arXiv:2302.09837v1 [math.GT] 20 Feb 2023

一致格中的扎里斯基稠密希钦表示

JACQUES AUDIBERT

ABSTRACT. 我们在分裂实李群 SL(n,R)、Sp($2n$, R)、SO($k+1,k$) 和 G_2 的无穷多个可公度类的一致格中，构造了扎里斯基稠密曲面子群。这些子群是 Hitchin 表示的像。特别地，我们证明，每个 Sp($2n$, R) 的一致格、每个满足 $k \equiv 1, 2[4]$ 的 SO($k+1,k$) 的一致格，以及每个 G_2 的一致格，都包含固定亏格的扎里斯基稠密 Hitchin 表示的无穷多个映射类群轨道。结合 [LT18] 和[Aud22]，这意味着 Sp(4, R) 的所有格都包含一个扎里斯基稠密曲面子群。本文承接 [Aud22]，在该文中我们构造了非一致格中的扎里斯基稠密 Hitchin 表示。

INTRODUCTION

设 Λ 是半单李群 G中的一个格。我们称 Λ的一个子群为 曲面子群，如果它同构于亏格至少为 2 的闭连通可定向曲面的基本群。在他们享有盛誉的著作中[KM12], Kahn 和 Markovic 在 SO(3,1) 的所有一致格中构造了曲面子群。利用后者的工具，Hamenst¨adt 证明，当 G是一个不与 SO($2n$, 1) 同构的简单非紧致秩一李群时， G 的所有一致格都含有曲面子群 [Ham15]。Kahn、Labourie 和 Mozes [KLM18] 将这一结果推广到了其他若干半单李群，尤其是复李群。然而，当 G 为实分裂时，他们的构造并不适用。[1]

我们的目标是在分裂实李群的一致格中构造扎里斯基稠密曲面子群，使其为 Hitchin 表示的像。我们的方法是算术的，不使用 Kahn-Markovic 方法。

人们对在格中构造扎里斯基稠密的曲面子群抱有浓厚兴趣。按照 Sarnak 的说法，这类子群称为薄群 [Sar14]。在作者此前的论文 [Aud22], 中，我们在分裂实李群的一些非一致格中构造了扎里斯基稠密的曲面子群。此前，Long、Reid 和 Thistlethwaite [LRT11], Long 和 Reid [LR14], Long 和 Thistlethwaite [LT18] [LT20]。[2] 本文将[Aud22] 中的构造推广到格为一致格的情形。对此情形的研究要少得多。尽管如此，Long 和 Reid

[1]参见§1.2 节，见 [KLM18][2]参见 Douba [Dou22]，其中构造了一些非一致格中 SO(n, 1) 的扎里斯基稠密曲面子群。

在 [LR16] 中证明，存在无穷多个 SL(3,R) 的一致格，其包含某个扎里斯基稠密的 Hitchin 表示的像。我们的方法也将给出这一结果的另一种证明。

对于任意 $n \geq 2$，记 τ_n: SL(2, C) $\to$ SL(n, C) 为如下表示：SL(2, C) 在由两个变量 X 和 Y 构成的 $n-1$ 次齐次多项式空间上作用：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X^{n-i-1}Y^i = (aX+cY)^{n-i-1}(bX+dY)^i$$

对每个 $0 \leq i \leq n-1$ 均成立。除共轭外，这是 SL(2, C) 在 C 上唯一的 n 维不可约表示。我们也用 τ_n 表示 PSL(2, C) 在 PSL(n, C) 中诱导的表示。

设 S_g 是亏格为 $g \geq 2$ 的闭连通可定向曲面。我们将形如 $\tau_n \circ j$ 的表示称为福克斯表示，其中 j :$\pi_1(S_g) \to$ PSL(2, R) 是忠实且离散的。Hitchin 表示是从 $\pi_1(S_g)$ 到 PSL(n, R) 的表示，它们位于 Hom($\pi_1(S_g)$, PSL(n, R))/PSL(n, R) 中与福克斯表示相同的连通分支。这些分支称为 Hitchin 分支。它们是高秩 Teichm¨uller 空间 [Wie18]，的典型例子，也就是说，它们是 $\pi_1(S_g)$ 到 G 的特征簇的连通分支，其中只包含离散且忠实的表示，参见 Labourie [Lab06] 和 Fock-Goncharov [FG06]。

设 G 为 SL(n,R)、SO($k+1, k$)、Sp(2n,R) 或 G_2。本文的大部分内容致力于对 G 中包含福克斯表示的像的格进行分类。

定理 0.1。对于表 Λ 中的 G 所列出的每个格 *1*，均存在 $g \geq$2使得 Λ 包含一个来自 $\pi_1(S_g)$的福克斯表示的像。此外，在共轭和可公度性意义下，这些是一致格 G 中唯一包含福克斯表示的像的一致格。

G	n或 k	Λ
SO($k+1, k$)	$k \geq 2,\ k \equiv 1, 2[4]$	每个一致格
特殊正交群($k+1, k$)	$k \geq 3,\ k \equiv 0, 3[4]$	Λ_F
G_2(R)		每个一致格
辛群(2n, R)	$n \geq 2$	每个一致格
SL(2$k+1$, R)	$k \geq 1$	SU(I$_{2k+1}$, σ; $\mathcal{O}_F[\sqrt{d}]$)
SL(2n, R)	$n \geq 2$	SU(I$_n$, $^-\otimes\sigma$; $\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}_F[\sqrt{d}]$)

TABLE 1. 这里 $F \neq \mathbb{Q}$ 是任意全实数域，$\mathcal{O}_F$ 是其整数环，而 d 是 $\mathcal{O}_F$ 中的任意一个元素，它在 F的恰好一个实位上为正。此外，$\mathcal{O}$ 是 F 上的一个四元数代数的任意一个序，该代数仅在 F 为正的实位处分裂。关于记号，请参见第1.3 节。

定理 0.1 利用非阿贝尔伽罗瓦上同调得以证明。后者使我们能够将问题重新表述为数论术语。当$G = \mathrm{SO}(k+1, k)$时，例如，该问题相当于对代数数域上的二次型进行分类。

设 Λ 是 G 的一致格，其中包含一个福克斯表示 $\rho : \pi_1(S_g) \to G$ 的像。ρ 的像在 G 中并非扎里斯基稠密，但我们可以使用 Johnson 和 Millson [JM86] 引入的“弯曲”过程对 ρ 进行变形。由于 Λ 是一致的，S_g 上任意一条简单闭曲线的像在 Λ 中都有秩尽可能大的中心化子，见引理 5.1。这使我们能够将 ρ 弯曲为一个新的表示，它位于 Λ 中并且在 G 中扎里斯基稠密。证明弯曲过程可在 MCG(S_g)（S_g 的映射类群）作用下产生无穷多个 Hitchin 表示轨道，则要复杂得多。这需要用到 Weisfeiler 强逼近定理 [Wei84]（定理 5.5）。

定理 0.2。对于表 Λ 中列出的每个 G 格*1*，都存在 $g \geq 2$使得 Λ 包含无穷多个 $\mathrm{MCG}(S_g)$-轨道的扎里斯基稠密 Hitchin 表示的像，其中这些表示属于 $\pi_1(S_g)$。

对于给定的格 Λ，定理 g 0.2 中的亏格 与定理g 0.1 中的亏格一致。结合 [LT18] 针对 Sp(4，$\mathbb{Z}$) 的结果，以及 [Aud22] 针对其余非一致格的结果，定理 0.2 推出以下结论。

推论 0.3。Sp(4, R) 的所有格都包含一个扎里斯基稠密的 Hitchin 表示。

论文结构。第 1 节介绍伽罗瓦上同调和算术子群所需的背景知识。第 2 节回顾作者先前论文 [Aud22]中的结果。我们在第 3 节和第 4 节分别针对奇数维和偶数维情形证明定理 0.1 。最后，在第 5 节证明定理 0.2。

记号。在全文中，F 表示一个代数数域，V_F 表示其阿基米德位集合，$\mathcal{O}_F$ 表示其整数环

致谢。作者感谢 Andr´es Sambarino 对本文提出的意见，以及过去三年来对作者的指导；本文正是这段指导的成果。作者感谢 Xenia Flamm 仔细阅读本文。

Contents

引言.1 1. 背景.4 1.1. 伽罗瓦上同调.4 1.2. 算术子群的定义.5 1.3. 算术子群的例子.6

1.4. 算术子群分类.72. 关于形式的结果概述.92.1. 相容余循环.92.2. 奇数维余循环与二次型.102.3. 内余循环与四元数代数.11

3. 奇数维中的算术子群.11
3.1. SO（$k+1$, k）的算术子群.113.2. $\mathbf{G}_2(\mathbb{R})$ 的算术子群.123.3. SL（$2k+1$, $\mathbb{R}$）的算术子群.15

4. 偶数维中的算术子群.16
4.1. 标准余循环.164.2. 辛群$(2n,\mathbb{R})$ 的算术子群.174.3. SL$(2n,\mathbb{R})$ 的算术子群.194.4. 定理 0.1 的证明.21

5. 扎里斯基稠密曲面子群的构造.225.1. 弯曲概述.225.2. 强逼近定理.235.3. 定理 0.2 的证明.26参考文献.31

1. Background

1.1. 伽罗瓦上同调。设 $\mathcal{G}$ 是一个拓扑群，它连续地作用于离散群 M，后者不一定是阿贝尔群。1-余循环是一个连续映射 $\zeta\colon \mathcal{G}\to M$，满足

$$\zeta = \zeta(s)s(\zeta(t))$$

对所有 s、$t\in\mathcal{G}$ 都成立。若存在一个元素 $m\in M$ 使得下式成立，我们就称两个 1-余循环 ζ 和 ζ' 等价:

$$\zeta'(s) = m^{-1}\zeta(s)s(m)$$

对所有 $s\in\mathcal{G}$。我们用 $\mathrm{H}^1(\mathcal{G},M)$ 表示 1-余循环的等价类集合，并称之为 $\mathcal{G}$（系数取自 M）的第一上同调集。一般来说，它不是一个群。更多细节请参见 §Platonov 和 Rapinchuck 所著书的 1.3.2 节[PR94]。

设 L/F 是一个域扩张，G 是一个 F-代数群。G 的一个 L/F-形式是一个 F-代数群 H，它在 L 上与 G 同构。若 L 是 F 的可分闭包，则 G 的 L/F-形式也称为 G 的 F-形式。

