [19]。（我们提到，在这两个条件下证明等号成立非常困难，因为它们本质上分别是阿尔珀林权猜想（见 [11]）和麦凯猜想（见 [12]）的强形式，但仅针对 p-可解群。）在这里，只要 δ 是 Q的 G-稳定线性特征标，我们仍然有等号成立；见推论 3.6 以了解更一般的 π-版本。

推论 C. 设 G 为一个关于素数 p的 p-可解群，Q 为 G的一个 p-子群，且 δ 为 Q的一个线性特征标。若 δ在 G中稳定，则 |不可约特征标$(G|Q, \delta)| =$ |不可约特征标$(N_G(Q)|Q, \delta)|$。

现在我们考虑 p-可解群中的 Brauer 特征标的提升 G。对于 $N \lhd G$，已知若 $\chi \in$ 不可约特征标(G) 是一个提升，则 χ_N 的不可约成分可能不满足要求，因此需要一些附加条件（例如参见 [1, 6, 7, 8, 15, 21], ）。下面的结果是定理 A 的一个简单应用，应与 [7] 的推论 1.3 以及 [8], 的定理 1.1 相比较；我们还将证明其 π-版本，即定理 3.7。

定理 D。 设 G 是一个 p-可解群，且满足 $p > 2$，设 $N \lhd G$，并设 $\chi \in$ 不可约特征标(G) 是一个提升，其 *Navarro* 顶点为 (Q, δ)。若 $\delta_{Q\cap N}$ 在 N 中稳定，则 χ_N 的每个不可约组成成分 ψ 也是一个提升。此外，若 λ 在 G 中稳定，则 $G_\psi = G_{\psi^0}$。

本文使用的大多数记号和术语均为标准用法，关于普通特征、Brauer 特征以及 [10, 16, 13] 的相关内容可参见 π-部分特征标。

2. 预备知识

为方便读者，我们将简要回顾普通特征标的 Navarro 顶点以及 π-可分群中 π-部分特征标的顶点的定义；更多细节请参见 [5, 17]。我们首先介绍一些记号。

给定一个有限群 G，如果 $H \leq G$ 且 $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$，则称 (H, θ) 是 G 的一个**特征标对**，并通过规定：当 $H \leq K$ 且 θ 位于 ψ 之下时，$(H, \theta) \leq (K, \psi)$，在 G 的特征对集合上定义一个偏序。注意，G 通过共轭作用于特征标对，即对于 $g \in G$，有 $(H, \theta)^g = (H^g, \theta^g)$，其中 $\theta^g \in \mathrm{Irr}(H^g)$ 定义为：对 $x \in H$，$\theta^g(x^g) = \theta(x)$。

设 G 对素数集合 π 是 π-可分的。G 的一个 π-**分解正规对**是一个特征标对 (H, θ)，其中 $H \lhd G$ 且 θ 是 π-分解的（定义及性质见 [13]）。我们用 $\mathrm{N}(G)$ 表示 G 的 π-分解正规对集合，并令 $\mathrm{N}^*(G)$ 表示 $\mathrm{N}(G)$ 的极大元集合。我们有如下基本结果（见 [5] 的第 4 节），它与 [13] 的定理 4.1 非常相似。

引理 2.1。设 $\chi \in$ 不可约特征标(G)，其中 G 是一个 π-可解群。则有以下结论。

(a) 存在唯一的 N 正规子群，它是 G 中满足如下性质的极大正规子群：χ_N的每个不可约组成成分 θ都是 π-分解的。特别地，$(N, \theta) \in \mathcal{N}^*(G)$。

