arXiv:2302.09768v1 [math.CO] 20 Feb 2023

旗传递对称设计的约化 $k > \lambda(\lambda - 2)$

Jianfu Chen*、Jiaxin Shen†、Shenglin Zhou‡

摘要

设 G 是一个（v, k, λ）对称设计 $\mathcal{D}$ 的旗传递自同构群，其中 $k > \lambda(\lambda - 2)$。O'Reilly Regueiro 证明，若 G 是点非本原的，则 $\mathcal{D}$ 的参数为（v, k, λ）$=$（$\lambda^2(\lambda+2)$ $\lambda(\lambda+1)$ λ）。本文研究 G 为点本原的情形。通过应用 O'Nan-Scott 定理，我们证明 G 必为仿射型或几乎单型。

数学主题分类（2020）：05B05，05B25，05E18，20B25

关键词：对称设计，旗传递，自同构群，本原

日期：2022年10月27日

1 引言

本文为旗传递对称设计的分类作出了贡献。我们考虑满足条件 $k > \lambda(\lambda - 2)$ 的对称设计。O'Reilly Regueiro [14] 证明，满足 $k > \lambda(\lambda - 2)$ 的旗传递、点非本原对称设计具有参数 $(v, k, \lambda) = (\lambda^2(\lambda + 2)\ \lambda(\lambda + 1)\ \lambda)$。随后，Praeger 和 Zhou [12] 以及 Montinaro 最近的一篇预印本 [10] 改进了这一结果。因此，研究点本原情形自然且十分重要。本文通过应用有限本原置换群的 O'Nan-Scott 定理，证明满足 $k > \lambda(\lambda - 2)$ 的对称设计的旗传递点本原自同构群必为仿射型或几乎单型。2019年，Alavi、Daneshkhah 和 Okhovat [1] 研究了一个更强的条件：$k > \lambda^2$ 且 λ 整除 k。

*南方科技大学数学系，深圳 518055，中国；电子邮箱：jmchenjianfu@126.com

†五邑大学数学与计算科学学院，江门 529020，中国；电子邮箱：shenjiaxin1215@163.com

‡华南理工大学数学学院，广州 510641，中国；电子邮箱：slzhou@scut.edu.cn

他们也得到了类似的约化结果。因此，借助一些新技术和观察，本文实际上改进了他们的结果。

一个 2-(v,k,λ) 设计是一个关联结构 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$，由一个含有 v 个元素（称为点）的集合 $\mathcal{P}$，以及 $\mathcal{P}$ 的一个由 k 元子集（称为块）组成的集合 $\mathcal{B}$ 构成，并且任意两个点恰好包含在 λ 个块中。我们用 b 表示 $\mathcal{D}$ 的块数。经过一个点的块数是一个与点的选择无关的常数，记为 r。这些整数 v、k、λ、r 和 b 称为 $\mathcal{D}$ 的参数。如果点数 v 等于块数 b，则称 2-设计为对称设计。2-设计的自同构群 G 是点集 $\mathcal{P}$ 上的一个置换群，并保持块集 $\mathcal{B}$ 不变。若自同构群 G 在关联点块对 $\{(\alpha,B):\alpha\in\mathcal{P},B\in\mathcal{B}\}$ 的集合上可迁，则称其为旗传递；若 G 在 $\mathcal{P}$ 上本原（或非本原）作用，则称其为点本原（或点非本原）。关于 2-设计的更多基本事实，[3, Chapter 3]、[4, Chapter II] 和 [6, Section 2.1] 可供参考。

我们的主要结果如下：

定理. 若 $\mathcal{D}$ 是一个具有 $k>\lambda(\lambda-2)$ 的对称设计，且其自同构群 G 旗传递，则下列情形之一成立：

(a) G 是仿射型或几乎单型的点本原设计；

(b) G 是点非本原的，且 $\mathcal{D}$ 具有参数 $(v,k,\lambda)=(\lambda^2(\lambda+2),\ \lambda(\lambda+1),\ \lambda)$。若 G 置换了大小为 c 的 d 个非本原类，则存在常数 ℓ，使得对于每个区块 B 以及每个非本原类 Δ，$|B\cap\Delta|=0$ 或 ℓ，有 $(c,d,\ell)=(\lambda^2,\lambda+2,\lambda)$ 或 $(\lambda+2,\lambda^2,2)$。

2 预备知识

下面的引理 2.1 给出了 2-设计众所周知的基本算术性质。

引理 2.1. [6, 第 2 节。1] 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计。则有以下结论：

(a) $\lambda(v-1)=r(k-1)$; (b) $bk=vr$;
(c) $b\geq v$ 和 $r\geq k$(Fisher不等式); (
d) $r^2>\lambda v$。

