arXiv:2302.09830v2 [cs.AI] 8 May 2023

带有有向无环图公理的加权一阶模型计数

Sagar Malhotra[1,2] Luciano Serafini[1]

[1] 布鲁诺·凯斯勒基金会，意大利[2]
特伦托大学，意大利

摘要

统计关系学习（SRL）将一阶逻辑（FOL）与概率论相结合，用于关系数据上的学习和推理。许多统计关系学习模型中的概率推理与学习可以归约为加权一阶模型计数（WFOMC）。然而，已知 WFOMC 是难解的（#P_1- 完全）。因此，能够在多项式时间内进行 WFOMC 的逻辑片段备受关注。这类片段称为域可提升。近期的一系列研究表明，加入计数量词（C^2）扩展后的 FOL 二变量片段是域可提升的。然而，现实世界数据的许多属性无法用 C^2 建模。事实上，现实世界数据中许多普遍存在的属性无法用一阶逻辑表达。无环性就是这样的属性之一，常见于引文网络、系谱数据、时序数据等。本文旨在通过研究有向无环约束的域可提升性来解决这一问题。我们证明，带有有向无环图（DAG）公理的 C^2 片段是域可提升的；也就是说，语言中的一个谓词被公理化为表示一个有向无环图。我们提出了一种基于容斥原理的方法，用于计算加入有向无环图公理的 C^2 公式的 WFOMC。

1 引言

统计关系学习（SRL）的很大一部分内容 Getoor and Taskar [2007],Raedt 等人 [2016] 都致力于在大规模关系数据集上进行建模、学习和推理。大多数统计关系学习模型都假设：在具有有限域的一阶逻辑（FOL）语言的模型上存在一个概率分布。许多统计关系学习模型中的概率推理与学习，例如马尔可夫逻辑网络 Richardson and Domingos [2007],，以及概率逻辑程序 firens 等人 [2015]，都可以归约为加权一阶模型计数（WFOMC）的实例 den Broeck 等人 [2014],Gogate and Domin-gos [2011]。加权一阶模型计数（WFOMC）是指：在给定大小为 n 的有限域上，计算给定一阶逻辑（FOL）句子 Φ 的模型的加权和。形式化地，

$$\text{WFOMC}(\Phi, \text{W}, n) = \sum_{\omega \models \Phi} \text{W}(\omega) \tag{1}$$

其中，W 是一个权重函数，为每个解释关联一个实数 ω。相对于论域基数，能够在多项式时间内进行加权一阶模型计数的 一阶逻辑片段称为域可提升的 den Broeck [2011]。因此，加权一阶模型计数为研究统计关系学习模型提供了一种便捷的理论和实践工具。加权一阶模型计数应用的这种普适性，使人们对域可提升的一阶逻辑片段产生了浓厚兴趣 den Broeck 等人[2011], Kazemi 等人 [2017, 2016]。一系列研究成果 Beame 等人 [2015], den Broeck 等人 [2014] 使我们对至多包含两个变量的一阶逻辑公式的域可提升性有了相当清晰的认识。尤其是，这些研究表明，二变量片段中的任意一阶逻辑公式都是域可提升的 Beame 等人 [2015]。然而，这一积极结果也伴随着加权一阶模型计数的难处理性结果：存在一个三变量片段中的一阶逻辑公式，相对于论域基数，其（加权）一阶模型计数无法在多项式时间内计算。

因此，近年来人们付出了大量努力，致力于拓展一阶逻辑二变量片段的域可提升性，并加入了其他约束，例如函数性约束（Kuusisto 和 Lutz [2018],）、基数约束、计数量词（Kuzelka[2021],Malhotra 和 Serafini [2022] ）以及线性序公理（Tóth 和 Kuželka [2022]）。

然而，域可提升片段并未涵盖数据的许多方面。此外，现实世界数据中的关键属性甚至可能无法用一阶逻辑定义。一

这类例子之一是有向无环图（DAG）：

> 无环性无法用一阶逻辑表达。——第 6 章，Immerman *[2012]*

此外，Immer- man [2012]中提出的不可表达性证明同时适用于有向和无向无环性。本文将聚焦于有向无环性，或等价地说，有向无环图。有向无环图是一种无处不在的数据结构，广泛应用于各类场景。Clough 等人 [2014] 提到的 CiteSeer、Cora 和 PubMed 等引文网络都可以建模为有向无环图。引文网络之所以无环，是因为论文不能引用自身，也不能引用一篇引用了自己的论文。在这些网络中，文章表示为节点，有向边则表示文章之间的引用关系。有向无环性的另一个例子是追溯家庭关系的家谱树。家谱树[1] 可以表示为有向无环图，其中节点表示个体，有向边表示亲子关系。因此，能够表达无环性约束的统计关系学习模型，可以显著助力许多现实世界数据集上的学习和推理任务。

本文将证明，在 C^2 中加入有向无环图公理后，加权一阶模型计数仍然是域可提升的，从而能够高效回答如下问题：

> 存在多少个恰有（或至少、至多）k 个源点且恰有（或至少、至多）m 个汇点的有向无环图?

除了应用于 SRL 之外，加权一阶模型计数也是研究枚举组合学的一种便捷语言，因为任何可用一阶逻辑定义的概念都可以通过加权一阶模型计数来枚举。因此，在加权一阶模型计数中加入有向无环图公理，有助于研究许多新的约束所涉及的组合学问题。

2 背景

本节将简要介绍一阶逻辑和加权一阶模型计数的记号与概念。此外，我们将回顾在一阶逻辑[2] 和C^2, 中关于加权一阶模型计数的相关研究，强调其与我们研究结果的相关性。我们还将介绍必要的组合学概念，例如容斥原理，并推导有向无环图计数的公式。

2.1 基本记号。

符号 $[n]$ 用于表示整数集合$\{1, \ldots, n\}$。根据上下文不致混淆时，我们用 $[\overline{m}]$ 表示集合 $[n]\backslash[m]$，也就是集合 $\{m+1, \ldots, n\}$。

[1]“树”在此处是一个误称，因为家谱树类似于有向无环图，其中一个子节点可以有多个父节点

粗体字母（如 $\boldsymbol{k}$）表示向量，而带有额外下标的对应常规字体字母（如 k_i）表示向量的分量。我们将由 u 个非负整数组成的向量表示为 $\boldsymbol{k} = \langle k_1, ..., k_u \rangle$，并用 $|\boldsymbol{k}|$ 表示其分量之和，即$\sum_{i\in[u]} k_i$。我们还使用如下多项式系数记号：

$$\binom{|\boldsymbol{k}|}{k_1, ..., k_u} = \binom{|\boldsymbol{k}|}{\boldsymbol{k}} = \frac{|\boldsymbol{k}|!}{\prod_{i\in[u]} k_i!}$$

对于定义在 $\boldsymbol{k}$上的函数 $f(\boldsymbol{k})$，形如$\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k})$的求和遍历所有满足 $\sum_{i\in[u]} k_i = |\boldsymbol{k}|$的可能向量 $\boldsymbol{k}$。当我们对两个向量 $\boldsymbol{k}' = \langle k'_1、 ...、 k'_u \rangle$ 和 $\boldsymbol{k}'' = \langle k''_1、 ...、 k''_u \rangle$ 进行加法或减法时，我们执行逐元素加法或减法，即 $\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k}'' = \langle k'_1 + k''_1、 ...、 k'_u + k''_u \rangle$。

2.2 一阶逻辑

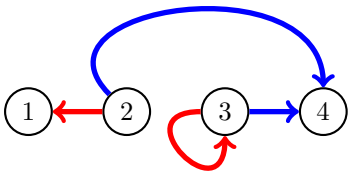
一阶逻辑是一种形式系统，用于表达陈述并以精确、严谨的方式对对象进行推理。与加权一阶模型计数文献中的常见做法一样，我们将讨论一阶逻辑（FOL）的一个片段，也称为 Hinrichs 和 Genesereth 的赫布兰德逻辑 [2009]，可简洁地描述如下：

