arXiv:2302.09827v1 [math.DS] 20 Feb 2023

Sullivan字典与Bowen级数映射

MAHAN MJ 和 SABYASACHI MUKHERJEE

Abstract. 克莱因群与有理动力学之间的沙利文词典，描述了这两个领域之间的显著相似之处，既体现在研究对象上，也体现在所用的方法上。我们将介绍词典两端之间近期建立的一座桥梁：一种将福克斯群与复多项式结合起来、在黎曼球面上构成单一动力系统的框架。

谨以此文献给丹尼斯，致以敬意与深情。

1. Introduction

在这篇介绍性文章中，我们大量借鉴并进一步发展了丹尼斯·沙利文研究工作的两个方向：

(1) 克莱因群与有理动力系统之间的 Sullivan词典[Sul85]。(2) 帕特森-沙利文测度 [Sul79, Sul84]。

我们将结合作者[MM21]最近发现的组合定理，或克莱因群与多项式映射之间的桥梁，来概述这两个主题。构建这座桥梁的一个关键要素是 Bowen-Series 映射 [Bow79, BS79]。

Sullivan 的词典 [Sul85, p. 405] 基于一项经验性认识：克莱因群与有理动力系统有许多共同特征。例如，克莱因群的 极限集 （相应地，不连续域）对应于有理映射的 朱利亚集 （相应地，法图集）。Sullivan 通过将拟共形方法引入有理动力系统领域，将这些相似性扩展为技术 层面的深层相似性。这促成了他著名的无游荡域 定理的证明。事实上，运用这些技术，Sullivan 沿着无游荡域定理的思路，为阿尔福斯有限性定理给出了一个新的证明。

本文聚焦于沙利文词典中的一条对应关系，它指出了以下两者之间的相似性：

(1) 克莱因群中的伯斯同时一致化定理 (2) 有理动力系统中的多项式配对，由 Douady 和 Hub- bard [Dou83] 引入。

第一步是用一个能够捕捉其动力学特征的单一映射来替代克莱因群。这就引出了可伴配映射的概念（详情见下文第 2 节

两位作者均获得印度政府原子能部通过项目编号 12-R&D-TFR-5.01-0500 提供的资助，也获得了印孚瑟斯基金会的捐赠资助。MM 还获得了部分 DST JC Bose Fellowship 资助。SM 还获得了 SERB 研究项目资助，项目编号为 SRG/2020/000018。

）。在介绍了可配对映射的背景后，我们来探讨以下问题：

问题 1.1. 哪些可配对映射和多项式能够按照 *Douady* 和 *Hubbard* 的思路进行配对？

事实证明，鲍恩-系列映射 [Bow79, BS79] 可为带 puncture 球面群提供此类示例。令人惊讶的是，还存在一类相关的新映射，我们称之为高阶 *Bowen-Series* 映射；它们同样符合条件，并能导出组合定理，以及极限集与朱利亚集之间“动力学自然”的同胚。顾名思义，高阶 Bowen-Series 映射与鲍恩-系列映射密切相关。事实上，高阶 Bowen-Series 映射是某些合适的鲍恩-系列映射的二次迭代。高阶 Bowen-Series 映射也可以刻画为同一福克斯群的若干个鲍恩-系列映射的“ amalgams”，其基本域彼此重叠。这部分内容具有复分析的风格，主要取自 [MM21]。

值得一提的是，关于克莱因反射群（即由有限个欧几里得圆上的反射生成的 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 的离散子群）的极限集（包括经典的阿波罗尼奥斯垫片极限集）与反全纯有理映射的朱利亚集之间的动力学自然同胚，其示例最早由 [LLMM19], 构造；而这一现象则在一般框架下由 [LMM22, LLM22]进行了系统研究。据我们所知， [MM21, 定理 7.16] 给出了全纯情形下极限集与朱利亚集之间这种显式联系的首个示例。

在本综述的最后一节，我们将转向可配对映射及其所产生的配对的可测动力学。从群论的角度来看，测度论框架自然而且相当恰当地被证明是帕特森-沙利文测度的框架。另一方面，由于可配对映射具有有理映射的某些特征，可配对映射的极限集支持一种自然定义的动力学测度：最大熵测度（有理映射存在唯一最大熵测度这一事实已由 [Lyu83] 以及 [Mn83、FLMn83]独立证明）。可配对映射这一介于群与多项式之间的对象，其特性体现在可配对映射的最大熵测度与适当的帕特森-沙利文测度之间的密切联系上。本文最后给出（高阶）Bowen-Series 映射的最大熵测度的豪斯多夫维数的一些估计，并提出相关的开放问题。

有理映射与福克斯群的“配对”现象，是 Bullett 和 Penrose 在 20 世纪 90 年代研究迭代代数对应时发现的 [BP94] ，并在 [BL20, BL21] 中得到了全面研究。具体而言，他们构造了一个双次数为 $(2，2)$ 的代数对应族，并指出，从适当的意义上说，该族中的成员可以解释为模群与二次有理映射的配对。这与我们的配对框架截然不同：我们从一个克莱因群中提取一个非可逆映射（一个可伴配映射）（也就是说，从一个非交换群的动力学中提取半群动力学），然后将该映射与多项式的动力学结合，从而在单复变量中产生一个混合动力系统。我们的配对框架是否与 Bullett-Penrose-Lomonaco 的框架有更深层的联系，这将是一个很有意思的问题。

ACKNOWLEDGMENTS

我们感谢 Caroline Series 对命题 6.4 的证明。Dennis Sullivan 的作品以其优美与简洁使我们二人受益匪浅，也给予我们启发。这篇综述文章旨在记录我们对他的感激之情。

作者对匿名审稿人提出的详细意见和改进建议深表感谢。

2. MATEABILITY

令 Aut($\mathbb{D}$) 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$上所有保角自同构构成的群。福克斯群 Γ 是 Aut($\mathbb{D}$) 的离散子群。本节旨在阐明福克斯群与多项式配对的含义。我们首先给出可共轭配对性的定义。下述定义将推出 Γ是一个格（引理 2.9）。

定义 2.1. 连续映射 $A\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 称为与福克斯群 Γ 相关的可配对的 映射，若满足以下条件：

(1) A 与 Γ轨道等价。(2) A 在 $\mathbb{S}^1$上分段解析。(3) A 是次数大于一的扩张覆盖映射。(4) A是马尔可夫的。(5) A 没有非对称双曲型的周期断点。

定义 2.1 中任一条件不成立，都会构成可共轭配对性的障碍。有些出人意料的是，事实证明这些必要条件也是充分条件（见命题 2.10）。

现在我们详细说明定义 2.1 中使用的术语。设 $A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个（不一定连续的）映射。点 $x \in \mathbb{S}^1$ 在 A 下的全轨道 定义为

$$\mathrm{GO}_A(x) := \{x' \in \mathbb{S}^1 : A^m(x) = A^n(x'), \text{ for some } m, n \geq 0\}.$$

设 Γ 是一个极限集等于 $\Lambda \subset \mathbb{S}^1$ 的福克斯群。若对于每个 $x \in \Lambda$，一个（不一定连续的）映射 $A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 在 Λ 上与 Γ 轨道等价，则称其为

$$\Gamma \cdot x = \mathrm{GO}_A(x).$$

若存在 $k \in \mathbb{N}$、闭弧 $I_j \subset \mathbb{S}^1$ 以及对于 $j \in \{1, \cdots, k\}$ 的 $g_j \in$ Aut($\mathbb{D}$)，使得一个（不一定连续的）映射 $A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是分段 *Möbius*，则

(1) $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{j=1}^{k} I_j$，(2) $\operatorname{int} I_m \cap \operatorname{int} I_n = \emptyset$ 对 $m \neq n$，以及 (3) $A|_{I_j} = g_j$。

如上所述的分段 Möbius 映射 A，若满足 $g_1, \cdots, g_k$ 生成一个福克斯群（记作 Γ_A），则称为分段福克斯映射。如果假设映射 g_j 仅在 I_j 的某些小邻域内是复解析的（不要求它们是 Möbius 映射），那么 f 称为分段解析。

映射 g_j 将称为 A的部分。有时，当不会引起混淆时，我们也将 g_j 的定义域 I_j 称为 A 的部分。

注 2.2. 我们把将 $\mathbb{S}^1$ 划分为闭弧 $\{I_j\}$ 视为分段 *M¨obius*/解析映射 A的数据的一部分。可以将分段 *M¨obius*/解析映射 A 形式化地定义为一对 $\left(\{g_j\}_{j=1}^k, \{I_j\}_{j=1}^k\right)$。

下面的引理 2.3 显著提升了 A 的正则性。

引理 2.3。 [MM21，引理 2。8] 设 $A\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个与有限生成福克斯群 Γ 轨道等价的分段解析映射（不一定连续）。那么， A 是分段福克斯的，且 A 的各个片段构成 Γ 的生成集。

假设 $x_1, \cdots, x_k$是 $\mathbb{S}^1$上定义片段 $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ 的一组循环有序的 k 个点（$j+1$ 取模 k）。若由 $x_1, \cdots, x_k$给出的 $\mathbb{S}^1$ 的分解是极小的，即不存在满足以下条件的 i 和 $h \in \Gamma_A$，则称 A 是极小的:

(1) $A|_{[x_i, x_{i+1}]} = h|_{[x_i, x_{i+1}]}$, and
(2) $A|_{[x_{i-1}, x_i]} = h|_{[x_{i-1}, x_i]}$.

因此，极小的 A 没有多余断点。

设 A 是圆上的连续分段 M¨obius 映射。设 $\mathbb{D}$ 表示单位圆盘。设 I_1、$\cdots$、I_k 是一个循环有序的区间族，其内部互不相交，并且满足

(1) $I_j \cap I_{j+1} = \{x_{j+1}\}$（指标按模 k 取值）。(2) $A|_{I_j} = g_j$。

设 γ_j 是 $\mathbb{D}$ 中连接 x_j、x_{j+1} 的半圆弧，它在 x_j、x_{j+1}处与 $\mathbb{S}^1$ 成直角相交；设 $\mathcal{D}_j \subset \mathbb{D}$ 是由 I_j 和 $\overline{\gamma_j}$围成的闭区域。那么 A，即将 A 延拓为 ¨上的分段 M $\mathbb{D}$ obius 映射的典范延拓，定义在 $\cup_j \mathcal{D}_j$ 上如下：$\backsim A = g_j$ 在 $\mathcal{D}_j$ 上。

令 $\mathcal{D} := \cup_j \mathcal{D}_j$，并称 $\mathcal{D}$ 为 A 的典范定义域。设 $R = \mathbb{D} \backslash \mathcal{D}$。我们将 R 称为 A 的基本域，也称为 A 的基本域。包含在边界 ∂R 中的每条双无限双曲测地线都称为 R 的一条边。 R 的理想顶点称为 R 的顶点。设 S 为 R 的顶点集合。 S 中一对非相邻点，或等价地，连接这两点的 R 中的双无限测地线，称为 R 的一条对角线。

注 2.4. 请注意，分段福克斯映射A 的基本域可能并不是由 A 的各个分段生成的福克斯群 Γ_A 的基本域（见第 *4.1* 小节）。

注 2.5. 设 $A\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个分段连续的 *M¨obius* 映射，其分段为$\{g_j\}_{j=1}^k$。由连续性可知， $g_j\left(x_{j+1}\right) = g_{j+1}\left(x_{j+1}\right)$；也就是说，$a_j = g_j^{-1} \circ g_{j+1} \in \Gamma_A$ 固定 x_{j+1}（指标按模 k 计算）。于是，作为群元素， $a_k \cdots a_1 = 1$；等价地，$a_1 \circ \cdots \circ a_k =$ 恒等。此外，若 A 与定义在 S^1 上的福克斯群 Γ 轨道等价，则根据引理 *2.3*， Γ 由 $\{g_1, a_1, \cdots, a_k\}$ 生成。

如果存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $a \neq b \in \mathbb{S}^1$，都存在 $n \in \mathbb{N}$，满足 $d(f^n(a)\ f^n(b)) > \delta$，则称连续映射 $f\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是扩张的 。

我们赋予 $\mathbb{S}^1$ 逆时针定向。对于 a， $b \in \mathbb{S}^1$，我们将连接 a， b 的 $\mathbb{S}^1$ 上的逆时针弧记作 $\widehat{ab}$。设 y_0 是一个分段 M¨obius 覆盖映射 $A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 的 周期点 ，其周期为 n 。那么， A^n 是保定向的，并且它将形如 $\widehat{y_1 y_0}$ 的弧映射为形如

$\widehat{y_2y_0}$。我们将 A 在 y_0 处的单侧乘子 定义为 A^n的单侧导数:

$$(A^n)'(y_0^+) = \lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in\widehat{\widetilde{y}y_0}}} \frac{A^n(y)-y_0}{y-y_0}, \qquad (A^n)'(y_0^-) = \lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in\widehat{\widetilde{y}y_0}}} \frac{A^n(y)-y_0}{y-y_0},$$

其中 $\widetilde{y}\neq y_0$ 是 $\mathbb{S}^1$上的任意一点。关于 A的单侧乘子的性质，参见 [MM21 第 2] 节。

设 x 是分段 M¨obius 扩张圆周覆盖映射 A的一个周期点（周期为 n）。若 $(A^n)'(x^+)=1$ （分别为 $(A^n)'(x^-)=1$），则称 x 在右侧（分别在左侧）是抛物型。同样，若 $(A^n)'(x^+)>1$ （分别为 $(A^n)'(x^-)>1$），则称 x 在右侧（分别在左侧）是双曲型。此外，若 $(A^n)'(x^+)=(A^n)'(x^-)=1$（分别地，若 $(A^n)'(x^+)=(A^n)'(x^-)>1$），则称 x 是对称抛物型（分别是对称双曲型）。若该点两侧均为双曲型，但 $(A^n)'(x^+)\neq(A^n)'(x^-)$，则称点 x 是非对称双曲的。最后，若 x 一侧为双曲型、另一侧为抛物型，则称其为混合型周期点。

引理 2.6. [MM21，引理 2。15] 设 $A:\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是一个分段福克斯扩张覆盖映射，其分段定义的断点为 x_1、$\cdots$、x_k。此外，设 x_j 是 A的一个周期点。那么， x_j 不是混合型。

定义 2.7。设 X 是一个拓扑空间， $f:\ X\to X$ 是一个连续映射。若由 X 的闭子集 $\{X_1,X_2,\cdots X_n\}$ 构成的集合满足以下性质，则称其为$(X、\ f)$ 的马尔可夫分割:

(1) $X=\cup_{i=1}^n X_i$，(2) int $X_i\cap$ int $X_j=\emptyset$ 当 $i\neq j$，(3) int $X_i=X_i$ 当 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$，(4) $f|_{X_i}$ 是单射，并且(5) 若 f(int X_i) $\cap$ int $X_j\neq\emptyset$，则 $f(X_i)\supset X_j$。

众所周知，紧致度量空间上的连续、开且距离扩张的自映射都存在马尔可夫分割（参见 [PU10, §3]）。特别地，多项式映射 $z\mapsto z^d$ 在单位圆 $\mathbb{S}^1$ 上的限制存在马尔可夫分割（事实上，可以很容易地为 z^d 构造出显式的马尔可夫分割）。

若 $\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是一个分段福克斯扩张覆盖映射（次数 d 至少为二），且 A 在 $\mathbb{S}^1$ 中的各个片段 I_j（定义区间）构成 A: $\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 的马尔可夫分割，则称 $A:\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 为分段福克斯马尔可夫映射。 A 在 I_j 上的限制 $A|_{I_j}=g_j$（$\in\Gamma_A$）称为 A 的片段。

根据 A的马尔可夫性质，每个区间 I_j 在A下恰有 d 个原像。这给出了 A^{-1} 的一个自然转移矩阵，定义如下：若存在 I_l 内部的一点在 A下映射到 I_j，则 $a_{jl}=1$；否则 $a_{jl}=0$。此外，自然还对应着一个拓扑马尔可夫链，现描述如下（比较 [Ser86，ECH+92]）。我们构造一个 $d-$正则有向图 $\mathcal{G}$，其顶点为 k（每个 I_j对应一个顶点）；当且仅当 $a_{jl}=1$时，存在一条从顶点 j 到顶点 l 的有向边。此外，我们用 g_l^{-1} 标记从 j 到 l 的这条有向边（因为 A 在 I_l 上的部分是 g_l，从 I_j 到 I_l 的逆分支是 g_l^{-1}）。注意，在一个 I_j 的每个内部点处， A^{-1} 恰有 d 个分支，且任一此类分支都由 A的某个部分的逆映射给出；也就是说，对于 A的每个部分 g_i， g_i^{-1} 都是 $\mathcal{G}$ 某条边的标签，而 $\mathcal{G}$ 每条边的标签都具有这种形式。

现在我们沿着 A的反向迭代跟踪点 $z \in \mathbb{S}^1$。设 $\{z = z_0, z_1, \cdots\}$是 $\mathbb{S}^1$ 中的一个（有限或无限）点序列，使得 $A(z_{i+1}) = z_i$。那么，任意这样的序列都编码了 $\mathcal{G}$ 中的一条测地线；也就是说，是一个从区间$[0, a]$或 $[0, \infty)$到 $\mathcal{G}$的等距浸入，使得 $[i, i+1]$等距映射到一条由满足以下条件的（唯一） g 标记的 $\mathcal{G}$边：

(1) $z_i \in I_{j(i)}$。 (2) $z_{i+1} \in I_{j(i+1)}$。
(3) 将 A 限制到 $I_{j(i+1)}$ 等于 g^{-1}。
(4) $g(z_i) = z_{i+1}$。

带标签的有向图 $\mathcal{G}$（也称为拓扑马尔可夫链）通过区间的反向轨道 I_j，在点的反向轨道上施加一种类似于自动群 [ECH+92] 的结构。因此，区间 I_j的一列反向轨道可以表示为 $I_j = I_{j(0)}$，$I_{j(1)}$，$\cdots$，$I_{j(n)}$，$\cdots$，使得 $I_{j(i)} \subset A(I_{j(i+1)})$。这列轨道也由上文所述的 $\mathcal{G}$ 中的同一条测地线编码，因为数对 $\{I_{j(i)}, I_{j(i+1)}\}$ 对应于 $\mathcal{G}$中的唯一一条边，而该边上的标签是唯一的 $g \in \Gamma$，使得 g^{-1} 是 A 的一个片段，并满足 $I_{j(i)} \subset g^{-1}(I_{j(i+1)})$。