如果 $\mathcal{D}$ 是一个对称的度量设计，那么这些算术性质可归结为以下 g:

(a') $\lambda(v-1)=k(k-1)$;

(c′) $b = v$ 和
$r = k$；(d′) $k^2 > \lambda v$。

引理 2.2 和 2.3 是旗传递自同构群的重要性质。

引理 2.2。 设 G 是一个 2-设计的自同构群。则有以下结论 :

(a) G 是旗传递的，当且仅当 G 在 $\mathcal{B}$ 上传递，且对于任意块 $B \in \mathcal{B}$，块稳定子群 G_B 在 B 上传递；(b) G 是旗传递的，当且仅当 G 在 $\mathcal{P}$ 上传递，且对于任意点 $x \in \mathcal{P}$，点稳定子 G_x 在经过 x 的块上传递。

引理 2.3。 [5, p.1] 若 G 是一个 2-设计的旗传递自同构群，且 Γ 是 G 的一个非平凡子轨道，则 $r \mid \lambda|\Gamma|$。

下面的引理给出了对称设计的非平凡自同构的不动点数目的一个上界，该引理将在定理的证明中使用。

引理 2.4. [8, p.81] 设 $\mathcal{D}$ 是一个（v, k, λ）对称设计，且 g 是 $\mathcal{D}$的一个非平凡自同构。那么 g 至多固定 $k + \sqrt{k - \lambda}$ 个点。

定理的证明依赖于 O'Nan-Scott 定理（引理 2.5）。该定理给出了有限本原置换群的分类，指出有限本原置换群在置换意义下同构于以下五种类型之一。

引理 2.5.（O'Nan-Scott 定理 [9]）若 G 是一个有限本原置换群，则 G属于以下类型之一:

(a) 仿射型；(b) 几乎单型；(c)
单对角型；(d) 乘积型；(e) 扭
曲 wreath 积型。

3 定理的证明

设 G 是一个对称设计的旗传递自同构群，其中 $k > \lambda(\lambda - 2)$。根据 O'Nan-Scott 定理（引理 2.5），证明定理(a)的策略是排除引理 2.5(c)、(d) 和 (e) 中的各类群。这些内容分别在第 3.1—3.3 节中处理。对于定理(b)，即 G 是点非本原的情形，只需直接应用由 Praeger 和 Zhou 得到的 $[12,$ 定理 1.$1]$，即可轻易证明。

我们认为，用于排除单对角型（第 3.1 节）和乘积型（第 3.2 节）的技巧和观察，或许也能以某种方式应用于研究满足其他条件的设计。

我们先给出以下引理 3.1，它是证明中的一个重要算术观察。

引理 3.1. 如果一个 (v, k, λ) 对称设计满足 $k > \lambda(\lambda - 2)$，那么 $\frac{k}{\lambda} > \sqrt{k+1} - 1$。

证明。关于 λ 解二次不等式 $k > \lambda(\lambda - 2)$，可得 $\lambda < \sqrt{k+1} + 1$。于是

$$\frac{k}{\lambda} > \frac{k}{\sqrt{k+1}+1} = \frac{k(\sqrt{k+1}-1)}{(\sqrt{k+1}+1)(\sqrt{k+1}-1)} = \sqrt{k+1} - 1,$$

这就证明了该引理。 □

下面的引理 是排除单对角型和乘积型的有力工具。

引理 3.2. 设 G 是一个 2-设计的旗传递、点本原自同构群。则有以下结论：

(a) 若 G 是带有 $v = v_0^m$ 的乘积型，且 Soc(G) =Soc(H)^m ($m \geq 2$)，其中 H 是作用在 v_0 个点上的几乎单型或单对角型本原群，则 $r \mid \lambda m(v_0 - 1)$；

(b) 若 G 是单对角型，且 Soc(G) $= T^m$ ($m > 2$)，其中 T 是非阿贝尔单群，则 $r \mid \lambda m$ ($|T| - 1$)。

证明。(a) 已在 $[14,$ 引理 $4]$ 中证明。我们用类似的方法证明 (b)。

设 G 是单对角型的本原群。则 Soc(W) $\leq G \leq W$。这里 $W = \{(a_1, \ldots, a_m)\pi :$ $a_i \in$ Aut(T) $\pi \in S_m, a_i \equiv a_j$ (mod Inn(T))}，其中 $\pi \in S_m$ 通过将 a_i 移至第 i^π 个坐标来置换各个分量 a_i。W 的基底为 Soc(W) =$\{(a_1, a_2, \ldots, a_m) : a_i \in$ Inn(T)$\}$。W 的本原作用定义为对陪集子群 $D = \{(a, ..., a)\pi : a \in$ Aut(T) $\pi \in S_m\} \cong$ Aut(T) $\times S_m$ 的右陪集表示。记 Soc(W) $= T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_m$，其中 $T_i = \{(1, \ldots, 1, a, 1, \ldots, 1) : a \in$ Inn(T)$\}$（a 位于第 i 个位置）。