> 赫布兰德逻辑 := 一阶逻辑语法+ 赫布兰德语义

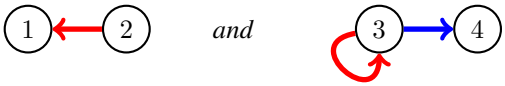
形式化地，我们假设一种无函数的一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，它由有限变量集 $\mathcal{V}$、有限关系符号集 $\mathcal{R}$以及常量集 Δ 组成，后者也称为论域。$\mathcal{R}$ 中的每个关系符号 R 都具有相应的元数。我们使用记号 R/k 表示关系符号 R 的元数为 k，其中 k 是非负整数。例如，我们使用 $P/2$ 表示 P是一个二元关系。原子公式是形如$R(a_1, \ldots, a_k)$的表达式，其中 $R/k \in \mathcal{R}$，且 $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{V} \cup \Delta$。文字要么是原子公式，要么是其否定。一阶逻辑中的公式可以按照一阶逻辑语法的规则，使用布尔算子（$\neg$、$\vee$ 和 $\wedge$）组合原子公式构成。此外，一阶逻辑允许对变量进行量化，量词的形式为 $\exists x_i.$（存在量化）和$\forall x_i.$（全称量化）。因此，一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$ 中的公式属于由 $\mathcal{L}$中的符号构成、并依据一阶逻辑语法规则与布尔算子和量词组合而成的字符串的归纳闭包。给定公式的自由变量，是指未受任何量词约束的变量。我们用 $\Phi(x_1, \ldots, x_k)$表示其自由变量为 $x_1, \ldots, x_k$的公式。语句是不含自由变量的一阶逻辑公式，记作大写希腊字母（例如，Ψ）。基原子集是原子公式

不含变量。同样地，基文字是不含变量的文字。因此，给定谓词 R/k以及大小为 n的论域 Δ，我们有 n^k 个形如 $R(a_1,\ldots,a_k)$的基原子，其中 $(a_1,\ldots,a_k) \in \Delta^k$。有限论域 Δ 上的解释 ω 是对所有基原子的真值赋值。若 ω 是 Ψ 的模型，我们称 ω 满足 $\omega \models \Psi$，即 ω 满足公式 Ψ。给定文字（分别为基文字） l，我们用 $pred(l)$表示 l中的关系符号。对于子集 $\Delta' \subset \Delta$，我们用 $\omega \downarrow \Delta'$ 表示由 Δ'诱导的部分解释。因此， $\omega \downarrow \Delta'$ 是定义在仅包含 Δ'中的论域元素的基原子上的解释。我们用 ω_R 表示将 ω 限制到关系 R后得到的部分解释。

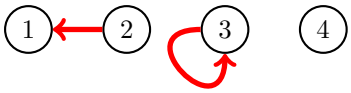
例1. 设有一种语言，其中只有两个关系符号 R 和 B，它们的元数均为2，论域为$\Delta = [4]$。我们将一个解释 ω 表示为多关系有向图：如果$R(c,d)$（分别为 $B(c,d)$）在 ω 中为真，则一对论域元素c 和 d 之间有一条从 c 指向 d 的红色（分别为蓝色）有向边；否则没有红色（分别为蓝色）边。以论域 $[4]$上的以下解释 ω 为例：



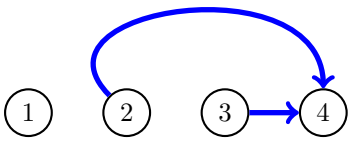
那么 $\omega' = \omega \downarrow [2]$和 $\omega'' = \omega \downarrow [\bar{2}]$ 分别为：



分别如此。将其投影到谓词 R上，记为 ω_R，结果如下：

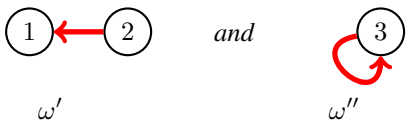


类似地，将谓词 B 投影出来，记作 ω_B，如下所示：

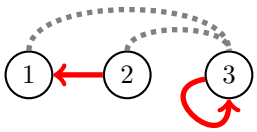


本文中的一些关键结果（例如命题 3 和命题 4）涉及在两个互不相交的论域常量集合上扩展解释。给定两个互不相交的论域常量集合 Δ' 和 Δ''，我们用 $\Delta = \Delta' \uplus \Delta''$ 表示 Δ 是这两个互不相交集合的并集。如果 ω' 是 Δ' 上的一个解释，且 ω'' 是 Δ'' 上的一个解释，那么我们用 $\omega' \uplus \omega''$ 表示 $\Delta' \uplus \Delta''$ 上的部分解释：其中，将 Δ' 上的基原子解释为在 ω' 中的解释，将 Δ'' 上的基原子解释为在 ω'' 中的解释。然而，涉及来自 Δ' 和 Δ'' 的论域常量的基原子在 $\omega' \uplus \omega''$ 中不作解释。我们将在下面的例子中进一步说明这一点。

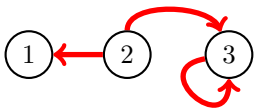
例2. 设有一种一阶逻辑语言，其中只有一个元数为2的关系符号 R。设 $\Delta = [3]$，且 $\Delta' = [2]$和 $\Delta'' = [\bar{2}] = \{3\}$。设在论域 $[2]$ 和 $[\bar{2}]$上分别有以下两个解释 ω' 和 ω''。如果 $R(c,d)$在该解释中为真，则一对论域元素 c 和 d 之间有一条从 c 指向 d 的红色有向边；否则没有边。



我们现在创建一个部分解释 $\omega' \uplus \omega''$，如下所示：



虚线表示$R(1,3)$ $R(3,1)$ $R(2,3)$和 $R(3,2)$在 $\omega' \uplus \omega''$ 中尚未被解释。因此， $\omega' \uplus \omega''$的一个可能扩张如下所示：



其中， $R(2,3)$被解释为真，而 $R(1,3)$ $R(3,1)$和 $R(3,2)$被解释为假。我们可以看到，$\omega' \uplus \omega''$ 可以通过 2^4 种方式进行扩张，因为对于四个未被解释的对象，我们有两种相互排斥且彼此独立的真值赋值选择。

2.2.1 计数量词与基数约束

FOL 的二变量片段通常记作 FO^2。FOL 最有用且关键的一种扩张是

带计数量词的扩张 Otto [2017]。计数量词扩展了常规的存在量词和全称量词集合，包含以下形式的量词：$\exists^{=k}$（恰好存在 k）、$\exists^{\geq k}$（至少存在 k）和 $\exists^{\leq k}$（至多存在 k）。加入计数量词扩张后的 FOL 二变量片段记作 C^2 Gradel et al.[1997]。C^2 显著增强了 FO^2，的表达能力，能够用简洁的方式表达只需两个变量的公式，而这些公式原本需要两个以上的变量。下面给出一个简单示例：

示例 3. 给定一个仅包含一个一元谓词 P 的一阶逻辑语言，我们的目标是写出一个公式，表示论域 Δ 中至少有三个不同的论域元素 c，使得 $P(c)$ 为真。可以用三个变量如下实现：

$$\exists x.P(x) \wedge \exists y.P(y) \wedge \exists z.P(z) \wedge (x \neq y) \wedge (y \neq z) \quad (2)$$

然而，使用计数量词可以将此公式等价地写为：

$$\exists^{\leq 3} x.P(x) \quad (3)$$

一阶逻辑的另一个有趣扩展是基数约束。基数约束是对解释中谓词基数的约束 Kuzelka [2021]。例如，给定公式 $\Psi \wedge (|P| \geq 3)$，当且仅当 $\omega \models \Phi$，且谓词 P 的基原子中被解释为真的数量至少为 3 时，解释 $\omega \models \Phi \wedge (|P| \geq 3)$ 才成立。注意，示例 3 中引入的公式 $\exists^{\leq 3} x.P(x)$ 可以用基数约束 $|P| \geq 3$ 表示。基数约束与计数量词之间的这种关系可以推广到加权一阶模型计数问题，并由 Kuželka 的定理 3 加以形式化 Kuželka [2021]。

2.2.2 类型与表

我们将使用 Kuusisto 和 Lutz [2018],Malhotra 与 Ser- afini [2023]所介绍的 1-类型、2-类型和 2-表的概念。直观而言，1-类型是在给定一阶逻辑语言中，论域元素能够实现的一组互斥的一元性质。形式上，1-类型是仅包含一个变量的极大一致文字的合取式。例如，在仅有一个一元谓词 U 和一个二元谓词 R的 FO^2 语言中，$U(x) \wedge R(x,x)$ 和 $U(x) \wedge \neg R(x,x)$ 是变量 x中的 1-类型示例。可见，在这种语言中，我们只有 2^2 种可能的 1-类型。在给定的解释 ω中，对于一组论域常量，每个论域常量恰好实现一种 1-类型。我们假设 1-类型集合有任意的排序，因此用 $i(x)$ 表示第 i^{th} 1 个类型。若论域常量 c 在解释 ω 中实现第 i^{th} 个 1-类型，我们称之为 $\omega \models i(c)$。