(b) 设 N 和 θ 如 *(a)* 中所述，并假设 θ 在 G中不变。则 $N = G$ 和 $\theta = \chi$，因此 χ是 π-分解的。

现在，对于任意 $\chi \in$ 不可约特征标 $\mathrm{Irr}(G)$，我们可以递归地定义正规核 (W, γ)，其中 G 是一个 π-可解群。若 χ 是 π-分解的，则令 $(W, \gamma) = (G, \chi)$。若 χ 不是 π-分解的，则令 (N, θ) 如上述引理所述。于是 θ 不是 G-不变的，因此 $(G_\theta, \chi_\theta) < (G, \chi)$，其中 G_θ 是 θ 在 G 中的惯性群，而 χ_θ 是 χ 在 θ 上的 Clifford 对应。我们将 (W, γ) 定义为 χ_θ 的任一正规核。注意，(W, γ) 由 χ唯一确定，且在 G中相差至多共轭，并且 γ与 $\gamma^G = \chi$一起是 π-分解的。此外，设 W 的一个 Hall π'-子群为 Q，并令 δ 为 γ的 π'-特殊因子 $\gamma_{\pi'}$ 在 Q 上的限制。此时称 (Q, δ) 为 χ的 Navarro 顶点。显然，χ 的所有 Navarro 顶点在 G 中共轭；与之前一样，我们用 $\mathrm{Irr}(G|Q, \delta)$ 表示 $\mathrm{Irr}(G)$ 中所有具有 Navarro 顶点 (Q, δ) 的元素所成的集合。

继续假设 G 是 π-可分的。用 G^0 表示 G 的 π-元素集，并令 χ^0 为 χ 在 G^0 上的限制，其中 χ 是 G 的任意特征标。在这种情况下，我们称 χ^0 为 G 的 π-**部分特征标**。若 G 的一个 π-部分特征标不能写成两个 π-部分特征标之和，则称其为**不可约**，并用 $\mathrm{I}_\pi(G)$ 表示不可约 π-部分特征标的集合

G。此外，若特征标 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 满足 $\chi^0 \in \mathrm{I}_\pi(G)$，则称其为**提升**；若 χ 满足 $\chi^0 = \varphi \in \mathrm{I}_\pi(G)$，则称 χ 为 φ 的提升。

此外，我们将 $\varphi \in \mathrm{I}_\pi(G)$ 的一个顶点定义为某个子群$U \leq G$的任意 Hall π'-子群，条件是存在 $\mu \in \mathrm{I}_\pi(U)$，其中 $\mu^G = \varphi$且 $\mu(1)$ 是一个 π-数。我们用 $\mathrm{I}_\pi(G|Q)$ 表示 G 的那些以 Q为顶点的不可约 π-部分特征标的集合。已知 φ 的顶点在 G-共轭意义下唯一（见 [13] 的定理 5.17），并且若 $\pi = p'$，则根据方桑定理，$\mathrm{I}_\pi(G) = \mathrm{IBr}_p(G)$，因此不可约 π-部分特征标的顶点与不可约布劳尔特征标的格林顶点相同。

正如预期的那样，π-部分特征标的顶点在正规子群方面表现良好 .

引理 2.2. 设 G 是 π-可解的，且 $\varphi \in \mathrm{I}_\pi(G)$。令 N 为 G 的正规子群。若$\theta \in \mathrm{I}_\pi(N)$是 φ_N 的一个组成成分，则存在 φ 的一个顶点 Q，使得 $Q \cap N$ 是 θ 的一个顶点。

证明。 参见 [4] 的定理 3.2。 □

我们需要以下结果，它是 π关于引理 2.1 的类比。

引理 2.3。 设 G 是 π-可分的，并令 $\varphi \in \mathrm{I}_\pi(G)$。则 G 存在唯一的极大正规子群 N，使得 φ_N 的不可约成分具有 π- 度。此外，若对于某个 $\theta \in \mathrm{I}_\pi(N)$ 及整数 e，有 $\varphi_N = e\theta$，则 $N = G$，因此 φ 具有 π-度。