现在可以通过如下表述，给出定义 2.1 的一个更简洁版本：

定义 2.8。若分段福克斯马尔可夫映射 A： $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 与由其各个分段生成的福克斯群 Γ_A 轨道等价，且 A 的所有周期断点均非非对称双曲的，则称其为可配对的。

最后，我们给出此前承诺的引理，以保证Γ_A 是格。

引理 2.9。 [MM21，引理 2。18] 若 A 可配对，则 Γ_A 是格（或者等价地， Γ_A 是有限生成的福克斯群，且 $\mathbb{D}/\Gamma_A$ 具有有限双曲面积）。

对于复多项式 P，其填充 *Julia* 集 $\mathcal{K}(P)$是由所有正向轨道（在 P作用下）保持有界的点组成的完全不变集。若一个多项式的每个临界点在正向迭代下都收敛到某个吸引周期，则称该多项式为双曲型 多项式。所有（给定次数的）双曲多项式构成参数空间中的一个开集。次数为 d 的双曲多项式的连通分支，称为次数为 d的多项式参数空间中的双曲分支 。包含映射 z^d 的次数为 d 的多项式双曲分支，称为主双曲分支，记作 $\mathcal{H}_d$。 $\mathcal{H}_d$ 中每个映射的填充 Julia 集都是一个拟圆盘，且此类映射在其 Julia 集上的动力学与 z^d 在 $\mathbb{S}^1$上的作用拟对称共轭。

下一个命题表明，定义 2.8 中的条件足以保证主双曲分支中的分段福克斯马尔可夫映射与多项式具有共形伴配性。

对于黎曼球面上的一条若尔当曲线 $\mathfrak{J}$，我们将其补集的两个连通分支记为 $\mathbf{D}^{\text{in}}$ 和 $\mathbf{D}^{\text{out}}$。若一个可配对映射的典范延拓 $\widehat{A}: \mathcal{D} \to \mathbb{D}$ 与主双曲型分支中的一个多项式 P 共形可配对，则称其为 共形可配对的；这意味着存在一个定义在 $\mathbb{C}$ 的某个子集上的全纯映射 F、一条若尔当曲线 $\mathfrak{J} \subset \mathrm{Dom}(F)$，以及一对共形映射 $\phi^{\text{in}}: \mathbb{D} \to \mathbf{D}^{\text{in}}$ 和 $\phi^{\text{out}}: \mathcal{K}(P) \to \mathbf{D}^{\text{out}}$，它们分别将 A 和 P 共轭为 F。以下是 [MM21] 的第一个主要结果。

命题 2.10 (**可配对映射是可配对的**)。 [MM21，命题 2。23]设 $A:\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个次数为 d 的可配对映射，且 $P \in \mathcal{H}_d$。那么，映射 $\backsim A:\ \mathcal{D} \to \mathbb{D}$ 和 $P\colon\ \mathcal{K}(P) \to \mathcal{K}(P)$ 都是共形可配对的。

注记 2.11. 可配对映射在 $\mathbb{S}^1$ 上可能有抛物固定点，因此 z^d 与 A 之间的拓扑共轭不一定是拟对称的。这使得经典拟共形工具（例如证明伯斯同时一致化定理时所用的工具）不足以将与福克斯群相关联的可配对映射与多项式进行共形配对。不过，一类恰当的"广义拟共形映射"——称为 *David* 同胚（具有适当索博列夫正则性的映射，并对膨胀趋于无穷的区域面积施加定量控制）——可以实现共形配对构造。命题 *2.10* 证明的分析核心包含两个结果：戴维德可积性定理（可视为可测黎曼映射定理的推广，参见 [Dav88], [AIM09，定理 20.6。2]）以及针对某些圆周同胚的戴维德延拓定理（在当前情形下发挥阿尔福斯-伯林延拓定理的作用，参见 [LMMN20，定理 4。9]）。事实上，定义 *2.1* 中的第 *5* 项是确保存在一个将z^d 共轭到可配对映射的圆周同胚的 *David* 延拓所必需的。

3. Bowen-Series maps of Fuchsian punctured sphere groups

3.1. 一般福克斯群的鲍恩-系列映射。 与有限生成福克斯群轨道等价的圆上的分段福克斯马尔可夫映射，其典型例子是鲍恩-系列映射。这类映射最早见于鲍恩和塞里斯的研究 [Bow79, BS79]。

有限生成福克斯群 Γ （第一类）有一个基本域 $R(\subset \mathbb{D})$，它是一个（可能为理想的）双曲多边形。将R 的边记为 $\{s_i\}_{i=1}^n$ （沿圆周按逆时针顺序标记）。 R 的每条边 s_i都通过相应元素 $h(s_i) \in \Gamma$与 s_j 的另一条边相识别。集合 $\{h(s_i)\}_{i=1}^n$ 构成 Γ的生成集。

设 $C(s_i)$ 为 $\mathbb{D}$ 中的欧几里得圆弧，它包含 s_i 且与 $\mathbb{S}^1$ 正交。此外，设 $\mathbb{D}$ 中的网 $\mathcal{N}$ 由 R的所有边在 Γ的元素作用下的像组成。若对于 $i \in \{1, \cdots, n\}$， $C(s_i)$ 完全包含于 $\mathcal{N}$中，则称基本域 R 满足偶角性质。

定义 *3.1*（*Bowen-Series* 映射）。假设 R Γ的基本域满足偶角性质。按照 [*BS*79], 将 $C(s_i)$ 的端点标记在 $\mathbb{S}^1$, P_i, Q_{i+1} 上（其中 $Q_{n+1} = Q_1$），并使 P_i 在逆时针顺序中位于 Q_{i+1} 之前。这些点沿圆依次排列为 $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \cdots, P_n, Q_n$ （见图*1*）。 Γ 的 *Bowen-Series* 映射 $A_{\Gamma,BS}$ （与基本域 R 相关联）分段定义如下：在 $\mathbb{S}^1$ 的子弧 $[P_i, P_{i+1}$上（沿逆时针方向遍历），$A_{\Gamma,BS} \equiv h(s_i)$。

命题 3.2。 [BS79，引理 2。4] 映射 $A_{\Gamma,BS}$ 与 Γ 轨道等价，但在 Γ 的作用下，模去有限多个点后可能例外。

我们将简记 $A_{\Gamma,\mathrm{BS}}$ 为 A_Γ。与一致化正亏格曲面（可能带有尖点）的福克斯群相对应的鲍恩-系列映射是不连续的。下面用两个例子来说明这一点。在

图1中，左侧图示为一个亏格为二的（闭）曲面的基本域，颜色编码表示边配对。注意，$h(s_1)(x) = y$，且 $h(s_2)(P_2) = Q_5$。因此，为了使相应的鲍恩-系列映射在 P_2处连续，映射 $h(s_1)$ 必须将从 x 到 P_2 的测地射线映至从 y 到 Q_5的测地射线。但前一条射线位于网 $\mathcal{N}$ 中（根据偶角性质），而后一条射线穿过 $\operatorname{int} R$。这显然不可能，因为 R 是一个基本域，由此证明鲍恩-系列映射在 P_2处不连续。上图右侧图示中，R 是一个一次穿孔环面的基本域，各边按照颜色进行配对。边配对变换 $h(s_1)$ 将 P_2映至 P_3，而 $h(s_2)$ 则将 P_2 映至 P_1。这导致相应的鲍恩-系列映射在 P_2处不连续。

因此，为了获得连续的 Bowen-Series 映射，我们需要将注意力限制在配有特殊基本域的 punctured 球面群（可能带有轨形点）上。事实上，下面构造的 Fuchsian穿孔球面群的 Bowen-Series 映射是次数至少为二的 $\mathbb{S}^1$ 覆盖映射。

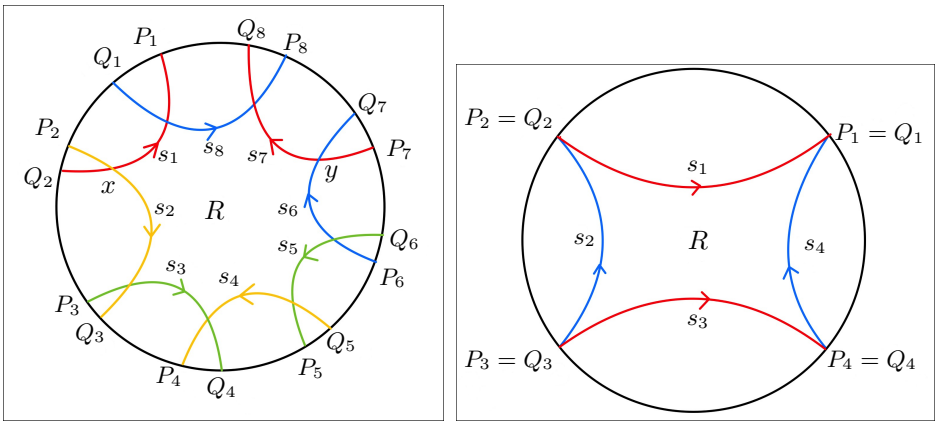

FIGURE 1. 高亏格曲面的鲍恩-系列映射

3.2. 带 puncture 球面的 Bowen-Series 映射。首先说明，我们总是将 Bowen-Series 映射与配有优选基本域及边配对变换的福克斯群关联起来。

我们首先构造一个特定的福克斯群 G_d，它一致化一个配有优选基本域的 $(d+1)$–次带 puncture 球面。该群 G_d（配有优选基本域）将作为 $(d+1)$–次带 puncture 球面之 Teichm¨uller 空间中的基点。由于任意（带标记的）群 $\Gamma \in \text{Teich}(G_d)$ 都通过 $\mathbb{C}$ 上的拟共形同胚与 G_d 共轭，因此可以很容易看出，配有由拟共形共轭确定的带标记基本域的 Γ 的 Bowen-Series 映射，是 G_d 的 Bowen-Series 映射的拟共形共轭。

固定 $d \geq 2$。对于 $j \in \{1, \cdots, d\}$，令 C_j为连接 $p_j := e^{\pi i(j-1)/d}$ 和 $p_{j+1} := e^{\pi ij/d}$ 的 $\mathbb{D}$ 的双曲测地线，并令 C_{-j} 为 C_j 关于实轴的反射所得的像。我们进一步将 p_j 的复共轭记为 $p_{-j}, j \in \{2, \cdots, d\}$。选择一个 M¨obius 自同构 g_j，它由关于 C_j 的反射后接

复共轭构成。根据构造， g_j 将 C_j 映到 C_{-j} （参见图 2）。注意，对于 $j \in \{1, \cdots, d-1\}$，M¨obius 映射 $g_{j+1}g_j^{-1}$ 是关于圆弧 C_{j+1} 和 C_j 的反射的复合。由于 C_j 和 C_{j+1} 在 p_{j+1} 处相切，直接计算（使用圆反射的公式）可知， $g_{j+1}g_j^{-1}$ 固定 p_{j+1} ，且在该不动点处的导数为 1。因此， $g_{j+1}g_j^{-1}$ 是抛物型的，其唯一不动点为 p_{j+1}。同理，映射 g_1， g_d 分别固定 p_1， p_{d+1}，且在相应点处的导数均为 1。因此， g_1， g_d 也都是抛物型的，其唯一不动点分别为 p_1， p_{d+1}。令

$$G_d := \langle g_1, \cdots, g_d \rangle.$$

注意， G_d 是一个福克斯群，其基本域为 R，边为 C_1， $\cdots$， C_d，C_{-d}， $\cdots$ 和 C_{-1}。此外， $\mathbb{D}/G_d$ 是一个（$d+1$）点穿孔球面。

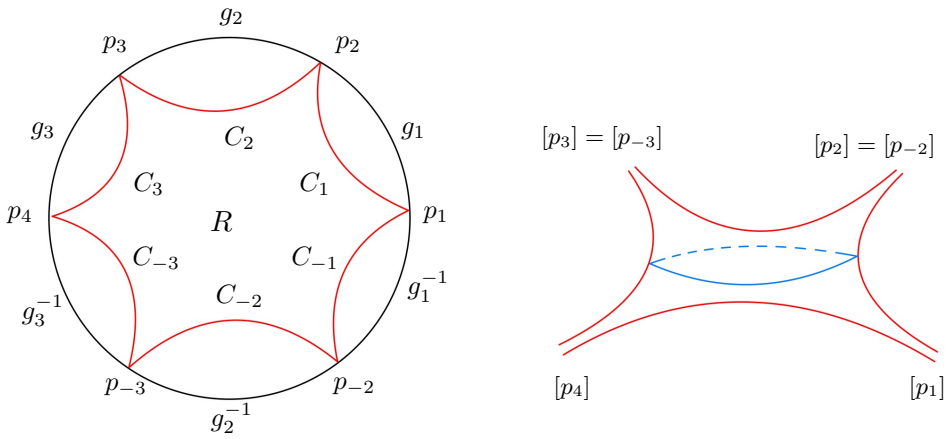

FIGURE 2. 图中展示了 G_3的优选基本域 R ，它将一个四点穿孔球面均匀化。该基本域的六个顶点都位于 $\mathbb{S}^1$上，并将圆分成六段弧。相应的 Bowen-Series 映射通过标注在弧旁的生成元 $g_j^{\pm 1}$ 作用于这些弧。

请读者参见图 2。对于 $j \in \{1, \cdots, d\}$，令 I_j 表示连接 p_j 与 p_{j+1}的$\mathbb{S}^1$ 逆时针子弧。令 I_{-j} 表示 I_j 关于实轴反射后的像。注意， G_d 的 Bowen-Series 映射 A_{G_d} （配备基本域 R）通过 $g_j^{\pm 1}$ 作用于 $I_{\pm j}$。以下两个性质成立。

命题3.3 （带穿孔球面的 Bowen-Series 映射的性质）。[MM21，命题3。3]

(1) 对于 $d \geq 2$， G_d 的 Bowen-Series 映射 A_{G_d} （配备基本域 R）是 $\mathbb{S}^1$的 C^1 扩张的 $2d-1$ 次覆盖映射，因此与 $z^{2d-1}|_{\mathbb{S}^1}$拓扑共轭。此外， A_{G_d} 是分段福克斯马尔可夫映射。(2) A_{G_d} 与 $\mathbb{S}^1$上的 G_d 轨道等价。

关于命题3.3的 orbifold 变体，请读者参阅 [MM21、命题3.4、3.5] 。

注3.4。 在上述示例中，为各群选取的基本域与相应鲍恩-系列映射的基本域一致。

3.3. **鲍恩-系列映射的可共轭配对性**。现在我们注意到，带 puncture 球面的 Bowen-Series 映射符合我们的配对框架。回想一下， $\mathcal{H}_k$ 表示次数为 k 的多项式空间中的主双曲分支。

定理 3.5 (**Fuchsian 带 puncture 球面的 Bowen–Series 映射可配对**。 [MM21，定理 3。7] 设 $\Gamma \in \mathrm{Teich}(G_d)$，且 $P \in \mathcal{H}_{2d-1}$。那么，映射$\curvearrowright A_\Gamma$： $\mathcal{D}_{A_\Gamma} \to \mathbb{D}$ 和 P： $\mathcal{K}(P)$ $\to \mathcal{K}(P)$ 在共形意义下可配对。

4. Folding and higher Bowen-Series maps for Fuchsian groups

本节旨在介绍一类新的分段福克斯马尔可夫映射（沿用 [MM21]），它们超越了那些可与多项式配对的鲍恩-系列映射示例。我们将从本节要讨论的映射类别入手。回想一下，分段福克斯马尔可夫映射$\curvearrowright A$ 的基本域记作 R。集合 $\mathcal{D} = \mathbb{D} \setminus R$ 是 $\mathbb{D}$中 A 的典范定义域，而 R 中连接 R 的两个非相邻顶点的双无限测地线称为 R的对角线 。

结合第 4.1 小节中给出的两个分段福克斯马尔可夫映射的具体例子来阅读以下两个定义颇有启发（参见图3）。

定义 4.1 (**完全折叠映射)**。若存在有限条对角线 $\delta_1, \cdots, \delta_l$，使得下列条件成立，则称分段福克斯马尔可夫映射$A$ ： $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 为完全折叠映射：

(1) 对于 R 的每条边 α， $A(\alpha)$ 都是对角线 $\delta_1, \cdots, \delta_l$ 之一。*(2)* 对所有 i，δ_i 的理想端点 p_i, q_i 都是 A 的不动点；也就是说，当 p_i, q_i 是 δ_i 的理想端点时， $A(p_i) = p_i$，且 $A(q_i) = q_i$ 。*(3)* 对于上述的 p_i, q_i， $q_i = p_{i+1}$。*(4)* 对于 $i \neq j$， $\delta_i \cap \delta_j = \emptyset$ 。此外， $p_1 \neq q_l$；也就是说，对角线序列δ_i 构成一条由互不相交的双无限测地线组成的链；添加理想端点后，可得到闭圆盘 $\mathbb{D}$ 中闭区间 $[0, 1]$ 的“分段测地线”嵌入。

定义*4.2*（无折叠高次映射）。 [*MM21*，定义*4.2*]若分段福克斯马尔可夫映射 A : $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 满足以下条件，则称其具有对角线折叠：存在相邻边 α_1、 α_2，以及 R 的一条对角线 δ，使得 $A(\alpha_i) = \delta$，其中 $i = 1$取*2*。注意，若 a_1、 a_2（分别为 a_2、 a_3）是 α_1（分别为 α_2）的端点，且p、 q 是 δ的端点，则由A 在 $\mathbb{S}^1$上的连续性可得 $A(a_1)$ $= p = A(a_3)$，且 $A(a_2) = q$ 。

分段福克斯马尔可夫映射 A： $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 若满足以下条件，则称为无折叠高次映射