直观而言，2-表可以看作是在给定一阶逻辑语言中，论域元素的有序对能够实现的一组互斥的二元性质。形式上，2-表是恰好包含两个不同变量的极大一致文字的合取式。延续前面的例子，$R(x,y) \wedge \neg R(y,x) \wedge (x \neq y)$ 和$R(x,y) \wedge R(y,x) \wedge (x \neq y)$ 是 2-表的实例。我们假设 2-表有任意的排序，因此用$l(x,y)$ 表示第 l^{th} 2 个表。若论域常量的有序对 (c,d) 在解释 ω 中实现第 l^{th} 2 个 2-表，我们称之为 $\omega \models l(c,d)$。

2-类型是形如$i(x) \wedge j(y) \wedge l(x,y) \wedge (x \neq y)$的无量词公式，我们用 $ijl(x,y)$表示它。若论域常量的有序对(c,d)实现2-类型 $ijl(x,y)$，则称 $\omega \models ijl(c,d)$。我们将用 u表示给定一阶^2（或C^2）语言中的1-类型数量，并用 b 表示其中2-表的数量。

定义1（1-型基数向量）。如果一个解释 ω 具有1-型基数向量 $\boldsymbol{k} = \langle k_1、\ldots\ldots、k_u \rangle$，当且仅当对于所有 $i \in [u]$，它都有 k_i 个论域元素 c 满足 $\omega \models i(c)$，其中 $i(x)$是 i^{th} 1-类型。如果 ω 具有1-型基数向量 $\boldsymbol{k}$，则称$\omega \models \boldsymbol{k}$。

需要注意的是，在一个解释 ω中，论域中的每个元素只实现一个 1-类型。因此，如果给定 1-型基数向量 $\boldsymbol{k}$，则论域基数等于 $|\boldsymbol{k}|$。此外，当给定一对固定的 1-类型 i 和 j（其中 $i \neq j$）以及 $\boldsymbol{k}$时，存在 $k_i k_j$对论域常量（c，d），使得 $\omega \models i(c) \wedge j(d)$。此外，对于给定的 1-类型 i 和 $\boldsymbol{k}$，存在 $\binom{k_i}{2}$ 对论域常量（c，d）满足 $\omega \models i(c) \wedge i(d)$。

2.3 加权一阶模型计数

在公式 1 中，加权一阶模型计数函数假设权重函数 w 与各个论域常量无关。该假设意味着，w 为通过置换论域元素而同构的两个解释赋予相同的权重。因此，如果给定一个大小为 n 的论域 Δ，我们可以改用 $[n]$ 作为论域。

此外，本文重点研究一类特殊的权重函数，称为对称权重函数，定义如下：

定义 2.（对称权重函数）给定论域 Δ 上的无函数一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$，其中 $\mathcal{G}$ 是基原子的集合。对称权重函数为 $\mathcal{L}$ 中的每个关系符号关联两个实数权重 w：$\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ 和 $\bar{w}$：$\mathcal{R} \to \mathbb{R}$。解释 ω 的权重定义如下：

$$\mathrm{W}(\omega) = \prod_{\substack{\omega \models g \\ g \in \mathcal{G}}} w(pred(g)) \prod_{\substack{\omega \models \neg g \\ g \in \mathcal{G}}} \bar{w}(pred(g)). \quad (4)$$

我们用 $(w, \bar{w})$ 表示一个对称权重函数。

我们还需要利用保持加权一阶模型计数的归约的模块性。

定义 3（den Broeck 等人 [2014]）。当且仅当对于任意语句 Λ，从 $(\Phi, w, \bar{w})$ 到 $(\Phi', w', \bar{w}')$ 的归约满足：

$$\text{WFOMC}(\Phi \wedge \Lambda, (w, \bar{w}), n) = \text{WFOMC}(\Phi' \wedge \Lambda, (w', \bar{w}'), n)$$

直观地说，模块性意味着在存在其他语句 Λ 的情况下，归约过程仍然是可靠的。而且，任何新语句 Λ 都不会使该归约失效。

在本文余下部分中，每当提到权重时，我们都指对称权重。因此，我们将使用 WFOMC(Φ, n)，而不明确提及权重 w 和 $\bar{w}$。此外，我们按如下方式定义 WFOMC$(\Phi, \boldsymbol{k})$：

$$\text{WFOMC}(\Phi, \boldsymbol{k}) := \sum_{\omega \models \Phi \wedge \boldsymbol{k}} \text{W}(\omega)$$

其中，W(ω) 是对称权重函数。

2.3.1 一阶逻辑中的加权一阶模型计数[2]

全称量化的一阶逻辑[2] 公式是形如 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 的公式，其中 $\Phi(x, y)$ 是无量词公式。我们将 $\Phi(\{x, y\})$ 定义为 $\Phi(x, x) \wedge \Phi(x, y) \wedge \Phi(y, x) \wedge \Phi(y, y) \wedge (x \neq y)$。现在，我们针对一个全称量化的一阶逻辑[2] 公式定义二类型一致性的概念。

定义 4（二类型一致性）。给定一个全称量化的一阶逻辑[2] 公式 $\forall xy.\Phi(x, y)$，如果满足以下条件，则称一个 2-类型与 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 一致：

$$ijl(x, y) \models \Phi(\{x, y\}) \tag{5}$$

其中，方程 5 中的蕴含关系通过假设一个仅由一阶逻辑语言中的无常量文字组成的命题语言来进行检验。

示例 4。以下是公式 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 的一个一致的 2-类型示例：$= \forall xy.A(x) \wedge R(x, y) \rightarrow A(y)$：

$$\tau(x, y) := \neg A(x) \wedge R(x, x) \wedge \neg A(y) \wedge R(y, y) \wedge \neg R(x, y) \wedge R(y, x)$$

很容易看出，假设一个命题语言由无常量文字组成，即包含命题变量$\{A(x)\ A(y)\ R(x, x)\ R(y, y)\ R(x, y)\ R(y, x)\}$，则：

$$\tau(x, y) \models \Phi(\{x, y\})$$

因此，$\tau(x, y)$ 是相对于 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 的一致 2-类型。

为了分析全称量化的一阶逻辑[2] 公式的域可提升性，一个关键观察是：解释 $\omega \models \forall xy.\Phi(x, y)$ 中的一对论域常量 (c, d) 只有在 2-类型与公式 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 一致时，才能实现 2-类型 $ijl(c, d)$，这意味着 $ijl(x, y) \models \Phi(x, y)$。我们在下面的命题中阐述了这一思想。

命题 1. 给定一个全称量化的一阶逻辑[2] 公式 $\forall xy.\Phi(x, y)$，其解释论域为 Δ。那么，$\omega \models \forall xy.\Phi(x, y)$当且仅当对于任意一对不同的论域常元$(c, d)$，只要 $\omega \models ijl(c, d)$，就有 $ijl(x, y)$与 $\Phi(\{x, y\})$相容，即 $ijl(x, y) \models \Phi(\{x, y\})$。

证明. 若 $\omega \models \forall xy.\Phi(x, y)$且 $\omega \models ijl(c, d)$，则 $\omega \models \forall xy.\Phi(x, y) \wedge ijl(c, d)$。现在，$ijl(c, d)$是对仅包含论域常量 c 或 d 或二者的基原子的一个完整真值赋值。因此，$\omega \models \forall xy.\Phi(x, y) \wedge ijl(c, d)$成立，当且仅当 $ijl(c, d) \models \Phi(\{c, d\})$，也就是说，当且仅当 $ijl(x, y) \models \Phi(\{x, y\})$。

如果在 ω 中，每对论域常量只实现与 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 一致的 2-类型 $ijl(x, y)$，那么对于所有论域常量对 (c, d)，都有 $\omega \models \Phi(\{c, d\})$。因此，$\omega \models \forall xy.\Phi(x, y)$。

□

为便于处理加权一阶模型计数，我们现在将为一阶逻辑[2] 语言引入一些相关的权重参数。具体而言，考虑一个一阶逻辑[2] 语言 $\mathcal{L}$，其权重函数 $(w, \bar{w})$ 具有对称性，并令 $\mathcal{I}$ 表示 $\mathcal{L}$ 中仅包含变量且未实例化的原子公式集合。接下来，我们将为每个 1-类型$i(x)$ 和 2-表 $l(x, y)$ 定义两个权重参数。

$$w_i = \prod_{\substack{i(x) \models g \\ g \in \mathcal{I}}} w(pred(g)) \prod_{\substack{i(x) \models \neg g \\ g \in \mathcal{I}}} \bar{w}(pred(g))$$

and

$$v_l = \prod_{\substack{l(x,y) \models g \\ g \in \mathcal{I}}} w(pred(g)) \prod_{\substack{l(x,y) \models \neg g \\ g \in \mathcal{I}}} \bar{w}(pred(g))$$