假设 L/F 是伽罗瓦的。所有 L/F-形式都按如下方式定义 1-余循环。设 H 是 G 的一个 L/F-形式，且 $\Phi:\mathrm{H}\to\mathrm{G}$ 是一个由 L定义的同构。映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Gal}(L/F)&\to \mathrm{Aut}(\mathrm{G}(L))\\ \sigma&\mapsto \Phi\circ\sigma\circ\Phi^{-1}\circ\sigma^{-1}\end{aligned}$$

是一个 1-余循环。

定理 1.1 (定理 2.9，见 [PR94])。假设 L/F 是伽罗瓦扩张，则这给出了以下集合之间的一个双射：L/F的G 形式H^1(伽罗瓦群(L/F), 自同构群(G(L)))。

对于 $\zeta \in$H^1(伽罗瓦群(L/F), G(L) 的自同构群)，我们将相应的 L/F 形式记为 $_\zeta$G。注意，

$$_\zeta\mathrm{G}(F) = \{g \in \mathrm{G}(L) \mid \zeta(\sigma) \circ \sigma(g) = g \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/F)\} < \mathrm{G}(L).$$

如果一个 1-余循环的取值属于 Int(G(L))，则称这个余循环为内的。

定理 1.2（希尔伯特定理 90）。设 F 是一个数域。对于任意 $n \geq 1$

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F), \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}})) = \{1\}.$$

对于任意 1-余循环 ζ：伽罗瓦群(有理数域 $/F$) $\to \mathrm{GL}_n$(有理数域)，希尔伯特定理 90 的证明给出了一种算法，可以构造一个矩阵 $S \in \mathrm{GL}_n$(有理数域)，使其满足$\zeta(\sigma) = S^{-1}\sigma(S)$，对所有 $\sigma \in$伽罗瓦群(有理数域 $/F$) 均成立，参见《PR》第2章中的引理 2.2[PR94]。

1.2. 算术子群的定义。若 G 是一个李群，我们用 Ad : $G \to G/Z(G)$ 表示伴随表示。

定义 1.3。设 G 是一个没有紧因子的半单李群，且 Γ 是 G 中的一个格。若存在一个半单 Q-代数群 H 和一个满射同态，使得 $\Gamma < G$ 是一个算术子群

$$\phi : \mathrm{H}(\mathbb{R})_0 \to \mathrm{Ad}(G_0)$$

其核紧致，且 ϕ(H(Z) $\cap$ H(R)$_0$) 与 Ad($\Gamma \cap G_0$) 可公度。

当 G 为单群时，所有算术子群都由以下构造得到。

命题 1.4 （Morris 中的推论 5.5.16 [Mor15]）。设 G 是一个非紧致单李群，并且令 Γ 为 G的算术子群。则存在一个数域 F 以及一个 F-代数群 H 使得

- 存在 $v \in V_F$ 以及一个同源

$$\phi : \mathrm{H}(F_v)_0 \to \mathrm{Ad}(G_0)$$

使得 ϕ(H($\mathcal{O}_F$)$\cap$H(F_v)$_0$) 与 Ad($\Gamma \cap G_0$) 可公度，并且
- 对于所有 $w \in V_F$ 不等于 v的情形，H(F_w) 在欧几里得拓扑下是紧致的。

关于算术群的例子，参见 Morris 的著作 [Mor15] 或 §1.3。以下命题是定理 0.1的证明中的关键要素。

命题 1.5. 设 f : G $\to$ H 是数域 F 上的代数群同态。模可公度性，f(G($\mathcal{O}_F$)) $<$H($\mathcal{O}_F$)。

证明见 Milne [Mil13] 附录 A 中的命题 5.2，其中 F =有理数域。利用限制标量，可以将其推广到任意数域 F（参见 §10.3，见 [MR03]）。

命题 1.6. 设 F 是一个代数数域，并选取 $v \in V_F$。设 H 是一个连通的 F-代数群，且 $G < \mathrm{H}(F_v)$ 是一个扎里斯基闭半单子群。设 $\Gamma < G$ 是一个格，使得 $\Gamma < \mathrm{H}(\mathcal{O}_F)$。那么存在一个 F-代数子群 $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$，使得

- $\mathrm{G}(F_v) = G$,
- 对所有不满足 v 的 $w \in V_F$，$\mathrm{G}(F_w)$ 在欧几里得拓扑下是紧致的，并且
- Γ 与 $\mathrm{G}(\mathcal{O}_F)$ 可公度。

证明. 群 $G \cap \mathrm{H}(F)$ 包含 Γ，因此在 G 中扎里斯基稠密。[Mor15] 中命题 5.1.8 的证明表明，存在一个满足 $\mathrm{G}(F_v) = G$ 的 F-代数子群 $\mathrm{G} \subset \mathrm{H}$。对所有不满足 v 的 $w \in V_F$，$\mathrm{G}(F_w)$ 是紧致群 $\mathrm{H}(F_w)$ 的闭子群，因此是紧致的。最后，由于对于 F 除一个以外的所有阿基米德位，$\mathrm{G}(F_w)$ 都是紧致的，因此 $\mathrm{G}(\mathcal{O}_F)$ 是 G 中的一个格。它包含 Γ，且指标有限，这意味着它与 Γ 可公度。
□

1.3. 算术子群的例子。现在我们介绍一些稍后会出现的算术子群的例子。

设 F 是一个全实数域，$\mathcal{O}_F$ 是其整数环。设 $d \in \mathcal{O}_F$ 在 F 的恰好一个无穷赋值处为正。设 $\sigma \in \mathrm{Gal}(F(\sqrt{d})/F)$ 非平凡。则

$$\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \sigma; \mathcal{O}_F[\sqrt{d}]) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{SL}(n, \mathcal{O}_F[\sqrt{d}]) \mid \sigma(\mathrm{M})^\top \mathrm{M} = \mathrm{I}_n\}$$

是 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 的一个算术子群。当且仅当 $F = \mathbb{Q}$ 时，它是非一致的，参见 §18.5，见 [Mor15]。

定义 1.7. 域 k 上的四元数代数 A 是一个 4 维含幺结合代数，它有一个满足 $i^2 = a \in k$、$j^2 = b \in k$ 和 $ij = -ji$ 的基 $\{1, i, j, ij\}$。

四元数代数由 a 和 b 的选取唯一确定，我们将其记作 $(a, b)_k$。例如，四元数代数 $(-1,-1)_{\mathbb{R}}$ 是哈密顿四元数，记作 $\mathcal{H}$。每个四元数代数都有一个典范对合，称为共轭，其定义如下：

$$\bar{\ } : x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 ij \mapsto x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 ij.$$

A 的范数为 $\mathrm{Nrd}\colon\ A \to k, \quad x \mapsto x\overline{x}$.

设 A 是数域 F上的四元数代数。A 的一个序是 A 的有限生成 $\mathcal{O}_F$-子模，包含 1，并且张成 A 作为向量空间，同时是 A的子环。若 A 在 F 的赋值 v 处分裂，即 $A \otimes_F F_v \simeq \mathrm{M}_2(F_v)$，则称 A 在该处分裂；否则称其分歧于 v。

设 A 是全实数域上的四元数代数。假设 A 恰好在 F的一个实位 v 处分裂。设 $\mathcal{O}$ 是 A的一个序。那么

$$\mathcal{O}^1 = \{x \in \mathcal{O} \mid \mathrm{Nrd}(x) = 1\}$$

是 $(A \otimes_F F_v)^1 \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 的算术子群。

若矩阵 $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(A)$ 满足 $\mathrm{B}^\top = \mathrm{B}$, 则称其为厄米矩阵，其中共轭作用于 B 的每个元素。于是

$$\mathrm{SU}(\mathrm{B}, \bar{}; \mathcal{O}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{SL}(n, \mathcal{O}) \mid \overline{\mathrm{M}}^\top \mathrm{B}\, \mathrm{M} = \mathrm{B}\}$$

是 $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 的算术子群。当且仅当F =有理数域，见 §18.5，载于 [Mor15]。

令 $d \in \mathcal{O}_F$仅在实位 v 处为正。令 $\sigma \in \mathrm{Gal}(F(\sqrt{d})/F)$ 非平凡。记

$$\sigma^* : \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F[\sqrt{d}] \to \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F[\sqrt{d}],\ x \otimes \lambda \to x \otimes \sigma(\lambda).$$

我们还用 σ^* 表示由 σ 在 $\mathrm{M}_n(\mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_F[\sqrt{d}])$ 上诱导的对合，即对每个元素应用 σ^* 。于是

$$\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \bar{} \otimes \sigma; \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_F[\sqrt{d}]) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{SL}(n, \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_F[\sqrt{d}]) \mid \sigma^*(\overline{\mathrm{M}})^\top \mathrm{M} = \mathrm{I}_n\}$$

是 $\mathrm{SL}(2n,\mathbb{R})$ 的一个算术子群。需要强调的是，此处转置是针对视为 $n\times n$ 矩阵的 M 进行的。当且仅当 F =Q 时，它是非一致的，参见 §18.5，见 [Mor15]。

最后，我们引入表 1 中使用的记号。设 $k \equiv 0、3[4]$和 F为任意全实数域，其整数环为 $\mathcal{O}_F$。设 q 是 $2k+1$ 上的非退化二次型，秩为 F，其判别式平凡，在 F 的每个有限位处的哈塞不变量均平凡，并且在 F 的所有实位处均为正定，除了一处；在该处，当 $k \equiv 0[4]$ 时，其惯性指数为 $(k+1, k)$，而当 $k \equiv 3[4]$时，其惯性指数为 $(k, k+1)$。记

$$\Lambda_F = \mathrm{SO}(q, \mathcal{O}_F)$$

$\mathrm{SO}(k+1, k)$ 的子群。它是 $\mathrm{SO}(k+1, k)$ 的一个格，当且仅当 $F = \mathbb{Q}$ 时不是均匀格。除广义可公度性外，它不依赖于二次型的选择。

1.4. 算术子群分类。若一个子群的某个共轭与另一个子群可公度，则称这两个 G 的子群广义可公度。

引理 1.8. 设 F 为全实数域， V_F 为其阿基米德位的集合。固定一个子集 $V \subset V_F$。存在 $\lambda \in F$，使得对所有 $\iota \in V$, $\iota(\lambda) < 0$，且对所有 $\iota \notin V$ $\iota(\lambda) > 0$。

证明。首先假设 $V = \{\sigma\}$。我们使用 σ 将 F 视为有理数域的一个子域。存在一个元素 $\alpha_0 \in$ 属于有理数域，使得 $F =$ 有理数域(α_0)。记 α_1、...、 α_m为其共轭元。不妨重新编号，假设

