arXiv:2302.09761v1 [math.HO] 20 Feb 2023

组合问题的间接解法

M. SHEVTSOVA、A. KANEL-BELOV 和 M. GOLAFSHAN

Abstract. 本文介绍了一种教学方法，用于求解组合问题，这些问题往往涉及陌生或不太熟悉的结构。事实上，为了避开可能阻碍我们找到正确答案和最终解法的各种问题，人们提出了一种间接方法。借助这种方法，可以构造出目标配置。这种方法不仅适用于解决奥林匹克竞赛和数学竞赛中的问题，也适用于小学数学课程中的组合与计数科学教学。

关键词： 组合数学问题求解· 数学奥林匹克竞赛·组合数学教学法· 组合数学教学· 组合数学思维阶段

MSC 2020: 97D30；97D50；97K10；97K20

1. Introduction

组合学是离散数学的一个重要分支。离散数学被定义为“当代数学中一个充满活力的分支，广泛应用于商业和工业领域”（美国数学教师理事会 [NCTM], 2000, 第31页）。组合学为处理日常生活和专业实践中的问题提供了工具，并与数学的众多分支及其他学科（例如计算机科学、通信、遗传学和统计学）密切相关。因此，从小学低年级开始直到高中阶段，都必须将组合学纳入数学课程（English，1993；NCTM，2000）。

不过，数学奥林匹克竞赛中的组合问题需要高度的机智与创造力才能解决。有些难题几乎可以凭借一个绝妙的想法彻底解决。要有信心地应对这些问题，必须事先处理过难度相近的问题。许多组合问题都有快捷而且／或者简单的解法。

然而，这并不意味着眼前的问题不难。组合学问题之所以难，往往是因为解法被巧妙地“隐藏”了。近年来，这一领域涌现出许多优秀且内容连贯的著作，其中可以提到 [1]。此外，也有关于这一主题的文章，例如 [2] 。

此外，解决组合问题与组合思维的本质有关。文章 [3] 对此进行了更深入的探讨。

1.1. 研究目的。 组合，或者说一般意义上的离散数学，是一门科学，尽管它所解决的一些问题有着古老的数学渊源。问题求解和教学都是学习这一数学分支的重要组成部分。我们尝试介绍一种方法，在一定程度上揭开组合问题的神秘面纱。

因此，本研究有两个总体且重要的目标：

1) 为教师开发并实施一种教授组合学概念和解决组合问题的教学与方法方案；**2)** 开发奥林匹克竞赛中解决组合问题的方法。

1.2. 数学背景。 此处确立了全文将使用的术语和概念。尽管你们大多数人可能已经了解这些内容，但回顾一番仍不乏趣味。

记号：我们只关注有限对象。我们采用常用的集合论符号。设 A, B 是两个有限集。$|A|$ 表示集合 A 的大小（即基数）。此外，$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ 是 A 与 B 的笛卡尔积。使用集合构造符号，$A \cup B = \{x : x \in A$ 或 $x \in B\}$。

A 的排列是一个双射 $f : A \to A$。

术语：我们将简要讨论组合学中的一些概念。

设 A, B 是两两不相交的有限集。那么

- **加法原理：** $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- **乘积原理：** $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

我们提出一个稍微复杂一些的定义。于是，含有 n 个物体，其中有 n_1 个类型1的相同物体、 n_2个类型2的相同物体、.....以及 n_k 个类型为 k的相同物体的排列数。

- **重复排列：** $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$.

更多信息和相关研究请参阅参考文献 [4]或 [5] 。

1.3. 方法论。作为数学教师和研究人员，我们推测，学习组合学概念需要一种独特的思维方式；对相关文献的综述表明，一些研究人员认同这一推测，并将其称为组合思维。我们采用了组合思维理解水平的四个层次：考察特定情境、系统地列出所有情况、将问题转化为另一个组合问题，以及理解组合推理。

对组合问题相关文献的评估使我们确信，仍需开展更多研究，以阐明组合学这一引人入胜的领域在中小学及大学数学课程中的教学与学习。

作者借鉴了他们以往的教学经验开展研究。我们在这里尝试采用一种逆向工程 的方法。在解决相关问题的每一步，我们都会提出以下一般性问题：

我在解决这个问题时，错误和困惑源自何处?