接下来，我们将给出一阶逻辑[2]的全称量化片段中加权一阶模型计数的一个组合公式。我们的阐述基于 Beame 等人 [2015] 提出的方法。

定理 1（Beame 等人 [2015]）。给定一个在论域 $[n]$ 上解释的全称量化 FO^2 公式 $\forall xy.\Phi(x, y)$，那么满足 $\omega \models \forall xy.\Phi(x, y)$ 且 ω 的模型 ω 的加权模型计数，其 1-类型基数

为 $\boldsymbol{k}$，如下所示：

$$\text{WFOMC}(\forall xy.\Phi(x,y),\boldsymbol{k}) = \binom{n}{\boldsymbol{k}} \prod_{i\in[u]} w_i^{k_i} \prod_{i\le j\in[u]} r_{ij}^{\boldsymbol{k}(i,j)} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{k}(i,j)$ 定义如下：

$$\boldsymbol{k}(i,j) = \begin{cases} \frac{k_i(k_i-1)}{2} & \text{if } i=j \\ k_i k_j & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中我们定义 $r_{ij} = \sum_{l\in[b]} n_{ijl} v_l$，其中 n_{ijl} 在 $ijl(x,y) \models \Phi(\{x,y\})$ 时为 1，否则为 0。

证明。考虑一个 1-型基数向量 $\boldsymbol{k}$，其中 k_i 表示实现 1-类型 i 的常量数量。由于每个论域常量在同一个解释中至多实现一个 1-类型，也就是说，各个 1-类型由论域常量互斥地实现，因此将 1-类型分配给 $n = |\boldsymbol{k}|$ 个论域常量共有 $\binom{n}{\boldsymbol{k}}$ 种方式。设论域常量 c 实现 i^{th} 1-类型，则 c 以权重 w_i 乘法地计入解释 $\omega \models \boldsymbol{k}$ 的权重。因此，对于给定的 $\boldsymbol{k}$，由 1- 类型实现所产生的贡献为 $\prod_{i\in[u]} w_i^{k_i}$。现在考虑一个解释 ω，以及一对论域常量 c 和 d，使得 $\omega \models i(c) \wedge j(d)$。根据命题 1，我们知道，只有当 $ijl(x,y) \models \Phi(x,y)$ 时，(c,d) 才能实现 2-表 $l(c,d)$。因此，在任意解释 ω 中，一对常量 (c,d) 实现 l^{th} 2-表所产生的乘法权重贡献为 $n_{ijl}v_l$，其中 $\omega \models i(c) \wedge j(d)$。此外，每一对常量恰好只能实现一个 2-表。因此，当 $i(c)$ 且 $j(d)$ 时，一对论域常量 (c,d) 的所有可能 2-表实现的权重之和为 $r_{ij} = \sum_l n_{ijl} v_l$。此外，给定 1-类型赋值 $i(c)$ 和 $j(d)$ 后，有序对 (c,d) 实现 2-表时独立于所有其他论域常量。最后，这样的可能有序对共有 $\boldsymbol{k}(i,j)$ 个，其权重贡献为

$$\prod_{i\le j\in[u]} r_{ij}^{\boldsymbol{k}(i,j)}$$

□

显然，式 (6) 可以在关于论域基数的多项式时间内计算。此外，$\boldsymbol{k}$的数量相对于论域大小是多项式级的。因此，加权一阶模型计数$(\forall xy.\Phi(x,y)\ n)$可表示为：

$$\sum_{|\boldsymbol{k}|=n} \text{WFOMC}(\forall xy.\Phi(x,y),\boldsymbol{k})$$

可以在关于论域大小 n 的多项式时间内计算。

den Broeck 等人 [2014]证明，任何带有存在量化的一阶逻辑公式都可以模块化地规约为一个保持加权一阶模型计数的、带有全称量化的一阶逻辑^2 公-式，并引入额外的新谓词和负权重。因此，可以证明一阶逻辑^2 具有域可提升性。

2.3.2 C^2 中的加权一阶模型计数

Kuželka Kuzelka [2021]证明了，可以将 C^2 中的加权一阶模型计数问题规约为带有基数约束的一阶逻辑^{2}中的加权一阶模型计数问题，并且该规约独立于论域的基数。为了证明带有基数约束的一阶逻辑^2 的域可提升性，Kuželka 使用了基于拉格朗日插值的论证。下面，我们给出 Kuželka 所提出证明的一个简化版本。

定理 2（Kuzelka [2021],略作改写）。设 Φ 是一个一阶逻辑句子。设 Γ 是一个任意的基数约束。那么，加权一阶模型计数$(\Phi \wedge \Gamma, \boldsymbol{k})$ 可以在相对于 加权一阶模型计数$(\Phi, \boldsymbol{k})$ 预言机的多项式时间内计算。

证明。考虑一个包含 r 个关系符号（记作 $\{R_i/a_i\}_{i\in[r]}$）的一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$。设 ω 是一个解释，并令 $\boldsymbol{\mu} = \langle |R_1|, .., |R_r| \rangle$ 为由 ω 中每个谓词 R_i 的基数组成的向量。利用对称权重函数的定义（定义 2），可以轻易地计算 $\text{W}(\omega)$。此外可以看出，任何两个具有相同谓词基数 $\boldsymbol{\mu}$ 的解释 ω 都具有相同的权重 $\text{W}(\omega)$。因此，我们用 $\text{W}\boldsymbol{\mu}$ 表示权重 $\text{W}(\omega)$。

给定一阶逻辑公式 Φ，令 $A_{\boldsymbol{\mu}}$ 为模型$\omega \models \Phi \wedge \boldsymbol{\mu}$的数量。显然，以下结论成立：

$$\text{WFOMC}(\Phi,\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} A_\mu \text{W}_{\boldsymbol{\mu}} \tag{7}$$

对于一阶逻辑语言 $\mathcal{L}$中的每个谓词 R_i/a_i，都存在 n^{a_i} 个基原子。因此，$\boldsymbol{\mu}$有 $n^{\sum_{i\in[r]} a_i}$ 种可能取值。于是，相对于 n，向量$\boldsymbol{\mu}$ 的数量是多项式级的。通过对 $n^{\sum_{i\in[r]} a_i}$ 个不同的权重函数对（w，$\bar{w}$）分别计算加权一阶模型计数$(\Phi, \boldsymbol{k})$，我们得到一个包含 $n^{\sum_{i\in[r]} a_i}$ 个变量 $A_{\boldsymbol{\mu}}$的、由 $n^{\sum_{i\in[r]} a_i}$ 个方程组成的线性方程组。该方程组可在 $O(n^{3\sum_{i\in[r]} a_i})$时间内使用高斯消元算法求解。得到所有 $A_{\boldsymbol{\mu}}$ 后，我们可以如下计算任意基数约束的值：

$$\text{WFOMC}(\Phi \wedge \Gamma,\boldsymbol{k}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}\models\boldsymbol{\Gamma}} A_\mu \text{W}_{\boldsymbol{\mu}} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{\mu} \models \boldsymbol{\Gamma}$ 表示谓词基数 $\boldsymbol{\mu}$满足基数约束 Γ这一事实。由于向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的数量只有多项式级，因此可以在多项式时间内计算方程（8）。

□

备注 1。在方程 (8) 中，我们假设可以在关于 n 的多项式时间内检查 $\boldsymbol{\mu} \models \Gamma$。这对我们的所有目的而言都是一个合理的假设。

注 2。在上述证明（以及 Kuzelka*[2021]* 的证明）中，从未用到 Φ 的一阶可定义性。van Bremen 和 Kuželka *[2021]* 也利用了这一性质，结合树公理施加基数约束。

定理 2 将任意语句 Φ 的域可提升性扩展为带有基数约束的论域可提升性。现在我们继续讨论 C^2 的论域可提升性结果。

定理 3（Kuzelka [2021]）。带有两个变量和计数量词的一阶逻辑片段具有域可提升性。

定理 3 的核心思想是，将 C^2 语句 Φ 的加权一阶模型计数问题转化为在扩展词汇表上对 FO^2 语句 Φ' 进行加权一阶模型计数的问题，并添加额外的基数约束Γ。该词汇表还包含额外的加权谓词，其权重设为 1 或 -1。有关定理 3 的详细说明，请参阅 Kuzelka[2021] 以及 Malhotra 和 Serafini [2022]。需要注意的是，这种转换具有模块性；van Bremen 和 Kuželka [2021] 利用了这种模块性，证明了加入树公理的 C^2 具有域可提升性；Tóth 和 Kuželka [2022]则证明了加入线性序公理的 C^2 具有域可提升性。本文也将利用这种模块性得到定理 6，即将有向无环图约束的域可提升性推广到 C^2。