(1) 存在一个（开）理想多边形 $D \subset R$，使得 D 的所有边 δ_1、 $\cdots$、 δ_l 都是 R的（必然互不相交的）对角线。我们进一步假设 δ_1、 $\cdots$、 δ_l 沿着 ∂D按循环序排列。我们将 D 称为 A的内域。(2) 如果 p 是 D的理想顶点，那么 $A(p)$ $= p$。(3) 对于 R 的每条边 α， $A(\alpha)$ 是对角线 δ_1、 $\cdots$、 δ_l 中的一条。(4) A 没有对角线折叠。

将 R的边 α_1、$\cdots$、α_k 按循环序排列，根据定义4.2可知，在无折叠高次映射 A下， R 的相邻边 α_i、α_{i+1} 映射到 D的相邻边。不过请注意， R 的边的逆时针循环排序在 A下可能会变为 D 的边的顺时针循环排序。在$\widehat{\ }$中，无论如何我们都有一个连续映射 $A:\partial R\to\partial D$。将 $\widehat{\ }$的理想端点与 R 和 D相邻后， A 具有定义良好的次数 d。此外， D 的每条边在 A 下恰好有 $|d|\widehat{\ }$个原像，因为不存在折叠。又由于每个 δ_i 都是 R的对角线，因此有 $|d|>1$。我们称 $|d|$ 为 A的多边形次数。（由于 $|d|>1$，我们称 A 为无折叠高次映射。）

备注 4.3. 带有对角线折叠的分段福克斯马尔可夫映射未必是完全折叠映射；例子见第*4.4.2*小节。

4.1. 三点穿孔球面上的完全折叠映射与无折叠高次映射。 现在我们给出两个简单例子：一个完全折叠映射和一个无折叠高次映射，它们与 Γ_0 对应于三点穿孔球面的情形轨道等价。于是 Γ_0 同构于 F_2，即S_0的基本群，3 （见图3）。我们将用 ab 表示 $\mathbb{D}$ 中的一条双无限双曲测地线，其（理想）端点位于 a， $b\in\mathbb{S}^1$。

固定 Γ_0的一个（闭）基本域 W，它是一个理想四边形，理想顶点位于单位的四次根处（图中的四边形1236）。 Γ_0 的生成元为 h， g，其中 h将边12映至16，g 将边32映至36，而 $g^{-1}h$ 是抛物型的。此处的组合结构相对简单，因此在命题4.4中证明轨道等价时，逐一分析各种情形并不困难。

4.1.1. 适用于$S_{0,\ 3}$**的完全折叠映射。**我们先构造一个完全折叠映射，然后稍微修改这一构造，以得到一个无折叠高次映射。我们将完全折叠映射（ R 的基本域$A_{\Gamma_0,\ \text{完全折叠映射}}$ cfm）（待构造）定义为

$$R=\operatorname{int}(W\cup h.W\cup g.W).$$

因此， R 是图3中八边形12345678的内部。我们按如下方式定义$A_{\Gamma_0,\ \text{完全折叠映射}}$ cfm的各个部分$\widehat{\ }$。在下列列表中，若一条弧上没有$A_{\Gamma_0,\ \text{完全折叠映射}}$ cfm的其他断点，则用ij 表示该弧，其中这对数字 i， j 是它的端点。否则，我们将用该弧包含的所有断点来表示它。此外，箭头的标签表示将定义域弧映射到值域弧的$A_{\Gamma_0,\ \text{完全折叠映射}}$ cfm的部分。

- $\widehat{12}\xrightarrow{h}\widehat{123456}$
- $\widehat{23}\xrightarrow{g}\widehat{678123}$
- $\widehat{34}\xrightarrow{g^{-1}}\widehat{3456}$
- $\widehat{45}\xrightarrow{g^{-1}}\widehat{6781}$
- $\widehat{56}\xrightarrow{h\circ g^{-1}}\widehat{123456}$ （我们采用的约定是， $\circ$ 表示映射的复合）

- $\widehat{67}\xrightarrow{g\circ h^{-1}}\widehat{678123}$
- $\widehat{78}\xrightarrow{h^{-1}}\widehat{3456}$
- $\widehat{81}\xrightarrow{h^{-1}}\widehat{6781}$

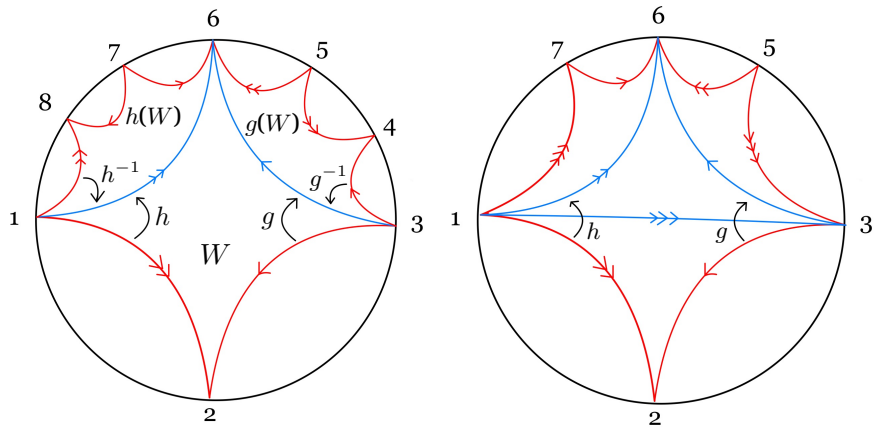

FIGURE 3. 完全折叠映射和无折叠高次映射的基本域：3个穿孔

4.1.2. 对于 $S_{0,3}$ 的无折叠高次映射。上述完全折叠映射自然关联着一个无折叠高次映射。注意，完全折叠映射$A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 不是极小的。$A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 在连续弧 $\widehat{34}$ 和 $\widehat{45}$ 上的各个部分是 g^{-1}。同样，$A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 在连续弧 $\widehat{78}$ 和 $\widehat{81}$ 上的各个部分是 h^{-1}。我们将 $A_{\Gamma_0,\text{hBS}} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 定义为处处与 $A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 一致的极小分段福克斯马尔可夫映射（此处“hBS”是“高阶鲍恩-塞里斯”的缩写，这一术语背后的原因将在注 4.8 中解释）。尽管 $A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 和 $A_{\Gamma_0,\text{hBS}}$ 逐点一致，但它们在形式上是不同的分段福克斯马尔可夫映射，因为 $A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 有更多部分$\widehat{\ }$（其中一些是重复的）。因此，它们的典范延拓 $A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 和$\widehat{\ }A_{\Gamma_0,\text{hBS}}$ 具有不同的定义域。

$\widehat{\ }$显然，$A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 是一个无折叠高次映射。$\widehat{\ }$ R' 的基本域是包含在 R中的理想六边形123567$\widehat{\ }$的内部。$A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 的内域由理想三角形136给出（见定义4.2）。$A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 的各部分如下所列（注意，4，8不是$A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 的断点，因此我们在记号中省略它们）：

- $\widehat{12} \xrightarrow{h} \widehat{12356}$
- $\widehat{23} \xrightarrow{g} \widehat{67123}$
- $\widehat{35} \xrightarrow{g^{-1}} \widehat{35671}$
- $\widehat{56} \xrightarrow{h\circ g^{-1}} \widehat{12356}$
- $\widehat{67} \xrightarrow{g\circ h^{-1}} \widehat{67123}$
- $\widehat{71} \xrightarrow{h^{-1}} \widehat{35671}$

$\widehat{\ }A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 的多边形次数为2。

4.1.3. 轨道等价。

命题4.4。 设 $A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}$ $A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 如上所述。则 $A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}$ $A_{\Gamma_0,\ \text{hBS}}$ 与 Γ_0轨道等价。

证明。 由于 $A_{\Gamma_0,\ \mathrm{cfm}}$ 和 $A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 在 $\mathbb{S}^1$上作为映射一致，因此只需对$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$验证这一点。容易看出，$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$−大轨道包含于 Γ_0–轨道中，这是因为$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 的各个片段都是 Γ_0的元素。因此，只需证明：如果 x， y 属于同一个 Γ_0–轨道，那么它们也属于同一个 $A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$−大轨道。只需对生成元 g， h 及其逆验证这一点。

设 $y = g.x$。我们想证明，在 A_{Γ_0},hBS 作用下， x、 y 位于同一个全轨道中。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$情形 1： $y \in 32176$。于是 $x \in 32$ ，并且将 A_{Γ_0},hBS 限制在 32 上所得的分支为 g。因此，$y = A_{\Gamma_0}$,hBS(x)。情形 2： $y \in \widehat{345}$。将 A_{Γ_0},hBS 限制在 $\widehat{345}$ 上所得的分支为 g^{-1}。将 $y = g(x)$ 重写为 $g^{-1}(y) = x$ 后，我们看到 A_{Γ_0},hBS(y) $= x$。 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$情形 3： $y \in 56$。于是 $x \in 12$。注意，将 A_{Γ_0},hBS 限制在 56 上所得的分支为 $h \circ g^{-1}$，而将 A_{Γ_0}, hBS 限制在 $\widehat{12}$ 上所得的分支为 h。因此，

$$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}(y) = h(g^{-1}(y)) = h(g^{-1}(g(x)) = h(x) = A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}(x).$$

这表明， x 和 y 在$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}$作用下大轨道等价。

接下来，若 $y = g^{-1}.x$，则 $x = g.y$ ，交换上一段中 x, y 的角色可得， x, y 在$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}$作用下大轨道等价。最后，根据这一构造的对称性，同样的论证也适用于 h, h^{-1}。□

作为一个圆覆盖，$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}$ 的次数等于 4。从第 4.1.2 节列出的$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}$ 各分支的作用（及其值域）可以很容易地看出这一点。因此，我们现在给出了两个不同的分段福克斯马尔可夫映射的例子，它们都与一个三穿孔球面福克斯群轨道等价；即鲍恩-塞里斯映射（次数为 3）和上文定义的无折叠高次映射$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}$ （次数为 4）。此外，$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}}$ 的多边形次数为 2，而鲍恩-塞里斯映射在其基本域的边界上诱导出一个自同胚。

4.2. 一般带 puncture 球面上的折叠与高阶映射。我们沿用上文第4.1节的方案，并将其推广到 $S_{0,k}$-个尖点的球面情形， $k > 3$。下面我们将用图 4 来说明一般情形。固定 $\Gamma_0 = G_{k-1}$ 的一个（闭）基本域（定义见第 3.2 小节 G_{k-1}），该基本域由一个理想（$2k-2$）–边形 W 构成（图中展示的是 $k = 4$ 情形）。为明确起见，假设 W 的理想顶点是 $(2k-2)$ 次单位根。为使记录稍微简便一些，我们修改如下记号。

(1) W 下半圆上的顶点按逆时针顺序编号为 $1 = 1_-, 2_- \cdots, k_- = k$ 。(2) W 上半圆上的顶点按顺时针顺序编号为 1、2、 $\cdots$、 k。(3) 在上半圆上，顶点 i、$i+1$ 之间（包括 i、 $i+1$），有 $2k-2$ 个顶点，它们由 $g_i.W$ 的顶点给出（注意 $g_i.W \cap W$ 等于双无限测地线 $i(i+1)$）。我们将严格位于 i、 $i+1$ 之间的 $2k-4$ 个顶点按顺时针顺序标记为 $\{i, 2\}$、 $\{i, 3\}$、 $\cdots$、 $\{i, 2k-3\}$。

Γ_0的生成元为 $g_1, \cdots, g_{k-1}$， 其中 g_i 将边 $i_-(i+1)_-$映射到双无限测地线 $i(i+1)$。

4.2.1. $S_{0,k}$的完全折叠映射。定义 R 为

$$R = \text{int}\left(W \cup \bigcup_{i=1,\cdots,k-1} g_i.W\right),$$

使得 $i(\overline{i+1})$ 是 R 的对角线。

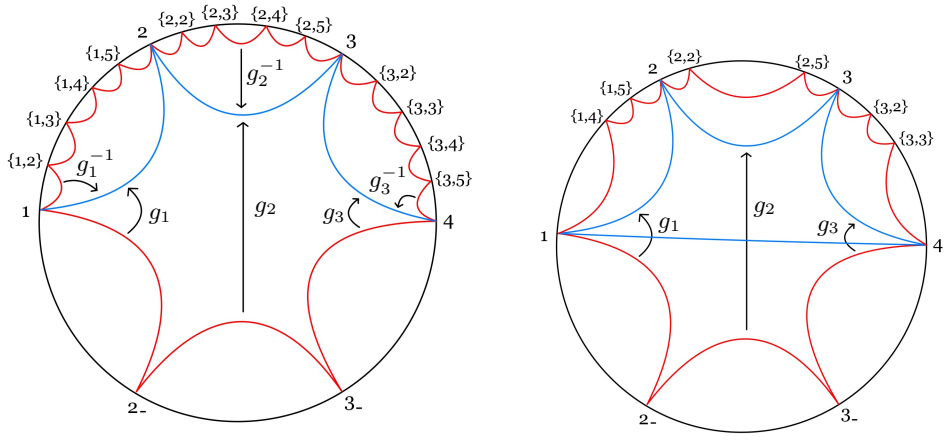

FIGURE 4. 完全折叠映射和无折叠高次映射的基本域：4 个尖点

与第4.1节中一样，我们按其片段定义 $A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}$ 如下。回顾一下，$\frown ij$ 表示一条弧，其端点位于断点 i，j 处，并且该弧上没有 $A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}$ 的其他断点。

- 在弧 $i_(i+1)_$ 上，定义 $A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}$ 为 g_i，其中 $i = 1, \cdots, k-1$。于是，$\frown A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}(\ i_(i+1)_\ )$ 等于 $\mathbb{S}^1$ 中弧 $\frown i(i+1)$（的内部）的补集。$\frown$
- 对于每个 $i = 1$、$\cdots$、$k-1$，并且在 i、$i+1$ 之间每条 $k-1$ 短弧 $\{i,j\}\{i,j+1\}$（其中 $i \le j \le i+k-2$）上，定义 A_{Γ_0},cfm 为 g_i^{-1}。于是，A_{Γ_0},cfm$(\cup_{j=i}^{i+k-2} \widehat{\{i,j\}\{i,j+1\}})$ 等于 1 与 k 之间的上半圆。（此处为方便记号，我们将 $\{i,1\}$ 与 i 以及 $\{i,i+2k-2\}$ 与 $i+1$ 视为相同。）此外，对于 $i \le j \le i+k-2$，A_{Γ_0},cfm 将从 $\{i,j\}$ 到 $\{i,j+1\}$ 的顺时针弧映射到从 j 到 $j+1$ 的顺时针弧。我们将从 $\{i,j\}$ 到 $\{i,j+1\}$ 的顺时针弧（其中 $i \le j \le i+k-2$）称为 A_{Γ_0},cfm 下的短折叠弧。
- 对于 $i \in \{2, \cdots, k-1\}$和 $1 \le j \le i-1$，令 $j = i-s$，使得 $1 \le s \le i-1$。我们将 $A_{\Gamma_0,\text{cfm}}$ 定义为 $g_s \circ g_i^{-1}$ 在 $\widehat{\{i,j\}\{i,j+1\}}$ 上。因此，对于 $j \le i-1$，$\frown A($ $\{i,j\}\{i,j+1\})$等于从 s 到 $s+1$的逆时针（长）弧。
- 对于 $i \in \{1, \cdots, k-2\}$和 $i+k-1 \le j \le 2k-3$，令 $j = i+k-1+t$，使得 $0 \le t \le k-2-i$。我们将 $A_{\Gamma_0,\ \text{cfm}}$定义为 $g_{k-1-t} \circ g_i^{-1}$在 $\widehat{\{i,j\}\{i,j+1\}}$ 上。$\frown$因此，对于 $i+k-1 \le j \le 2k-3$，$A(\{i,j\}\{i,j+1\})$等于从 $k-1-t$ 到 $k-t$的逆时针（长）弧。

我们将从 $\{i,j\}$ 到 $\{i,j+1\}$ 的顺时针弧（对于 $j\le i-1$ 或$i+k-1\le j$）称为在 A下的长折叠弧。

- 注意，对所有 $i=1,\ \cdots,\ k,\ A_{\Gamma_0,\ \mathrm{cfm}}(i)=i$。

从上述定义很容易看出，$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{cfm}}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 是一个完全折叠映射。由于任意（带标记的）群 $\Gamma\in\mathrm{Teich}(\Gamma_0)$ 都与 Γ_0 共轭，且共轭由一个保持 $\mathbb{S}^1$，$\mathbb{D}$ 并尊重标记的 $\widehat{\mathbb{C}}$ 拟共形同胚给出，因此我们将关联的完全折叠映射$A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$ 定义为 $A_{\Gamma_0,\ \mathrm{cfm}}$ 在此类拟共形同胚下的共轭映射。

注 4.5。构造其他完全折叠映射的例子并不难。不过，我们不知道还有其他完全折叠映射与由其各部分生成的福克斯群轨道等价。

4.2.2. $S_{0,k}$的无折叠高次映射。与第4.1节一样，定义A_{Γ_0},hBS 为与 $\mathbb{S}^1$ 上的 A_{Γ_0}, cfm 重合的最小分段 Fuchsian Markov 映射。将 A_{Γ_0},hBS 的典范延拓记为 $\widehat{A}_{\Gamma_0}$, hBS，将其在 $\mathbb{D}$中的规范定义域记为 $\mathcal{D}_{\Gamma_0}$,hBS，并将 A_{Γ_0},hBS 的基本域记为 R_{Γ_0}, hBS。此外，令 D 为由双无限测地线 12、23、$\cdots$、$(k-1)k$、$k1$围成的开理想多边形。显然，~~D~~的所有边都是R_{Γ_0},hBS 的（互不相交）对角线，D 的每个理想顶点都被A_{Γ_0},hBS 固定，R_{Γ_0},hBS 的每条边都被A_{Γ_0},hBS 映射到 D的一条边，并且 A_{Γ_0},hBS 没有对角线折叠。因此，$\backsim A_{\Gamma_0}$,hBS 是一个以 D 为内域的无折叠高次映射。