设 α 是对应于陪集 D 的点，并设 $\Gamma_i = \alpha^{T_i}$。由于 T_i 在 $\mathcal{P}$ 上半正则， T_i 在 Γ_i 上正则。因此 $|\Gamma_i| = |T|$。接下来证明 $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \{\alpha\}$。事实上，对于 $t_1 \in T_i$，$t_2 \in T_j$，当且仅当 $t_1 t_2^{-1} \in W_\alpha = D$ 时， $\alpha^{t_1} = \alpha^{t_2}$ 。注意 $m \geq 3$。 $t_1 t_2^{-1}$ 中存在一个（不在第 i 和第 j 个位置的）分量为 1。因此 $t_1 t_2^{-1}$ 的每个分量都是 1，这意味着 $t_1 = t_2 = 1$ 和 $\alpha^{t_1} = \alpha^{t_2} = \alpha$。

由于 G 通过共轭作用置换 $\{T_i\colon i = 1, 2, \ldots, m\}$，容易证明 G_α 固定所有 Γ_i 中点的并集，记作 Σ。于是 $|\Sigma| = m(|T| - 1) + 1$。注意， $\Sigma \setminus \{\alpha\}$ 是 G_α 的若干非平凡轨道的并。由引理 2.3，得 $r \mid \lambda m(|T| - 1)$。□

3.1 G不是单对角型

命题 3.1. 若 G 是对称设计的旗传递、点本原自同构群，且 $k > \lambda(\lambda - 2)$，则 G 不是单对角型。

为处理单对角情形，我们将考察有限单群的一些性质。设 T 是一个有限非阿贝尔单群。引理 3.3 给出一个事实：只有 $T =$PSL$_3$(4) 满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$。这里，Out($T$) 是外自同构群 Aut($T$)/$T$。我们通过应用有限单群分类并考察 T 和 Out(T) 的阶来证明此引理（例如参见 [7, Table 5.1.A and Table 5.1.B]）。

引理 3.3. 若 T 是一个满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$ 的有限非阿贝尔单群，则 $T \cong$ PSL$_3$(4)。

证明。下面我们将逐一考察所有非阿贝尔单群。

I. T 是一个满足 $n \geq 5$ 的交错群 A_n。若 $n \neq 6$，则 $|T| = |A_n| = {}^{n}! \cancel{2}$， $|\mathrm{Out}(T)| = 2$。若 $n = 6$，则 $|\mathrm{Out}(T)| = 4$。这些群均不满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$。

II. T 是一个散在单群。注意，对于所有此类 T， $|\mathrm{Out}(T)| = 1$ 或 2。显然，$|T| > 16 \geq |\mathrm{Out}(T)|^4$。

III. T 是一个有限单群。

(a) $T \cong$PSL$_n(q)$。这里 $q = p^f$， $n \geq 2$。若 $n = 2$，则 $|\mathrm{Out}(T)| = f \cdot gcd(2, q-1)$。根据 [2, 推论 4.3](i)，可得 $q^2 = q^{n^2-2} < |T| < |\mathrm{Out}(T)|^4 \leq f^4 \cdot (gcd(2, q-1))^4$。若 $p = 2$，则由 $4^f = q^2 < f^4$ 可知，只有 $f = 3$ 是可能的。若 $p > 2$，则由 $p^{2f} < 2^4 f^4$ 可得 $p = 3$ 和 $f \in \{1, 2, 3\}$。检查这些情形可知，这些群均不满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$。若 $n = 3$，则 $|\mathrm{Out}(T)| = 2f \cdot gcd(3, q-1)$。现在 $q^7 = q^{n^2-2} < |T| < 16 f^4 q^4$。由此可得 $p = 2$ 和 $f \in \{1, 2, 3\}$。只有 $T =$PSL$_3$(4) 满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$。若 $n \geq 4$，则 $|\mathrm{Out}(T)| = 2f \cdot gcd(n, q-1)$。于是 $q^{14} \leq q^{n^2-2} < |T| < 16 f^4 q^4$，从而 $p^{10f} < 16 f^4$，这不可能。