2.4 容斥原理

给定一个有限集合族 $\{A_i\}_{i\in[n]}$，令 $A_J := \bigcap_{j\in J} A_j$，其中 J 是 $[n]$ 的任意子集。则容斥原理（PIE）指出：

$$\Big|\bigcup_i A_i\Big| = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq[n]} (-1)^{|J|+1}\big|A_J\big| \tag{9}$$

对于所有子集 J、$J'\subseteq[n]$，若对于某个 $m\geq 1$ 有 $|J|=|J'|=m$，且 A_J 与 $A_{J'}$ 的基数相同，则等式 (9) 中有 $\binom{n}{m}$ 项，其值为 $A_{[m]}$。因此，等式 (9) 可化简为：

$$\Big|\bigcup_i A_i\Big| = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1}\binom{n}{m} A_{[m]} \tag{10}$$

备注 3. 当 A_i 是加权一阶逻辑解释的集合时，PIE 可以轻松扩展到这种情况，其中每个解释 ω 都有一个权重 $\mathrm{w}(\omega)$，其中 w 是定义 2 中给出的对称权重函数。在这种情况下，PIE 允许我们计算 $\bigcup_i A_i$ 中所有解释的加权和。

令 $\mathrm{w}(A_i)$ 表示 A_i 中所有解释的加权和，则 PIE 可化简为：

$$\mathrm{w}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_{\emptyset\neq J\subseteq[n]} (-1)^{|J|+1}\mathrm{w}(A_J) \tag{11}$$

类似地，当对于每个 $m=|J|=|J'|$，$\mathrm{w}(A_J)$ 和 $\mathrm{w}(A_{J'})$ 相同时，有：

$$\mathrm{w}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1}\binom{n}{m}\mathrm{w}(A_{[m]}) \tag{12}$$

2.5 有向无环图计数

有向无环图（DAG）是一种有向图：从任意节点 i 出发，沿有向边任意遍历一条路径，都不会到达节点 i。下面我们推导一个递归公式，用于计算有向无环图的数量。

令节点集合为 $[n]$，令 A_i 为 $[n]$ 上的有向无环图集合，其中节点 i 的入度为零。由于每个有向无环图至少有一个入度为零的节点，因此有向无环图的总数，即 a_n，可表示为 $|\bigcup_{i\in[n]} A_i|$。集合 $J\subseteq[n]$ 中所有节点的入度均为零的有向无环图数量为 $A_J := \bigcap_{j\in J} A_j$。假设对于某个 $1\leq m\leq n$，有 $J=[m]$。现在我们推导一种计算 $A_{[m]}$ 的方法。为推导集合 $A_{[m]}$ 中有向无环图的计数公式，我们作出以下三个观察。

- 观察1. 如果 $\omega\in A_{[m]}$，那么集合 $[m]$ 中的节点之间没有边，否则 $[m]$ 中的某个节点将具有非零入度。换言之，只允许从 $[m]$ 到 $[\bar{m}]$ 的有向边。

- 观察2。如果 $\omega\in A_{[m]}$，那么将 ω 限制到 $[\bar{m}]$（即 $\omega\downarrow[\bar{m}]$）所得的子图是一个有向无环图。而将 ω 限制到 $[m]$ 所得的子图只是一个空图，也就是说，$[m]$ 是彼此之间没有边相连的孤立节点集合。
- 观察3。给定 $[\bar{m}]$ 上的一个有向无环图，可以将其扩展为 $2^{m(n-m)}$ 个 $A_{[m]}$ 中的有向无环图。这是因为 $A_{[m]}$ 中的有向无环图在 $[m]$ 中的节点之间没有边。它们只有从 $[m]$ 指向 $[\bar{m}]$ 的出边。要将给定的 $[\bar{m}]$ 上的有向无环图扩展为 $A_{[m]}$ 中的有向无环图，我们可以选择从 $[m]$ 向 $[\bar{m}]$ 画一条出边，也可以不画。这样，$[m]\times[\bar{m}]$ 中的每对节点都有两种选择。因此，将给定的 $[\bar{m}]$ 上的有向无环图扩展为 $A_{[m]}$ 中的有向无环图，共有 $2^{|[m]\times[\bar{m}]|}=2^{m(n-m)}$ 种方式。

$[\bar{m}]$ 上可能的有向无环图数量为 a_{n-m}。根据观察3，$A_{[m]}$ 有 $2^{m(n-m)}a_{n-m}$ 个有向无环图，这些图是通过扩展 $[m]$ 上的有向无环图得到的。此外，根据观察1和观察2，这些就是 $A_{[m]}$ 中所有可能的有向无环图。因此，$|A_{[m]}| = 2^{m(n-m)}a_{n-m}$。现在，我们可以对 $[n]$ 的任意 m 大小子集重复这一论证。因此，若 $|J|=|J'|=m$，则 $A_J = A_{J'} =$

算法 1 n 节点的有向无环图数量

输入： n
输出： a_n
$A[0] \leftarrow 1$
对 $i = 1$ 到 n 执行
    $A[i] \leftarrow \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^{i-l+1} \binom{i}{l} 2^{l(i-l)} A[l]$
结束循环
返回 $A[n]$

$2^{m(n-m)} a_{n-m}$。因此，利用公式（10）给出的容斥原理，我们有：

$$a_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \binom{n}{m} 2^{m(n-m)} a_{n-m} \tag{13}$$

注意，将方程 (13) 中的 $n - m$ 替换为 l 后，可等价地写为：

$$a_n = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{n-l+1} \binom{n}{l} 2^{l(n-l)} a_l \tag{14}$$

这一变量替换使我们能够编写一个自底向上的有向无环图计数算法，如算法 1 所示。基于该算法，我们现在证明，有向无环图计数可在关于节点数 n的多项式时间内完成。

命题 2. 可以在多项式时间内计算 n 个节点上的带标记的有向无环图数量。

证明。按照惯例，我们定义 $a_0 = 1$，然后在算法 1 中利用方程 (14)，逐步计算 a_1、a_2...，并将每个结果保存在由 A给出的列表中。for 循环的运行时间为 $O(n)$，每次运行第 5 行时，还会执行其他 $O(n)$次操作。因此，该算法的运行时间为 $O(n^2)$。 □

3 带有向无环图公理的加权一阶模型计数

本节将方程 (13) 中用于有向无环图计数的方法扩展到带有有向无环图公理的 FO^2 和 C^2 公式的加权一阶模型计数。首先，我们正式定义有向无环图公理。然后，我们提出命题 3、命题 4 和命题 5，分别对应于第 2.5 小节中介绍的观察 1、观察 2 和观察 3。接着，我们使用容斥原理计算扩展了有向无环图公理的全称量化 FO^2 公式的加权一阶模型计数，并证明该方法是域可提升的。随后，我们将所提出的方法扩展到支持完整的 FO^2，基数约束和 C^2。最后，我们扩展有向无环图公理，加入表示有向无环图中源点和汇点的一元谓词。

定义5. 设 Φ 是一个一阶逻辑语句，其中可能包含二元关系 R。当且仅当满足以下条件时，解释 ω 是 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R)$ 的一个模型：

- ω 是 Φ的模型，并且
- ω_R 构成一个有向无环图

定义6. 设 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R)$（其中 Φ 是一阶逻辑语句）在论域 $[n]$上进行解释。设 $1 \leq m \leq n$。那么，ω 是 $\Psi_{[m]}$ 的模型，当且仅当ω 是 Ψ 在 $[n]$ 上的模型，且 $[m]$中的论域元素的 R入度为零。

注意，由定义6可知，对于论域 $[n]$，$\Psi_{[n]}$ 等价于 $\Psi' = \Phi \wedge \neg R(x, y)$。

命题 3. 设 $\Psi = \forall xy.\Phi(x, y) \wedge Acyclic(R)$ 和 $\Psi' = \forall xy.\Phi(x, y) \wedge \neg R(x, y)$（其中 $\Phi(x, y)$ 是无量词的）在 $[n]$ 上进行解释。设 $1 \leq m \leq n$。如果 ω 是 $\Psi_{[m]}$的模型，那么 $\omega \downarrow [m] \models \Psi'$ 且 $\omega \downarrow [\bar{m}] \models \Psi$。