定义 4.6 (**高阶 Bowen-Series 映射**）。我们将分段福克斯马尔可夫映射 $A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 称为 Γ_0 的高阶 Bowen-Series 映射（与基本域 W 相关）。对于任意（带标记的）群 $\Gamma\in\mathrm{Teich}(\Gamma_0)$，我们将（带标记的群） Γ 的高阶 *Bowen-Series* 映射定义为 $A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 在 $\mathbb{C}$ 的一个将 Γ_0 共轭到 Γ （并保持标记）的拟共形同胚 $\widehat{\ }$ 下的共轭映射，并记为 $A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$。

显然，每个 $\Gamma\in\mathrm{Teich}(\Gamma_0)$ 的高阶 Bowen-Series 映射都是无折叠高次映射。关于在所有无折叠高次映射中刻画高阶 Bowen-Series 映射的方法，请参阅 [MM21，命题 5.2] 。

4.2.3. *Bowen-Series* 映射与高阶 *Bowen-Series* 映射之间的联系。接下来的两个命题讨论 Bowen-Series 映射与高阶 Bowen-Series 映射（对于 $\Gamma\in\mathrm{Teich}(\Gamma_0)$）之间的关系。事实上，命题 4.7 将以一种更直接的方式，根据与各种相互重叠的基本域 Γ 相关的 Bowen-Series 映射，构造 Γ 的高阶 Bowen-Series 映射。

命题 *4.7*（将高阶 *Bowen-Series* 映射刻画为分段 *Bowen-Series* 映射）。[*MM21*，命题 *4.5*] 设 W 是福克斯群 $\Gamma\in$ *Teich*(Γ_0) 的一个（闭）基本域（对一个带 k 个 *puncture* 的球面进行一致化），且该基本域是一个理想（$2k-2$）边形。我们按逆时针顺序将 W 的理想顶点标记为 $1=1_-$、2_-、$\cdots$、$(k-1)_-$、$k_-=k$、$k-1$、$\cdots$、*2*，并假设生成 Γ 的 W 的边配对变换为 g_1、$\cdots$、g_{k-1}，其中 g_i 将边 i_-（$i+1$）$_-$ 映到边 i（$i+1$）。

进一步，设 D 为由双无限测地线 12、23、$\cdots$、$(k-1)k$、$k1$ 所围成的理想多边形的内部，P为由双无限测地线所围成

的理想多边形的内部，其中双无限测地线为 $\overline{1_2_}$、$\overline{2_3_}$、$\cdots$、$\overline{(k-1)_k_}$、$\overline{k_1_}$。则有以下结论。

(1) $W = \overline{D} \cup \overline{P}$，并且对于每个 $j \in \{1, \cdots, k-1\}$，$\overline{D \cup g_j(P)}$ 都是 Γ 的一个（闭）基本域。(2) 在从 j 到 $j+1$ 的顺时针弧上，高阶 *Bowen-Series* 映射 $A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$等于与（闭）基本域 $D \cup g_j(P)$ （$j \in \{1, \cdots, k-1\}$）相关联的 Γ 的 *Bowen-Series* 映射；在从 1 到 k 的逆时针弧上，$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 等于与基本域 $\overline{W} = \overline{D \cup P}$ 相关联的 Γ 的 *Bowen-Series* 映射。

反过来，按照上述条件 *(2)* 定义的映射 $A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是一个与 Γ 轨道等价的高阶 *Bowen-Series* 映射，而 A 的基本域由 $R = \text{内}\left(W \cup \bigcup_{i=1,\cdots,k-1} g_i.W\right)$ 给出。

注 4.8。前面对 $A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 的描述表明，$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 由对应于 Γ 的各种（相互重叠的）基本域的鲍恩-系列映射组成。这也说明了“高阶鲍恩-塞里斯映射”这一术语的由来。

高阶鲍恩-塞里斯映射也可以由适当的鲍恩-系列映射经过二次迭代得到。

命题 4.9（鲍恩-塞里斯映射的二次迭代给出高阶鲍恩-塞里斯映射）。[MM21，推论 5。6] 令 $d \geq 2$。

(1) 对于 $\Gamma \in$ *Teich*$(G_d) =$ *Teich*$(S_{0,d+1})$（分别地，$\Gamma \in$ *Teich*$(G_d,2)$），有 $A^2_{\Gamma,\ \mathrm{BS}} = A_{\Gamma'}$*,hBS*，其中 Γ' 是 Γ 的二阶子群，且 $\mathbb{D}/\Gamma' \cong S_{0,2d}$。*(2)* 对于 $\Gamma \in$ *Teich*$(G_d, 1)$，有 $A^2_{\Gamma,\mathrm{BS}} = A_{\Gamma'}$*,hBS*，其中 Γ' 是 Γ 的二阶子群，且 $\mathbb{D}/\Gamma' \cong S_{0,2d-1}$。

在所有情况下，Γ 的鲍恩-系列映射的第二次迭代与 Γ的一个二指数子群轨道等价。

高阶鲍恩-塞里斯映射作为 $\mathbb{S}^1$ 的自覆盖映射的次数为$(\chi-1)^2$，其中 $\chi = 2-k$ 是 $S_{0,\ k}$的欧拉示性数。

最后一个结论可见于 [MM21，第 4.3 节。2]。我们不知道鲍恩-系列映射的更高次迭代是否会产生更多可配对映射的例子（见下文问题 4.16）。经过仔细的组合计数，命题4.4的证明中的论证可以推广到一般情形。

命题 4.10（轨道等价）。[MM21，命题 4。7] 设 $\Gamma \in \mathrm{Teich}(\Gamma_0)$，并设$A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$，$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 如上所述。那么$A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$，$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 与 Γ轨道等价。

4.3. **推论**。现在我们来讨论一些推论。

4.3.1. 在完全折叠映射与不发生折叠的高阶映射之间插值。第 4.1 节和第 4.2 节中描述的完全折叠映射 $A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$ 与高阶 Bowen-Series 映射$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上一致。我们用 D 表示第 4.2 节中顶点为 1，$\cdots$，k 的多边形内部。注意，D 是（闭）基本域 W 的一半，具体来说，沿双无限测地线$1k$ 将 D 加倍即可得到 W。取 $\overline{1} = i_1 < i_2 < \cdots < i_{l+1} = k$ 为沿上半圆按顺时针循环顺序排列的一组选定顶点。令 $\cup_{1 \leq j \leq l}(i_j,\ i_{j+1}) = \mathcal{L}$ 表示

包含在 D中的 W 的边和对角线的有限并。令 W_0 表示 W 中位于 $\mathcal{L}$ 上方的部分，并令 $W_{\mathcal{L}} = W_0 \cup \mathcal{L}$。设

$$R_{\mathcal{L}} = \operatorname{int}\left(W_{\mathcal{L}} \cup \bigcup_{i=1,\cdots,k} g_i.W_{\mathcal{L}}\right).$$

那么， $R_{\mathcal{L}}$ 是分段福克斯马尔可夫映射 $\widehat{A_{\mathcal{L}}}$的基本域，其典范延拓 $A_{\mathcal{L}}$ 的定义域为 $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \mathbb{D} \setminus R_{\mathcal{L}}$。

注意，对于所有 $\mathcal{L}$，映射 $A_{\mathcal{L}}$ 在 $\mathbb{S}^1$上等于$A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$。映射$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$ 是唯一的最小代表，对应于情形 $1 = i_1 < i_2 = k$。映射$A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$ 位于谱的另一端，其中 $l + 1 = k$，且对于$j = 1,\ \cdots,\ k,\ \ i_j = j$。只要 $l > 1$，映射 $A_{\mathcal{L}}$就是非最小代表。

4.3.2. 完全折叠映射与高阶 *Bowen-Series* 映射的可共轭配对性。 现在我们记下这样一个事实：高阶 Bowen-Series 映射满足定义 2.1 的条件，因此可以与具有若尔当曲线朱利亚集的双曲复多项式（次数适当）进行保形配对。

定理 4.11 (**福克斯高阶 Bowen-Series 映射是可配对的**）。 [MM21，定理 4。8] 设 $\Gamma \in \mathrm{Teich}(\Gamma_0)$，且 $P \in \mathcal{H}_{(k-1)^2}$ （其中 $\mathcal{H}_d$ 表示次数为 d 的多项式空间中的主双曲分支）。那么，$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}} : \curvearrowright \mathcal{D}_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}} \to \mathbb{D}$ （分别地，$A_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}}$： $\mathcal{D}_{\Gamma,\ \mathrm{cfm}} \to \mathbb{D}$）以及 P： $\mathcal{K}(P) \to \mathcal{K}(P)$ 在共形意义下可配对。

根据命题 2.10，我们作出如下定义。

定义 4.12 (**配对模空间**）。 拓扑曲面 Σ 与主双曲分支中的复多项式所构成的配对模空间由三元组(Γ, A_Γ, P)组成，其中

(1) Γ是使 Σ一致化的福克斯群，(2) A_Γ 是一个极小的可伴配映射，在 $\mathbb{S}^1$ 上与 Γ 轨道等价，并且(3) P 是主双曲分支中的一个多项式，且$\deg(P) = \deg(A_\Gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1)$。

定理 3.5 和 4.11 的一个直接推论是，拓扑曲面 $S_{0,\ k}$ ($k \geq 3$) 与主双曲分支中的复多项式之间的配对模空间是不连通的。具体而言，它至少包含两个分支，分别对应于

- 与 Teich($S_{0,\ k}$) 中的群以及 $\mathcal{H}_{2k-3}$ 中的多项式相关联的鲍恩-系列映射，和
- 与 Teich($S_{0,\ k}$) 中的群以及 $\mathcal{H}_{(k-1)^2}$ 中的多项式相关联的高阶鲍恩–塞里斯映射。

有关更多细节，请读者参阅 [MM21，第 6 节。4]

高阶 Bowen-Series 映射与 Fuchsian穿孔球面群之间的轨道等价的另一个应用，是福克斯群的轨道等价刚性失效（参见 [FW03]，了解轨道等价刚性的一般背景及正面结果；另见 [MM21，第 §8] 节，了解其在福克斯情形下失效的精确表述）。

4.4. 两个非例。在本小节中，我们将考察高阶鲍恩-塞里斯映射的两种修改，并证明由此得到的分段福克斯马尔可夫映射与由其各个片段生成的群并不轨道等价。

4.4.1. 一个没有折叠的反例。以下关于$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上的高阶 Bowen-Series 映射的描述，可以根据其构造直接验证（见第4.2小节）：

$$A_{\Gamma_0,\mathrm{hBS}} = \begin{cases} A_{\Gamma_0,\mathrm{BS}}, & \text{on } \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \widehat{i}_-(i+1)_-\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1}\bigcup_{j=i}^{i+k-2} \widehat{\{i,j\}\{i,j+1\}}\right), \\ A^2_{\Gamma_0,\mathrm{BS}}, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中，$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{BS}}$ 表示与基本域 W相关联的 Bowen-Series 映射。

事实上，$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 与$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{BS}}$ 在这些弧上的一致性 $\widehat{\{i,j\}\{i,j+1\}}$ ($i \in\{1,\cdots,k-1\},\ j \in \{i,\cdots,i+k-2\}$) 在证明 Γ_0 与$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}$ 的轨道等价时发挥了重要作用（见命题4.4）。然而，如果在这些弧上也用$A_{\Gamma_0,\ \mathrm{BS}}$ 替换$A^2_{\Gamma_0,\ \mathrm{BS}}$，所得的最小分段福克斯马尔可夫映射

$$B := \begin{cases} A_{\Gamma_0,\mathrm{BS}} & \text{on } \mathbb{S}^1 \cap \{z : \mathrm{Im}(z) \le 0\}, \\ A^2_{\Gamma_0,\mathrm{BS}} & \text{on } \mathbb{S}^1 \cap \{z : \mathrm{Im}(z) \ge 0\}, \end{cases}$$

与 Γ_0不轨道等价。

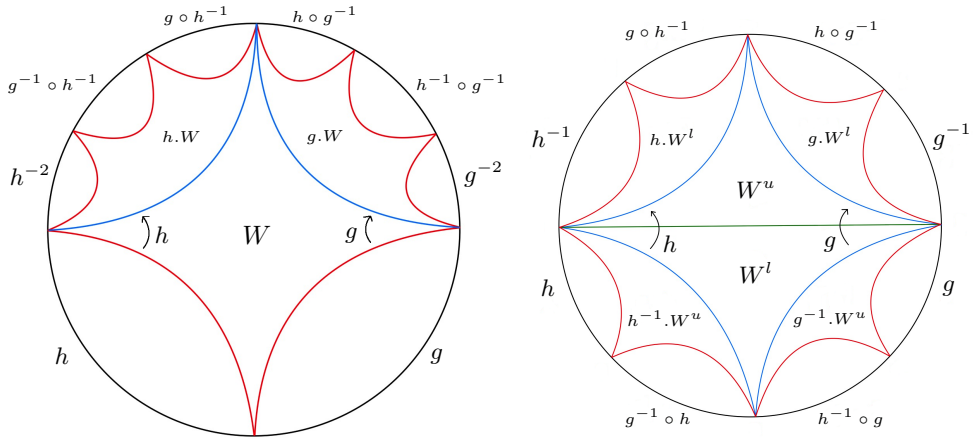

FIGURE 5. 图中展示了两个分段福克斯马尔可夫映射 B （左）和 C （右）。它们与由各自分段生成的福克斯群并不轨道等价。

命题4.13。 [MM21，命题4。9] 映射 $B:\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 与由其各个分段生成的福克斯群 Γ_0 并不轨道等价。

注4.14. 映射 B 没有对角线折叠，但它不是无折叠高次映射。这是因为 B 的基本域边界上的某些边没有映射到对角线，因此违反了定义*4.2*中的条件（*3*）（见图*5*（左））。

4.4.2. 一个带折叠的反例。 下面给出另一个分段福克斯马尔可夫映射的例子，它与由其各个分段生成的福克斯群并非轨道等价；该映射是高阶鲍恩-塞里斯映射的一个对称版本。为简单起见，我们以三穿孔球面的情形为例进行说明。

考虑第4.1节的福克斯群 Γ_0 、顶点位于单位的四次根处的（闭）基本域W ，以及配对 W 边的生成元 g, h （如图3所示）。设

$$W^u := W \cap \{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}, \quad W^l := W \cap \{\mathrm{Im}(z) \leq 0\}.$$

图5（右）所示的分段福克斯马尔可夫映射 $C : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 的次数为5。它具有定义4.2意义下的对角折叠，但它不是完全折叠映射，因为它不满足定义 4.1 的条件（4）。此外，

命题4.15。 图*5*（右）中的分段福克斯马尔可夫映射 $C : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 与由其各个部分生成的福克斯群 Γ_0 并非轨道等价。

证明。 注意到 $g(-i) = i$，因此点 $\pm i$ 属于同一个 Γ_0–轨道。但这两个点都是 C 的不动点，因此它们不可能属于 C的同一个全轨道。□

证明 Bowen-Series 映射和高阶鲍恩-塞里斯映射轨道等价时，只需考察这些映射的前几次迭代。另一方面，只需给出这些映射的适当不动点，就能排除上述两个分段福克斯马尔可夫映射具有轨道等价性质。一般而言，我们提出以下问题。

问题 4.16. 是否存在一种通用方法，可以检验分段福克斯马尔可夫映射是否与由其各个部分生成的福克斯群轨道等价?