(b) $T \cong$PΩ$_n(q)$。这里 $q = p^f$ 为奇数， $n \geq 7$ 且 $|\mathrm{Out}(T)| = 2f$。根据 [2, 推论 4.3](iv)，有 $\frac{q^{21}}{8} \leq \frac{q^{\frac{1}{2}n}}{8} < |T| < 16 f^4$。简单计算表明这是不可能的。

(c) $T \cong \mathrm{PSp}_n(q)$。这里 $q = p^f$、 $n \geq 4$以及 $|\mathrm{Out}(T)| = f \cdot gcd(2, q-1)$当 $n > 4$，且$|\mathrm{Out}(T)| = 2f$当 $n = 4$。根据 [2,推论 4.3](iii)，有 $\frac{q^{10}}{4} \leq \frac{q^{\frac{1}{2}n}}{2 \cdot gcd^{(n+1)}(2,\ q-1)} \leq |T| \leq |\mathrm{Out}(T)|^4 \leq 16f^4$，这是不可能的。

(d) $T \cong {}^{\epsilon}_{n}\, q$ $q = p^f$ $\epsilon = \pm$ $n \geq 8$ $|T| \leq 6f \cdot gcd\ 4\ q^{\frac{n}{2}} - \epsilon \leq 24f$ [2, 4 3] $\frac{q^{28}}{8} \leq \frac{q^{\frac{1}{2}n\ n-1}}{8} < |T| < |T|^4 \leq 24^4 f^4$ PΩ( )，此处 ，且 。注意，Out( ) (,) 。由推论 . (iv)，我们有 $_{()}$Out( ) 。不等式 $\frac{q^{28}}{8} < 24^4 f^4$ 无解。

(e) $T \cong \mathrm{PSU}_n(q)$，其中 $q = p^f$, $n \geq 3$。此外， $|\mathrm{Out}(T)| = 2f \cdot gcd(n, q+1)$。由 [2,推论 4.3](ii)，我们有 $|T| > (q-1)q^{n^2-3}$。若 $n = 3$，则 $p^{6f} = q^6 < |T| < |\mathrm{Out}(T)|^4 \leq 2^4 \cdot 3^4 f^4$。只有 $\mathrm{PSU}_3(3)$ 和 $\mathrm{PSU}_3(4)$ 满足不等式 $p^{6f} < 2^4 \cdot 3^4 f^4$。但它们都不满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$。若 $n \geq 4$，则 $(q-1)q^{13} < |T| < |\mathrm{Out}(T)|^4 \leq 2^4 f^4 (q+1)^4$。因此 $q^{13} < \frac{2^4 f^4 (}{q-1}^{q+1\ 4} < 64 f^4 q^{3)}(q+1)$。由此立即可得 $q^9 < 128 f^4$，而该式无解。

IV. T 是一个李型例外群。

(a) T是一个铃木群 ${}^2B_2(q)(q = 2^f)$，或李群 ${}^2G_2(q)(q = 3^f)$。那么 $|\mathrm{Out}(T)| = f$且 $|T| > q^4$。由 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$可得 $q < f$，这是不可能的。

(b) $T \cong G_2(q)$。这里 $|T| = q^6(q^6-1)(q^2-1)$，且 $|\mathrm{Out}(T)| \leq 2f$。显然， $q^{12} < q^6 q^5 (q+1) \lhd |T| < |\mathrm{Out}(T)|^4 \leq 16 f^4$，这是不可能的。

(c) 若 T 同构于以下群之一： $F_4(q)$、 $E_6(q)$、 $E_7(q)$、 $E_8(q)$、${}^3D_4(q)$、 ${}^2E_6(q)$和 ${}^2F_4(q)$。则 T的阶很大，满足 $|T| > q^{20}$。此外， $|\mathrm{Out}(T)| \leq 6f$。因此 $q^{20} < |T| < |\mathrm{Out}(T)|^4 \leq 1296 f^4$，此方程无解。□

命题 3.1 的证明。反设 G 是单对角型的点本原群，在对称设计 $\mathcal{D}$ 上作为旗传递自同构群作用，其中$k > \lambda(\lambda - 2)$。由引理 3.2，若 $m \geq 3$，则存在整数 a，使得

$$ka = m\lambda(|T| - 1).$$

于是 $\frac{k}{(k, \lambda)} \mid m(|T| - 1)$。由引理 3.1，

$$\sqrt{k+1} - 1 < \frac{k}{\lambda} \leq \frac{k}{(k, \lambda)} \leq m(|T| - 1).$$

So

$$k < (m|T| - m + 1)^2 - 1 = m^2|T|^2 + (m-1)^2 - 2m|T|(m-1) - 1 < m^2|T|^2.$$

由引理 2.1(d′)，可得

$$|T|^{m-1} = v \leq \lambda v < k^2 < m^4 |T|^4,$$

由此可得

$$|T|^{m-5} < m^4.$$

由于 T 是一个非阿贝尔单群，因此 $|T| \geq 60$。由此可知 $m \leq 6$。

若 x 是整数，我们用 $x_{2'}$ 表示 x的最大奇因子。下面我们证明 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4$。