证明概要。该命题由以下三条事实推得：(1) 由于 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 是一个一阶逻辑[2] 公式，因此，如果 $\omega \models \forall xy.\Phi(x, y)$，那么 $\omega \downarrow [m] \models \forall xy.\Phi(x, y)$ 和 $\omega \downarrow [\bar{m}] \models \forall xy.\Phi(x, y)$；(2) 在 $\omega \models \Psi_{[m]}$ 中，ω_R 不可能在 $[m]$ 中有边。因此，$\omega \downarrow [m] \models \Psi'$；(3) 有向无环图的子图仍是有向无环图，因此，如果 $\omega \models \Psi_{[m]}$，那么 $\omega \downarrow [\bar{m}] \models \Psi_{[m]}$。详细证明见附录。 □

命题 4。设 $\Psi = \forall xy.\Phi(x, y) \wedge Acyclic(R)$ 且 $\Psi' = \forall xy.\Phi(x, y) \wedge \neg R(x, y)$，其中 $\Phi(x, y)$ 是无量词的，并在论域 $[n]$ 上进行解释。设 ω' 是 Ψ' 在论域 $[m]$ 上的一个模型，并设 ω'' 是 Ψ 在论域 $[\bar{m}]$ 上的一个模型。那么，满足 $\omega \models \Psi_{[m]} \wedge \boldsymbol{k}$ 的 $\omega' \uplus \omega''$ 的扩张 ω 的数量为：

$$\prod_{i,j \in [u]} n_{ij}^{k'_i \cdot k''_j} \tag{15}$$

其中，k'_i 和 k''_i分别是在 ω' 和 ω'' 中实现 i^{th} I型的论域常量数量。我们将 n_{ijl}定义为：若 $ijl(x, y) \models \Phi(\{x, y\}) \wedge \neg R(y, x)$，则其值为 1，否则为 0；并且$n_{ij} = \sum_{l \in [b]} n_{ijl}$。

证明。为了从 $\omega' \uplus \omega''$ 获得论域 $[n]$ 上的解释 $\omega \models \Psi_{[m]} \wedge \boldsymbol{k}$，我们只需为包含 $(c, d) \in [m] \times [\bar{m}]$ 的基原子公式扩展 $\omega' \uplus \omega''$ 的解释。对于给定的一对 $(c, d) \in [m] \times [\bar{m}]$，令 $\omega' \models i(c)$ 且令 $\omega'' \models j(d)$。由于 ω 是 $\forall xy.\Phi(x, y)$ 的模型，我们必须有 $ijl(c, d) \models \Phi(\{c, d\})$。此外，由于我们希望 $[m]$ 中的每个论域元素的入度为零，因此不能有 $R(d, c)$。因此，我们必须有 $ijl(c, d) \models \Phi(\{c, d\}) \wedge \neg R(d, c)$。所以，$(c, d)$ 能够实现的 2-表数量为 n_{ij}。由于有 k'_i 个论域元素 c 实现了该

i^{th} 1-类型在 ω' 中，并且有 k_j'' 个论域元素 d 实现了 ω'' 中的 j^{th} 1- 类型，因此满足 $\omega \models \Psi_{[m]} \wedge \boldsymbol{k}$ 的 $\omega' \uplus \omega''$ 的扩张数量 ω 由表达式 (15) 给出。 □

命题 5。设 $\Psi = \forall xy.\Phi(x,y) \wedge Acyclic(R)$ 且 $\Psi' = \forall xy.\Phi(x,y) \wedge \neg R(x,y)$，其中 $\Phi(x,y)$ 是无量词公式。那么：

$$\text{WFOMC}(\Psi_{[m]}, \boldsymbol{k}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'+\boldsymbol{k}'' \\ |\boldsymbol{k}'|=m}} \prod_{i,j\in[u]} r_{ij}^{k_i' k_j''} \cdot \text{WFOMC}(\Psi', \boldsymbol{k}') \cdot \text{WFOMC}(\Psi, \boldsymbol{k}'') \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k}''$ 表示整数向量 $\boldsymbol{k}'$ 和 $\boldsymbol{k}''$的逐元素和，使得 $|\boldsymbol{k}'| = m$ 且 $|\boldsymbol{k}''| = |\boldsymbol{k}| - m$。此外，$r_{ij} = \sum_l n_{ijl} v_l$，其中当$ijl(x,y) \models \Phi(\{x,y\}) \wedge \neg R(y,x)$时，$n_{ijl}$ 为 1，否则为 0。

证明。公式 Ψ' 在 $[m]$上的加权一阶模型计数，其 1-型基数向量为 $\boldsymbol{k}'$，可表示为 WFOMC($\Psi', \boldsymbol{k}'$)。类似地，公式 Ψ 在 $[\bar{m}]$上的加权一阶模型计数，其 1-型基数向量为 $\boldsymbol{k}''$，可表示为 WFOMC($\Psi, \boldsymbol{k}''$)。根据命题 4，WFOMC($\Psi', \boldsymbol{k}'$) 和 WFOMC($\Psi, \boldsymbol{k}''$) 中计数的每一对模型，都可以通过 $\prod_{i,j\in[u]} n_{ij}^{k_i' k_j'}$ 种方式扩张为$\Psi_{[m]} \wedge \boldsymbol{k}$的一个模型。很容易看出，这些扩张的总乘法权重贡献为 $\prod_{i,j\in[u]} r_{ij}^{k_i' k_j''}$。式 (16) 中的求和遍历 $[m]$ 和 $[\bar{m}]$上所有可能可实现的 1-类型基数，分别用 $\boldsymbol{k}'$和 $\boldsymbol{k}''$ 表示，并且要求它们与 $\boldsymbol{k}$相容，即当 $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' + \boldsymbol{k}''$时。因此，式 (16) 给出了满足以下条件的模型 ω的加权一阶模型计数：$\omega \downarrow [m] \models \Psi'$、$\omega \downarrow [\bar{m}] \models \Psi$，且 $[m]$ 中的论域常元具有零 R 入度。根据命题 3，这些就是所有满足 $\omega \models \Psi \wedge \boldsymbol{k}$ 且 $[m]$ 中的论域常量具有零 R 入度的模型。

□

命题 6。公式 $\Psi = \forall xy.\Phi(x,y) \wedge Acyclic(R)$ 的一阶模型计数，其中 $\Phi(x,y)$ 是无量词的，表示为：

$$\text{WFOMC}(\Psi, \boldsymbol{k}) = \sum_{m=1}^{|\boldsymbol{k}|} (-1)^{m+1} \binom{|\boldsymbol{k}|}{m} \text{WFOMC}(\Psi_{[m]}, \boldsymbol{k}) \tag{17}$$

证明。证明思路与文献（13）中给出的 DAG 计数情形非常相似。设论域为 $[n]$，因此有$|\boldsymbol{k}| = n$。设 A_i 为模型集合 $\omega \models \Psi$，满足ω 具有 1-类型基数 $\boldsymbol{k}$，且论域元素 i 的 R-入度为零。由于每个 DAG 至少有一个入度为零的节点，我们的目标是计算 W($\cup_{i\in[n]} A_i$)。设 $J \subseteq [n]$ 为任意一组论域常量。对于 $[n]$ 的任意子集 J，设 $A_J = \bigcap_{j\in J} A_j$。然后利用式（12）中的容斥原理，我们有：

$$\text{WFOMC}(\Psi, \boldsymbol{k}) = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} (-1)^{|J|+1} \text{W}(A_{[m]}) \tag{18}$$

现在，$A_{[m]}$ 是这样一组模型：其中 $[m]$ 中的论域元素的 R 入度为零。因此，$A_{[m]}$ 恰好是 $\Psi_{[m]}$的模型。此外，注意到在命题 3、命题 4 和命题 5 中，$[m]$ 可以替换为 $[n]$的任意一个大小为 m的子集 J。因此，对于所有满足 $|J| = m$的 $J \subseteq [n]$，都有 W(A_J) =WFOMC($\Psi_{[m]}$, $\boldsymbol{k}$)。由此，公式 (18) 化简为公式 (17)。 □