1.4. 策略。 当我们遇到一个涉及组合的问题，而这些组合与我们先前解决过的问题中的组合不同，我们就会采用这种策略并提出这个问题。最后，为了避免每一步出错，我们都会尝试针对答案设计一个问题，并逐一检查答案是否与主要问题相对应。

为了提高我们运用这一方法的熟练程度，并使讨论更加连贯，我们先以这种方式考察两个问题。随后，我们将同一策略应用于另外两个问题，并在讨论部分总结我们的发现。

2. Finding

我们先通过几个例子逐步阐明所需的方法，然后分别考察每个例子。

示例 1. 观察 Figure 1 中的点。用与正方形边平行的直线连接这些点，可以组成多少个正方形？（外层正方形除外。）

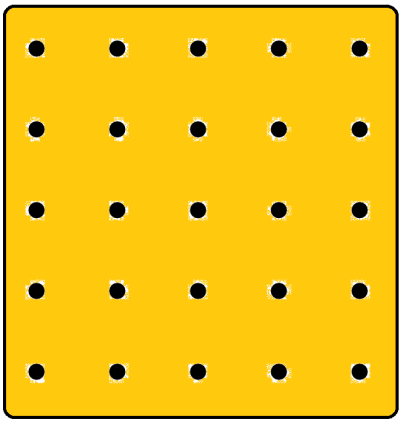

Figure 1. 整数点集合

我们的主要目标并非解决这个问题并找到答案；相反，我们希望建立一种有条理且有目的的方法，以便应用于其他问题。

步骤 i）这可能是一个措辞问题。事实上，我们只有一种形状，却不确定该把哪些部分算作它的一部分。我们知道的是要计数正方形的数量。因此，可能让我们感到困惑的第一个问题是：[1]

图中的正方形是如何配置的?

要回答这个问题，我们必须把它当作一个措辞问题来处理，在问题的表述与图中蕴含的数学概念之间建立逻辑联系。

粗略地说，正如我们从基础几何中所知，正方形由四条长度相等、相对的边彼此平行的线段组成（当然，这里考虑的是正方形内部，我们没有提到这一点

[1]“配置”一词用于描述 $\mathbb{R}^2$ 中若干点 $p_1 \dots p_n$ 及一些直线组成的有限集合。

是因为它对问题的答案没有影响）。因此，无论正方形的大小如何，我们要找的都是类似这样的东西FIGURE 2:

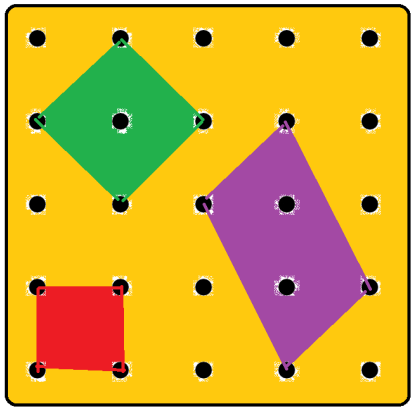

FIGURE 2. 不同几何结构中的正方形

这里有三种不同颜色的形状，分别是紫色、红色和绿色（也许还有黑色的点！）。它们各自在不同类别中都被视为正方形，但这里指的是红色正方形（为什么？）[2]。为了更准确地确定你的目标配置，还需要做一件简单、简短且至关重要的事。我们必须再次找出错误的原因，并作出相应回应。

步骤 ii) 本节原本可以作为上一节的一个小节，但由于它非常重要，我们将单独讨论。现在我们要做的是明确配置类型。不过，这需要我们仔细审视题目陈述。令我们困惑的是：

根据题意，以下哪些正方形应该计数（红色、绿色，还是两者都算）？

让我们再回顾一遍这个问题，然后将区分绿色和红色正方形的部分加粗。

下列笛卡尔坐标系中标出的点的坐标均为整数。

[2]关于紫色正方形的讨论涉及整数几何中的一些概念，超出了基础数学的范围。更多详情请参阅 [6] 。

以这些点为顶点，且边平行于坐标轴的正方形共有多少个?