由引理 2.1(a′)，可得

$$\frac{k}{(k,\lambda)} \text{ divides } v-1 = |T|^{m-1}-1,$$

这意味着($^k(k,\lambda)$ $\frac{|T|}{}$) $= 1$。此外，$^k(k,\lambda)$是奇数，因为 T是一个阶为偶数的非阿贝尔单群。注意，单对角型置换群的点稳定子嵌入于$\mathrm{Aut}(T) \times S_m$中，这意味着 $|G_x|$ 整除 $m!|\mathrm{Aut}(T)|$。由引理 2.2(b)， $k \mid m!|\mathrm{Aut}(T)|$。注意， $|\mathrm{Aut}(T)| = |T||\mathrm{Out}(T)|$。因此， $k \mid m!|T||\mathrm{Out}(T)|$ ，且我们有k (k,λ) $\mid m!|\mathrm{Out}(T)|$。因此

$$\sqrt{k+1}-1 < \frac{k}{\lambda} \leq \frac{k}{(k,\lambda)} \leq (m!|\mathrm{Out}(T)|)_{2'}.$$

注意，

$$((m!|\mathrm{Out}(T)|)_{2'}+1)^4 < 100(m!|\mathrm{Out}(T)|)_{2'}^4.$$

由于 $\lambda \leq 100$ 已在 [15], 中研究过，我们在此假设 $\lambda > 100$ 。由引理 2.1(d′)，可得

$$100|T|^{m-1} = 100v < \lambda v < k^2 < (k+1)^2 < 100(m!^4|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'}.$$

Thus

$$|T|^{m-1} < (m!^4|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'}.$$

若 $m=2$，则显然有 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4$。

若 $m=3$，则 $|T|^2 < (3!^4|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'} = 81|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4$。若 $T \cong A_5$，则该不等式显然不成立。由于第二小的非阿贝尔单群 PSL(2, 7) 的阶为 168，因此有 $|T| \geq 168$。由此可得 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4$。

若 $m=4$，则

$$|T|^3 < (4!^4|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'} = 81|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4 < |T|^2|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4,$$

从而得到 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4$。

若 $m=5$，则有

$$|T|^4 < (5!^4|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'} = 15^4|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4 < |T|^3|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4.$$

同样可得 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4$。

如果 $m=6$，那么

$$|T|^5 < (6!^4|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'} = 45^4|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4 < |T|^4|\mathrm{Out}(T)|_{2'}^4.$$

因此，对于每个 $m \leq 6$，$|T| < (|\mathrm{Out}(T)|^4)_{2'}$。

根据引理 3.3，满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4$ 的唯一非阿贝尔单群是 $\mathrm{PSL}_3(4)$。但是，$|\mathrm{PSL}_3(4)| = 20160$ 且 $|\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}_3(4))| = 12$，因此它们不满足 $|T| < |\mathrm{Out}(T)|^4_{2'}$。因此，$G$ 不可能是单对角型，命题得证。□

3.2 G 不是乘积型

设 G 是一个乘积型本原置换群，在 $\mathcal{P}$ 上作用。那么 $\mathcal{P}$ 可视为集合 Δ 的笛卡尔积，即 $\mathcal{P} = \Delta \times \cdots \times \Delta = \Delta^m$，其中 $|\Delta| \geq 5$。群G 满足 $\mathrm{Soc}(H)^m \leq G \leq H \wr S_m$，其中 H 是一个在 Δ 上作用的几乎单型或单对角型本原群，且 $\mathrm{Soc}(G) = \mathrm{Soc}(H)^m \trianglelefteq G$。这里，$H \wr S_m$ 通过乘积作用在 $\mathcal{P}$ 上作用；也就是说，对于任意的 $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{P}$ 和 $(g_1, g_2, \ldots, g_m)\pi \in G$，$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^{(g_1,g_2,\ldots,g_m)\pi} = (\alpha_{1^{\pi^{-1}}}^{g_{1^{\pi^{-1}}}}, \alpha_{2^{\pi^{-1}}}^{g_{2^{\pi^{-1}}}}, \ldots, \alpha_{m^{\pi^{-1}}}^{g_{m^{\pi^{-1}}}})$。我们将 $|\Delta|$ 记作 v_0（因此 $v = v_0^m$），并将 $\mathrm{Soc}(H)$ 记作 K。下文将证明，满足$k > \lambda(\lambda - 2)$ 的对称设计的旗传递自同构群不可能是乘积型。