我们对公式 (17) 作变量替换（类似于公式 (14)），将 m 替换为 $|\boldsymbol{k}| - l$，得到以下公式：

$$\text{WFOMC}(\Psi, \boldsymbol{k}) = \sum_{l=0}^{|\boldsymbol{k}|-1} (-1)^{|\boldsymbol{k}|-l+1} \binom{|\boldsymbol{k}|}{l} \text{WFOMC}(\Psi_{[|\boldsymbol{k}|-l]}, \boldsymbol{k}) \tag{19}$$

我们在算法 2 中提供了用于计算公式 (19) 的伪代码，即 WFOMC-DAG。现在，我们分析 WFOMC-DAG 的工作原理，并说明其运行时间关于论域基数 $|\boldsymbol{k}| = n$为多项式时间。

WFOMC-DAG 的输入为 $\Psi = \forall xy.\Phi(x,y) \wedge Acyclic(R)$ 和 $\boldsymbol{k}$，其中 $\Phi(x,y)$ 是无量词公式，$\boldsymbol{k}$ 是 1-型基数向量，且满足$|\boldsymbol{k}| = n$，输出 WFOMC($\Psi, \boldsymbol{k}$)。在第 3 行，初始化一个具有 u 个索引的数组 A，并将 $A[\mathbf{0}]$ 赋值为 1，其中 0 对应于 u 维零向量。第 $5-7$ 行的 for 循环逐步计算 WFOMC($\Psi, \boldsymbol{p}$)；循环按字典序遍历所有满足 $p_i \leq k_i$ 的 u 维整数向量 $\boldsymbol{p}$。可能的 $\boldsymbol{p}$ 向量数量至多为 n^u。因此，第 5 行的 for 循环至多执行 n^u 次。第 6 行根据等式 (19) 计算 WFOMC($\Psi, \boldsymbol{p}$)。同样在第 6 行，计算 WFOMC($\Psi_{[m]}, \boldsymbol{p}$) 的函数 WFOMC($\Psi_{[m]}, \boldsymbol{p}$) 至多被调用 $|\boldsymbol{p}| - 1$ 次，其上界为 n。$A[\boldsymbol{p}]$ 存~~储 WFO~~MC($\Psi, \boldsymbol{p}$) 的值。因此，随着 $\boldsymbol{p}$ 按字典序递增，$A[\boldsymbol{p}]$存储 WFOMC($\Psi, \boldsymbol{p}$) 的值。在函数 WFOMC($\Psi_{[m]}, \boldsymbol{s}$) 中，for 循环的迭代次数至多为 n^{2u}。而 WFOMC($\Psi', \boldsymbol{s}'$) 是一个 FO^2 ~~WFOMC~~ 问题，同样可以在多项式时间内计算。因此，算法 WFOMC-DAG 关于论域基数在多项式时间内运行。注意，由于循环 5–7 按字典序运行，函数 WFOMC($\Psi_{[m]}, \boldsymbol{s}$) 所需的 $A[\boldsymbol{s}'']$ 始终已存储在 A 中。现在，关于论域基数，$\boldsymbol{k}$ 的数量只有多项式级。因此，对所有可能的$\boldsymbol{k}$ 值~~计算 WF~~OMC($\Psi, \boldsymbol{k}$)，即可在多项式时间内计算 WFOMC(Ψ, n)

算法 2 WFOMC-DAG

输入： $\Psi, \boldsymbol{k}$
输出： WFOMC$(\Psi, \boldsymbol{k})$
$A[\mathbf{0}] \leftarrow 1$ ▷ A 有 u 个索引
▷ $\mathbf{0} = \langle 0, ..., 0 \rangle$
对于 $\mathbf{0} < \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{k}$，在 $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}_0^u$ 中，按 ▷ 字典序
$A[\boldsymbol{p}] \leftarrow \sum_{l=0}^{|\boldsymbol{p}|-1} (-1)^{|\boldsymbol{p}|-l+1} \binom{|\boldsymbol{p}|}{l}$ 加权一阶模型计数$(\Psi_{[|\boldsymbol{p}|-l]}, \boldsymbol{p})$
结束循环
返回 $A[\boldsymbol{k}]$
函数 加权一阶模型计数$(\Psi_{[m]}, \boldsymbol{s})$ ▷ 公式（16）
    $S = 0$
    对于 $\boldsymbol{s}' + \boldsymbol{s}'' = \boldsymbol{s}$ 和 $|\boldsymbol{s}'| = m$ 执行
        $S \leftarrow S + \prod_{i,j \in [u]} r_{ij}^{s_i' s_j''} \cdot$ 加权一阶模型计数$(\Psi', \boldsymbol{s}') \cdot A[\boldsymbol{s}'']$
    结束循环
    返回 S
结束函数

关于论域基数的多项式时间内。此外，利用 den Broeck 等人 [2014], 提供的模块化且保持 WFOMC 的斯科伦化过程，我们可以轻松地将这一结果推广到整个 FO^2 片段。因此，得到以下定理：

定理 4。设 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R)$，其中 Φ 是一个 FO^2 公式。那么，加权一阶模型计数(Ψ, n) 可在关于论域基数的多项式时间内计算。

利用定理 2 和注 2，我们还可以将带有有向无环图公理和基数约束的 FO^2，的域可提升性推广。

定理 5。设 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R)$，其中 Φ 是一个 FO^2 公式，也可能包含基数约束。那么，加权一阶模型计数(Ψ, n) 可在关于论域基数的多项式时间内计算。

此外，由于任何 C^2 公式的加权一阶模型计数都可以模块化地归约为带有基数约束的 FO^2 公式的加权一阶模型计数（Kuzelka [2021]），我们还有以下定理：

定理 6。设 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R)$，其中 Φ 是一个 C^2 公式。那么，加权一阶模型计数(Ψ, n) 可在关于论域基数的多项式时间内计算。

3.1 源点与汇点

定义 7。设 Φ 是一个一阶语句，其中可能包含某个二元关系 R、一个一元关系 $Source$ 和一个一元关系 $Sink$。当且仅当满足以下条件时，结构 ω 是 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R, Source, Sink)$ 的模型：

- ω 是 $\Phi \wedge Acyclic(R)$ 的模型，并且
- 在由 ω_R 表示的有向无环图中，源点在 ω_{Source} 中被解释为真。
- 在由 ω_R 表示的有向无环图中，汇点在 ω_{Sink} 中被解释为真。

$Source$ 谓词和 $Sink$ 谓词可以用于编码诸如 $\exists^{=k} x.Source(x)$ 或 $\exists^{=k} x.Sink(x)$ 之类的约束。

定理 7。设 $\Psi = \Phi \wedge Acyclic(R, Source, Sink)$，其中 Φ 是一个 C^2 公式。那么可以在关于论域基数的多项式时间内计算 加权一阶模型计数(Ψ, n)。

证明。语句 Ψ 可以等价地写成：

$$\begin{aligned} &\Phi \wedge Acyclic(R) \\ &\wedge \forall x.Source(x) \leftrightarrow \neg\exists y.R(y, x) \\ &\wedge \forall x.Sink(x) \leftrightarrow \neg\exists y.R(x, y) \end{aligned} \tag{20}$$

这是一个扩展了有向无环图约束的一阶逻辑^2 语句。 □

结论

本文证明了扩展有向无环图公理的一阶逻辑^{2}和C^2 的论域可提升性。随后，我们通过加入源点和汇点谓词扩展了这些结果，从而可以对有向无环图中的源点和汇点数量施加额外约束。这些结果有望更好地建模那些自然呈现有向无环图结构的数据集（Rossi 和 Ahmed [2015]）。未来，我们计划研究扩展了有向无环图公理的一阶逻辑中的后继、前驱和祖先约束。

致谢

我们谨向 Andrea Micheli 致谢，感谢他与我们进行了富有成效且富有启发性的讨论。

附录

命题 3. 设 $\Psi = \forall xy.\Phi(x,y) \wedge Acyclic(R)$ 和 $\Psi' = \forall xy.\Phi(x,y) \wedge \neg R(x,y)$，其中 $\Phi(x,y)$ 是无量词的，并在 $[n]$ 上解释。设 $1 \leq m \leq n$。如果 ω 是 $\Psi_{[m]}$ 的一个模型，那么 $\omega \downarrow [m] \models \Psi'$ 且 $\omega \downarrow [\bar{m}] \models \Psi$。

证明。我们有 $\omega \models \Psi$。因此，我们有：

$$\begin{aligned}
&\omega \models \bigwedge_{(c,d)\in[n]^2} \Phi(c,d) \\
\Rightarrow\ &\omega \models \bigwedge_{(c,d)\in[m]^2} \Phi(c,d) \bigwedge_{(c,d)\in[\bar{m}]^2} \Phi(c,d) \\
&\bigwedge_{(c,d)\in[\bar{m}]\times[m]} \Phi(c,d) \bigwedge_{(c,d)\in[m]\times[\bar{m}]} \Phi(c,d)
\end{aligned}$$