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_m.$$

取 $r \in$ 属于有理数域，使得 $\alpha_0 < r < \alpha_1$。然后令 $\lambda = \alpha_0 - r$。于是 $\lambda < 0$，且 λ 的共轭元为 $\alpha_i - r$，它们全都是正数。

令 V 为 V_F 的任意子集。对于所有 $\sigma \in V$，令 λ_σ 为 F 中的一个元素，使得 $\sigma(\lambda_\sigma) < 0$，并且对于所有 $\iota \notin V_F \setminus \{\sigma\}$，$\iota(\lambda_\sigma) > 0$。令

$$\lambda = \prod_{\sigma \in V} \lambda_\sigma .$$

那么，对于所有 $\iota \in V$，我们有 $\iota(\lambda) < 0$，并且对于所有 $\iota \notin V$ ι，$\lambda(> 0)$。 □

命题 1.9。设 $n = 2k+1 \geq 5$ 为奇数。SO(k+1,k) 的一致格与 SO(B $\mathcal{O}_F$) 广义可公度，其中 $\mathcal{O}_F$ 是全实数域 $F \neq$ Q 的整数环，且 B $\in$ SL(n, F) 是满足以下条件的对称矩阵：

- 在 F 的一个实位处，B 的惯性指数为 ($k+1, k$)（若 k 为偶数），或为 (k, $k+1$)（若 k 为奇数），并且
- B 在 F 的所有其他实位上都是正定的。

证明。 Margulis 算术性定理（见 [Mor15]中的定理 16.3.1）推出 SO(k+1, k) 的所有格都是算术的。根据 [Mor15] §18.5 中对$k+1, k$) 的算术子群分类, SO($\mathcal{O}_F$) 的格与 SO(B $\mathcal{O}_F$ 可公度，其中 F 是全实数域 $\in$ 的整数环，且 Bn∈GL(F,$k+1$) 是一个对称矩阵，在 k 的一个实位上惯性指数为 (F，并且在 F 的所有其他实位上，B 都是正定或负定的。

若 F =Q，则 Meyer 定理（§ 中第 4 章第 3 节的推论 2，见 [Ser73]）推出 B 在 Q 上各向同性。因此，SO(B,Z) 是非一致的。因此$F \neq$Q。

令 $V \subset V_F$ 为 F 中 B 为负定的实位集合。根据引理 1.8，存在 $\lambda \in F$，使得对于所有 $\iota \in V$ $\iota(\lambda) < 0$ 以及所有 $\iota \notin V$ $\iota(\lambda) > 0$，都有 λB 在除一个实位之外的所有实位上均为正定，并且在该实位上的惯性指数为 ($k+1, k$)，且 SO(B $\mathcal{O}_F$) =SO(λ B $\mathcal{O}_F$)。将 B 替换为 λB 后，不妨假设 V 为空。

将 B 替换为 Det(B)B 后，不妨假设 Det(B) 是一个平方。于是经过合同变换，不妨假设 B 的行列式为 1。□

命题 1.10. 设 $n \geq 2$。Sp(2n, R) 的一致格与 SU(I$_n$, ; $\mathcal{O}$) 广义可公度，其中 $\mathcal{O}$ 是全实数域 $F \neq$Q 上四元数代数 A 的一个序，且 A 恰在 F 的一个实位处分裂。

证明。 Margulis 算术性定理（参见 [Mor15]中的定理 16.3.1）蕴含 Sp(2n, R) 的所有格都是算术的。根据 [Mor15] §18.5 对Sp(2n,R) 的算术子群分类, 一致格与 SU(B, ; $\mathcal{O}$) 广义可公度，其中 $\mathcal{O}$ 是全实数域 A 上的四元数除代数的一个序， $F \neq$Q[3], A 在所有

[3]注意，如果 F = 有理数域，那么分类中的格都是非一致的，因为有理数域上的四元数除代数上的厄米形式总是各向同性的。

$\iota \in V_F \setminus \{\sigma\}$ 并且 B 是 A 上的非退化 -厄米矩阵，使得对所有 $\iota \in V_F \setminus \{\sigma\}$ ι(B) $\in$GL($\mathcal{H}$) 的惯性指数为 (n,0) 或 (0, n)。记

$$V_F^+ = \{\iota \in V_F \mid \iota(\mathrm{B}) \text{ has signature } (n,0)\}.$$

令 $\lambda \in F$使得对于所有 $\iota \in V_F^+$ 都有 $\iota(\lambda) > 0$，并且对于所有 $\iota \notin V_F^+$ 都有 $\iota(\lambda) < 0$。由引理 1.8 可知其存在。于是，对于 F 的所有实嵌入，-厄米矩阵 $\lambda \mathrm{I}_n$ 与 B 具有相同的惯性指数，但 σ 除外。正如 [Lew82]第5节所述， A 上的非退化 -厄米形式由 F 的所有实嵌入处的惯性指数集合分类，但 σ 除外。因此 SU(B, ; $\mathcal{O}$) 共轭于

$$\mathrm{SU}(\lambda \mathrm{I}_n, \bar{}; \mathcal{O}) = \mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \bar{}; \mathcal{O}).$$

□

2. 形式上的结果总结

令 G 如表 1所示。为证明定理 0.1，我们对 G 的算术子群进行分类，这些子群包含 SL(2,$\mathbb{R}$ 的算术子群在不可约表示 τ_n 下的像（关于 τ_n 的定义见 τ_n）。利用命题 1.5，问题归结为确定具有 F-点的 $\mathbb{R}$-代数群 G，其包含 SL F 的一个 $_2$ -形式在 τ_n 下的像。回顾一下，代数群的形式使用1-余循环进行分类，见定理 1.1。

本节主要总结了在[Aud22] 的情形下所确立的结果 F = 有理数域，但其证明仍适用于任意数域。令 F 为一个全实数域。令

$$\xi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{Q}}/\mathrm{F}) \to \mathrm{PSL}(2, \overline{\mathrm{Q}}) = \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(2, \overline{\mathrm{Q}}))$$

为一个 1-余循环。

2.1. 相容余循环。令 F 为一个全实数域。

定义 2.1. 设 $n \geq 3$，并令 G 为 SL$_n$ 的一个 F-代数子群。称 1-余循环 ζ : Gal(Q/F) $\to$ Aut(G(Q)) 与 ξ相容，如果它是 τ_n-相容的

$$\tau_n(_\xi \mathrm{SL}_2(F)) <_\zeta \mathrm{G}(F).$$

令 a、$b \in \mathcal{O}_F$，并取平方根 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b} \in$ Q。令 T$^{a,\ b}$: Gal(Q $/F$) $\to$ PSL(2, $\overline{\mathrm{Q}}$) $\sigma \mapsto \mathrm{T}_\sigma^{a\ b}$, 使得

$$\mathrm{T}_\sigma^{a,b} = \begin{cases} \mathrm{I}_2 & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = \sqrt{b} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = \sqrt{b} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}. \end{cases}$$

我们常将 T$_\sigma$ 记作 T$_\sigma^{a\ b}$, 。下面的引理给出了一个与 ξ 等价的显式 1-余循环。

引理 2.2 ([Aud22] 中的引理 2.3)。 设 ξ: 伽罗瓦群(有理数域 $/F$) $\to$ 射影特殊线性群(2, 有理数域) 是一个1-余循环。存在 a, $b \in \mathcal{O}_F$ 以及 $\mathrm{P} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q})$ 使得

$$\xi(\sigma) = \mathrm{P}^{-1}\, \mathrm{T}_\sigma^{a,b}\, \sigma(\mathrm{P})$$

对于每个 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(有理数域 $/F$)。

定义 2.3. 对所有 $n \geq 3$, 定义 J_n 为

$$\begin{pmatrix} & & & & & & (n-1)! \\ & & & & & \iddots & \\ & & & & (-1)^{i-1}(n-i)!(i-1)! & & \\ & & & \iddots & & & \\ (-1)^{n-1}(n-1)! & & & & & & \end{pmatrix}.$$

当 n 为奇数时, 如果 $n = 2k+1$且 k 为偶数, 则它是惯性指数为 $(k+1, k)$ 的对称矩阵; 如果 $n = 2k+1$ 且 k 为奇数, 则它是惯性指数为 $(k, k+1)$ 的对称矩阵。当 n 为偶数时, J_n 为反对称矩阵。注意, 对于所有 $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, 它满足 $\tau_n(\mathrm{M})^\top \mathrm{J}_n\, \tau_n(\mathrm{M}) = \mathrm{J}_n$。在下面的命题中, 我们将明确描述与 ξ兼容的 1-余循环 τ_n。这将在接下来的两节中反复使用。

命题 2.4 （Aud [Aud22]中的命题 2.6）。 对于任意 $n \geq 3$, 1-余循环ζ： 伽罗瓦群(有理数域/F 的整数环) $\to \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(n,$ 有理数域)) 是 τ_n-兼容于 ξ 当且仅当以下两种情况之一成立

$$\zeta : \sigma \mapsto \mathrm{Int}(\tau_n(\mathrm{P}^{-1}\, \mathrm{T}_\sigma^{a,b}\, \sigma(\mathrm{P})))$$

或者存在一个 F 的二次域扩张 $F(\sqrt{d})$, 使得

$$\zeta : \sigma \mapsto \begin{cases} \mathrm{Int}(\tau_n(\mathrm{P}^{-1}\, \mathrm{T}_\sigma^{a,b}\, \sigma(\mathrm{P}))) & \text{if } \sigma(\sqrt{d}) = \sqrt{d} \\ \mathrm{Int}(\tau_n(\mathrm{P}^{-1}\, \mathrm{T}_\sigma^{a,b})\, \mathrm{J}_n^{-1}) \circ\ \omega \circ \mathrm{Int}(\tau_n(\sigma(\mathrm{P}))) & \text{if } \sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d} \end{cases}$$