命题 3.2. 若 G 是一个对称设计的旗传递、点本原自同构群，且该设计具有 $k > \lambda(\lambda - 2)$，则 G 不是乘积型。

证明. 反设 G 是乘积型的点本原群，并作为自同构群旗传递地作用于具有 $k > \lambda(\lambda - 2)$ 的对称设计 $\mathcal{D}$。

断言 1. $v_0^{m-1} < \frac{k+\sqrt{k}}{2}$。

令 $x = (\alpha, \alpha, \ldots, \alpha) \in \mathcal{P} = \Delta^m$。设 $K_1 = \{(t, 1, 1 \ldots, 1) : t \in K\} \leq \mathrm{Soc}(G)$。那么 $(K_1)_x$固定每个形如 $(\alpha, \beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_{m-1})$ 的点，其中 $\beta_i \in \Delta$。由 O'Nan-Scott 定理可知，几乎单型或单对角型本原群的基底不是正则的，即 $K_\alpha \neq 1$。此外，K_α 在 $\Delta \setminus \{\alpha\}$ 上不是半正则的。否则，由于 K 在 Δ 上传递，K 在 Δ 上作为 Frobenius 群作用。注意，K 的极小正规子群是非阿贝尔单群的直积。然而，Frobenius 群具有非平凡的幂零正规子群，这意味着 K 的极小正规子群是初等阿贝尔群，矛盾。因此，存在一个非平凡元素 $t_1 \in K_\alpha$，固定一个不同于 α 的点 γ。

设 $g = (t_1, 1, 1, \ldots, 1)$。显然，$g \in (K_1)_x$。此外，$g$ 固定了所有形如 $(\gamma, \delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_{m-1})$ 且满足 $\delta_i \in \Delta$ 的点。现在我们有 $|\mathrm{Fix}(g)| \geq 2v_0^{m-1}$。由引理 2.4，得到

$$2v_0^{m-1} \leq |\mathrm{Fix}(g)| \leq k + \sqrt{k - \lambda} < k + \sqrt{k}.$$

因此，断言得证。

断言 2. $m \in \{2, 3\}$。

由引理 3.2，存在一个整数 a，使得

$$ka = \lambda m(v_0 - 1). \tag{3.1}$$

由引理 3.1 和方程（3.1），我们有

$$\sqrt{k+1} - 1 < \frac{k}{\lambda} \leq \frac{k}{\lambda}a = m(v_0 - 1). \tag{3.2}$$

由断言 1 可得

$$2v_0^{m-1} < k + \sqrt{k} < \sqrt{k}(\sqrt{k} + 1) < (\sqrt{k} + 1)^2.$$

由此得到 $k > (\sqrt{2v_0^{m-1}} - 1)^2$。将其代入不等式 3.2，得到

$$\sqrt{2v_0^{m-1} - 2\sqrt{2v_0^{m-1}} + 2} - 1 < \sqrt{k+1} - 1 < m(v_0 - 1). \tag{3.3}$$

这给出

$$\sqrt{2v_0^{m-1} - 2\sqrt{2v_0^{m-1}} + 2} - 1 < m(v_0 - 1). \tag{3.4}$$

由于 Δ 是 K 的传递集合，而 K 是若干非阿贝尔单群的直积，因此我们有 $v_0 \geq 5$。容易看出，如果 $m = 2$ 或 3，则对所有 $v_0 \geq 5$，不等式 3.4 均成立。

若 $m = 4$，则可得只有 $v_0 = 5$ 或 6 满足不等式 3.4。在这两种情况下，分别有 $v = v_0^4 = 5^4$ 或 6^4, 。假设 $v_0 = 5$。由不等式 (3.3) 可得

$$13.8 < \sqrt{2 \times 5^3 - 2\sqrt{2 \times 5^3} + 2} - 1 < \sqrt{k+1} - 1 < 4(v_0 - 1) = 4 \times 4 = 16,$$

由此得到 $218 < k < 288$。此外，$K \cong A_5$ 且 $G \leq S_5 \wr S_4$，其中 $S_5 \wr S_4$ 通过乘积作用作用于 $\mathcal{P}$。注意，点稳定子 G_x 是 $(S_5 \wr S_4)_x \cong S_4 \wr S_4$ 的子群，其阶为 $(4!)^5$。由引理 2.2(b)，可知 k 整除 $|(S_5 \wr S_4)_x|$。于是 $k \in \{243, 256\}$，因为 $218 < k < 288$。然而，由引理 2.1(a′) 可得 $\lambda = {}^{k}_{(k-1)\ v-1}$，这不是一个整数。若$v_0 = 6$,~~则由~~不等式 (3.3) 可得 $18.8 < \sqrt{k+1} - 1 < 20$。因此 $391 < k < 440$。由于k 整除 $|(S_6 \wr S_4)_x| = |S_5 \wr S_4|$，可得 $k \in \{400, 405, 432\}$。同样，这些都不满足$v - 1 \mid k(k-1)$。因此 $m \neq 4$。