5. Invariant laminations and Bers boundary groups

存在与福克斯穿孔球面群轨道等价的可配对映射，这促使人们寻找 Teich¨勒空间（穿孔球面的）边界上的群，使其能够与复多项式共形配对。由于 Teich¨勒空间的福克斯实现是非紧的，因此上述研究应在福克斯穿孔球面群的 Bers 切片边界上进行（注意，在适当的拓扑下，这种 Teich¨勒空间的实现是预紧的）。与福克斯情形一样，这项研究首先面临的挑战是为 Bers边界群提出恰当的“可配对映射”概念。

固定一个配备了（高阶）Bowen- Series 映射 A_{Γ_0} 的福克斯穿孔球面群 Γ_0 。我们将 Γ_0 的 Bers 切片记为 $\mathcal{B}(\Gamma_0)$。映射 A_{Γ_0} 为 $\mathcal{B}(\Gamma_0)$中的每个（带标记）群 Γ' 定义了一个极限集 $\Lambda(\Gamma')$ 上的分段 M¨obius 马尔可夫覆盖映射$A_{\Gamma'}$ （通过拟共形共轭），使得 $A_{\Gamma'}$ 在 $\Lambda(\Gamma')$ 上与 Γ' 轨道等价。映射 $A_{\Gamma'}$ 是与映射 Γ'相关联的（高阶）Bowen-Series 映射。现在令 $\Gamma \in \partial\mathcal{B}(\Gamma_0)$。受福克斯情形的启发，我们称连续自映射 $A_\Gamma : \Lambda(\Gamma) \to \Lambda(\Gamma)$ 为（高阶）*()*的 *Bowen-Series* 映射，如果

(1) A_Γ 与 Γ轨道等价，并且 (2) 当 $\Gamma' \in \mathcal{B}(\Gamma_0)$在强拓扑下收敛到 Γ 时， A_Γ 是（更高阶）鲍恩-系列映射 $A_{\Gamma'}$的一致极限。

Bers 稠密性猜想现已由 Brock-Canary-Minsky [Min10, BCM12] 证明为定理（另见 [BB04]）：对于其中一个端具有固定共形结构的所有 Kleinian 曲面群，Bers 切片在其空间中稠密。因此，Bers 切片的闭包包含所有这类 Kleinian 曲面群。对于 Bers 边界上的任意这类群 Γ，存在一种称为终端层状结构的端不变量——一种支撑横截测度的测地层状结构。此外，还存在一个拓扑半共轭 [Mj14a, Mj 17], ，称为坎农-瑟斯顿映射，它将圆映到极限集 $\Lambda(\Gamma)$上，后者属于 Γ。文献 [Mj14b, Mj17] 证明，坎农-瑟斯顿映射恰好识别终端层状结构的端点。

由 [Min10、BCM12] （另见 [BB04]）可知，任意 Bers 边界群都是 Bers 切片中群的强极限。设 $\Gamma_n = \phi_n \circ \Gamma_0 \circ \phi_n^{-1}$ 是 $\mathcal{B}(\Gamma_0)$ 中的一列群（其中 ϕ_n 是诱导表示 $\Gamma_0 \to \Gamma_n$的拟共形同胚），并且它们强收敛于 $\Gamma \in \partial\mathcal{B}(\Gamma_0)$。根据[MS13、MS17], [Mj22 第 4 节， Γ_n 的坎农-瑟斯顿映射一致收敛于 Γ的坎农-瑟斯顿映射。由定义，Γ_n 的（高阶）鲍恩-塞里斯映射等于 $\phi_n \circ A_{\Gamma_0} \circ \phi_n^{-1}$，因此（高阶）鲍恩-塞里斯映射 A_Γ（如果存在，）必由 $\phi_\infty \circ A_{\Gamma_0} \circ \phi_\infty^{-1}$ 给出，其中 ϕ_∞： $\mathbb{S}^1 \to \Lambda(\Gamma)$ 是 Γ 的坎农 - 瑟斯顿映射。因此，若（高阶）鲍恩 - 塞里斯映射 A_Γ： $\Lambda(\Gamma) \to \Lambda(\Gamma)$ 存在，则它必经由 Γ 的坎农-瑟斯顿映射与基底（高阶）鲍恩-塞里斯映射 A_{Γ_0}：$\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$半共轭（详见 [MM21，第 7 节1] ）：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{A_{\Gamma_0}} & \mathbb{S}^1 \\ {\scriptstyle \text{C.T.}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{C.T.}} \\ \Lambda(\Gamma) & \xrightarrow[A_\Gamma]{} & \Lambda(\Gamma) \end{array}$$

换言之，根据 [Mj14b], ，存在一个（高阶）鲍恩-系列映射 A_Γ 要求 Γ（其中 $\mathbb{S}^1/\mathcal{L} \cong \Lambda(\Gamma)$）的终端层状结构 $\mathcal{L}$ 在 A_{Γ_0} 的作用下保持不变（[MM21，引理 7.3]）。另一方面，这类层叠必然在 Γ_0 的作用下保持不变。层叠 $\mathcal{L}$同时在群 Γ_0 和覆盖映射 A_{Γ_0} 下保持不变，可以视为克莱因群动力学与多项式动力学之间的一种相容条件，而这一条件的限制性极强。

定理 5.1 (**Bers 边界上的（高阶）鲍恩-系列映射很稀疏**。[MM21，命题 7.6、7.8] 设 Γ_0 是一个带 *puncture* 球面上的福克斯群。那么，只有有限多个群 $\Gamma \in \partial\mathcal{B}(\Gamma_0)$ 的拟共形共轭类满足： Γ 的坎农-瑟斯顿映射将 Γ_0 的（高阶）鲍恩-系列映射半共轭到 $\Lambda(\Gamma)$ 上的自映射 A_Γ，且该自映射与 Γ 轨道等价。这些克莱因群由一份明确的有限列表中有限条互不相交的简单闭曲线（位于曲面 $\mathbb{D}/\Gamma_0$ 上）的捏缩得到。特别是，所有这类群 Γ都是几何有限的。

注 5.2。考虑与福克斯群 G_d 相关联的 *Bowen-Series* 映射 A_{G_d}，该群配备了由顶点位于单位根 $2d$ 处的理想多边形给出的首选基本域 R （见第 *3.2* 小节）。在此情形下，定理 *5.1* 的显式有限列表为

$$\mathbf{S}_d := \{g_2, \cdots, g_{d-1}\} \cup \{g_i^{-1} \circ g_j : i, j \in \{1, \cdots, d\},\ i - j > 1\}$$

（见 [MM21，命题 7。6]），因此，$\mathbb{D}/G_d \cong S_{0\perp d+1}$ 的每个 $A_{G_d}-$ 不变测地层叠都是 S_d 的子集。对于 $d=3$，这恰好给出两个不变层叠：$\{\{g_2\},\{g_3^{-1}\circ g_1\}\}$。图 *2* 所示四点穿孔球面上对应于 g_2 （分别为 $g_3^{-1}\circ g_1$）的曲线，是将尖点 $[p_3]$、$[p_4]$ 与 $[p_1]$、$[p_2]$ 分隔开的“竖直”曲线（分别是将 $[p_1]$、$[p_4]$ 与 $[p_2]$、$[p_3]$ 分隔开的“水平”曲线。

Bers边界群的（高阶）Bowen-Series 映射（若存在）是$\widehat{}$分段 M¨obius，因此可典范延拓 A_Γ 至该群的填充极限集 $K(\Gamma)$的一个子集（即其不连续域中完全不变分支的补集）。

现在设 P 是主双曲分支 $\mathcal{H}_k$中的一个复多项式，其中 $k=\deg\{A_\Gamma\colon \Lambda(\Gamma)\longrightarrow\Lambda(\Gamma)\}$。那么，$P$在其朱利亚集 $\mathcal{J}(P)$上的作用与 $z^k|_{\mathbb{S}^1}$拓扑共轭。另一方面，$A_\Gamma|_{\Lambda(\Gamma)}$ 是 $A_{\Gamma_0}|_{\mathbb{S}^1}$的一个因子，而后者又与 $z^k|_{\mathbb{S}^1}$拓扑共轭。现在可以利用 $P|_{\mathcal{J}(P)}$ 与 $A_\Gamma|_{\Lambda(\Gamma)}$之间的半共轭，将填充 Julia 集 $\mathcal{K}(P)$（它是一个闭Jordan圆盘）粘贴到填充极限集 $K(\Gamma)$之外，从而得到一个拓扑二维球面。此外，这个半共轭的存在意味着，$\backsim P$ 在 $\mathcal{K}(P)$上的作用与 A_Γ 在 $K(\Gamma)$某个子集上的作用可以拼接起来，在刚才定义的 $\mathbb{S}^2$ 的副本上得到一个连续映射。这个映射称为 A_Γ 与 P的拓扑配对。若上述拓扑二维球面具有一种复结构，使拓扑配对成为全纯映射（参见[MM21, §7.5]），则称 Bers边界群的（高阶）Bowen-Series 映射的典范延拓 A_Γ 与主双曲分支 $\mathcal{H}_k$ 中的多项式 P在共形意义下可配对。

一种涉及戴维德同胚的精妙手术过程导出了如下共形可配对定理。

定理5.3 (**Bers 边界（高阶）鲍恩-系列映射是可配对的**。[MM21，定理7。19] 设 $\Gamma\in\partial\mathcal{B}(\Gamma_0)$ 是一个允许存在（高阶）鲍恩-$\widehat{}$塞里斯映射 A_Γ的群。那么，典范延拓 A_Γ 可与主双曲分支 $\mathcal{H}_k$中的多项式进行共形伴配，其中 $k=$次数$\{A_\Gamma\colon \Lambda(\Gamma)\longrightarrow\Lambda(\Gamma)\}$。

对于允许存在（高阶）鲍恩-系列映射 A_Γ 的群 $\Gamma\in\partial\mathcal{B}(\Gamma_0)$，相应的测地层状结构 $\mathcal{L}$ 在基础（高阶）鲍恩-系列映射 A_{Γ_0} 下是不变的。其相关等价关系 $\mathcal{L}$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上满足以下性质。

(1) $\mathcal{L}$ 在 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 中是闭的。(2) $\mathcal{L}$ 的每个等价类 X 都是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$的有限子集。(3) $\mathcal{L}-$个等价类两两不交错；也就是说，如果 $\mathcal{L}$的两个不同等价类是 X 和 Y，则存在互不相交的区间 I_X、$I_X\subset\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，使得 $X\subset I_X$ 和 $Y\subset I_Y$。(4) 如果 $\mathcal{L}-$是一个 X 等价类，那么 $A_{\Gamma_0}(X)$ 也是一个 $\mathcal{L}$-等价类。(5) 如果 $\mathcal{L}-$是一个 X 等价类，那么 $X\mapsto A_{\Gamma_0}(X)$ 是保持循环序的双射。

另一方面，与具有连通朱利亚集的复多项式 P 相关联的层叠，也具有上述性质的类似版本（其中 A_{Γ_0} 的作用由基多项式 z^d承担）。粗略地说，该层叠

与 P 相关联，是 z^d–上的一个不变闭等价关系，其商空间 $\mathbb{S}^1$ 在该等价关系下构成 P 的朱利亚集的一个拓扑模型（参见 [Kiw04]）。值得注意的是， $A_{\Gamma_0}|_{\mathbb{S}^1}$ 与$z^d|_{\mathbb{S}^1}$ 之间的拓扑共轭（对某个 $d \geq 2$而言）为我们提供了一种工具，使我们能够从群论世界中的层叠过渡到多项式世界中的层叠。这一组合联系使我们得以援引多项式动力学中的标准实现结果，并得出结论：极限集 Λ(Γ)确实与某个复多项式的朱利亚集同胚，而且这种同胚具有一种“动力学自然”的方式。

定理 5.4(**极限集与朱利亚集之间的等变同胚**。[MM21，定理 7。16] 设 $\Gamma \in \partial\mathcal{B}(\Gamma_0)$ 是一个存在（高阶） *Bowen-Series* 映射 A_Γ 的群。那么存在一个复多项式 P_Γ（其次数等于 A_Γ ： $\Lambda(\Gamma) \longrightarrow \Lambda(\Gamma)$ 的次数），使得 A_Γ 在极限集 $\Lambda(\Gamma)$ 上的作用与 P_Γ 在其朱利亚集上的作用拓扑共轭。

6. Measures of maximal entropy and Patterson-Sullivan measures

本节中，我们研究与福克斯带 puncture 球面群相关的 Bowen-Series 映射和高阶 Bowen–Series 映射的测度论动力学，从而将这一主题与 Sullivan 的另一项开创性工作——帕特森–沙利文测度联系起来。具体而言，我们证明，作用于圆上的（高阶）Bowen-Series 映射的最大熵测度，是支撑在自由群的格罗莫夫边界上的适当帕特森–沙利文测度的推前。

非正式地说，群的格罗莫夫边界上的沙利文–帕特森测度，是一列支撑在长度为 n 的字上的原子测度的弱极限；这些测度按照群元素到某个固定基点的距离进行适当加权（对于具有标准生成集的自由群，该序列可简化为公式（1））。虽然我们不会使用帕特森–沙利文测度的一般理论，但建议读者参阅 [Pat76、Sul79、Coo93] ，了解这些测度在福克斯群、克莱因群和双曲群背景下的构造及基本性质。关于符号动力系统以及拓扑熵／测度熵的背景知识，请参阅 [Wal82、BS02]。

6.1. 鲍恩-系列映射的最大熵测度。

为明确起见，我们固定第 3.2 节中的福克斯（d+1）–次带 puncture 球面群 $\Gamma_0 = G_d$ 及其基本域 R ；该基本域由顶点位于单位根的 $2d$– 次幂处的理想多边形给出（$d \geq 2$）。此外，令 $A \equiv A_{\Gamma_0,\mathrm{BS}}$ ： $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 为与基本域 R 相对应的鲍恩-系列映射 Γ_0 。

动力系统的拓扑熵是一种数值型拓扑共轭不变量，用于衡量系统的复杂性。粗略地说，它表示长度为 n 的本质不同轨道片段数量的指数增长率。由于 A 与 z^{2d-1}拓扑共轭，因此A–在 $\mathbb{S}^1$ 上的作用的拓扑熵等于 ln(2$d-1$)。我们感兴趣的是研究 A的最大熵测度（简称 MME）；也就是说，研究 $\mathbb{S}^1$上的唯一 A–不变测度，其测度熵等于拓扑熵 ln(2$d-1$)（参见[AKU21a、AKU21b] ，其中计算了与余紧福克斯群相关的鲍恩-系列映射的拓扑熵，并给出了有关其最大熵测度的结果）。

6.1.1. 以拓扑动力学的角度看 A 的最大熵测度。 根据命题3.3，存在一个同胚

$$\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

将 $p : z \mapsto z^{2d-1}$ 共轭到 A （这一同胚可视为 Minkowski问号函数? 的推广；参见 [LLMM22，§4.4。2]关于反全纯情形中的类比）。 ◯

我们将 $\mathbb{S}^1$ 上的 Haar（归一化勒贝格）测度记为 m。注意， m 是 p 在 $\mathbb{S}^1$ 上的作用的唯一最大熵测度（直接计算可知， $p|_{\mathbb{S}^1}$ 相对于 m的测度熵等于拓扑熵 $\ln(2d-1)$，而该测度的唯一性例如可由 [Lyu83，定理 9]推出）。由于同胚 ϕ 是一个共轭，我们有如下结论。

命题6.1。 $\nu = \phi_* m$，其中 ν 是 A–作用在 $\mathbb{S}^1$上的唯一最大熵测度。

6.1.2. 关于 A 的最大熵测度与符号动力系统。由 $2d$–次单位根确定的 $\mathbb{S}^1$ 的划分构成了 A的马尔可夫分割。我们将此划分记为 $\{I_1, I_{-1}, \cdots, I_d, I_{-d}\}$，其中 I_j是连接 $e^{2\pi i \frac{(j-1)}{2d}}$和 $e^{2\pi i \frac{j}{2d}}$的 $\mathbb{S}^1$ 的逆时针弧， I_{-j}是 I_j的复共轭，对 $j \in \{1, \cdots, d\}$成立。这个马尔可夫分割的转移矩阵为

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

上述转移矩阵导出一个单侧有限型子移位

$$\sigma : \Sigma_M^+ \to \Sigma_M^+.$$

这里， Σ_M^+是 $\{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm d\}^{\mathbb{N}}$中所有 M–可容许无限词的集合；即，

$$\Sigma_M^+ := \{(i_1, i_2, \cdots) \in \{\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm d\}^{\mathbb{N}} : A(I_{i_j}) \supset I_{i_{j+1}} \text{ for all } j \geq 1\},$$

而 σ 是左移映射。在 Σ_M^+ 中，秩为 $k \geq 1$ 的柱集是如下形式的集合

$$[r_1, \cdots, r_k] := \{(i_1, i_2, \cdots) \in \Sigma_M^+ : i_j = r_j, \text{ for } j \in \{1, \cdots, k\}\},$$

其中（r_1， $\cdots$， r_k） $\in \{\pm 1, \cdots, \pm d\}^k$。我们用通常的超度量（以 e 为底）度量 Σ_M^+。

由于 A 是扩张的，可得到一个连续满射

$$\psi : \Sigma_M^+ \to \mathbb{S}^1$$

它将 σ 半共轭到 A。我们可以并且将假设， ψ 将柱集 $[\pm j] \subset \Sigma_M^+$ 映射到 A 中连接 $e^{\pm \pi i (j-1)/d}$ 与 $e^{\pm \pi i j/d}$ 的马尔可夫分割块。

注记 6.2. 关于与更一般的福克斯穿孔曲面群相关的鲍恩-系列映射的马尔可夫分割，参见 [Sta04] 。然而，当曲面的亏格大于零时，这些映射并不连续。

对 $\sigma-$ 在 Σ_M^+ 上的作用而言，唯一的最大熵测度（在符号动力系统中称为帕里测度）是由“均匀”马尔可夫测度 μ 给出的，它将质量 $\frac{1}{2d\cdot(2d-1)^n}$ 赋予每个秩为 $n+1\,(n\geq 0)$ 的柱集。相应的拓扑熵也是 $\ln(2d-1)$（注意，$2d-1$ 是 M 的最大特征值）。半共轭 ψ 的存在现在意味着

命题 6.3. *A的最大熵测度（记作 ν）是帕里测度 μ 在 ψ下的推前；即 $\nu=\psi_*\mu$。*

6.1.3. 的最大熵测度 与帕特森-沙利文测度的关系。 由于 Bowen-Series 映射 A 是根据福克斯群 Γ_0构造的，自然会让人想知道 A 的最大熵测度 ν 是否与 Γ_0的帕特森-沙利文测度类有关。下述命题对此问题给出了否定答案（回忆一下，Γ_0 的帕特森-沙利文测度属于Haar测度m的测度类）。

命题 6.4. *测度 ν 与Haar测度 m并非相互绝对连续；也就是说，ν 和 m 不属于同一测度类。*

证明。 这是 Caroline Series 告诉我们的。该命题由以下事实得出：

(1) 福克斯群 Γ_0 在 $S^1=\partial\mathbb{D}$ 上的作用属于 III_1型。(2) 多项式 z^k 在 $S^1=\partial\mathbb{D}$ 上的作用属于 $III_{\ln(k)}$型。

详情请参见 [Spa87] 。 □

幸运的是，由 d 个生成元生成的自由群 $F_d\cong\Gamma_0$ 为我们提供了一个 Patterson-Sullivan 测度（支撑在 F_d的格罗莫夫边界上），该测度与 ν密切相关。

我们将 F_d 的 Cayley树记为 X，并赋予其字度量。该群通过等距变换作用在这棵树上。F_d 的格罗莫夫边界记为 ∂X。注意到，我们可以自然地将 ∂X 与移位空间 Σ_M^+ 识别。将 Cayley树 X 视为与 $\mathbb{D}$ 的 Γ_0-镶嵌对偶的对象（该镶嵌与基本域 R相关联），根据识别 $\partial X\cong\Sigma_M^+$，可以看出映射 ψ 就是从 ∂X 到 $\mathbb{S}^1$ 的（弗洛伊德-）坎农-瑟斯顿映射（参见 [Flo80]）。

定义6.5. *令 X 表示群 Γ的凯莱图。设 $g\in\Gamma$ （视为 X的一个顶点）。 g 的锥由满足以下条件的顶点 $h\in X$ 组成：任意测地线 $[1,g]$ 后接任意测地线 $[g,h]$，所得路径都是 X 中连接1与 h的测地线 $[1,h]$。*