因此，由于粗体部分，我们只需考虑红色正方形。不过，从教学角度来看，不妨提出这样一个问题：如果把绿色正方形也计算在内，问题会变成什么样？请学生在课堂上相互讨论。学生可以通过根据不同的数据和答案编拟问题，学习并巩固所学内容。不过，这里可以提出的问题是一个对偶问题：

示例 1′. 观察 FIGURE 3 中的点。以这些点为顶点，能构造出多少个正方形？（如需查看此问题的解答，请参阅 [7]。）

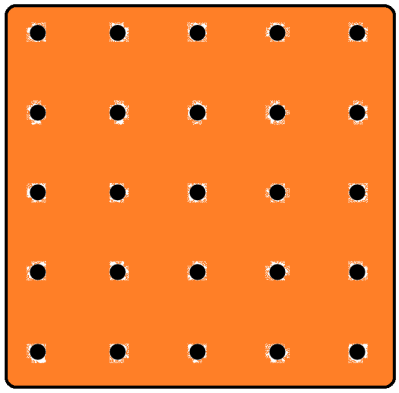

FIGURE 3. 整数点集

到目前为止，我们已经发现，无论正方形的大小如何，我们都在寻找 FIGURE 4 中的配置。



FIGURE 4. 所考虑的构型结构。

既然我们已经清楚地了解了配置结构，无论正方形的大小如何，我们都可以继续讨论这一点。

步骤 iii) 在本节中，我们将回顾正方形允许的尺寸。现在，我们有一套包含大量对象和条件的复杂设置。因此，为了简化计数，我们必须将其拆分成更小的结构。这些较小的结构是正方形，尺寸各不相同。然而，我们再次被以下问题难住：

正方形允许的尺寸是多少?

确定正方形尺寸的最简单标准是它的边长。因此，我们必须回答以下问题：哪些线段可以作为这个正方形的边？如果我们把每一行和每一列称为一条直线，那么可以说所有直线上的点都是相等的。因此，正方形的类型由作为正方形底边的线段决定（见 FIGURE 5）。

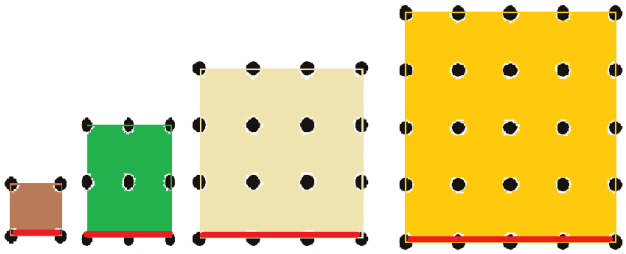

FIGURE 5. 配置中不同尺寸的正方形

根据以上内容和图示，我们发现，能够作为正方形边的两个不同水平点之间的最小距离为 1，最大距离为 4。经过三个步骤，目标配置如今已完全呈现在我们面前。

在最终讨论中，第四步，我们统计正方形的最终数量。

步骤 iv) 首先，为了便于操作，我们用 A_1、A_2、A_3和 A_4分别表示边长为 1、2、3 和 4 的正方形。因此，这个问题的数学形式如下：求所有$i = 1$、2、3、4 的 $|A_i|$。对于这些集合中的每一个，都会出现什么根本性且模糊的问题？计数之后，我们会问自己是否

我们数多了还是数少了？因此，我们面临着以下令人困惑的问题：

我们如何确定它是真的?

如果我们不是解决组合问题的专家，也不熟悉相关过程，可能会逐个数出 A_i 中的每个正方形。例如，假设我们对 A_2 做了这样的统计。在这个过程中，边长为 2 的正方形数量可能会比实际数量多，也可能少。那么，我们如何知道这个数量是少于还是多于正确数量呢？尝试根据我们给出的答案构造一个问题，是一个很好的判断准则。例如，如果你数出了 8 个边长为 2 的正方形，就问自己：如果有 8 个边长为 2 的正方形，这会是我们的配置吗？如果照此进行，我们就能在答案与目标问题之间建立一一对应。不过，为了方便并避免出错，我们可以提出以下问题：

如何开始计数？又如何按照特定规则进行计数?