证明。 这是 π-版本的 [17], 引理 6.1，证明过程类似。 □

下一个结果是证明引言中的定理 D 的关键；若去掉 $2 \in \pi$ 是这一假设，则该结果可能不成立。

引理 2.4。 设 G 是一个 π-可分群，且满足 $2 \in \pi$，并设 $\chi \in$ 不可约特征标(G) 是一个提升，其 *Navarro* 顶点为 (Q, δ)。若 $N \lhd G$，则 χ_N 的某个不可约成分具有 *Navarro* 顶点$(Q \cap N, \delta_{Q\cap N})$。

证明。 由证明 [7]，中定理 3.1 的相同论证，结合 [8] 中的定理 1.2，即可得出结论。 □

在本节末尾，我们给出一个关于霍尔子群上的特征可扩张性的判据，这在我们证明定理 A 时起着关键作用。

引理 2.5。 设 G 是一个 π-可解群， Q 是其 *Hall* π'-子群，且 $\delta \in$ 不可约特征标(Q)。若 δ 在 G 中稳定，则存在 G 的唯一一个 π'- 特殊特征标 α，使得 $\alpha_Q = \delta$。

证明。参见 [13] 中的定理 3.6 和推论 3.15。 □

3. 主要结果

我们从 w 开始 一个关于稳定特征标的结果，这是我们证明的基础。

引理 3.1。 设 $\gamma \in$ 不可约特征标(W) 是 π-分解的，其中 W 是 π-可解群 G的子群，并设 $\theta \in$ 不可约特征标(N) 在 γ之下，其中 $N \lhd G$ 且 $N \leq W$。设 Q 是W的一个 $Hall$ π'-子群，并记 $\delta = (\gamma_{\pi'})_Q$。若 δ 是一个 G-稳定线性特征标，则 θ 是 π-分解的，且其 π'-特殊因子 $\theta_{\pi'}$ 是一个 G-不变线性特征标。

证明。由 π-特征的基本性质可知， θ是 π-分解的，因此$\theta_{\pi'}$在 $\gamma_{\pi'}$之下。令 $P = Q \cap N$，则 P 是 N 的一个 Hall π'- 子群。记 $\beta = \theta_{\pi'}$。注意到 $\gamma_{\pi'}(1) = \delta(1) = 1$，故 $(\gamma_{\pi'})_N = \beta$，从而 $\delta_P = \beta_P$。特别地， β 是线性的。为证明 β 在 G中不变，只需证明 $\beta(x) = \beta(y)$，其中 x、 $y \in N$ 在 G中共轭。由于 β 在 N的线性特征标群中的阶是 π'阶，我们有 $\beta(x) = \beta(x_{\pi'})$ 且 $\beta(y) = \beta(y_{\pi'})$。显然， x 的 π'-部分 $x_{\pi'}$也与 y的 π'-部分 $y_{\pi'}$ 共轭，因此不妨设 x、 y 是 N的 π'-元素。在这种情况下，我们看到 x 和 y 各自都与 P中的某个元素共轭，因此还可进一步假设 x、 $y \in P$。于是 $\beta(x) = \delta(x) = \delta(y) = \beta(y)$，证毕。□

我们需要一个充分条件，使 π-分解正规对成为极大的。

引理 *3.2.* 设 $\varphi \in I_\pi(G)$，并假设 N 是 G 的唯一极大正规子群，使得 φ_N 的不可约成分具有 π-次数。设 $\mu \in I_\pi(N)$ 是 φ_N 的一个不可约成分，且 $\alpha \in Irr(N)$ 是 μ的 π-特殊提升。那么，对于每个 π'-特殊特征 $\beta \in Irr(N)$，都有 $(N, \alpha\beta) \in N^*(G)$。