如果 $m > 4$，那么不等式 3.4 无解。因此只有 $m \in \{2, 3\}$ 是可能的。

断言 3. $\lambda = {}^{a^2}_{(v_0^{m-1}+v_0^{m-2}+\ldots+v_0+1)m^2\ v_0-1}{}^{+ma}_{()}$。

方程（3.1）推出 $k = \frac{\lambda m}{(v_0-1)}$。将 k 和 $v = v_0^m$ 代入引理 2.1(a′) 中的方程，得到

$$\frac{\lambda m(v_0-1)}{a}\Big(\frac{\lambda m(v_0-1)}{a}-1\Big) = \lambda(v_0^m-1).$$

Then

$$\frac{m}{a}\Big(\frac{\lambda m(v_0-1)}{a}-1\Big) = v_0^{m-1}+v_0^{m-2}+\ldots+v_0+1. \tag{3.5}$$

化简方程可得 λ 的表达式。

断言 4. $v_0-1 \mid ma(a+1)$。

根据断言 3，我们有

$$m^2\lambda = \frac{a^2(v_0^{m-1}+v_0^{m-2}+\ldots+v_0+1)+ma}{v_0-1}. \tag{3.6}$$

由此可得

$$m^2\lambda = a^2v_0^{m-2}+2a^2v_0^{m-3}+\ldots+(m-2)a^2v_0+(m-1)a^2+\frac{ma^2+ma}{v_0-1}.$$

由于 m、a、v_0 是正整数，$\frac{ma^2+ma}{v_0-1}$ 是正整数，因此 v_0-1 整除 ma^2+ma。

断言 5. $1 \le a < \frac{m}{\sqrt{5m-9}}\sqrt{\lambda}$。

改写方程（3.5），得到

$$m^2\lambda v_0 - a^2(v_0^{m-1}+v_0^{m-2}+\ldots+v_0) = m^2\lambda+a^2+ma.$$

由此可得

$$m^2\lambda - a^2(v_0^{m-2}+\ldots+v_0+1) = \frac{m^2\lambda+a^2+ma}{v_0} > 0.$$

由 $v_0 \ge 5$ 和 $m \ge 2$ 可得

$$a^2(5(m-2)+1) \le a^2(v_0^{m-2}+\ldots+v_0+1) < m^2\lambda.$$

因此，

$$a < \frac{m}{\sqrt{5m-9}}\sqrt{\lambda}.$$

断言 6. $1 \le a < \frac{m^4+m\sqrt{m^6+\frac{(20m-36)(m^2+2)}{10m-18}}}{}$.

由方程（3.1）和 $k > \lambda(\lambda - 2)$ 可得

$$\lambda(\lambda - 2)a < ka = m\lambda(v_0 - 1).$$

由断言 5，我们得到

$$\lambda > \frac{5m - 9}{m^2}a^2.$$

将此与断言 4 结合，便可得到

$$\big(\frac{(5m - 9)a^2}{m^2} - 2\big)a < (\lambda - 2)a < m(v_0 - 1) \leq m^2a(a + 1).$$

Thus

$$(5m - 9)a^2 - 2m^2 < m^4(a + 1).$$

关于 a 解这个二次不等式，便可得到

$$\frac{m^4 - m\sqrt{m^6 + (20m - 36)(m^2 + 2)}}{10m - 18} < a < \frac{m^4 + m\sqrt{m^6 + (20m - 36)(m^2 + 2)}}{10m - 18}.$$

由于上述不等式左边为负，而 a 非负，因此断言 6 立即成立。

最终矛盾。由断言 2 可知， m 只能是 2 或 3。我们采用以下步骤确定所有可能的三元组 (v, k, λ):

步骤 1. 由断言 6，当 $m = 2$ 时，我们有 $1 \leq a \leq 17$；当 $m = 3$ 时，我们有 $1 \leq a \leq 14$。步骤 2. 由断言 4，根据给定的 m 和 a 确定 v_0 的可能取值。步骤 3. 由断言 3，根据给定的 m、 a 和 v_0 确定 λ 的可能取值。步骤 4. 根据给定的 m、 a、 v_0 和 λ，利用方程（3.1）确定 k。步骤 5. 对每个可能的三元组 (v, k, λ)，验证 $k > \lambda(\lambda - 2)$ 是否成立。