为此，我们按以下方式进行：计算元素的数量A_2：在图中，设想间距为两个单位的虚拟水平轨道（见 FIGURE 6）。

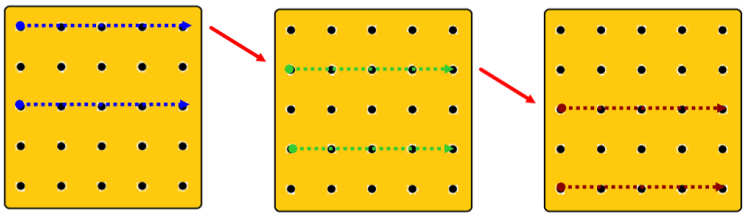

FIGURE 6. 边长为两个单位的正方形结构

根据从左到右的图形，如果将轨道向下移动一个单位，我们就有 3 对这样的虚拟轨道。蓝色、绿色和棕色轨道之间的正方形数量分别由符号A_{21}、 A_{22}和 A_{23}表示。因此， $|A_2| = |A_{21}| + |A_{22}| + |A_{23}|$. 也就是说，我们使用加法原理。由于该形状在点的数量以及轨道方面都具有对称性，我们只计算由蓝色轨道形成的正方形数量（见 FIGURE 7）。

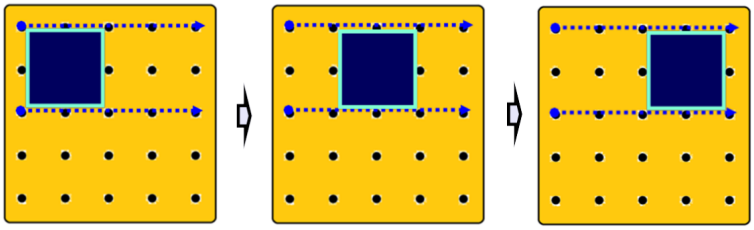

FIGURE 7. 第一种结构中边长为两个单位的正方形计数

根据图形，$|A_{21}| = 3$，依此类推 $|A_{22}| = |A_{23}|$。于是$|A_2| = 9$。如果对距离为 1、3 和 4 的虚拟轨道重复这一过程，我们会得到以下结果。距离为 1 的轨道对数为 4，并且在每一对轨道之间的一侧有 4 个正方形；因此，根据乘法原理，我们有：$|A_1| = 4 \cdot 4$。此外，$|A_3| = 2 \cdot 2$，并且 $|A_4| = 1 \cdot 1$。

最后，根据加法原理，正方形总数等于：$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$ 即 $|A| = 30$。

为了帮助你更好地理解和练习这种方法，我们将一起探讨另一个组合问题。这次，我们自然选择了一个不太知名的问题。因此，我们将以这种方式考察以下问题：

示例2. 按照以下条件，在 FIGURE 8中阅读**“Open!”**的所有可能方式有多少种：

a) 下一个字母所在的正方形必须与前一个正方形共用一条边；

b) 依次读出这些正方形中的字母，必须组成单词**“Open!”**。

	!	n	e	n	!
	n	e	p	e	n
	e	p	O	p	e
	n	e	p	e	n
	!	n	e	n	!

FIGURE 8. 文字游戏表

我们尝试采用解决上一个问题的方法，并据此得出关于这个问题的一般性结论。

步骤 i) 这是一个引人入胜的问题，也是一个绝佳的教学范例。乍看之下，这种配置的对称结构可能令人困惑，但最终却有助于我们求解。在这个问题中，根据上述条件，我们需要设法以其他方式来解读假设形式中的单词“Open!”。第一步是建立该形式与问题之间有意义且易于理解的联系。因此，首先可能令我们困惑的问题是：

图中单词“Open!”的配置是什么?