其中 $\omega(\mathrm{M}) = (\mathrm{M}^\top)^{-1}$。

2.2. 奇数维余循环与二次型。设 $n = 2k+1$, 且 $k \geq 1$。令 ζ: Gal(Q $/F$) $\to$ Aut(SL(n, Q)) 为与 ξ 相容的内 1- 余循环 τ_n。命题 2.4 表明 ζ 取值于 SO(J_n, Q) $<$PSL(n, $\mathbb{Q}$)。文献 [PR94] 中的命题 2.8 指出, 第一上同调集 H^1(Gal(Q $/F$), SO(J_n, Q)) 与 F- 等价类一一对应, 其中的二次型维数为 n , 定义在 F 上, 判别式等于 det(J_n)。我们给出一个对称矩阵 $\mathrm{J}_n^{a\ b}$, 它表示与 ζ 相关的等价类中的一个二次型。它满足

$${}_\zeta\mathrm{SO}(\mathrm{J}_n)(F) \simeq \mathrm{SO}(\mathrm{J}_n^{a,b}, F).$$

这些计算来自 [Aud22] 中引理 3.3 的证明, 并使用了定理 1.2 （希尔伯特定理 90）的算法。计算是在F =有理数域 的情形下完成的, 但对任意数域都成立。我们在此回顾这些结果。若 a 或 b 是

一个平方，则令 $\mathrm{J}_n^{a\,b} =, \mathrm{J}_n$。假设 a 和 b 都不是平方。若 $n \equiv 1[4]$，令 $\mathrm{J}_n^{a\,b}$, 为如下定义的对角矩阵：

$$(\mathrm{J}_n^{a,b})_{ii} = \begin{cases} -2a(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \le k \text{ and } i \text{ is odd}, \\ -2b(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \le k \text{ and } i \text{ is even}, \\ k!k! & \text{if } i = k+1, \\ 2ab(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \ge k+2 \text{ and } i \text{ is even}, \\ 2(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \ge k+2 \text{ and } i \text{ is odd}. \end{cases}$$

若 $n \equiv 3[4]$ 令 $\mathrm{J}_n^{a\,b}$, 为如下定义的对角矩阵

$$(\mathrm{J}_n^{a,b})_{ii} = \begin{cases} -2b(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \le k \text{ and } i \text{ is odd}, \\ 2(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \le k \text{ and } i \text{ is even}, \\ -ak!k! & \text{if } i = k+1, \\ -2a(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \ge k+2 \text{ and } i \text{ is even}, \\ 2ab(n-i)!(i-1)! & \text{if } i \ge k+2 \text{ and } i \text{ is odd}. \end{cases}$$

2.3. 内余循环与四元数代数。对于每个 1-余循环 ζ : 伽罗瓦群(Q $/F$) $\to$ 射影特殊线性群(n, 有理数域) 定义

$${}_\zeta\mathrm{M}_n(F) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \zeta(\sigma)\sigma(\mathrm{M})\zeta(\sigma)^{-1} = \mathrm{M} \ \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\}.$$

它满足 ${}_\zeta\mathrm{M}_n(F)$ $\otimes_F$有理数域 $\simeq \overline{\mathrm{M}}_n$(有理数域)。

命题 2.5 ([Aud22]中的命题 2.8)。设 ζ: 伽罗瓦群(有理数域 $/F$) $\to$ 射影特殊线性群(n, 有理数域)是一个 1-上同调 τ_n-与 ξ相容。则

$${}_\zeta\mathrm{M}_n(F) \simeq \begin{cases} \mathrm{M}_n(F) & \textit{if } n \textit{ is odd} \\ \mathrm{M}_{\frac{n}{2}}({}_\xi\mathrm{M}_2(F)) & \textit{if } n \textit{ is even}. \end{cases}$$

3. Arithmetic subgroups in odd dimension

本节证明定理 0.1 在 $G =$特殊正交群($k+1, k$) $\mathbf{G}_2$(ℝ和 SL($2k+1$,ℝ)的情形。

3.1. SO($k+1, k$)的算术子群。设 $\mathcal{P}$ 是$\mathcal{O}_F$的一个素理想，且 $a, b \in F^\times$。我们将四元数代数 $(a,b)_{F_\mathcal{P}}$记为 $(a,b)_\mathcal{P}$，其中 $F_\mathcal{P}$ 是 F 在赋值 $\mathcal{P}$处的完备化。我们将四元数代数 $\mathrm{M}_2(F_\mathcal{P})$记为 1。

命题 3.1. 设 Γ 是 SL(2, R) 的一个算术子群。设 F 是一个全实数域，且 a, $b \in F^\times$ 满足： Γ 与 $(a,b)_F$的某个序中的范数为 1 的元素可公度。

令 $n = 2k+1 \ge 3$ 为奇数。则 $\tau_n(\Gamma)$ 位于 SO(J$_n$, R) 的一个子群中，该子群与 SO(B $\mathcal{O}_F$) 广义可公度，其中 $B \in$SL(n, F) 是一个满足以下条件的对称矩阵

- B 的惯性指数等于 $(k+1, k)$；当 k 为偶数时，以及当 k 在 F 的某个实位处为奇数时，惯性指数为 $(k, k+1)$。
- B 在 F 的所有其他实位上均为正定，且

- B 的哈塞不变量

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathrm{B}) = \begin{cases} 1 & if\ n \equiv \pm 1[8] \\ (a,b)_{\mathcal{P}} \otimes (-1,-1)_{\mathcal{P}} & if\ n \equiv \pm 3[8] \end{cases}$$

对于 $\mathcal{O}_F$ 的每个素理想 $\mathcal{P}$。

此外，在可公度性意义下，这是 SO(J$_n$,R) 中唯一包含 $\tau_n(\Gamma)$ 的算术子群。

证明。令 $\xi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathrm{Q}}/\mathrm{F}) \to \mathrm{PSL}(2, \overline{\mathrm{Q}})$ $\sigma \mapsto \mathrm{T}_\sigma^{a\,b}.,$ 这是一个 1-余循环，使得Γ 与 $\xi\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ 广义可公度。定义

$$\zeta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathrm{F}) \to \mathrm{SO}(\mathrm{J}_n, \overline{\mathbb{Q}}),\ \sigma \mapsto \tau_n(\mathrm{T}_\sigma^{a,b}).$$

它满足 $\tau_n(\xi\mathrm{SL}_2(F)^< \zeta\mathrm{SO}(\mathrm{J}_n(F)$。命题 1.5 表明 $\tau_n(\Gamma)$ 在广义可公度意义下属于 $\zeta\mathrm{SO}(\mathrm{J}_n(\mathcal{O}_F)$，且与 SO(J$_n^{a\,b}$, ， $\mathcal{O}_F$) 广义可公度，见 §2.2。

若 $n \equiv 1[4]$，则其在 $\mathcal{O}_F$ 的素理想 $\mathcal{P}$ 处的哈塞不变量为

$$(-1,-1)_{\mathcal{P}}^{\frac{n-1}{4}} \otimes \bigotimes_{j=1,3,\ldots,k-1} (a, bj(n-j))_{\mathcal{P}} \simeq (-1,-1)_{\mathcal{P}}^{\frac{n-1}{4}} \otimes (a, b^{\frac{n-1}{4}})_{\mathcal{P}},$$

因为 $\prod_{j=1,\ 3,\ \ldots,\ k-1} j(n-j)$ 是一个平方，这一点可由归纳法证明。

如果 $n \equiv 3[4]$，那么它在 $\mathcal{O}_F$ 的素理想 $\mathcal{P}$ 处的哈塞不变量为

$$(-1,-1)_{\mathcal{P}}^{\frac{n+1}{4}} \otimes (a,2)_{\mathcal{P}} \otimes \bigotimes_{j=1,3,\ldots,k} (a, bj(n-j))_{\mathcal{P}} \simeq (-1,-1)_{\mathcal{P}}^{\frac{n+1}{4}} \otimes (a, b^{\frac{n+1}{4}})_{\mathcal{P}},$$

因为 $2\prod_{j=1,\ 3,\ \ldots,\ k} j(n-j)$ 是一个平方，这一点可由归纳法证明。

反过来，设 Λ 是 SO(J$_n$,$\mathbb{R}$) 的一个算术子群，且包含 $\tau_n(\Gamma)$. 由于 SO(J$_n$,$\mathbb{R}$) 是单的， Λ 与 $\eta\mathrm{SO}(\mathrm{J}_n)(\mathcal{O}_L)$ 广义可公度，其中 L 是一个数域，且 η: 伽罗瓦群(有理数域 $/L$) $\to$SO(J$_n$,有理数域) 是一个 1-余循环。由命题 1.6 可假设 $L = F$。

我们证明 η与 ξ 是 τ_n-相容的。对于每个 $\sigma \in$伽罗瓦群($\overline{\mathrm{Q}}$ $/F$)，记为

$$\tau_n^\sigma : \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathrm{SO}(\mathrm{J}_n, \overline{\mathbb{Q}}),\ g \mapsto \eta(\sigma) \circ \sigma \circ \tau_n \circ (\xi(\sigma) \circ \sigma)^{-1}(g).$$

这是一个代数态射，在 τ_n 与 Γ的某个有限指数子群上相一致。由于 Γ 的任意有限指数子群在 SL$_2$(有理数域) 中都是扎里斯基稠密的，$\tau_n = \tau_n^\sigma$。这意味着 $\tau_n(\xi\mathrm{SL}_2(F))^< \eta\mathrm{SO}(\mathrm{J}_n)(F)$。命题 2.4完成证明。 □

3.2. G$_2$(R) 的算术子群。我们用 G$_2$(R) 表示类型为 G$_2$ 的连通、中心无关的分裂实李群。

定义 3.2. 设 R 是一个环，且 a、$b \in R$ 非零。记 $\times\colon R^7 \times R^7 \to R^7$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6a(x_7y_4 - x_4y_7) - 4(x_2y_3 - x_3y_2) - 4a(x_6y_5 - x_5y_6) \\ 24b(x_3y_1 - x_1y_3) + 24ab(x_7y_5 - x_5y_7) - 6a(x_6y_4 - x_4y_6) \\ 60(x_2y_1 - x_1y_2) + 60a(x_7y_6 - x_6y_7) - 6a(x_5y_4 - x_4y_5) \\ 240b(x_1y_7 - x_7y_1) + 40(x_2y_6 - x_6y_2) - 16b(x_3y_5 - x_5y_3) \\ 60(x_1y_6 - x_6y_1) - 60(x_7y_2 - x_2y_7) - 6(x_3y_4 - x_4y_3) \\ 24b(x_3y_7 - x_7y_3) + 24b(x_1y_5 - x_5y_1) - 6(x_2y_4 - x_4y_2) \\ 6(x_1y_4 - x_4y_1) - 4(x_2y_5 - x_5y_2) - 4(x_6y_3 - x_3y_6) \end{pmatrix}.$$