证明。我们先证明 $(N, \alpha) \in \mathrm{N}^*(G)$。否则，我们可以选取某个 $(M, \psi) \in \mathrm{N}(G)$，其中 $N < M$。由于 π-分解特征的任意正规成分都是 π-分解的，因此不妨假设 M/N 是 G的一个主因子，从而 M/N 要么是 π-群，要么是 π'-群。由 [13],的推论 4.5 可知， $\mathrm{Irr}(M|\alpha)$ 中的每个元素都是 π-分解的。

我们将使用 B_π-特征来导出矛盾（定义及性质见 [13] ）。设 $\chi \in \mathrm{B}_\pi(G)$ 是 φ 的一个提升。那么 χ 位于 α 之上，正如 $\chi^0 = \varphi$ 位于 $\alpha^0 = \mu$ 之上一样，因此存在 $\rho \in$不可约特征标(M) 满足 $(N, \alpha) \leq (M, \rho) \leq (G, \chi)$。于是 $\rho \in \mathrm{B}_\pi(M)$，这意味着 ρ 是 π-特殊的。由此可得， ρ^0 不可约且次数为 π，因此 ρ^0 位于 φ 之下。现在， N 的极大性迫使 $M \leq N$ 成立，而这一矛盾证明了 $(N, \alpha) \in \mathrm{N}^*(G)$。

现在，设 $(M, \sigma) \in \mathrm{N}^*(G)$ 满足 $(N, \alpha\beta) \leq (M, \sigma)$。则 $(N, \alpha) \leq (M, \sigma_\pi) \in \mathrm{N}(G)$，并且根据 (N, α) 的极大性，我们有 $N = M$。结论得证。□

以下 以下结果在某种意义上可视为上述引理的逆命题 .

引理 3.3。 设 $(N,\theta) \in \mathcal{N}^*(G)$，其中 $\theta_{\pi'}$ 在 G 中不变，并设 $\varphi \in \mathrm{I}_\pi(G)$。假设 $\chi \in$ 不可约特征标$(G|\theta)$ 是 φ 的一个提升，且 χ 具有 *Navarro* 顶点(Q,δ)，其中 $\delta(1) = 1$。那么 N 是 G 的唯一极大正规子群，使得 φ_N 的不可约成分具有 π-度。

证明。根据第 2 节中讨论的 Navarro 顶点的构造，我们看到 θ 具有 π-次数，因此 $\theta^0 = (\theta_\pi)^0,$，显然它是不可约的，且位于 φ 之下。假设引理不成立。那么， G 有一个主因子 M/N，其 φ_M 的不可约成分具有 π-次数。令 $\eta \in \mathrm{I}_\pi(M)$ 位于 φ 之下且位于 θ^0 之上。由于 $\eta(1)$ 是一个 π-数，存在 M 的一个 π-特殊特征标 $\hat{\eta}$，使得 $\hat{\eta}^0 = \eta$ （见 [13]的定理 3.14）。显然，$\hat{\eta}$ 位于 θ_π 之上；又由于 $\theta_{\pi'}$ 在 G 中不变，且 M/N 要么是一个 π-群，要么是一个 π'-群，因此存在 M 的一个 π'-特殊特征标 β，位于 $\theta_{\pi'}$ 之上（见 [13]的定理 2.4）。现在，$\hat{\eta}\beta \in \mathrm{Irr}(M)$ 是 π-分解的，并且位于 $\theta_\pi\theta_{\pi'} = \theta$ 之上，这与 (N,θ) 的极大性矛盾。证毕。□

现在我们可以证明以下结果，它是定理 A 的 π 版本。

定理 3.4。 设 G 是一个 π-可分群， Q 是 G 的一个 π'-子群，且 δ 是 Q 的一个线性特征标。若 δ 在 G 中稳定，则限制 $\chi \mapsto \chi^0$ 定义了一个双射 不可约特征标$(G|Q,\delta) \to \mathrm{I}_\pi(G|Q)$。

证明。 我们将通过以下步骤完成证明。

步骤 *1.* 对任意 $\chi \in$ 不可约特征标$(G|Q,\delta)$，都有 $\chi^0 \in \mathrm{I}_\pi(G|Q)$，因此限制映射是良定义的。