我们先考察词结构，再对形状进行同样的考察，最后将两者联系起来。

这个单词包含五个符号，更重要的是，它以“O”符号开头，并以“!”符号结尾（见 Figure9）。



Figure 9. 主构型

圆形表示符号的位置。目前，我们可以说，这种结构独立于图形的主构型而存在，并且一般结构会在与形状相互作用时显露其本质。

在 Figure 10 中，我们尝试通过指定首字母和末字母，来确定“Open!”一词可能的一种或多种读法：

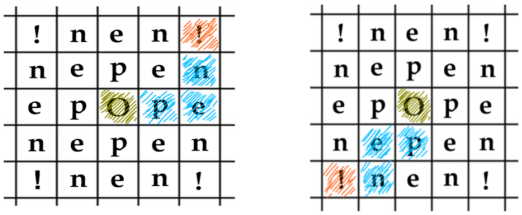

Figure 10. 构型类型

至此，这个词已完成部分配置。

步骤 ii) 这里可能令人困惑的地方（不过希望不会太令人困惑！）在于，这是否是与相关单词对应的正确形式的配置。因此，我们要关注的问题如下：

哪些单元格可以按所需方式配置，哪些单元格不能?

如前所述，务必密切关注问题的假设和条件。在这种情况下，提到了其相邻符号应当彼此相邻的单元格。这里可能让学生感到困惑的是“相邻”一词。此处的“相邻”是指两个连续符号所在的单元格必须共用一条边。也就是说，不允许出现如下结构（ FIGURE11）。

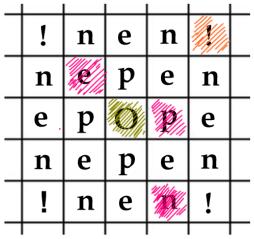

FIGURE 11. 不可接受的配置

请学生针对这一结构创编一个与我们的配置无关的问题。可以提出的问题之一如下：

示例 2′。 图中读取“**Open!**”共有多少种可能的方式，使得所读正方形中的字母序列组成单词“**Open!**”?

该配置已被精确定义。也就是说，关键在于这些符号有条件地相邻，且它们从左、上或右侧的距离并不重要。换言之，这个单词既可以从左向右读，也可以从右向左读。

步骤 iii) 本节按照法律体系对授权结构进行整理，以便我们熟悉所有构型结构。因此，在此情况下引发我们怀疑的问题如下：

这些单元格应具有何种一般结构，才能表示这个词?

如果我们注意下图，就会发现四个角上只有“!”符号，而中心只有一个“O”。因此，中心正方形必须出现在我们的结构中（见 Figure 12）。

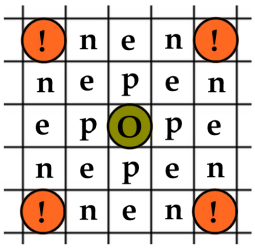

Figure 12. 共同配置特征

这意味着，橄榄色单元格必须作为第一个符号出现在每种配置中，而四个橙色单元格之一也必须出现在我们的结构中。现在，让我们来计数。

步骤 iv) 然而，这个问题让我们感到困惑:

从何处着手计数?

我们先选择“O”。我们将其固定下来，因为所有结构中都必须包含它。此外，选择“!”也很简单。我们将以其中一种情况为例。共有四种做法。

如果我们以这种方式为“!”编号：“$!_1$”、“$!_2$”、“$!_3$”和“$!_4$”，那么A_k集合就是以“$!_k$”为最后一个符号的“Open!”单词配置集合。因此，如果我们用 $|A|$表示允许的单词总数，根据加法原理，我们有

$$|A| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|.$$

另一方面，由于符号分布的对称性，我们只考虑其中一种结构。它们在FIGURE 13中用短横线表示。

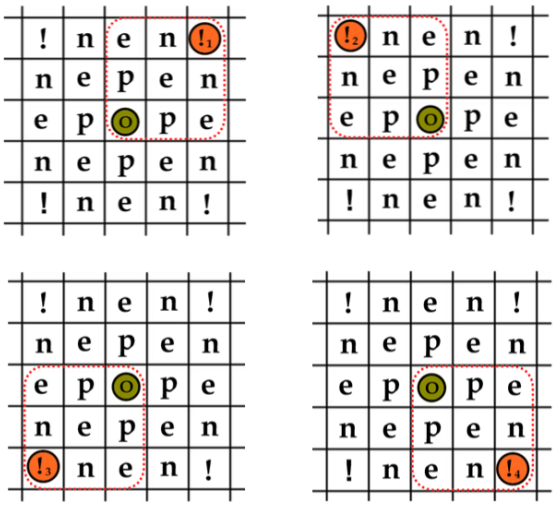

FIGURE 13. 配置的组成部分

根据乘法原理和对称性原理，我们有：$|A| = 4 \cdot |A_1|$. 因此，我们只需要计算其中一种情况。例如，可以对 A_1进行计算。然而，如何计算 $|A_1|$？如图所示，要按照所需结构从“O”到达“!”，我们必须向上移动两次并向右转两次。当然，移动发生的顺序无关紧要（为什么？）。