定义 $\mathrm{G}_2^{a,b}(R) = \{\mathrm{M} \in \text{特殊正交群}(\mathrm{J}_7^{a,b}, R) \mid \mathrm{M}(x \times y) = \mathrm{M}\, x \times \mathrm{M}\, y,\ \forall x, y \in R^7\}$。

对于任意 a，$b \in F^\times$ 该 F-代数群 $\mathbf{G}_2^{a,b}$，是 G 型的单代数群。[4] 对于任意 $a, b \in \mathrm{R}^\times$，若二者均为负，则 $\mathrm{G}_2^{a,b}(\mathrm{R})$ 同构于 G_2 型的紧李群。若 a 或 b 为正，则 $\mathrm{G}_2^{a,b}(\mathrm{R}) \simeq \mathrm{G}_2(\mathrm{R})$。

命题 3.3。设 Γ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathrm{R})$ 的一个算术子群。设 F 是一个全实数域，且 a, $b \in F^\times$ 满足 Γ 与 $(a,b)_F$ 的某个序中范数为 1 的元素可公度。那么 $\tau_7(\Gamma)$ 包含于 $\mathrm{G}_2(\mathrm{R})$ 的一个子群中，该子群与 $\mathrm{G}_2^{a,b}(\mathcal{O}_F)$ 广义可公度。此外，后者是包含 $\tau_7(\Gamma)$ 的 $\mathrm{G}_2(\mathrm{R})$ 中唯一的算术子群（在可公度意义下）。

注 3.4。子群 $\mathbf{G}_2^{a,b}(\mathcal{O}_F)$ 是 $\mathbf{G}_2(\mathbb{R})$ 的一个算术子群。事实上，对于除一个以外的所有嵌入 $\sigma\colon F \to \mathbb{R}$，$\mathbf{G}_2^{\sigma(a),\sigma(b)}(\mathbb{R})$ 都是紧致的。此外，$\mathbf{G}_2(\mathbb{R})$ 的所有算术子群都具有这种形式，正如我们将在命题3.5中看到的那样。

证明。设 $\xi\colon$ 伽罗瓦群$(\mathrm{Q}(\sqrt{F}) \to \mathrm{PSL}(2,\overline{\mathrm{Q}})$ $\sigma \mapsto \mathrm{T}_\sigma^{a,b}$，。这是一个 1-余循环，使得 $\xi\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ 与 Γ 广义可公度。设 $\zeta\colon$ 伽罗瓦群$(\mathrm{Q}(\sqrt{F}) \to \mathrm{G}_2(\mathrm{Q})$ $\sigma \mapsto \tau_7(\mathrm{T}_\sigma^{a,b}, \overline{)}$。它满足 $\tau_7(\xi\mathrm{SL}_2(F)) < \zeta\mathrm{G}_2(F)$。

我们需要确定 $\zeta\mathbf{G}_2(F)$。希尔伯特第90定理，定理 1.2表明，存在 $\mathrm{S} \in \mathrm{GL}_7($有理数域$)$，使得对所有 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(有理数域 $/F)$ $\zeta(\sigma) = \overline{\mathrm{S}^{-1}}\,\sigma(\mathrm{S})$。正如 [Aud22] 中引理 3.3 的证明所计算的，我们可以取

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{b}} & & & & & & \frac{1}{\sqrt{b}} \\ & 1 & & & & -1 & \\ & & & & & & \\ & & & \frac{2}{\sqrt{a}} & & & \\ & & & & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{a}} & & & & \frac{1}{\sqrt{a}} & \\ \frac{1}{\sqrt{ab}} & & & & & & \frac{1}{\sqrt{ab}} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

[4] 事实上，它在 有理数域 上与$\overline{\mathbf{G}}_2(\mathbb{R})$ 共轭，正如定义 3.6 中 [Aud22] 使用方程（1）中定义的矩阵 S 所定义的那样。

因此，对于 $M \in \xi SL_2(F)$，$S\ \tau_7(M)\ S^{-1} \in SL(7,F)$。看起来，$\tau_7(\xi SL_2(F))$ 保持二次型 J_7 。。因此 $S\ \tau_7(\xi SL_2(F))\ S^{-1}$ 保持二次型 $S^{-\top} J_n S^{-1} = J_n^{a\,b}$ ，，此外，$\tau_7(\xi SL_2(F))$ 保持以下叉积：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6(x_1y_4 - x_4y_1) - 4(x_2y_3 - x_3y_2) \\ 24(x_1y_5 - x_5y_1) - 6(x_2y_4 - x_4y_2) \\ 60(x_1y_6 - x_6y_1) - 6(x_3y_4 - x_4y_3) \\ 120(x_1y_7 - x_7y_1) + 20(x_2y_6 - x_6y_2) - 8(x_3y_5 - x_5y_3) \\ 60(x_2y_7 - x_7y_2) - 6(x_4y_5 - x_5y_4) \\ 24(x_3y_7 - x_7y_3) - 6(x_4y_6 - x_6y_4) \\ 6(x_4y_7 - x_7y_4) - 4(x_5y_6 - x_6y_5) \end{pmatrix}.$$

事实上，可以验证 $\tau_7(SL(2,\mathbb{Z}))$ 保持该叉积，并利用 $SL(2,\mathbb{Z})$ 在 $SL(2,\mathbb{Q})$ 中扎里斯基稠密这一事实。这意味着 $S\ \tau_7(\xi SL_2(F))\, S^{-1}$ 保持 $\overline{\times}$，其定义见定义 3.2。由此可得

$$S\,\tau_7(_\xi SL_2(F))\,S^{-1} < \mathbf{G}_2^{a,b}(F).$$

由于存在唯一一个 τ_7-与 ξ 相容且取值于 $G_2(\mathbb{Q})$ 中的 1-余循环，见命题 2.4，因此包含$\tau_7(\xi SL_2(F))$ 的 $G_2(\mathbb{Q})$ 只有一个 F-形式。我们推得 $\varsigma G_2(F) \simeq G_2^{a\,b}$ ，(F)。命题 1.5 表明，$\tau_7(\Gamma)$ 包含于 $\varsigma G_2(\mathcal{O}_F) \simeq G_2^{a\,b}$ ，$(\mathcal{O}_F)$ 中，差一个有限指标。

逆命题的证明与命题 3.1的证明相同。 □

最后，我们通过对 $\mathbf{G}_2(\mathbb{R})$ 的格进行分类来结束这一部分，因为我们将在定理 0.1的证明中用到它。这当然是众所周知的。

命题 3.5. $G_2(\mathbb{R})$ 的所有格都与 $G_2^{a\,b}$，$(\mathcal{O}_F)$ 广义可公度，其中 F是一个全实数域，并且 $a,b \in F^{a,\ b}$ 满足：对于所有嵌入 $\sigma : F \to \mathbb{R}$，除了一个之外，$\sigma(a)$ 和 $\sigma(b)$ 均为负。

证明。令 $\Gamma < \mathbf{G}_2(\mathbb{R})$ 为一个格。根据 Margulis 算术性定理（ [Mor15]中的定理 16.3.1） Γ是算术的。根据命题 1.4，存在一个半单 F-代数群 H，使得 $H(F_v)$ 在除一个阿基米德位以外的所有阿基米德位 v 上均为紧致；这个例外赋值记为 v_0，并且存在一个同源

$$\phi : H(F_{v_0}) \to \mathbf{G}_2(\mathbb{R})$$

满足 $\phi(H(\mathcal{O}_F))$ 与 Γ 可公度。[5] 群 $H(F_{v_0})$ 不可能是 $G_2(\mathbb{R})$ 的万有覆盖，因为后者不是代数的。因此，ϕ 是一个同构，且 H 是 G_2 的一个 $\mathbb{R}/F$-形式。这些形式由 $\mathbb{R}/F$ 上分裂八元数代数的形式分类，而这些形式由其范数确定，参见 [SV00] 中的定理 1.7.1。与 H 相关的范数在 F 除一个实位外的所有实位上都是正定的。因此，除相差一个标量乘法外，它等价于 $J_7^{a\,b}$，其中 a、$b \in F^\times$ 在 F 除一个实位外的所有实位上都为负。因此，与 H 和 $G_2^{a\,b}$ 相关的八元数代数同构，最终 $H \simeq G_2^{a\,b}$ ，。□

[5]推论 5.5.15（见 [Mor15] ）允许我们假设 $H(\mathbb{R})$ 是连通的。

3.3. SL(2$k+1$, R) 的算术子群。

命题 3.6. 设 Γ 是 SL(2, R) 的一个算术子群。设 F 是一个全实数域，A 是 F 上的一个四元数代数，使得 Γ 与 A 的一个序中的范数为 1 的元素可公度。假设 $F \neq$Q。[6]

设 $n \geq 3$ 为奇数。则 $\tau_n(\Gamma)$ 属于 SL(n,R) 中的一个子群，该子群与 SU(I$_n$, σ;$\mathcal{O}_F[\sqrt{d}]$) 广义可公度；对于每个 $d \in \mathcal{O}_F$，只要它在 F 的实位中恰好在 A 分裂且 $\sigma \in$Gal($F(\sqrt{d})/F$) 非平凡的那些实位上为正。

此外，在可公度意义下，这些是包含 $\tau_n(\Gamma)$ 的 SL(n,R) 的仅有的算术子群。

证明。设 a、$b \in F^\times$ 使得 $A \simeq (a,b)_F$。令 ξ: Gal(Q$/F$) $\to$ PSL(2, Q), $\sigma \mapsto \mathrm{T}_\sigma^{a,b}$, 。这是一个 1-余循环，使得 ξSL$_2(\mathcal{O}_F)$ 与 Γ 广义可公度。我们将 Tσ 记作 $\mathrm{T}_\sigma^{a,b}$, 。令 ζ: Gal(Q$/F$) $\to$ Aut(SL$_n$(Q)) 为一个 τ_n- 相容的 1- 余循环。

如果 ζ是内的，那么命题 2.5 表明ζSL$_n(F) \simeq$SL(n, F)。然而，SL(n, $\mathcal{O}_F$) 不是 SL(n, $\mathbb{R}$) 的格，如果 $F \neq \mathbb{Q}$。

以下设 ζ 不是内的。记 $F(\sqrt{d})$ 为与 F 相关的二次扩张。回顾一下，当且仅当 M $\in \zeta$SL$_n(F)$ 时，

$$\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)\sigma(\mathrm{M})\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)^{-1} = \mathrm{M}$$