注意，一旦我们证明 χ^0 不可约，显然 Q 是 χ^0 的一个顶点，因为 δ 是线性的。因此，只需证明 $\chi^0 \in \mathrm{I}_\pi(G)$，我们将对此关于 $|G|$ 使用归纳法。

根据定义，存在 χ 的一个正规核（W,γ），使得 Q 是 W 的一个 Hall π'-子群，且 $(\gamma_{\pi'})_Q = \delta$。此外，存在某个 $(N,\theta) \in \mathrm{N}^*(G)$ 满足

$$(N,\theta) \le (W,\gamma) \le (T,\psi) \le (G,\chi),$$

其中 $T = G_\theta$和 $\psi \in \mathrm{Irr}(T)$ 是相对于 θ 的 χ 的 Clifford 对应。于是 (W,γ) 也是 ψ 的一个正规核，因此 $\psi \in \mathrm{Irr}(T|Q,\delta)$。若 $T = G$，则由引理 2.1 可得 $(N,\theta) = (G,\chi)$，故 χ 是 π-分解的。此外，注意到 $\gamma(1) = \gamma_\pi(1)$ 是一个 π-数，因此 χ 的次数为 π。由此可知 χ^0 不可约，在此情形下证毕。

因此我们可以假设 $T < G$。由归纳法，得到 $\psi^0 \in \mathrm{I}_\pi(T)$。由引理 3.1 可知，$\theta_{\pi'}$ 是一个 G-不变的线性特征标。这意味着 $T = G_\theta = G_{\theta_\pi} = G_{\theta^0}$。注意到 ψ^0 在 θ^0 之上，因此关于 π-部分特征标的 Clifford 对应告诉我们，$(\psi^0)^G$ 不可约。现在有 $\chi^0 = (\psi^G)^0 = (\psi^0)^G$，从而 $\chi^0 \in \mathrm{I}_\pi(G)$，证毕。

步骤 *2.* 映射 $\chi \mapsto \chi^0$ 是单射。

沿用上述记号，固定 $\tilde{\chi} \in \mathrm{Irr}(G|Q,\ \delta)$，其中 $\tilde{\chi}^0 = \chi^0 = \varphi \in \mathrm{I}_\pi(G)$，并且我们要证明 $\tilde{\chi} = \chi$。与步骤 1 中一样，我们可以找到以下特征标对

$$(\tilde{N},\tilde{\theta}) \le (\tilde{W},\tilde{\gamma}) \le (\tilde{T},\tilde{\psi}) \le (G,\tilde{\chi}),$$