由于，$\omega \models \bigwedge_{(c,d)\in[m]^2} \Phi(c,d)$ 和 $\omega \models \bigwedge_{(c,d)\in[\bar{m}]^2} \Phi(c,d)$，我们有 $\omega \downarrow [m] \models \forall xy.\Phi(x,y)$ 和 $\omega \downarrow [\bar{m}] \models \forall xy.\Phi(x,y)$。现在，由于 $[m]$ 的 R 入度为零，它只能有指向 $[\bar{m}]$ 的出向 R边。因此，我们可以推断出 $\omega \downarrow [m] \models \forall xy.\neg R(x,y)$。现在，$\omega_R$ 是一个有向无环图，那么 $\omega_R \downarrow [\bar{m}]$也是。因此，$\omega \downarrow [\bar{m}] \models Acyclic(R)$。因此，$\omega \downarrow [m] \models \Psi'$ 和 $\omega \downarrow [\bar{m}] \models \Psi$。 □

参考文献

Paul Beame、Guy Van den Broeck、Eric Gribkoff 和 Dan Suciu。对称加权一阶模型计数。载于 Tova Milo 和 Diego Calvanese（编），《第 34 届 ACM 数据库系统原理研讨会论文集》，PODS 2015，2015 年 5 月 31 日至 6 月 4 日，澳大利亚维多利亚州墨尔本，页 313–328。ACM，2015。doi：10.1145/2745754.2745760。URL https://doi.org/10.1145/2745754.2745760 .

James R. Clough、Jamie Gollings、Tamar V. Loach 和 Tim S. Evans。引文网络的传递约简。《复杂网络杂志》，3(2):189–203，2014年09月。ISSN 2051-1310。doi: 10.1093/comnet/cnu039。URL https://doi.org/10.1093/comnet/cnu039。

Guy Van den Broeck。关于提升概率推理中一阶知识编译的完备性。载于 John Shawe-Taylor、Richard S. Zemel、Peter L. Bart- lett、Fernando C. N. Pereira 和 Kilian Q. Weinberger 编，《神经信息处理系统进展》第24卷：第25届神经信息处理系统年会，2011年。会议论文集，会议于2011年12月12日至14日在西班牙格拉纳达举行，第24卷，第1386–1394页。Curran Associates, Inc.，2011年。URL https://proceedings.neurips.cc/paper/2011/hash/8

Guy Van den Broeck、Nima Taghipour、Wannes Meert、Jesse Davis 和 Luc De Raedt。通过一阶知识编译进行提升概率推理。载于 Toby Walsh（编），《IJCAI 2011：第22届国际人工智能联合会议论文集》，西班牙加泰罗尼亚巴塞罗那，2011年7月16日至22日，第2178–2185页。AAAI出版社/国际人工智能联合会，IJCAI/AAAI，2011年。doi: 10.5591/978-1-57735-516-8/IJCAI11-363。URL https://doi.org/10.5591/978-1-57735-516-8/IJCA

Guy Van den Broeck、Wannes Meert 和 Adnan Dar-wiche。用于加权一阶模型计数的斯科伦化。载于 Chitta Baral、Giuseppe De Giacomo 和 Thomas Eiter（编），《知识表示与推理原理：第十四届国际会议论文集》，KR 2014，奥地利维也纳，2014年7月20日至24日。AAAI出版社，2014年。URL http://www.aaai.org/ocs/index.php/KR/KR 14/论文

Daan firens、Guy Van den Broeck、Joris Renkens、Di m- itar Shterionov、Bernd Gutmann、Ingo Thon、Gerda Jans- sens 和 Luc De Raedt。《使用加权布尔公式对概率逻辑程序进行推理与学习》。逻辑编程理论与实践，15(3)：358–401，2015。doi：10.1017/S1471068414000076。

Lise Getoor 和 Ben Taskar。《统计关系学习导论》（自适应计算与机器学习）。麻省理工学院出版社，2007年。ISBN 0262072882。

Vibhav Gogate 和 Pedro M. Domingos。概率定理证明。载于 Fábio Gagliardi Cozman 和 Avi Pfeffer 编，UAI 2011，《第二十七届人工智能不确定性会议论文集》，西班牙巴塞罗那，2011年7月14日至17日，第256–265页。AUAI出版社，2011年。网址 https://dslpitt.org/uai/displayArticle

Erich Gradel、Martin Otto 和 Eric Rosen。带计数的二变量逻辑是可判定的。载于《第十二届IEEE计算机科学逻辑年度研讨会论文集》，第 306–317 页。IEEE，1997年。

Timothy Hinrichs 和 Michael Genesereth。赫布兰德逻辑。 LG-2006-02，斯坦福报告，2009年。 URL https://www.cs.uic.edu/~hinrichs/papers/hinrichs2006herbrand.pdf.

Neil Immerman。《描述复杂性》。SpringerScience & Business Media，2012年。

Seyed Mehran Kazemi、Angelika Kimmig、Guy Van den Broeck 和 David Poole。《一阶概率推理的新可提升类别》。载于 Daniel D. Lee、Masashi Sugiyama、Ulrike von Luxburg、Isabelle Guyon 和 Roman Garnett 编，《神经信息处理系统进展第29卷：2016年神经信息处理系统年度会议》，2016年12月5日至10日，西班牙巴塞罗那，第3117–3125页，2016年。网址 https://proceedings.neurips.cc/paper/2016/hash/c88d8d0a6097754525e02c2246d8d27f-Abstract

Seyed Mehran Kazemi、Angelika Kimmig、Guy Van den Broeck 和 David Poole。带存在量词的提升推理的论域递归。CoRR，abs/1707.07763：1386–1394，2017。URL http://arxiv.org/abs/1707.07763。

Antti Kuusisto 和 Carsten Lutz。超越二变量逻辑的加权模型计数。载于 Anuj Dawar 和 Erich Grädel 编，《第33届年度 ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集》，LICS 2018，英国牛津，2018年7月9日至12日，页 619–628。ACM，2018。doi：10.1145/3209108.3209168。URL https://doi.org/10.1145/3209108.3209168。

Ondrej Kuzelka。在带计数量词的二变量片段中进行加权一阶模型计数。人工智能研究杂志，70：1281–1307，2021。doi：10.1613/jair.1.12320。URL https://doi.org/10.1613/jair.1.12320。

Sagar Malhotra 和 Luciano Serafini。带基数约束和计数量词的 FO2 加权模型计数：闭式公式。《AAAI人工智能会议论文集》，36(5):5817–5824，2022年6月。doi: 10.1609/aaai.v36i5.20525。URL https://ojs.aaai.org/index.php/AAAI/article/view/20525。

Sagar Malhotra 和 Luciano Serafini。论马尔可夫逻辑网络中的投影性。载于《机器学习与数据库中的知识发现：欧洲会议，ECML PKDD 2022，法国格勒诺布尔，2022年9月19–23日，论文集，第五部分，第223–238页，柏林、海德堡，2023年。施普林格出版社。ISBN 978-3-031- 26418-4。doi：10.1007/978-3-031-26419-1 14。URL https://doi.org/10.1007/978-3-031-26419-1_14.

Martin Otto。有界变量逻辑与计数，第9卷。剑桥大学出版社，2017年。

Luc De Raedt、Kristian Kersting、Sriraam Natarajan 和 David Poole。《统计关系人工智能：逻辑、概率与计算》。人工智能与机器学习综合讲座。Morgan & Claypool Publishers，2016年。doi: 10.2200/S00692ED1V01Y201601AIM032。URL https://doi.org/10.2200/S00692ED1V01Y201601AIM032.

Matthew Richardson 和 Pedro Domingos。马尔可夫逻辑网络。《机器学习》，62(1-2)：107–136，2006。

Ryan A. Rossi 和 Nesreen K. Ahmed。网络数据仓库：提供交互式图分析与可视化功能。在 AAAI，2015。网址 https://networkrepository.com。

Jan Tóth 和 Ondˇrej Kuželka。带线性序公理的提升推理，2022。网址 https://arxiv.org/abs/2211.01164。

Timothy van Bremen 和 Ondˇrej Kuželka。带树公理的提升推理。载于《第18届知识表示与推理原理国际会议论文集》，第599–608页，2021年11月。doi：10.24963/kr.2021/57。网址 https://doi.org/10.24963/kr.2021/57。