对所有满足 $\sigma(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$ 且满足 $\sigma \in$Gal(Q $/F$) 的

$$\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)\,\mathrm{J}_n^{-1}\,\sigma(\mathrm{M})^{-\top}\,\mathrm{J}_n\,\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)^{-1} = \mathrm{M}$$

对所有 $\sigma \in$伽罗瓦群(有理数域 $/F$)，使得 $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$，参见命题 2.4。由希尔伯特第90定理，定理 1.2，存在 S $\in$ GL(n,有理数域)，使得 $\tau_n(\mathrm{T}\sigma) = \mathrm{S}^{-1}\,\sigma$(S)。第一组方程等价于

$$\mathrm{S}\,\mathrm{M}\,\mathrm{S}^{-1} \in \mathrm{SL}(n, F(\sqrt{d})).$$

其次，对所有 $\sigma \in$伽罗瓦群(有理数域 $/F$)，使得 $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$

$$\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)\,\mathrm{J}_n^{-1}\,\sigma(\mathrm{M})^{\top}\,\mathrm{J}_n\,\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)^{-1} = \mathrm{M}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\ \tau_n(\mathrm{T}_\sigma)^{-\top}\sigma(\mathrm{M})^{\top}\tau_n(\mathrm{T}_\sigma)^{\top}\,\mathrm{J}_n\,\mathrm{M} = \mathrm{J}_n$$

因为 τ_n(Tσ) 与 J$_n$ 可交换，且由于 $\tau_n(\mathrm{T}\sigma)^{-\top} = \tau_n$(T$\sigma$),

$$\Leftrightarrow\ \sigma(\mathrm{S}\,\mathrm{M}\,\mathrm{S}^{-1})^{\top}\,\mathrm{S}^{-\top}\,\mathrm{J}_n\,\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{S}\,\mathrm{M}\,\mathrm{S}^{-1}) = \mathrm{S}^{-\top}\,\mathrm{J}_n\,\mathrm{S}^{-1}.$$

如 §2.2 中所述，我们可以取 S，使得 $\mathrm{S}^{-\top}\mathrm{J}_n\,\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{J}_n^{a,b}$, 。因此

$$\mathrm{S}\,_\zeta\mathrm{SL}_n(F)\,\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{SU}(\mathrm{J}_n^{a,b}, \sigma; F(\sqrt{d}))$$

与 $\sigma \in$伽罗瓦群($F(\sqrt{d})/F$) 非平凡。从 §4 的 [Lew82],可知，σ- 关于 $F(\sqrt{d})$ 的厄米形式在等价意义下由其秩、判别式以及在 F的实位上的符号分类，其中 d 为负。

[6]当 $F =$有理数域 时的相应命题，请参见 [Aud22] 中的命题 A.1。

因此 $\mathrm{J}_n^{a,b}$, 等价于 I_n。命题 1.5表明 $\tau_n(\Gamma)$ 包含于 $\zeta\mathrm{SL}_n(\mathcal{O}_F)$ 与 $\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n,\ \sigma;\mathcal{O}_F[\sqrt{d}])$ 广义可公度。

反向命题的证明与命题 3.1 的证明相同。 □

4. Arithmetic subgroups in even dimension

4.1. 标准余循环。设 a、$b \in F^\times$ 和

$$\zeta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{PSL}(2n, \overline{\mathbb{Q}}),\ \sigma \mapsto \tau_{2n}(\mathrm{T}_\sigma^{a,b}).$$

我们将证明 ζ 等价于下面这个“标准”1-余循环。

定义 4.1. 由下式定义的 1-余循环

$$\eta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{PSL}(2n, \overline{\mathbb{Q}})$$

$$\sigma \mapsto \begin{cases} \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = \sqrt{b} \\ \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b} \\ \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = \sqrt{b} \\ \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a} \text{ and } \sigma(\sqrt{b}) = -\sqrt{b}. \end{cases}$$

称为与 (a,b) 关联的标准 1-余循环。这里，Diag(M) 是一个分块对角矩阵，其对角线上的每个分块都等于 M。

计算表明，$\eta\mathrm{M}_{2n}(F)$ 是 2×2 分块矩阵，每个分块的形式为

$$\begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{a}x_1 & \sqrt{b}x_2 + \sqrt{ab}x_3 \\ \sqrt{b}x_2 - \sqrt{ab}x_3 & x_0 - \sqrt{a}x_1 \end{pmatrix}$$

其中某个 $x_i \in F$。

1-余循环 ζ 无法提升到 SL($2n$，有理数域)，因此无法使用希尔伯特第90定理、定理 1.2。为解决这一问题，我们考虑以下 1-余循环。

引理 4.2. 映射 $\zeta\eta^{-1}$: 伽罗瓦群($\mathbb{Q}/F$) $\to$ η射影特殊线性群$_n$(有理数域), $\sigma \mapsto \zeta(\sigma)\eta(\sigma)^{-1}$ 是一个 1-余循环。

注意，在 η射影特殊线性群$_n$(有理数域) 中，伽罗瓦群的作用被 η 扭曲；也就是说，对于 $\sigma \in$ 伽罗瓦群($\overline{\mathbb{Q}}/F$) 以及 $\mathrm{M} \in \eta$射影特殊线性群$_n$(有理数域)，有 $\sigma \cdot \mathrm{M} = \eta(\sigma)\sigma(\mathrm{M})\eta(\sigma)^{-1}$。

证明。对于所有 σ, τ 伽罗瓦群($\overline{\mathbb{Q}}/F$)

$$\begin{aligned} \zeta\eta^{-1}(\sigma\tau) &= \zeta(\sigma)\sigma(\zeta(\tau))\sigma(\eta(\tau))^{-1}\eta(\sigma)^{-1} \\ &= \zeta(\sigma)\eta(\sigma)^{-1}(\eta(\sigma)\sigma(\zeta(\tau)\eta(\tau)^{-1})\eta(\sigma)^{-1}) \\ &= \zeta\eta^{-1}(\sigma)\sigma \cdot \zeta\eta^{-1}(\tau). \end{aligned}$$

□

1-余循环 $\zeta\eta^{-1}$ 可提升为 1-余循环 χ: 伽罗瓦群(Q $/F$)$\longmapsto$ ηSL$_{2n}$(有理数域)

$$\sigma \mapsto \begin{cases} \mathrm{I}_{2n} & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{a} \\ \begin{pmatrix} & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & \iddots & & \\ 1 & 0 & \iddots & & & \\ 0 & 1 & & & & \end{pmatrix} & \text{if } \sigma(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}. \end{cases}$$

希尔伯特第90定理、定理 1.2 告诉我们，存在 P $\in$ GL(n, 有理数域)，使得对所有 σ, $\zeta\eta^{-1}(\sigma)$ $=\mathrm{P}^{-1}\,\eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P})\eta(\sigma)^{-1}$，其证明还给出了一种算法，用于确定这样的矩阵 P。该算法见 [Aud22] 第 3.2 节。这里给出结论。若 a 是平方数，令 $\mathrm{P}=\mathrm{I}_{2n}$。假设 a 不是平方数。若 n 是偶数，令

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & & & & & \mathrm{I}_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_2 & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 & -\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 & & & & & -\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 \end{pmatrix}.$$

若 n是奇数，令

$$\mathrm{P}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & & & & & \mathrm{I}_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_2 & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 & -\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 & & & & & -\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{I}_2 \end{pmatrix}.$$

对于所有 σ $\in$ 伽罗瓦群(有理数域 $/F$)， $\zeta(\sigma)$ $=\mathrm{P}^{-1}\,\eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P})$。特别地，$\zeta$和 η等价。

4.2. 辛群 Sp($2n$, R) 的算术子群。

命题 4.3. 设 Γ 是 SL(2, R) 的算术子群。设 $\mathcal{O}$ 是全实数域上的四元数代数的一个序，使得 Γ 与 $\mathcal{O}^1$ 广义可公度。设 $n \geq 2$。则 $\tau_{2n}(\Gamma)$ 包含于一个与 SU(I$_n$, ; $\mathcal{O}$) 广义可公度的子群中。此外,_这是包含 $\tau_{2n}(\Gamma)$ 的 Sp($2n$, R) 的唯一格（按可公度性计）。

证明。令 F为一个全实数域，并令 $a, b \in F^\times$使得 $\mathcal{O}$是 $(a,b)_F$的一个序。我们可以假设 $a, b \in \mathcal{O}_F$。令 ξ: 伽罗瓦群(有理数域 $/F$) $\to$

射影特殊线性群(2,有理数域)，$\sigma \mapsto \mathrm{T}_{\sigma}^{a\,b,}$。它是一个 1-余循环，使得 Γ 与 $\varsigma\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$可公度。令

$$\zeta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \to \mathrm{PSp}_{2n}(\mathrm{J}_{2n}, \overline{\mathbb{Q}})$$

是与 τ_{2n} 相容的 1-余循环。我们希望确定 $\varsigma\mathrm{Sp}_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(F)$。

记 η 为与 (a,b) 相关联的标准 1-余循环（参见定义 4.1）。回顾 §4.1，$\zeta(\sigma) = \mathrm{P}^{-1}\,\eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P})$，对所有 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(有理数域 $/F$) 均成立，其中 P 定义见 §4.1。于是 ς辛群$_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(F)$

$$\begin{aligned}
&= \{\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \zeta(\sigma)\sigma(\mathrm{M})\zeta(\sigma)^{-1} = \mathrm{M} \ \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\} \\
&= \{\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(\overline{\mathbb{Q}}) \mid \eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1})\eta(\sigma)^{-1} = \mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1} \ \ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)\} \\
&= \{\mathrm{X} \in {}_{\eta}\mathrm{SL}_{2n}(F) \mid \mathrm{X}^{\top}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\}.
\end{aligned}$$

记 A 为四元数代数

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{a}x_1 & \sqrt{b}x_2 + \sqrt{ab}x_3 \\ \sqrt{b}x_2 - \sqrt{ab}x_3 & x_0 - \sqrt{a}x_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in F \right\}.$$

它同构于 $(a,b)_F$。此外，$\eta\mathrm{SL}_{2n}(F) = \mathrm{SL}(n,A)$。记 A 的共轭为，并令

$$\mathrm{K} = \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

于是，对所有 $\mathrm{M} \in \eta\mathrm{SL}_{2n}(F)$，$\mathrm{M}^t = (\mathrm{K}\,\mathrm{M}\,\mathrm{K}^{-1})^{\top}$，其中 M^t 是将 M 作为 $\mathrm{SL}(n,A)$ 的元素转置后得到的矩阵。我们强调，只有其 2×2 分块的位置发生了变化，这些分块本身并未转置。因此

$${}_{\zeta}\mathrm{Sp}_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(F) = \{\mathrm{M} \in {}_{\eta}\mathrm{SL}_{2n}(F) \mid \overline{\mathrm{M}}^t\,\mathrm{J}_{2n}^*\,\mathrm{M} = \mathrm{J}_{2n}^*\}.$$