其中 $(\tilde{N},\tilde{\theta}) \in \mathrm{N}^*(G)$，$(\tilde{W},\tilde{\gamma})$ 是 $\tilde{\chi}$ 的一个正规核，$\tilde{T}$是 $\tilde{\theta}$ 在 G 中的惯性群，$\tilde{\psi}$是 $\tilde{\chi}$ 在 $\tilde{\theta}$ 上的 Clifford 对应，Q 是 $\tilde{W}$ 的一个 Hall π'- 子群，并且 $(\tilde{\gamma}_{\pi'})_Q = \delta$。再次由引理 3.1~，~，可知 $\theta_{\pi'}$ 在 G 中不变；由引理 3.3，得到 $N = N$。此外，$(\tilde{\theta}_\pi)^0$ 和 $(\theta_\pi)^0$ 都是 φ_N 的不可约成分，因此它们在 G 中共轭。将 $\tilde{\theta}$ 替换为一个适当的共轭元后，可以假设 $(\tilde{\theta}_\pi)^0 = (\theta_\pi)^0$,，这迫使 $\tilde{\theta}_\pi = \theta_\pi$ 成立。还容易看出 $(\tilde{\theta}_{\pi'})_{Q\cap N} = \delta_{Q\cap N} = (\theta_{\pi'})_{Q\cap N}$（见引理 3.1 的证明），由引理 2.5 可得 $\tilde{\theta}_{\pi'} = \theta_{\pi'}$，进而得到 $\tilde{\theta} = \theta$。特别地，我们有 $\tilde{T} = T$。在此情形下，得到 $\tilde{\psi},\psi \in \mathrm{Irr}(T|Q,\delta)$。注意，$\tilde{\psi}^0$ 和 ψ^0 都归纳得到 φ，因此它们不可约，故位于 θ^0 之上。针对 π- 部分特征标的 Clifford 对应给出 $\tilde{\psi}^0 = \psi^0$。若 $T < G$，则由对 $|G|$ 的归纳法可得 $\tilde{\psi} = \psi$，从而 $\tilde{\chi} = \tilde{\psi}^G = \psi^G = \chi$，这正是所需结论。因此我们假设 $T = G$。由引理 2.1 得到 $N = G$，这意味着 $\tilde{\chi}$ 和 χ 都是 π-分解的且次数为 π，并且 Q 是 G 的一个 Hallπ'-子群。此外，我们有 $(\tilde{\chi}_\pi)^0 = \varphi = (\chi_\pi)^0$ 和 $(\tilde{\chi}_{\pi'})_Q = \delta = (\chi_{\pi'})_Q$。由此可得 $\tilde{\chi}_\pi = \chi_\pi$ 和 $\tilde{\chi}_{\pi'} = \chi_{\pi'}$（由引理 2.5），因此得到所需的 $\tilde{\chi} = \chi$。

步骤 *3*。映射 $\chi \mapsto \chi^0$ 是满射。

令 $\varphi \in \mathrm{I}_\pi(G|Q)$。根据引理 2.3，存在唯一的极大正规子群 N，使得 φ_N 的不可约成分具有 π-次数。我们可以选择位于 φ 之下的 $\mu \in \mathrm{I}_\pi(N)$，使得 $\eta \in \mathrm{I}_\pi(T|Q)$，其中 $T = G_\mu$，且 η 是 φ 关于 μ 的 Clifford 对应（见 [13] 的引理 6.33 或 [13] 的引理 6.33）。特别地，我们有 $\eta^G = \varphi$。

首先假设 $T < G$。对 $|G|$ 使用归纳法，存在 $\psi \in \mathrm{Irr}(T|Q,\ \delta)$，使得 $\psi^0 = \eta$。如前所述，我们有以下特征标对：

$$(M,\sigma) \le (W,\gamma) \le (T,\psi),$$

其中 $(M,\sigma) \in \mathrm{N}^*(T)$，$(W,\gamma)$ 是 ψ 的正规核，Q 是 W 的 Hall π'-子群，并且 $(\gamma_{\pi'})_Q = \delta$。根据引理 3.1，$\sigma_{\pi'}$ 在 T 中是不变的；应用引理 3.3，我们得出：M 是 T 的唯一极大正规子群，使得 η_M 的不可约成分具有 π-次数。注意，对于某个整数 e，有 $\eta_N = e\mu$，且 $\mu(1)$ 是一个 π-数，因此 $N \le M$。

此外，设 $P = Q \cap N$ and $\lambda = \delta_P$。则 P 是 N 的 Hall π'-子群，且 λ 在 G中也稳定。由引理 2.5，存在唯一一个 N 的 π'-特殊特征标 $\hat{}\lambda$，它延拓 λ。设 $\hat{}\mu$ 为 μ的π-特殊提升，并设 $\theta = \hat{}\mu\hat{}\lambda$。则 $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ 是 π-分解的，其中 $\theta_\pi = \hat{}\mu$ 且 $\theta_{\pi'} = \hat{}\lambda$。