下一个结果使我们能够将 ν 与 ∂X上的一个适当的帕特森-沙利文测度联系起来。

引理 6.6. *∂X 上的帕特森-沙利文测度（相对于基点1 和标准生成集）由帕里测度 μ给出。*

证明。 注意，F_d中长度为 r的字的数量为 $2d\cdot(2d-1)^{r-1}$，其中 $r\geq 1$。因此，∂X 上的帕特森-沙利文测度（相对于基点 1 和标准生成集）是以下测度的弱极限

$$\mu_n:=\frac{\delta_1+\sum_{j=1}^n\frac{1}{(2d-1)^j}\left(\sum_{|g|=j}\delta_g\right)}{1+\sum_{j=1}^n\frac{2d\cdot(2d-1)^{j-1}}{(2d-1)^j}}=\frac{\delta_1+\sum_{j=1}^n\frac{1}{(2d-1)^j}\left(\sum_{|g|=j}\delta_g\right)}{1+\frac{2dn}{2d-1}}. \tag{1}$$

直接计算可得，长度为 r 的群元素对应的锥的 μ_{n+r}–质量为:

$$\frac{1}{1+\frac{2d(n+r)}{2d-1}}\cdot\frac{n+1}{(2d-1)^r},$$

当 $n\to+\infty$ 时，~~它趋于~~ $\frac{1}{2d}\frac{1}{2d-1}()^{r-1}$ 。由此可知，帕特森–沙利文测度在 ∂X 上为秩为 r 的每个柱集（在 ∂X~~中）赋予质量~~ $\frac{1}{2d}\frac{1}{2d-1}()^{r-1}$ 。根据 μ 的定义，证明至此完成。□

由于 $\nu=\psi_*\mu$，我们得出以下结果。

命题 6.7。 鲍恩-塞里斯映射 A 的最大熵测度 ν，是通过（弗洛伊德-）坎农-瑟斯顿映射 ψ 将 ∂X 上的帕特森–沙利文测度 μ （相对于基点1 和标准生成集）推前所得的测度。

6.1.4. Γ_0–最大熵测度的不变性： A。 现在，我们利用ν 与帕特森–沙利文测度之间的联系，来展示 $\Gamma_0-\nu$测度类的不变性。

命题 6.8. 对于每个 $\gamma\in\Gamma_0$，测度 ν 和 $\gamma_*\nu$ 彼此绝对连续。

证明。 首先注意，(弗洛伊德-)坎农-瑟斯顿映射 ψ 将 F_d–在 ∂X 上的作用半共轭到 Γ_0–在 $\mathbb{S}^1$ [Flo80]上的作用。我们将 F_d 中与 $\gamma\in\Gamma_0$ 对应的元素记为 $\widetilde{\gamma}$。

由命题 6.7 和上一段可知， $\mathbb{S}^1$ 上的测度 $\gamma_*\nu$ 是 ψ作用下 ∂X 上的测度 $\widetilde{\gamma}_*\mu$ 的推前。此外，由于 μ 是 ∂X上的 Patterson-Sullivan 测度，因此 $\widetilde{\gamma}_*\mu$ 和 μ 彼此绝对连续（参见 [Coo93，定理 5.4、定理 8.2]）。现在根据测度推前的定义，很容易看出测度 $\nu=\psi_*(\mu)$ 和 $\gamma_*\nu=\psi_*(\widetilde{\gamma}_*\mu)$ 彼此绝对连续。□

注记 6.9. 对于 $\gamma\in\Gamma_0$，拉东-尼科迪姆导数 $d(\gamma_*\nu)/d\nu$ 可以用 ψ 和拉东-尼科迪姆导数 $d(\widetilde{\gamma}_*\mu)/d\mu$来表示，而后者又可以根据柱集的测度计算（参见 [Coo93,§8]，其中介绍了一种用布塞曼函数表示此类拉东-尼科迪姆导数的一般方法）。

现在注意到，鲍恩-塞里斯映射 A 不仅取决于群Γ_0，也取决于基本域 R的选择。将 R平移一个元素 $\gamma\in\Gamma_0$，会得到 Γ_0的另一个基本域 $\gamma\cdot R$。我们用 A^γ表示与基本域 $\gamma\cdot R$ 相对应的 Γ_0 的鲍恩-塞里斯映射。显然， $A^\gamma=\gamma\circ A\circ\gamma^{-1}$。此外， $\mathbb{S}^1$ 上的 A^γ–作用的唯一最大熵测度由 $\gamma_*\nu$给出。命题 6.8 由此推出如下结论。

推论 6.10. 与基本域 $\gamma\cdot R$ （对于 $\gamma\in\Gamma_0$）相关联的鲍恩-系列映射的最大熵测度彼此绝对连续。特别是，这些测度的豪斯多夫维数都相同。

6.1.5. 鲍恩-系列映射与多项式配对的最大熵测度。回顾一下，定理 3.5 为我们提供了一个共形配对：鲍恩-系列映射的典范延拓 A （与 Γ_0的基本域 R 相关联）以及多项式映射 z^{2d-1}。另请注意，这个共形配对在其

若尔当曲线极限集上的限制与 $A|_{\mathbb{S}^1}$拓扑共轭。由此可根据命题 6.1 和 6.7 得到共形配对的最大熵测度的如下描述。

命题 6.11. $\widehat{A}$ 与 z^{2d-1} 的共形镶嵌在极限集上的限制，其唯一的最大熵测度等于归一化勒贝格测度 m 的推前（它是 $z^{2d-1}|_{\mathbb{S}^1}$的唯一最大熵测度），也等于 μ 上帕特森-沙利文测度在适当共轭映射下的推前（基于基点1 和标准生成集）。特别地，相应的拓扑熵为$\ln(2d-1)$。

6.1.6. 的拓扑熵的群论视角。 A的拓扑熵 $\ln(2d-1)$ 可以与群 F_d 的体积熵 联系起来；体积熵衡量群中长度为 n 的字的数量的指数增长率（等价地，衡量单位元周围半径为 n 的球中群元素数量的指数增长率）。

引理 6.12。 F_d 相对于标准（对称）生成元集合的体积熵，以及 F_d–在 X 上的作用的临界指数，均等于$\ln(2d-1)$。

证明。 回顾一下， F_d 中长度为 r 的字的数量为 $2d\cdot(2d-1)^{r-1}$，其中$r\geq 1$。因此，

$$\#\{g\in F_d : |g|\leq n\} = 1+2d\sum_{r=1}^{n}(2d-1)^{r-1} = 1+2d\frac{(2d-1)^n-1}{2d-2},$$

由此可知，体积熵为 $\ln(2d-1)$。

现在考虑指数为 s的 Poincar´e 级数：

$$\zeta_{F_d}(s) := \sum_{g\in F_d} e^{-s|g|} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{g\in F_d\\ |g|=n}} e^{-sn} = 2d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2d-1)^{n-1}}{e^{sn}} = \frac{2d}{2d-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2d-1}{e^s}\right)^n.$$

显然，当且仅当 $2d-1<e^s \iff s>\ln(2d-1)$时，该级数收敛。特别地，临界指数为 $\ln(2d-1)$。□

注 6.13。 余紧福克斯群所对应的 *Bowen-Series* 映射的拓扑熵与适当双曲群的体积熵之间的联系，已在 [Los14]中建立。

在 [Sul84 中，Sullivan 定理 1]，证明了几何有限克莱因群的临界指数与极限集豪斯多夫维数相等。虽然双曲群的类似结果可由一般性考虑得出（参见 [Coo93，定理 8.3] [KB02，定理 15.8]），但我们可以为当前情形给出一个简单的证明。

引理 6.14. F_d 的格罗莫夫边界在视觉度量（底数为 e）下的豪斯多夫维数等于 $\ln(2d-1)$。此外，$\ln(2d-1)-$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^{\ln(2d-1)}$ （在 ∂X 上）与 μ 彼此绝对连续。

证明。 在 ∂X 上的视觉度量（底数为 e）与由 $d(a,\ b)=e^{-|c|}$ 给出的超度量是双 Lipschitz 等价的，其中 c 是测地射线 $[1,a)$ 的分叉点，并且

$[1,b)$。因此，只需计算 ∂X 关于该超度量的豪斯多夫维数。

我们首先注意到，秩为 n 的柱集的 μ-测度等于 $\frac{1}{2d\,(2d-1)^{n-1}}$。另一方面，秩为 n 的柱集的直径为 e^{-n}。因此，

$$\mu(B(a,e^{-n}))=\frac{1}{2d(2d-1)^{n-1}} \implies \mu(B(a,r))\sim r^{\ln(2d-1)}.$$

该结果现在由关于豪斯多夫维数的标准结果得出（例如，参见 [Fal03，命题 4.9]）。事实上，我们已经证明，$\ln(2d-1)$–维豪斯多夫测度是正且有限的。第二个陈述由上述证明显然可得。□

6.2. **高阶 Bowen-Series 映射的最大熵测度**。现在，我们对 Fuchsian 穿孔球面群的高阶 Bowen-Series 映射的最大熵测度进行类似分析。为简洁起见，我们讨论三穿孔球面的情形。

我们固定第4.1节中的福克斯三孔球面群 Γ_0 以及一个由顶点位于单位的四次根处的四边形给出的（闭）基本域 W。进一步设 $A\equiv A_{\Gamma_0,\ \mathrm{hBS}}:\ \mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 为 Γ_0 所对应的高阶 Bowen-Series 映射。由于 $A|_{\mathbb{S}^1}$ 与 $z^4|_{\mathbb{S}^1}$ 拓扑共轭， A 的拓扑熵等于 $\ln(4)$。我们将 $A|_{\mathbb{S}^1}$ 的唯一最大熵测度记为 ν。

6.2.1. 拓扑动力学。 由于 A 是次数为 4 的扩张圆覆盖，存在一个同胚

$$\phi:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$$

将 p: $z\mapsto z^4$ 共轭到 A。利用共轭 ϕ，可将 $A|_{\mathbb{S}^1}$ 的最大熵测度 ν 写为推前测度 ϕ_*m。

6.2.2. 符号动力系统。 A 的各部分为 $g^{\pm1},h^{\pm1},g\circ h^{-1},h\circ g^{-1}$。它们的定义区间构成 A 的一个马尔可夫分割（从 1 开始按逆时针方向排列），其转移矩阵为

$$M:=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&0\\1&1&0&0&1&1\\0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

上述转移矩阵导出一个单侧有限型子移位

$$\sigma:\Sigma_M^+\to\Sigma_M^+,$$

其中， Σ_M^+ 由 $\{1,2,\cdots,6\}^{\mathbb{N}}$ 中的 $M-$ 个可容许无限词组成，而 σ 是左移映射。与前面一样，我们用通常的超度量（以 e 为底）赋予 Σ_M^+ 度量。由于 A 是扩张的，因此可得到一个连续满射

$$\psi:\Sigma_M^+\to\mathbb{S}^1$$

该映射将 σ 半共轭到 A，并将一阶柱集映射到 A的马尔可夫划分片。

帕里测度（即唯一的最大熵测度）对于 σ–在 Σ_M^+ 上的作用，由‘均匀’马尔可夫测度 μ给出，该测度为每个

秩为 $n+1$ ($n \geq 0$)的柱集赋予质量。相应的拓扑熵也是 ln(4)（注意，4 是 M的最大特征值），并且 $\nu = \psi_* \mu$。

6.2.3. 帕特森-沙利文测度。 现在我们将注意力转向自由群$F_2 \cong \langle g \rangle * \langle h \rangle$ 及其生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$ （它们恰好是 A的组成部分）。

我们将相对于上述（非标准）生成集的 F_2 的凯莱图记为 X，并为其赋予字度量。注意，我们可以自然地将格罗莫夫边界 ∂X 与移位空间 Σ_M^+ 等同起来。在这一对应关系下，生成元处的锥的无穷远边界就是 Σ_M^+ 中的相应柱集。

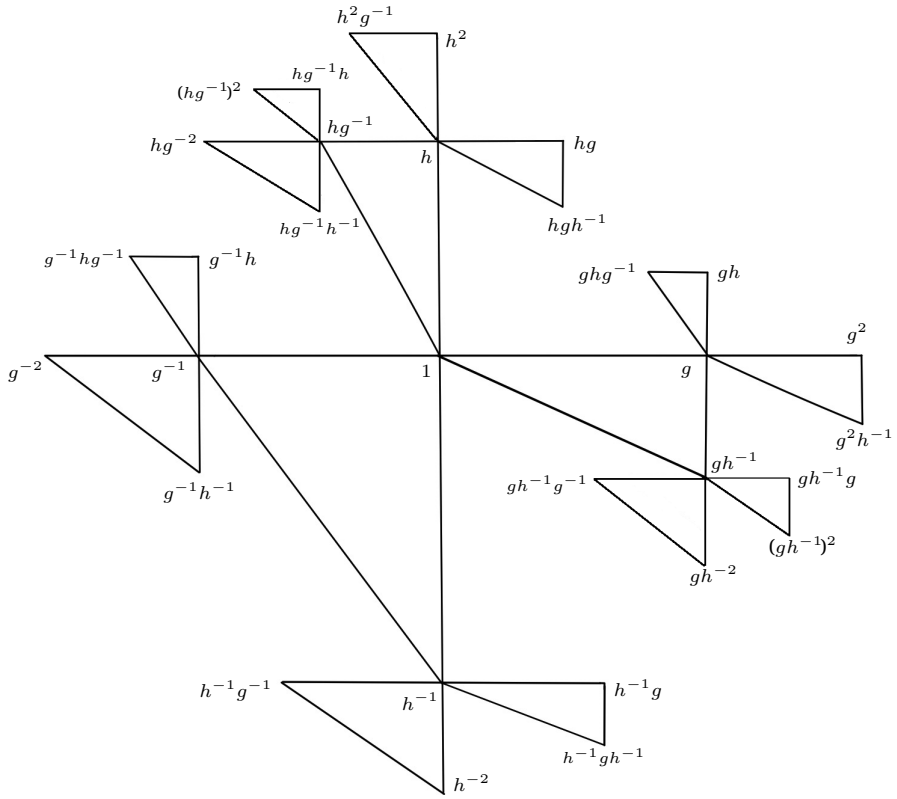

FIGURE 6. 图中展示了相对于生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$ 的 F_2 的凯莱图中长度为一和二的字。

注 6.15. 高阶鲍恩-塞里斯映射 A 由此给出一个作用于格罗莫夫边界 ∂X 上的 *Markov* 映射 $\widetilde{A}$（使得 A 与 ∂X上的 F_2–作用轨道等价），具体如下：对于 $\alpha \in \{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$，映射 $\widetilde{A}$ 在锥(α) 的无穷远边界上作用为 α^{-1}。

引理 6.16。 ∂X 上的帕特森-沙利文测度（相对于基点 1 和生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$）由帕里测度 μ给出。

证明。 从生成元和关系（等价地，从图6所示的凯莱图）很容易看出， F_2中长度为 r 的字的数量（相对于生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$）为 $6 \cdot 4^{r-1}$ （ $r \geq 1$）。现在，类似于引理 6.6 证明中的计算可以直接得出，所讨论的帕特森-沙利文测度（在 ∂X 上）为（ ∂X 中）秩为 r的每个柱集赋予质量 $\frac{1}{6 \cdot 4^{r-1}}$。因此，帕特森-沙利文测度在每个柱集上都与$\mu$ 一致。□

命题6.17。 高阶鲍恩-塞里斯映射 A 的最大熵测度 ν 是 ∂X 上的帕特森-沙利文测度 μ （相对于基点 1 和生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$）在 ψ下的推前。

6.2.4. Γ_0–的共轭类不变性 ν。 命题6.17， F_d–帕特森-沙利文测度 μ（在 ∂X上）的测度类不变性 [Coo93，定理 5.4、定理 8.2], 以及映射 ψ 将 ∂X 上的 F_d–作用半共轭到 $\mathbb{S}^1$ 上的 Γ_0–作用这一事实，共同推出以下结论。

命题6.18。 对于每个 $\gamma \in \Gamma_0$，测度 ν 和 $\gamma_* \nu$ 彼此绝对连续。

6.2.5. 交配映射的最大熵测度。 根据定理 4.11，存在一个共形配对，它将高阶鲍恩-塞里斯映射 A （与 Γ_0 的闭基本域 W 相关联）的典范延拓 A 与多项式映射 z^4 配对，使得该共形配对在其若尔当曲线极限集上的限制与 $A|_{\mathbb{S}^1}$ 拓扑共轭。根据 m 和 μ 对测度 ν 的解释，可得以下结论。

命题6.19。 将 $\widehat{A}$ 与 z^4 共形配对后，其在极限集上的限制所对应的唯一最大熵测度，等于在适当的共轭下， z^4 在 $\mathbb{S}^1$ 上的最大熵测度的推前，也等于 ∂X 上帕特森-沙利文测度的推前（相对于基点 1 和生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$）。特别地，相应的拓扑熵为 $\ln(4)$。

6.2.6. 拓扑熵、体积熵和豪斯多夫维数。 由于在 F_2 中（相对于生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$）长度为 r 的字有 $6 \cdot 4^{r-1}$ 个，证明引理 6.12、6.14 时所使用的论证经过相应调整后同样适用于当前情形，并证明体积熵、临界指数和格罗莫夫边界的豪斯多夫维数相等。此外，这个数还与 $A|_{\mathbb{S}^1}$ 的拓扑熵一致。

引理 6.20。

(1) F_2 相对于生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}$、 $h \circ g^{-1}\}$ 的体积熵，以及 F_2- 在 X 上作用的临界指数，均等于$\ln(4)$。(2) ∂X 配备相对于生成集 $\{g^{\pm 1}, h^{\pm 1}, g \circ h^{-1}, h \circ g^{-1}\}$ 的视觉度量（以 e 为底）时的豪斯多夫维数等于 $\ln(4)$。此外，$\ln(4)-$ 维豪斯多夫测度 $\mathcal{H}^{\ln(4)}$ 与 μ（在 ∂X 上）彼此绝对连续。