如果用U 表示向上移动，用R表示向右移动，那么我们必须计算UURR这一结构的排列数，即重复项的排列数：$|A_1| = 4!/2!2!$，也就是 $|A_1| = 6$。因此，总数为：$|A| = 4 \cdot 6$，也就是 $|A| = 24$。

3. DISCUSSION

如果尝试利用给出的两个例子来解决这个问题，可能会出现以下疑问：

1) 确定需要计数的对象，并考察这些对象的配置；2) 指出该配置的属性；

3) 寻找设置中的结构（例如，将对象划分为若干类）；**4)** 尝试使用乘法原理或加法原理，然后通过在所枚举的项目与该配置的组成部分之间建立一一对应关系，来验证结论。

我们针对每个步骤给出回应，试图从错误的答案中找出问题，并弄清它们为何错误。这就是我们称之为间接方法的原因（我们已将这些问题放在灰色方框中）。

最后，我们尝试针对以下问题逐一回顾每个步骤，以确保没有遗漏：

我们如何确保计数正确进行?

这些步骤无疑既耗时又令人不快，但会有所帮助。此外，成为专业人士后，我们不必总是记录自己进行的每一项操作。

4. Conclusion Remarks

正如我们之前讨论和遇到的那样，组合学被公认为较难教授和学习的数学课题之一。由于大多数问题都没有简单的解决办法，人们对于应如何着手以及采用哪种方法感到困惑。在许多情况下，对于同一个问题，两种不同的方法会得出两个不同的答案，而两者看起来都同样有说服力。除了本文所述的方法之外，还有许多其他方法可以解决组合谜题；当这些谜题颇具挑战性时，这种方法或许会有所帮助。在教师开展组合学教学之初，也可以将其用作一种教学策略。

最后，作者希望今后进一步研究与离散数学和组合数学教学相关的问题。

致谢。 Alexei Kanel-Belov 获俄罗斯科学基金会项目 22-11-00177 资助。

References

[1]P. Sober´on.《组合学问题求解方法——奥林匹克竞赛问题的一种研究途径》。Birkh¨auser（2013）。DOI：10.1007/978-3-0348-0597-1。[2]M. M. Eizenberg 和 O. Zaslavsky。《学生验证组合问题的策略》。数学思维与学习，第 6 卷（2004）：15-36。DOI：10.1207/s15327833mtl0601-2。[3] Y. M. Hidayati、C. Sa'dijah 和 S. A. Qohar。《运用组合思维解决选择题型中的组合学问题》。国际学习、教学与教育研究期刊，第 18 卷（2019）：65-75。DOI：10.26803/IJLTER.18.2.5。[4] M. Bona。《组合数学漫步：枚举与图论导论》。世界科学出版社（2006）。DOI：10.1142/10258。[5]M. Keller 和 W. Trotter。《应用组合数学》。美国数学研究所（2017）。ISBN：13: 9781973702719。[6] O. N. Karpenkov。《连分数几何》。AACIM，第 26 卷，施普林格，柏林、海德堡（2022）。DOI：10.1007/978-3-662-65277-0。[7]T. Andreescu 和 Z. Feng。《本科生组合学入门——计数策略》。Birkh¨auser（2004）。DOI：10.1007/978-0-8176-8154-8。Margarita Shevtsova：
Department of Discrete Mathematics, Moscow institute of physics and technology, Dolgoprudny 141700, Russia.电子邮箱：shevtsova.ma@phystech.edu Alexei Kanel-Belov：
Department of Discrete Mathematics, Moscow institute of physics and technology, Dolgoprudny 141700, Russia.电子邮箱：kanelster@gmail.com Mehdi Golafshan：
Department of Discrete Mathematics, Moscow institute of physics and technology, Dolgoprudny 141700, Russia.电子邮箱：m.golafshan@phystech.edu