我们断言 θ 位于 γ之下。为此，注意到 $(\gamma_\pi)^0 = \gamma^0$ 位于 $\psi^0 = \eta$ 之下，且$\eta_N = e\mu$，因此 μ 位于 $(\gamma_\pi)^0$之下。这保证了 $\hat{}\mu$ 必定位于 γ_π之下。此外，我们有

$$((\gamma_{\pi'})_N)_P = (\gamma_{\pi'})_P = \delta_P = \lambda = \hat{\lambda}_P.$$

由此可得　因此 $(\gamma_{\pi'})_N = \hat{}\lambda$ 由引理 2.5，因此 $\theta = \hat{}\mu\hat{}\lambda$ 位于 $\gamma = \gamma_\pi\gamma_{\pi'}$之下，得证　.

现在，引理3.2保证了$(N,\ \theta) \in \mathrm{N}^*(G)$。由于 λ在 G中是稳定的，根据引理3.1 可知$\hat{}\lambda$在 G 中是不变的。因此$G_\theta = G_{\hat{\mu}} = G_\mu = T$。注意，$\psi \in$不可约特征标$(T)$位于 γ之上，因此 7

位于 θ之上，所以根据 Clifford 对应， $\psi^G \in$不可约特征标(G)。根据定义， ψ 的核$(W,\ \gamma)$也是 ψ^G的核，因此 $\psi^G \in$不可约特征标$(G|Q,\ \delta)$。注意，$(\psi^G)^0 = (\psi^0)^G = \eta^G = \varphi$，结论在此情形下成立。

最后，我们考虑剩下的情形 $T = G$。根据引理 2.3， φ 具有 π-度数，而 Q 是 G的一个 Hall π'-子群。令 α 为 φ的 π-特殊提升，并令 β 为 δ 到 G 的唯一 π'-特殊扩张（见引理 2.5）。记 $\chi = \alpha\beta$，则有 $\chi \in \mathrm{Irr}(G|Q,\delta)$以及 $\chi^0 = \alpha^0 = \varphi$。此情形下结论也成立。□

作为上述定理的直接推论，我们得到以下结果，它是引言中推论 B 的π版本。

推论 3.5。 设 $\varphi \in \mathrm{I}_\pi(G|Q)$，其中 G是一个 π-可分群。若 $Q \lhd G$且 δ是 G的一个 G-不变线性特征标，则存在 φ 的唯一提升 $\chi \in$不可约特征标(G)，其 *Navarro* 顶点为(Q,δ)。

接下来给出引言中推论 C 的 π-类比。

推论 3.6. 设 G 是一个具有幂零 *Hall* π'-子群的 π-可解群，并假设 Q是 G的一个 π'-子群。若 δ是 Q的一个 G-稳定线性特征标，则 $|$不可约特征标$(G|Q,\delta)| = |$不可约特征标$(N_G(Q)|Q,\delta)|$。

证明。 由 [13](或 [11]的定理 6.2)，可得 $|\mathrm{I}_\pi(G|Q)| = |\mathrm{I}_\pi(N_G(Q)|Q)|$，结论由定理 3.4得证。□

最后，我们以一种略强的形式证明定理 D 的 π-版本。

定理 3.7. 设 G 是一个具有 $2 \in \pi$的 π-可解群，并假设 $N \lhd G$。设 $\chi \in$不可约特征标(G)是一个提升，其 *Navarro* 顶点为 (Q,δ)，并记 $P = Q \cap N$和 $\lambda = \delta_P$。假设 λ 在N中稳定。则 χ_N 的每个不可约组成成分 ψ 都是一个提升；若进一步假设 λ 在 $N_G(P)$中不变，则 $G_\psi = G_{\psi^0}$。

证明。 由引理 2.4，存在一个不可约成分 ψ，它是 χ_N 的不可约成分，并且以 (P,λ) 为 Navarro 顶点；于是定理 3.4 推出 $\psi^0 \in \mathrm{I}_\pi(N)$。