完成上述 5 个步骤后，我们发现唯一可能的三元组为 (v, k, λ) =(16, 6, 2)、(121, 25, 5) 和 (441, 56, 7)。当然，这三种情形在 [14] 和[15]中均被排除。因此，我们得出结论： G 不可能是乘积型。□

3.3 G 不是扭曲 wreath 积型

任意 2-设计（不一定是对称的）的旗传递、点本原自同构群 G都不可能是扭曲 wreath 积型。否则， G 的基底 Soc(G) 是 G的点正则正规子群。然而，Zieschang（[16, 命题 2.3]）证明，2-设计的旗传递自同构群的点正则正规子群是可解的。这与 Soc(G) 是若干非阿贝尔单群的直积这一事实相矛盾。因此，我们有以下结论:

命题3.3. 若 G 是一个 2-设计的旗传递、点本原自同构群，则 G 不是扭曲 wreath 积型。

3.4 G 是点非本原的情形

接下来我们证明定理的第二部分，即 G 为点非本原的情形。只需检查 Praeger 和 Zhou 得到的 [12, 定理 1，便可轻易证明这一点。由于$k > \lambda(\lambda - 2)$, [12, 定理 1 中只有 (b) 和 (d) 两种情况可能成立。 此外，(d) 中可能出现的只有参数为 (45, 12, 3) 的设计，而这也包含在 (b) 中。因此定理的第二部分得证。

定理的证明。若 G 是点本原的，则由命题 3.1–3.3 和引理 2.5 可得， G属于仿射型或几乎单型。因此，(a) 得证。若 G 是点非本原的，则由上述讨论可得 (b)。

注 3.1。值得注意的是，若 $\lambda = 2$，则 [14] 中证明了，唯一的旗传递点非本原对称设计是两个 (16, 6, 2) 设计，它们出现在定理 (b) 中。若 $\lambda > 2$，一篇近期预印本 [10] 表明，满足定理 (b) 且 $(c, d, \ell) = (\lambda^2, \lambda + 2, \lambda)$ 的唯一对称设计是 [11, 构造 4.2] 中的 (45, 12, 3) 设计，以及 [13]中构造的四个 (96, 20, 4) 设计。

致谢

本研究得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：12201469 和 12271173）。

参考文献

[1] S. H. Alavi、A.Daneshkhah 和 Narges Okhovat，《对称设计的旗传递自同构群》，Ars Math. Contemp.，17（2019年），617-626。

[2] S. H. Alavi 和 T. C. Burness，《单群的大子群》，J. Algebra，421（2015年），187-233。

[3] N. L. Biggs 和 A. T. White，《置换群与组合结构》，剑桥大学出版社，剑桥，1979年。

[4] C. J. Colbourn 和 J. H. Dinitz，《组合设计 CRC 手册》，CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿（2007年）。

[5] D. H. Davies，旗传递性与本原性，Discrete Math.，63（1987），91-93。

[6] P. Dembowski，《有限几何》，Springer-Verlag，纽约，1968年。

[7] P. B. Kleidman、M. W. Liebeck，《有限经典群的子群结构》，Springer-Verlag，伦敦，1990年。[8] E. S. Lander，《对称设计：一种代数方法》，剑桥大学出版社，剑桥，1983年。[9] M. W. Liebeck、C. E. Praeger 和 J. Saxl，关于有限本原置换群的 O'Nan-Scott 定理，《澳大利亚数学会杂志》（A辑），44(1988年)，389-396。[10] A. Montinaro，具有 $k > \lambda(\lambda-3)/2$ 的旗传递、点非本原对称 2-(v,k,λ) 设计，arXiv: 2203.09261。[11] C. E. Praeger，具有45个点、大小为12的区组且每对点上有3个区组的旗传递对称设计，《设计、码与密码学》，44(2007年)，115-132。[12] C. E. Praeger 和 S. Zhou，非本原旗传递对称设计，《组合理论杂志》A辑，113(2006年)，1381-1395。[13] M. Law、C. E. Praeger 和 S. Reichard，旗传递对称 2-(96,20,4)-设计，《组合理论杂志》A辑，116(2019年)，1009-1022。[14] E. O'Reilly Regueiro，关于旗传递对称设计的本原性与约化，《组合理论杂志》A辑，109(2005年)，135-148。[15] D. Tian 和 S. Zhou，具有 λ 至多为 100 的旗传递点本原对称 (v,k,λ) 设计，《组合设计》，21(2013 年)，127-141。[16] P. H. Zieschang，2-设计的旗传递自同构群的点正则正规子群，《数学进展》，121(1996年)，102-123。