其中 $\mathrm{J}_{2n}^* = \mathrm{K}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}$。计算表明，$\mathrm{J}_{2n}^*$ 是一个 -厄米矩阵。现在证明，J_{2n}^* 作为一个 -厄米矩阵等价于$-\mathrm{I}_{2n}$。如果 n 是偶数，令

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & & & & \mathrm{I}_2 \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_2 & \\ & & -\mathrm{D} & \mathrm{D} & \\ & \iddots & & \ddots & \\ -\mathrm{D} & & & & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

with

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix}.$$

如果 n 是奇数，令

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & & & & & \mathrm{I}_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & \mathrm{I}_2 & \mathrm{I}_2 & & \\ & & & 2\,\mathrm{I}_2 & & \\ & & -\mathrm{D} & \mathrm{D} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ -\mathrm{D} & & & & & \mathrm{D} \end{pmatrix}.$$

则 $\mathrm{N}^t \overline{\mathrm{J}_{2n}^*}\,\mathrm{N}$ 是由下式定义的对角矩阵

$$(\overline{\mathrm{N}}^t\,\mathrm{J}_{2n}^*\,\mathrm{N})_{ii} = \begin{cases} -4(2n-i-1)!i! & \text{if } i \text{ is odd} \\ -4(2n-i)!(i-1)! & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}$$

由于 Γ 是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的一个算术子群，F 是全实的，并且 A 在 F 的除 ι 之外的所有嵌入处均分歧。正如我们在§5 节[Lew82], 上的非退化 -厄米形式 A 由其在 F 的所有实嵌入处的惯性指数分类，但不包括 ι。这里的惯性指数集合总是 $(0, 2n)$。因此 $-\mathrm{J}_{2n}^*$ 作为 -厄米形式等价于 I_{2n}。最后

$$\zeta\mathrm{Sp}_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(F) \simeq \mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \overline{\ }; A).^{7}$$

命题 1.5 表明 $\tau_{2n}(\Gamma)$ 包含于ζ辛群$_{2n}(\mathrm{J}_{2n})(\mathcal{O}_F)$ 中，而该群与 $\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, ; \mathcal{O})$ 广义可公度。

逆向命题的证明与命题 3.1的证明相同。 □

4.3. $\mathrm{SL}(2n, \mathrm{R})$ 的算术子群。

命题 4.4. 设 Γ 是 $\mathrm{SL}(2, \mathrm{R})$ 的一个算术子群。设 $\mathcal{O}$ 是全实数域 F 上四元数代数 A 的一个序，且 Γ 与 $\mathcal{O}^1$ 广义可公度。假设 $F \neq \mathrm{Q}$.[8]

设 $n \geq 2$。那么，对于每个满足以下条件的 $d \in \mathcal{O}_F$，$\tau_{2n}(\Gamma)$ 都包含在 $\mathrm{SL}(2n,\mathrm{R})$ 的一个子群中，该子群与 $\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \overline{\ }\otimes\sigma; \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_F[\sqrt{d}])$ 广义可公度：$d \in \mathcal{O}_F$ 仅在 A 分裂的实位上为正，且 $\sigma \in \mathrm{Gal}(F(\sqrt{d})/F)$ 非平凡。

此外，除可公度性外，包含 $\tau_{2n}(\Gamma)$ 的 $\mathrm{SL}(2n,\mathrm{R})$ 的格仅有这些。

证明。设 $a, b \in \mathcal{O}_F$ 满足 $A \simeq (a, b)_F$。令 ξ: 伽罗瓦群$(\mathrm{Q}\ \overline{/F}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathrm{Q}),$
$\sigma \mapsto \mathrm{T}_\sigma^{a\ b}$, 。这是一个 1-余循环，使得 Γ 与 $\xi\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_F)$ 可公度。令 ζ: 伽罗瓦群$(\mathrm{Q}\ /F) \to \overline{\mathrm{Aut}}(\mathrm{SL}_{2n}(\mathrm{Q}))$ 为一个 τ_{2n}-相容的 1-余循环。我们要确定 $\zeta\mathrm{SL}_{2n}(F)$。

若 ζ是内的，命题 2.5 表明 $\zeta\mathrm{SL}_{2n}(F) \simeq \mathrm{SL}(n, A)$。然而，$\mathrm{SL}(n, \mathcal{O})$ 不是 $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{R})$ 的格，因为 $F \neq$ 有理数域。

[7]这里 I_n 被视为一个元素取自 A 的矩阵。因此，当我们将 $_{2n}$ 中的元素视为 A 2×2 矩阵时，它就是矩阵 I^8。参见 [Aud22] 中关于 $F =$有理数域 的情形。

假设 ζ 不是内的。记 $F(\sqrt{d})$ 为相应的二次扩张（见命题 2.4）。不妨设 $d \in \mathcal{O}_F$。令$\sqrt{d}$ 为 d的一个平方根。

回顾，对于任意 $\mathrm{M} \in \mathrm{SL}(2n,$ 有理数域$)$，$\mathrm{M} \in {}_{\zeta}\mathrm{SL}_{2n}(F)$ 当且仅当

$$\tau_{2n}(\mathrm{T}_\sigma)\sigma(\mathrm{M})\tau_{2n}(\mathrm{T}_\sigma)^{-1} = \mathrm{M}$$

对于所有满足 $\sigma(\sqrt{d}) = \sqrt{d}$ and 的 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(有理数域 $/F$)

$$\tau_{2n}(\mathrm{T}_\sigma)\,\mathrm{J}_{2n}^{-1}\,\sigma(\mathrm{M})^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\tau_{2n}(\mathrm{T}_\sigma)^{-1} = \mathrm{M}$$

对于所有满足 $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$ 的 $\sigma \in$伽罗瓦群(有理数域 $/F$)。在 §4.1 中，我们证明了$\tau_{2n}(\mathrm{T}_\sigma) = \mathrm{P}^{-1}\,\eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P})$。因此，$\mathrm{M} \in {}_{\zeta}\mathrm{SL}_{2n}(F)$ 当且仅当 $\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1} \in {}_{\eta}\mathrm{SL}_{2n}(F(\sqrt{d})) \simeq \mathrm{SL}(n, A \otimes_F F(\sqrt{d}))$，并且对于所有满足$\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$ 的 $\sigma \in$ 伽罗瓦群(有理数域 $/F$)

$$\begin{aligned}
&\sigma(\mathrm{M})^{\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\sigma(\mathrm{P})^{-1}\eta(\sigma)^{-1}\,\mathrm{P}\,\mathrm{M} = \mathrm{J}_{2n}\,\sigma(\mathrm{P})^{-1}\eta(\sigma)^{-1}\,\mathrm{P} \\
\Leftrightarrow\ &\sigma(\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1})^{\top}\sigma(\mathrm{P})^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}(\eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P}))^{-1}\,\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1} = \sigma(\mathrm{P})^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}(\eta(\sigma)\sigma(\mathrm{P}))^{-1} \\
\Leftrightarrow\ &\sigma(\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1})^{\top}\eta(\sigma)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1}) = \eta(\sigma)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}
\end{aligned}$$

对等式两边应用 $\sigma(.)^{\top}$，因为 $\sigma^2(\mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{P}\,\mathrm{M}\,\mathrm{P}^{-1}$。我们将证明，这组方程等价于一个与 $\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, {}^{-}\otimes\sigma;\ A \otimes_F F(\sqrt{d}))$ 共轭的群的定义方程。记

$$\mathrm{K} = \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

四元数代数 A 同构于

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + \sqrt{a}x_1 & \sqrt{b}x_2 + \sqrt{ab}x_3 \\ \sqrt{b}x_2 - \sqrt{ab}x_3 & x_0 - \sqrt{a}x_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in F \right\}.$$

我们利用这个同构将 A 嵌入 $\mathrm{M}_2(\mathrm{Q})$ 中。于是，对所有 $\mathrm{X} \in {}_{\eta}\mathrm{SL}_{2n}(F(\sqrt{d}))$，$\overline{\mathrm{X}^t} = (\mathrm{K}\,\mathrm{X}\mathrm{K}^{-1})^{\top}$，其中 X^t 是将 X 作为 $\mathrm{SL}(n, A \otimes_F F(\sqrt{d}))$ 的元素转置后得到的矩阵。对于任意 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{Q}\ /F)$，记为

$$\sigma^* : {}_{\eta}\mathrm{SL}_{2n}(F(\sqrt{d})) \to {}_{\eta}\mathrm{SL}_{2n}(F(\sqrt{d}))$$

由以下 2×2 分块定义的映射

$$\begin{pmatrix} x_0+\sqrt{a}x_1 & \sqrt{b}x_2+\sqrt{ab}x_3 \\ \sqrt{b}x_2-\sqrt{ab}x_3 & x_0-\sqrt{a}x_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sigma(x_0)+\sqrt{a}\sigma(x_1) & \sqrt{b}\sigma(x_2)+\sqrt{ab}\sigma(x_3) \\ \sqrt{b}\sigma(x_2)-\sqrt{ab}\sigma(x_3) & \sigma(x_0)-\sqrt{a}\sigma(x_1) \end{pmatrix}.$$