进一步假设 λ 在 $N_G(P)$中不变。记 $\eta = \psi^0$，则有 $G_\psi \le G_\eta$。为证明反向包含，取 $g \in G_\eta$。显然， P^g 和 P 都是 η的顶点，因此它们在 N中共轭。由此可得 $g \in N_G(P)N$，因此存在某个 $x \in N_G(P)$，使得 $g = xn$，且 $n \in N$。注意到 $x = gn^{-1} \in G_\eta$ 和 $N \le G_\psi$。因此，要证明 $g \in G_\psi$，只需证明 $x \in G_\psi$。现在， λ在 $N_G(P)$下不变，所以 $\psi, \psi^x \in \mathrm{Irr}(N|P,\lambda)$。再次应用定理 3.4，得到$\psi = \psi^x$，故 $x \in G_\psi$，如所求。□

致谢

本研究得到中国国家自然科学基金（编号：12171289）和山西省自然科学基金（编号：20210302123429、20210302124077）的资助。

参考文献

[1] J.P. Cossey，关于一个 p可解群的 Brauer 特征标的两个不同典范提升集的构造，《数学文献》87 (2006) 385-389.[2] J.P. Cossey，关于一个 p可解群中 Brauer 特征标提升数量的界，《代数杂志》312 (2007)，699-708.[3] J.P. Cossey，奇数阶群的 π不可约特征标的顶点，《代数通讯》36 (2008) 3972-3979.[4] J.P. Cossey，可解群中的顶点与正规子群，《代数杂志》321 (2009) 2962-2969.[5] J.P. Cossey，可解群中的顶点子群与顶点对，载于《有限群特征标理论》，《当代数学》，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，524 (2010) 17-32.[6] J.P. Cossey，M.L. Lewis，可解群中的归纳对与提升，《群论杂志》14 (2011) 201-212.[7] J.P. Cossey，M.L. Lewis，奇数阶群中的提升与顶点对，《落基山数学杂志》42 (2012) 59-69.[8] C.W. Eaton，一类块的不可约特征标的顶点，《代数杂志》286 (2005) 492-499.[9] I.M. Isaacs，《有限群特征标理论》，美国数学学会切尔西出版部，1976.[10] I.M. Isaacs，G. Navarro，π可分群的权与顶点，《代数杂志》177 (1995) 339-366.[12] I.M. Isaacs，G. Navarro，p'度的 p可解群的特征标，《代数杂志》246 (2001) 394-413.[13] I.M. Isaacs，《可解群的特征标》，罗得岛州：美国数学学会，2018.[14] A. Laradji，奇数阶群中的不可约特征标与正规子群，《代数杂志》336 (2011) 242-256.[15] M.L. Lewis，关于正规子群链的部分特征标提升，《代数与表示论》13 (2010) 661-672.[16] G. Navarro，《有限群的特征标与块》，剑桥：剑桥大学出版社，1998.[17] G. Navarro，p可解群的特征标顶点，《美国数学会汇刊》354 (2002) 2759-2773.[18] G. Navarro，p可解群中特征标亏量与局部子群，《群论杂志》5 (2002) 241-268.[19] G. Navarro，奇数阶群中的一种新特征标对应，《代数杂志》268 (2003) 8-21.[20] G. Navarro，块中的作用与特征标，《代数杂志》275 (2004) 471-480.[21] G. Navarro，模不可约特征标与正规子群，《大阪数学杂志》48 (2011) 329-332.[22] L. Wang，P. Jin，π可分群中顶点对的唯一性，《代数通讯》（在线发表）；另见 arXiv:2212.04846 [math.GR]。

数学科学学院 , 山西大学 , 太原 , 030006, 中国。
电子邮箱地址: wanglei0115@163.com

数学科学学院，山西大学，太原，030006，中国。电子邮箱地址:
jinping@sxu.edu.cn