6.3. **最大熵测度的豪斯多夫维数：三穿孔球面**。回顾命题 6.4,

Fuchsian穿孔球面群的 Bowen-Series 映射的最大熵测度不属于勒贝格测度类。本节将在三穿孔球面的情形下证明这一事实的一个更强版本。

具体而言，我们将证明豪斯多夫维数

$$\mathrm{HD}(\nu) := \inf\{\mathrm{HD}(Y) : Y \subset \mathbb{S}^1,\ \nu(Y) = 1\}$$

福克斯三孔球面群的（高阶）鲍恩-塞里斯映射的最大熵测度 ν 严格小于 1。这个结论应与类似结果进行比较：除了一些非常特殊的情形，有理映射的最大熵测度的豪斯多夫维数严格小于其朱利亚集 [Zdu90] 的豪斯多夫维数。

接下来，我们将根据所考虑的（高阶）鲍恩-塞里斯映射构造一个区间 $[0, 1]$ 的自映射，并将该（高阶）鲍恩-塞里斯映射的最大熵测度的豪斯多夫维数与相关自映射的最大熵测度的豪斯多夫维数联系起来。这将使我们能够得到所需的上界。值得注意的是，尽管对于鲍恩-塞里斯映射而言，这个中间步骤并非必不可少（在这种情况下，可以直接研究鲍恩-塞里斯映射来得到命题6.22的上界），但这种方法在高阶 Bowen-Series 情形下能提供额外信息。事实上，这个约化步骤将高阶鲍恩-塞里斯映射的最大熵测度与数论中的一个经典测度联系起来，从而使已知结果适用于当前情形，并能更准确地估计最大熵测度的豪斯多夫维数。

6.3.1. 鲍恩-塞里斯情形。 由于三穿孔球面的 Teichm¨uller 空间是单点集，我们不妨研究第 3.2 小节中引入的鲍恩-塞里斯映射 A_{G_2}。注意，自由群 G_2 中的每个非单位元 g 相对于第 3.2 小节中引入的对称生成集 $\{g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}\}$，都有唯一的最短表示。这个最短表示的长度称为 g 的长度（单位元的长度定义为零）。回忆一下，在 $\mathbb{D}$中以单位的四次根为顶点的理想多边形是 G_2–作用的基本域，因此它在 G_2 中各元素作用下的像构成了 $\mathbb{D}$的铺砌 $\mathcal{T}_{G_2}$。我们称这个基本域为秩 0铺砌块，称它在长度为 k 的元素 $g \in G_2$ 作用下的像为上述镶嵌中的秩 k 铺砌块。

我们将利用该镶嵌$\mathcal{T}_{G_2}$ 的一个特定对称性质，现将其描述如下。沿用第 3 节的记法，我们用 R 表示 $\mathbb{D}$ 中顶点位于单位的四次根处的理想多边形，其边记为 $C_{\pm 1}$、$C_{\pm 2}$。进一步，用 $\rho_{\pm 1}$、$\rho_{\pm 2}$ 表示关于这些边的反莫比乌斯反射，用 $\mathcal{G}$ 表示由 $\rho_{\pm 1}$、$\rho_{\pm 2}$ 生成的反射群。注意，多边形 R 在 $\mathcal{R}$ 和 ι 的作用下保持不变，其中 $\mathcal{R}$ 表示旋转角度为 $\pi/2$，而 ι 表示关于实轴的反射。因此，由 $\mathcal{R}$ 和 ι 共轭会将 $\mathcal{G}$ 的生成集$\{\rho_{\pm 1}, \rho_{\pm 2}\}$ 置换，从而 $\mathcal{R}$ 和 ι 将 $\mathcal{G}$ 共轭到自身。因此，由基本域 R （在 $\mathbb{D}$ 中取闭包）产生的 $\mathbb{D}$ 的 $\mathcal{G}$–镶嵌$\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ 同时在 $\mathcal{R}$ 和 ι 的作用下保持不变。还要注意，关系 $g_i = \iota \circ \rho_i = \rho_{-i} \circ \iota$、$i \in \{1, 2\}$ 以及镶嵌 $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ 的不变性意味着镶嵌 $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ 和 $\mathcal{T}_{G_2}$ 相同。由此可知，$\mathbb{D}$ 的镶嵌 $\mathcal{T}_{G_2}$ 关于$\pi/2$–旋转 $\mathcal{R}$ 对称。

就当前目的而言，使用上半平面模型会更加方便。为此，考虑莫比乌斯变换 $M(z) = i$ (1 –

$z)/(1+z)$，它将单位圆盘映到上半平面，并满足 $M(1)=0$，$M(i)=1$，$M(-1)=\infty$，且 $M(-i)=-1$。因此，M将$\mathbb{D}$ 中顶点为单位的四次根的理想多边形映到 $\mathbb{H}$ 中顶点为-1，0，1 和 ∞ 的理想多边形。映射 M 将 G_2 共轭为 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的一个离散子群 $\boldsymbol{G}_2$，并将上一段中定义的 $\mathbb{D}$ 的 G_2–镶嵌变换为 $\mathbb{H}$的$\boldsymbol{G}_2$–镶嵌。该镶嵌的瓦片及其秩的定义与上一段相同。此外，M 将 Bowen-Series 映射 A_{G_2} 共轭为映射

$$\tau:\mathbb{R}\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}\cup\{\infty\},\qquad \tau(t)=\begin{cases} t+2, & t\in[-\infty,-1],\\ \frac{t}{1+2t}, & t\in[-1,0],\\ \frac{t}{1-2t}, & t\in[0,1],\\ t-2, & t\in[1,+\infty]. \end{cases}$$

根据构造，τ将$[0,\frac{1}{3}]$映射到 $[0,-1]$，$[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$再映射到 $[1,+\infty]$，并将 $[\frac{1}{2},1]$映射到 $[-\infty,-1]$（见图7）。

由于欧几里得等距旋转 $\mathcal{R}:\ z\mapsto iz$ （绕原点）保持 $\mathbb{D}$的 G_2- 镶嵌不变，因此保角旋转 $\mathcal{R}_{\mathbb{H}}(w)=M(i\cdot M^{-1}(w))=\frac{1+w}{1-w}\in\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$（绕 i）保持 $\mathbb{H}$的相应 $\boldsymbol{G}_2$–镶嵌不变。

这使得可以构造一个与 τ相关联的 $[0,1$自映射:

$$F:[0,1)\to[0,1),\qquad F(t)=\begin{cases} \tau(t) & =\frac{x}{1-2x}, & t\in\left[0,\frac{1}{3}\right),\\ \left(\mathcal{R}_{\mathbb{H}}^{-1}\circ\tau\right)(t) & =\frac{3x-1}{1-x}, & t\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),\\ \left(\mathcal{R}_{\mathbb{H}}^{2}\circ\tau\right)(t) & =\frac{2x-1}{x}, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right). \end{cases}$$

（见图8。）$\mathcal{R}_{\mathbb{H}}$ 保角旋转下，$\mathbb{H}$ 的 $\boldsymbol{G}_2$镶嵌具有对称性，这意味着 F 会将某一给定秩的瓦片的理想顶点映射到前一秩瓦片的理想顶点。

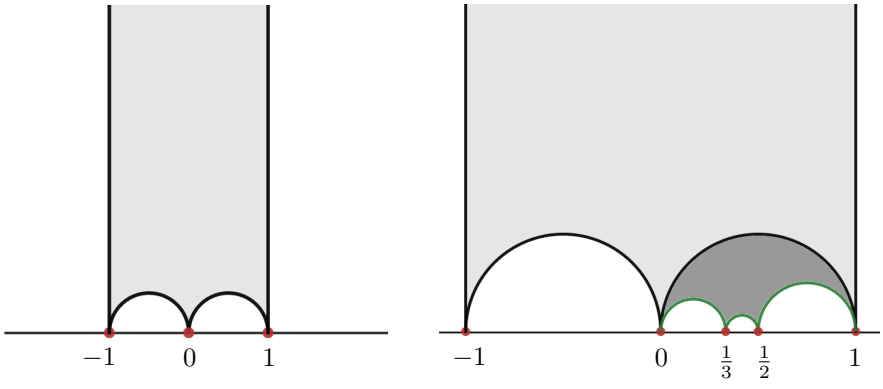

FIGURE 7. 左：三穿孔球面Fuchsian群 $\boldsymbol{G}_2=M\circ G_2\circ M^{-1}$的一个基本多边形，其理想顶点位于0、$\pm1$和 ∞。右：显示了一个秩为一的镶嵌块，其理想顶点位于0、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$和1。

设 $\phi\colon\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是将 z^3 与鲍恩-塞里斯映射A_{G_2} 共轭的同胚，且 $\phi(1) = 1$。由于所选的 A_{G_2} 基本域在绕 $\pi/2$旋转下具有对称性，很容易看出映射 ϕ 与 $z \mapsto iz$ 可交换。利用这一点，可以直接验证三倍映射 $\times_3\colon\ [0,1) \to [0,1)$

$$\times_3(x) = \begin{cases} 3x, & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right), \\ 3x-1, & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \\ 3x-2, & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right), \end{cases}$$

通过 F 拓扑共轭于

$$H : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto M(\phi(E(x))),\ \text{where } E(x) = e^{2\pi i \frac{x}{4}}.$$

由于共轭性质，同胚 H 将有理数 $k/3^n$ （它们是 0 在 $\times_3$ 下的第 n 个原像）映到秩为 n 的瓦片的理想顶点（它们是 0 在 F 下的第 n 个原像）。

另请注意， $[0,1]$ 上的勒贝格测度 m 是 $\times_3$ 的最大熵测度，因此，

$$\nu' := H_*\overline{m} \tag{2}$$

是 F 的最大熵测度。

引理 6.21。 设 ν、ν' 分别为鲍恩-塞里斯映射 A_{G_2} 和映射 F 的最大熵测度。则 $\mathrm{HD}(\nu') = \mathrm{HD}(\nu)$。

证明。 我们首先注意到，M¨obius 映射 $M\colon\ \{e^{i\theta}\colon\ \theta \in [0,\pi/2]\} \to [0,1]$是双 Lipschitz的，因此保持豪斯多夫维数（例如，这可以由 $M(e^{i\theta}) = \tan(\frac{\theta}{2})$这一事实推出）。因此，根据 ν'的定义（见公式2），我们有

$$\mathrm{HD}(\nu') = \mathrm{HD}((\phi \circ E)_*\overline{m}).$$

注意，测度 $E_*(m)$ 就是弧 $\{e^{i\theta}\colon\ \theta \in [0,\pi/2]\} \subset \mathbb{S}^1$ 上的归一化勒贝格测度。

现在取满足 $\nu(A) = 1$ 的 $A \subset \mathbb{S}^1$，并令 $A' := A \cap \{e^{i\theta}\colon\ \theta \in [0,\pi/2]\}$。根据定义，集合 $\phi^{-1}(A)$ 关于 $\mathbb{S}^1$ 上的 Haar测度 m 是满测度的，因此， $m(\phi^{-1}(A')) = 1/4$ （这里我们用到了 ϕ 将 $\mathbb{S}^1$ 的第一象限映射到自身这一事实）。这意味着 $\phi^{-1}(A')$ 关于E_*m 是满测度集，进而 A' 关于 $(\phi\circ E)_*m$ 也是满测度集。因此，

$$\mathrm{HD}((\phi \circ E)_*\overline{m}) \leq \mathrm{HD}(A') \leq \mathrm{HD}(A).$$

对所有 $\mathbb{S}^1$ 的满 ν 测度子集 A 取下确界，我们得出：

$$\mathrm{HD}(\nu') = \mathrm{HD}((\phi \circ E)_*\overline{m}) \leq \mathrm{HD}(\nu).$$

对于反向不等式，取 $A' \subset \{e^{i\theta}\colon\ \theta \in [0,\pi/2]\}$，使其具有全 $(\phi \circ E)_*m$-测度。定义 A 为 A' 在旋转 $\pi/2$下的对称化。由于 $\phi^{-1}(A')$相对于 E_*m具有全测度，我们有 $m(\phi^{-1}(A')) = 1/4$。由于 ϕ 与乘以 i可交换，因此可得 $m(\phi^{-1}(A)) = 1$；也就是说， A 的 ν-测度为 1。因此，

$$\mathrm{HD}(\nu) \leq \mathrm{HD}(A) = \mathrm{HD}(A')$$

最后，对 $\{e^{i\theta}$ 的所有具有全 $(\phi \circ E)_* m$-测度的子集 A' 取下确界： $\theta \in [0, \pi/2]\}$，我们得到

$$\mathrm{HD}(\nu) \leq \mathrm{HD}((\phi \circ E)_* \overline{m}) = \mathrm{HD}(\nu').$$

□

命题6.22。 令 ν 为 *Bowen-Series* 映射 A_{G_2}的最大熵测度。那么，$\mathrm{HD}(\nu) < 1$。

证明。 根据引理 6.21，只需证明 $\mathrm{HD}(\nu') < 1$，其中 ν' 是 F （由公式2定义）的最大熵测度。豪斯多夫维数、熵与 Lyapunov指数之间的下列关系是标准结果（参见 [PU10，§10]，[HR92]）：

$$\mathrm{HD}(\nu') = \frac{\ln(3)}{\int_0^1 \ln |F'| d\nu'} .$$

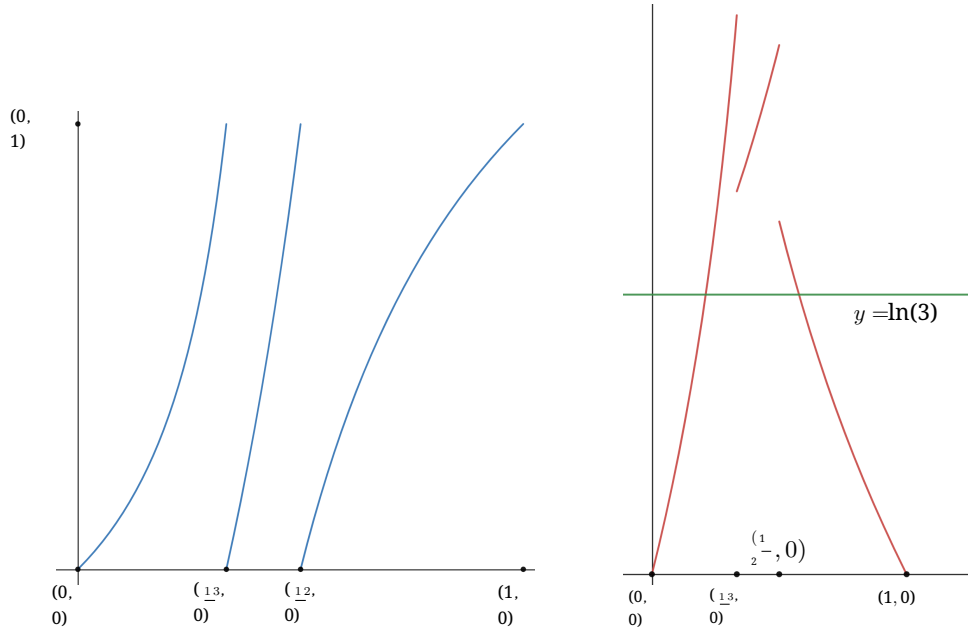

FIGURE 8. 左： F的图像。右：$\ln |F'|$的图像。

我们还有 $\ln |F'|$ 在 $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\}$上的如下显式描述：

$$\ln |F'|(t) = \begin{cases} \ln \frac{1}{(1-2x)^2} , & t \in \left(0, \frac{1}{3}\right), \\ \ln \frac{2}{(1-x)^2} , & t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \\ \ln \frac{1}{x^2} , & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

（见图8。）

我们的目标是证明 $\ln(3)$ 是 F 的 Lyapunov指数的严格下界。为此，我们首先注意到，根据 ν' 的定义，秩不超过三的瓦片的理想顶点（在 $[0, 1]$ 中）将单位区间划分为 3^3 个子区间，每个子区间

的 ν' 质量为 $1/3^3$。这些区间的端点显示在图9中。

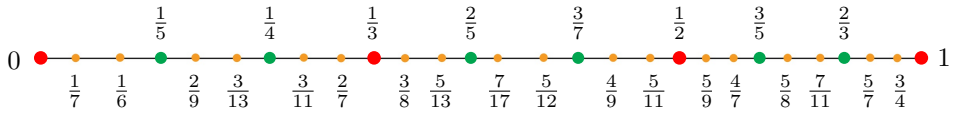

FIGURE 9. F 分段定义的断点（即秩一瓦片的理想顶点）以红色标出。秩二、秩三瓦片新增的理想顶点分别以绿色、橙色显示。27 个补分支的 ν'-质量均为 $1/27$。

—

由于 $\ln|F'|$ 在 $(0, 1/3)$ 和 $(1/3, 1/2)$ 上递增，在 $(1/2, 1)$ 上递减，因此我们有：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \ln|F'|d\nu' \\
&\geq \frac{\ln|F'(0)\cdot F'(\frac{1}{7})\cdot F'(\frac{1}{6})\cdot F'(\frac{1}{5})\cdot F'(\frac{2}{9})\cdot F'(\frac{3}{13})\cdot F'(\frac{1}{4})\cdot F'(\frac{3}{11})\cdot F'(\frac{2}{7})|}{3^3} \\
&+ \frac{\ln|F'(\frac{1}{3})\cdot F'(\frac{3}{8})\cdot F'(\frac{5}{13})\cdot F'(\frac{2}{5})\cdot F'(\frac{7}{17})\cdot F'(\frac{5}{12})\cdot F'(\frac{3}{7})\cdot F'(\frac{4}{9})\cdot F'(\frac{5}{11})|}{3^3} \\
&+ \frac{\ln|F'(\frac{5}{9})\cdot F'(\frac{4}{7})\cdot F'(\frac{3}{5})\cdot F'(\frac{5}{8})\cdot F'(\frac{7}{11})\cdot F'(\frac{2}{3})\cdot F'(\frac{5}{7})\cdot F'(\frac{3}{4})\cdot F'(1)|}{3^3} \\
&\approx 1.201 > \ln(3).
\end{aligned}$$

（上面的数值 1.201 是利用上述 $\ln|F'|$ 的公式进行显式数值计算得到的，精确到小数点后三位。）

Hence, $\mathrm{HD}(\nu') = \frac{\ln(3)}{\int_0^1 \ln|F'|d\nu'} < 1$. □

6.3.2. 高阶鲍恩-塞里斯情形。 我们现在将证明， ν 第4.1节中的高阶鲍恩-塞里斯映射 A 的最大熵测度的豪斯多夫维数严格小于 1。为简化计算，我们首先进行一个约化步骤，以便能够处理 -2 次数为 $\mathbb{S}^1$ 的覆盖映射（注意， A 是圆的四次覆盖映射）。这也将把 ν 的豪斯多夫维数与由 Minkowski 问号函数？自然产生的一类经典研究测度的豪斯多夫维数联系起来（见 [Den38、Sal43、Kin60]，了解问号函数的详情）。

为保持一致，我们将采用第4.1节中的记号。回忆一下，W 是 $\mathbb{D}$ 中的一个（闭）理想四边形，其理想顶点位于单位的四次根处（图3中的四边形1236）。莫比乌斯映射 g， h 将这个四边形的边配对（如图3所示），并生成一个三穿孔球面福克斯群 Γ_0。此外， W 是 Γ_0的一个基本域。高阶 Bowen-Series 映射 A 的基本域是理想六边形123567，而 A 的内域是理想三角形136。

将双曲测地线 13、36 和 61 上的反射分别记为 r_1、 r_2和 $\overline{r_3}$。采用这一记号，边配对变换 g 和 h 分别由 $r_2 \circ r_1$和 $r_3 \circ r_1$给出。也容易验证，映射 $A : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ 是

分段反射马尔可夫映射的第二次迭代

$$\mathfrak{R}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1,\quad z\mapsto\begin{cases} r_1(z) & \text{if } z\in\widehat{123},\\ r_2(z) & \text{if } z\in\widehat{356},\\ r_3(z) & \text{if } z\in\widehat{671}.\end{cases}$$

因此，圆端同态 A 和 $\mathfrak{R}$ 具有相同的最大熵测度。

现在我们将映射 $\mathfrak{R}$ 与 $\mathbb{S}^1$的一个研究充分的保向反转双重覆盖联系起来。注意，由于任意一对双曲理想三角形都莫比乌斯等价，图3中的三角形 $\Delta 136$ 与以三次单位根为顶点的正则理想多边形 $\Pi\subset\mathbb{D}$ 莫比乌斯等价。*Nielsen*映射 $\boldsymbol{\rho_2}:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ 由正则理想三角形反射群 定义为在 $\mathbb{S}^1$ 的三个对应弧上对 Π 的三条边作反莫比乌斯反射（图10给出了示意图；关于此映射的精确定义和性质，见 [LLMM22，§2], [LLMM19，§4.1] ）。 $\Delta 136$与 Π的莫比乌斯等价性意味着，映射 $\mathfrak{R}$ 与 $\boldsymbol{\rho_2}$莫比乌斯共轭。此外，莫比乌斯映射是双 Lipschitz 的，因此高阶 Bowen-Series 映射 A 的最大熵测度 ν 的豪斯多夫维数，等于 $\boldsymbol{\rho_2}$的最大熵测度的豪斯多夫维数。

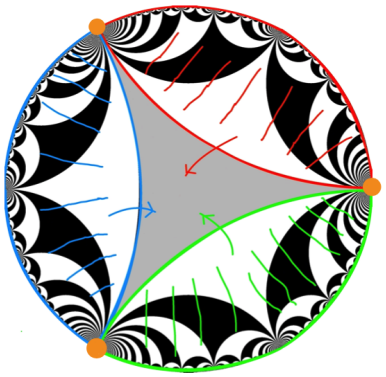

FIGURE 10. 理想三角形群的Nielsen映射 $\boldsymbol{\rho_2}$ 的作用如图所示。

图10： Nielsen映射 $\boldsymbol{\rho_2}$分别在双无限双曲测地线 $\overset{\frown}{1e^{\frac{2\pi i}{3}}}$、 $\overset{\frown}{e^{\frac{2\pi i}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}}$ 和 $\overset{\frown}{e^{\frac{4\pi i}{3}}1}$上作反射，从而作用于 $\overline{\mathbb{S}^1}$的弧 $\overline{1e^{\frac{2\pi i}{3}}}$、 $\overline{e^{\frac{2\pi i}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}}$和 $\overline{e^{\frac{4\pi i}{3}}1}$。它自然延拓为定义在 $\mathbb{D}$ 中理想三角形 Π （灰色部分）补集上的分段反莫比乌斯映射。

将第 6.3.1 小节中的构造应用于 $\boldsymbol{\rho_2}$ 的上半平面模型（使得 $\mathbb{D}$ 中顶点为三次单位根的理想三角形对应于 $\mathbb{H}$ 中顶点为 0，1， ∞的理想三角形），并结合引理 6.21 中的论证，可以证明 $\boldsymbol{\rho_2}$ 的最大熵测度的豪斯多夫维数等于该保向反转二阶映射的最大熵测度的豪斯多夫维数

$$F:[0,1)\to[0,1),\qquad \tau(t)=\begin{cases}\frac{2t-1}{t-1}\pmod 1 & t\in\left[0,\frac12\right),\\ \frac{1-t}{t}\pmod 1 & t\in\left[\frac12,1\right).\end{cases}$$

有关这一构造的详细信息，请参阅 [LLMM19，第9] 节。文中还证明，映射 F 与反向定向的倍增映射拓扑共轭

$$\times_{-2}(x) = \begin{cases} -2x+1 \pmod 1 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -2x+2 \pmod 1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

通过问号函数。因此， F 的最大熵测度由 $[0,1]$ 上的勒贝格测度经? $_{-1}$推前得到。根据 [KS08], ，该测度的豪斯多夫维数严格小于 1。事实上，文中证明了，将 $[0,1]$ 上的勒贝格测度经? $_{-1}$ 推前所得测度的豪斯多夫维数约为 0。875（见 [KS08，图 2，§3]）。我们将上述分析的结论汇总为以下命题。

命题 6.23。令 ν 为福克斯三孔球面群 A 的高阶鲍恩-塞里斯映射的最大熵测度。那么，

$$\mathrm{HD}(\nu) \approx 0.875 < 1.$$

6.4. **一些开放问题**。我们猜想，第 6.3 节的结果在更一般的情形下也成立。

问题 6.24。 设 ν 是一个福克斯穿孔球面群的（高阶）鲍恩-塞里斯映射的最大熵测度。它是否

$$\mathrm{HD}(\nu) := \inf\{\mathrm{HD}(Y) : Y \subset \mathbb{S}^1,\ \nu(Y) = 1\}$$

小于1?

今后我们将假设 $k > 3$，因此曲面 $S_{0,k}$ 具有非平凡的 Teichm¨uller 空间。

我们认为，共形配对 $A_{\Gamma,\mathrm{BS}}$ （分别为 $A_{\Gamma,\mathrm{hBS}}$）与 P 的极限集的豪斯多夫维数，其中 $\Gamma \in \mathrm{Teich}(S_{0,k})$ 和 $P \in \mathcal{H}_{2k-3}$（分别为 $P \in \mathcal{H}_{(k-1)^2}$），严格大于 1。下一个问题的灵感来自鲍恩关于拟福克斯极限集豪斯多夫维数的定理（参见 [Bow79]）。

问题 6.25。 上述这类共形配对的极限集的豪斯多夫维数是否在唯一一点取得其全局最小值?

以下问题的提出，源于 McMullen 关于极限集的豪斯多夫维数及其上自然关联测度变化的研究成果（参见 [McM08]）。

问题 6.26。 当带标记群遍历$\mathrm{Teich}(S_{0,\ k})$时，（高阶）*Bowen-Series* 映射的最大熵测度的豪斯多夫维数如何变化?

问题 6.27。 当 Γ 遍历 $\mathrm{Teich}(S_{0,\ k})$ 且 P 遍历 $\mathcal{H}_{2k-1}$ （分别地，遍历 $\mathcal{H}_{(k-1)^2}$）时，$A_{\Gamma,\ \mathrm{BS}}$ （分别地，$A_{\Gamma,\ \mathrm{hBS}}$）与 P 的保形$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$拟合的极限集的豪斯多夫维数如何变化?

References

[AIM09] K.Astala、T. Iwaniec 和G. Martin. *siconformal mappings in the plane* *Elliptic partial differential equations and qua-*
148 *Princeton Mathematical Series* ，第 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2009年。

[AKU21a] A. Abrams、S. Katok 和 I. Ugarcovici。与福克斯群相关的边界映射的测度熵灵活性。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*, https://doi.org/10.1017/etds.2021.14 2021 , 。[AKU21b] A. Abrams、S. Katok 和 I. Ugarcovici。与福克斯群相关的边界映射的拓扑熵刚性。 https://arxiv.org/abs/2101.10271, 2021年。[BB04] J. F. Brock 和 K. Bromberg。几何有限克莱因群的稠密性。*Mathematica* 192 33 93, 2004 *Acta* , : –。

[BCM12] J. F. Brock、R. D. Canary 和 Y. N. Minsky。克莱因曲面群分类 II：终结层状猜想。 *Ann. of Math. (2)*, 176(1):1–149, 2012年。[BL20] S. Bullett 和 L. Lomonaco。二次映射与模群的配对 II。*Inventiones Mathematicae*, 220:185–210, 2020年。[BL21] S. Bullett 和 L. Lomonaco。模拼合的动力学。1707.04764v2 2021 https://arxiv.org/abs/ , 。[BP94] S. Bullett 和 C. Penrose。二次映射与模群的配对。 *Inventiones Mathematicae* 115 483 511, 1994 , : –。[Bow79] R. Bowen。拟圆的豪斯多夫维数。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50 11:–25, 1979年。[BS79] R. Bowen 和 C. Series。与福克斯群相关的马尔可夫映射。 *Inst. HautesÉtudes Sci. Publ. Math.*, 50:153–170, 1979年。[BS02] M. Brin 和 G. Stuck。 *Introduction to dynamical systems*。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[Coo93] M. Coornaert。Gromov 意义下双曲空间边界上的 Patterson-Sullivan 测度。 *Pacific J. Math.*, 159(2):241–270, 1993年。[CR80] E. M. Coven 和 W. L. Reddy。紧流形上的正向扩张映射。载于 *Global theory of dynamical systems (Proc. Internat. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1979)* 819 *Lecture Notes in Math.* 96 110 , 第 卷，第–页。Springer，柏林，1980年。[Dav88] G. David。具有.....的 Beltrami 方程解。 $\|\mu\| = 1$ *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* 13 25 70, 1988 , : –。[Den38] A. Denjoy。关于一个 Minkowski 实函数。 *J. Math. Pures Appl.*, : –。[Dou83] A. Douady。全纯动力系统。载于 *Séminaire Bourbaki*, 第1982/83卷，第39–63页。Ast´erisque，105–106，法国数学会，巴黎，1983年。[ECH+92] D. B. A. Epstein、J. W. Cannon、D. F. Holt、S. V. F. Levy、M. S. Paterson 和 W. P. Thurston。 *Word processing in groups*。Jones and Bartlett 出版社，马萨诸塞州波士顿，1992年。[Fal03] K. Falconer。 *Fractal geometry*。John Wiley & Sons, Inc.，新泽西州霍博肯，第二版，2003年。数学基础与应用。[FLMn83] A. Freire、A. Lopes 和 R. Ma ne。有理映射的不变测度。 *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 14 1 45 ~´´ *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 14 1 45 , ( ):–62，1983年。[Flo80] W. J. Floyd。克莱因群的群完备化与极限集。 *Invent. Math.*, 57 205:–218，1980年。[FW03] D. Fisher 和 K. Whyte。何时群作用由其轨道结构决定？*Geom. Funct. Anal.*, 13(6):1189–1200, 2003年。[HR92] F. Hofbauer 和 P. Raith。区间上的分段单调映射的遍历不变测度的豪斯多夫维数。 *Canad. Math. Bull.*, 35:84–98, 1992年。[Kin60] J. R. Kinney。关于 Minkowski 奇异函数的注记。 *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 788 794, 1960: –。[KB02] I. Kapovich 和 N. Benakli。双曲群的边界。载于 *Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001)* 296 *Contemp. Math.* 39 93 , 第 卷，第–页。2002 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。[Kiw04] J. Kiwi。实层叠与复多项式的拓扑动力学。 $\mathbb{R}$ *Adv. Math.* 184 2 207 267, 2004 , ( ):–。[KS08] M. Kesseb¨ohmer 和 B. O. Stratmann。Minkowski 问号函数不可微点集的分形分析。 *J. Number Theory*, 128:2663–2686, 2008年。[KU07] S. Katok 和 I. Ugarcovici。模曲面及其延伸上的符号动力系统。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 44(1):87–132, 2007年。

[LLM22] R. Lodge、Y. Luo 和 S. Mukherjee。圆堆积、接吻反射群与临界固定反有理映射。 *Forum Math. Sigma*，第 10 卷，e3，2022年。[LLMM22] S.-Y. Lee、M. Lyubich、N. G. Makarov 和 S. Mukherjee。施瓦茨反射动力学：配对现象。 https://arxiv.org/abs/1811.04979v3, 将发表于 *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*，2022年。[LLMM19] R. Lodge、M. Lyubich、S. Merenkov 和 S. Mukherjee。关于由有理映射、克莱因群和施瓦茨反射生成的动力学垫圈。 Conform. Geom. Dyn.，27：1–54，2023年。[LMM22] K. Lazebnik、N. G. Makarov 和 S. Mukherjee。单叶映射族中的 Bers切片。 *Math. Z.*，300：2771–2808，2022年。[LMMN20] M. Lyubich、S. Merenkov、S. Mukherjee 和 D. Ntalampekos。圆周同胚的 David 延拓、焊接、配对与可去性。2010.11256v2 2020 https://arxiv.org/abs/ ，。

[Los14] J. Los。通过 Bowen-Series 型映射研究曲面群的体积熵。 *J. Topol.*，7 1 120 154，2014年（）：–。[Lyu83] M. Lyubich。黎曼球面的有理自同态的熵性质。*Ergodic Theory Dynam. Systems*，3(3)：351–385，1983年。[McM08] C. T. McMullen。热力学、维数与魏尔-彼得森度量。 *Invent.* ，（）：–。[*Math.* 173 2 365 425, 2008

Min10] Y. N. Minsky。克莱因曲面群分类 I：模型与界。*Ann. of Math. (2)*，171(1)：1–107，2010年。[Mj14a] M. Mj。曲面群的坎农-瑟斯顿映射。 *Ann. of Math. (2)*，179 80，2014年 1 1（）：–。[Mj14b] M. Mj。终结层状结构与坎农-瑟斯顿映射，附 S. Das 和 M. Mj 的附录。 *Geom. Funct. Anal.*，24：297–321，2014年。[Mj17] M. Mj。克莱因群的坎农-瑟斯顿映射。 *Forum Math. Pi 5*， *e1*， *49 pp.*，2017年。[Mj22] M. Mj。极限集的运动：综述。在南开大学陈省身数学研究所（天津）于 2016年7月24日至30日举行的 Teichm¨uller 和 Grothendieck–Teichm¨uller 理论研讨会论文集，第 125-163 页，高等数学讲座系列，International Press, 2022 http://www.math.tifr. （即将出版），。 res.in/~mahan/cmotions.pdf

[MM21] M. Mj 和 S. Mukherjee。通过轨道等价结合有理映射与克莱因群。将发表于 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*， https://arxiv.org/abs/2103. 00835v1 2023 ，。[Mn83] R. Ma ˜ ´ *Bol. Soc.* ne。 *Brasil. Mat.* 14 1 27 43, 1983

关于有理映射极大化测度的唯一性。， （）：–。[MS13] M. Mj 和 C. Series。极限集的极限 I。 *Geom. Dedicata 167*，第 35–67 页，2013年。[MS17] M. Mj 和 C. Series。极限集的极限 II：几何无限群。 *Geom.* ， *Topol.* 21 2 647 692, 2017

（）：–。[Pat76] S. J. Patterson。福克斯群的极限集。 *Acta Math.*，136 273，1976年 3 4 241（-）：–。[PU10] F. Przytycki 和 M. Urba ´nski。 *Conformal fractals: ergodic theory methods*。伦敦数学学会讲义系列，第 371 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[Sal43] R. Salem。关于一些严格递增的奇异单调函数。 *Trans.* ，：–。 *Amer. Math. Soc.* 53 427 439, 1943

[Ser81] C. Series。测地流的符号动力系统。 *Acta Math.*，146(1-2)：103–128，1981年。[Ser86] C. Series。常负曲率曲面上测地线的几何马尔可夫编码。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*，6(4)：601–625，1986年。[Spa87] R. J. Spatzier。一个来自几何的可平均作用实例。 *Ergodic Theory Dynam. Systems* 7 2 289 293, 1987 ，（）：–。

[Sta04] M. Stadlbauer。带 puncture 曲面的 Bowen-Series 映射的回归序列。*Fund. Math.*，182(3)：221–240，2004年。[Sul79] D. Sullivan。双曲运动离散群在无穷远处的密度。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，50：171–202，1979年。[Sul84] D. Sullivan。熵、新旧豪斯多夫测度以及几何有限克莱因群的极限集。 *Acta Math.*，153(3-4)：259–277，1984年。

[Sul85] D. Sullivan。拟共形同胚与动力学 I：游荡域上的 Fatou-Julia 问题的解。 *Annals of Math. (2)*, 122：401–418，1985年。[Wal82] Peter Walters。

An introduction to ergodic theory 79 *Graduate Texts in*，第 卷。 *Mathematics* 1982 Springer-Verlag，纽约—柏林，。[Zdu90] A. Zdunik。抛物型轨形与有理映射极大测度的维数。 *Invent. Math.*，99(3)：627–649，1990年。

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai-400005, India*Email address*: mahan@math.tifr.res.in*Email address*: mahan.mj@gmail.com*URL*: http://www.math.tifr.res.in/~mahan

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai-400005, India*Email address*: sabya@math.tifr.res.in*Email address*: mukherjee.sabya86@gmail.com *URL*: http://www.math.tifr.res.in/~sabya/