取 $\sigma \in$伽罗瓦群$(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/F)$，使得 $\sigma(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$。设 $\tau \in$伽罗瓦群$(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/F)$，使得$\tau(\sqrt{d}) = -\sqrt{d}$，并记为 $s = \sigma^{-1}\tau$。那么对于所有 $\mathrm{X} \in \eta\mathrm{SL}_{2n}(F(\sqrt{d}))$

$$
\begin{aligned}
&\tau(\mathrm{X})^{\top}\eta(\tau)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \eta(\tau)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ &\eta(\sigma s)^{-1}\sigma s(\mathrm{X})^{\top}\eta(\sigma s)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ &\eta(\sigma)^{-1}\sigma(\eta(s)^{-1}s(\mathrm{X})^{\top}\eta(s))\eta(\sigma)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1},\\
&\text{since } \eta(\sigma)\eta(s) = \eta(s)\eta(\sigma) \in \mathrm{PSL}(2n,\overline{\mathbb{Q}})\\
\Leftrightarrow\ &\eta(\sigma)^{-1}\sigma(\eta(s)s(\mathrm{X})\eta(s)^{-1})^{\top}\eta(\sigma)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ &\eta(\sigma)^{-1}\sigma(\mathrm{X})^{\top}\eta(\sigma)\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1},\\
&\text{since } s(\sqrt{d}) = \sqrt{d}\\
\Leftrightarrow\ &\sigma(\eta(\sigma)\,\mathrm{X}\,\eta(\sigma)^{-1})^{\top}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ &\sigma^{*}(\mathrm{X})^{\top}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1},\\
&\text{since } \sigma(\eta(\sigma)\,\mathrm{X}\,\eta(\sigma)^{-1}) = \sigma^{*}(\mathrm{X})\\
\Leftrightarrow\ &\sigma^{*}(\mathrm{K}\,\mathrm{X}\,\mathrm{K}^{-1})^{\top}\,\mathrm{K}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{X} = \mathrm{K}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}\\
\Leftrightarrow\ &\sigma^{*}(\overline{\mathrm{X}})^{t}\,\mathrm{J}_{2n}^{*}\,\mathrm{X} = \mathrm{J}_{2n}^{*},\\
&\text{where } \mathrm{J}_{2n}^{*} = \mathrm{K}\,\mathrm{P}^{-\top}\,\mathrm{J}_{2n}\,\mathrm{P}^{-1}.
\end{aligned}
$$

矩阵 J_{2n}^{*} 是一个$\otimes\,\sigma$-厄米矩阵。令 N 为命题4.3的证明中引入的矩阵。由于 $\sigma^{*}(\mathrm{N}) = \mathrm{N}$，$\sigma^{*}(\mathrm{N}^{t})\mathrm{J}_{2n}^{*}\,\mathrm{N}$ 是由下式定义的对角矩阵

$$
(\sigma^{*}(\overline{\mathrm{N}})^{t}\,\mathrm{J}_{2n}^{*}\,\mathrm{N})_{ii} = \begin{cases} -4(2n-i-1)!i! & \text{if } i \text{ is odd} \\ -4(2n-i)!(i-1)! & \text{if } i \text{ is even.} \end{cases}
$$

我们可以在§7 中看到，[Lew82] 指出，$\bar{}\otimes\sigma$上的 -厄米形式 $A \otimes_F F(\sqrt{d})$ 由其秩、在 F 的实位处的符号以及判别式分类。因此，J_{2n}^{*} 等价于 $-\mathrm{I}_{2n}$。由此可得

$$
{}_{\zeta}\mathrm{SL}_{2n}(F) \simeq \mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \bar{}\otimes\sigma; A \otimes_F F(\sqrt{d})).
$$

命题1.5 表明，$\tau_{2n}(\Gamma)$ 包含于

$$
{}_{\zeta}\mathrm{SL}_{2n}(\mathcal{O}_F) \simeq \mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \bar{}\otimes\sigma; \mathcal{O} \otimes \mathcal{O}_F[\sqrt{d}])
$$

相差有限指标。它是 SL(2n,R) 的一个格，当且仅当 d 仅在 A 分裂的实位处为正。

逆命题的证明与命题3.1的证明相同。 □

4.4. 定理**0.1**的证明。

定理 0.1 的证明。设 G 是 SO($k+1,k$)、Sp(2n, R)、G_2 或 SL(n, R)，其中 $k \geq 2$ 和 $n \geq 3$。设 Λ 是 G 的一致格，且包含福克斯表示 $\rho : \pi_1(S_g) \to G$ 的像，其中 $g \geq 2$。根据定义，对于适当的 n，有 $\rho = \tau_n \circ j$，其中 j 是从 $\pi_1(S_g)$ 到 SL(2, R) 的离散忠实嵌入。因此，$j(\pi_1(S_g))$ 是 SL(2, R) 中的格。

根据 Margulis 算术性定理（ [Mor15]中的定理 16.3.1）， Λ 是算术的。根据命题 1.4，存在一个全实数域 F，使得 Λ 与 $\mathcal{O}_F$-点集可公度；后者是一个 F-代数群，在 F 除一个实位外的所有实位上均为紧致。将命题 1.6 应用于 $\tau_n(\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})) < G$，同样的结论也适用于 $j(\pi_1(S_g))$。

因此，定理可由以下命题推出：3.1、3.3、3.6、4.3 和 4.4。

□

5. Construction of Zariski-dense surface subgroups

5.1. 关于弯曲的回顾。令 $n \geq 3$。令 $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 为一个福克斯表示。选取 $\gamma \in \pi_1(S_g)$，它由一条简单闭曲线表示，该曲线将 S_g 分隔成两个曲面 C 和 D。则 $\pi_1(S_g) = \pi_1(C) *_\gamma \pi_1(D)$。取 $B \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$，使得 B 与 $\rho(\gamma)$ 对易。注意， $\rho(\gamma)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可对角化，且具有互异特征值。将 ρ 在 $\pi_1(C)$ 上的限制与 ρ 在 $\pi_1(D)$ 上的限制经 B 共轭后结合起来，得到一个新的表示

$$\rho_B : \pi_1(S_g) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$$

称为由 B 对 ρ 进行的弯曲。

为了在格 Λ中构造扎里斯基稠密的 Hitchin 表示，我们对一个像包含于 Λ 的福克斯表示进行弯曲（假设这样的表示存在），所用的矩阵 B 属于 Λ。如果 B 只有正特征值，那么在中心化子 Comm_n 内部存在一条从 $I_{\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})}$到 B 的连续路径$\rho(\gamma)$)，其中 $\rho(\gamma)$，这意味着 ρ_B 是一个 Hitchin 表示。下一个引理给出了曲线 γ 在 Λ中的稳定子的控制。注意，非平凡元素在 Hitchin 表示下的像总是正则的（参见 [Lab06]中的定理 1.5）。

引理 5.1. 设 G 是一个非紧半单李群， Λ 是 G 的一致格。设 $\gamma \in \Lambda$ 正则。那么 $\mathrm{Comm}_\Lambda(\gamma)$ 是一个秩等于 $\mathrm{rank}_{\mathbb{R}} G$ 的阿贝尔群。

注 5.2。 这个引理的证明沿用了 Hamenst¨adt 在其演讲中提出的论证 [Ham17]。她将该结果归功于 Burger 和 Schroeder。请注意，引理 5.1 并非必需，但为完整起见，仍在此陈述。事实上，可以利用伽罗瓦上同调，明确计算相关格中给定简单闭曲线的中心化子。参见 §5.2，其中 [Aud22] 对非一致格进行了这项计算。相同的计算方法也适用于一致格。

证明。令 X 为 G 的非正曲率对称空间。由于Λ 是余紧的，存在 $r > 0$，使得对所有 $p \in X$，覆盖映射$\pi : X \to X/\Lambda$ 都是球 $B(p,r)$ 与 $B(\pi(p)\ r)$ 之间的微分同胚。

令 $\mathfrak{a}$ 为 G 的李代数的 Cartan子代数，使得 $\gamma \in \exp(\mathfrak{a})$。它是唯一的，因为 γ 是正则的。于是 $\mathfrak{a}$ 嵌入 X 中，成为极大

平坦。事实证明，

$$\{g \in \Lambda \mid \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\} = \mathrm{Comm}_\Lambda(\gamma) =: \Gamma.$$

为简单起见，我们假设 Λ 是无挠的。考虑 $\mathfrak{a}/\Gamma$。它是一个平坦流形，因此与 $\mathbb{R}^l \times (\mathbb{S}^1)^s$ 等距，其中 $l+s = \dim(\mathfrak{a}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{R}}(G)$。事实上，$s$ 是 Γ的秩。因此我们要证明 $l = 0$。

假设 $l \geq 1$。因此 $\mathfrak{a}/\Gamma$中有一条 R 的副本。取 γ 在 $\mathfrak{a}/\Gamma$中的一个测地线代表。记 γ_n 为沿着一条固定的 R 副本平移长度 n后得到的 γ 。现在我们将 $\mathfrak{a}/\Gamma$ 视为浸入 X/Λ。由于 X/Λ是紧致的，Arzel`a–阿斯科利定理告诉我们，测地线序列γ_n 在 X/Λ中一致收敛。因此存在 $N < M$，使得 γ_N 与 γ_M 之间的豪斯多夫距离小于 $\frac{r}{2}$。

取 γ_N 在 $\mathfrak{a}$ 中的一个提升，并记为 $\widetilde{\gamma_N}$。考虑 X 中 γ_M 的一个提升，它在某点到 $\widetilde{\gamma_N}$ 的距离小于 $\frac{r}{2}$，并记为 $\widetilde{\gamma_M}$。存在一个元素 $g \in \Lambda$，将 $\widetilde{\gamma_N}$ 的 $(M-N)$-平移映到 $\widetilde{\gamma_M}$。曲线 $\widetilde{\gamma_M}$ 始终位于 $\widetilde{\gamma_N}$ 的半径为 $\frac{r}{2}$ 的管状邻域内。平坦条带定理（[EO73] 中的命题 5.1）推出 $\widetilde{\gamma_N}$ 和 $\widetilde{\gamma_M}$ 位于 X 的某个极大平坦中。由于 $\widetilde{\gamma_N}$ 是正则的，它必定是 $\mathfrak{a}$。因此 g 保持 $\mathfrak{a}$，故 $g \in \Gamma$。另一方面，γ 在 $\mathfrak{a}/\Gamma$ 中的各个平移彼此之间的距离至少为 1。矛盾。□

为了控制弯曲表示的 Zariski闭包，我们需要以下结果。证明见 § 的第 4 节 [Aud22]。

引理 5.3. 设 $B \in SL(n, R)$，它与 $\rho(\gamma)$ 对易且具有正特征值。那么 ρ_B 的 Zariski闭包为以下之一：

- τ_n(SL(2,R)) 当且仅当 $B \in \tau_n(GL(2, R))$,
- $Sp(J_n, R)$ 当且仅当 $n = 2k$，$B \in Sp(J_n, R)$ 且 $B \notin \tau_n(GL(2, R))$,
- $SO(J_n, R)$ 当且仅当 $n = 2k+1$，$B \in SO(J_n, R)$，$B \notin \tau_n(GL(2, R))$ 且若 $n = 7$, $B \notin G_2(R)$,
- $G_2(R)$ 当且仅当 $n = 7$，$B \in G_2(R)$ 且 $B \notin \tau_7(GL(2, R))$,
- $SL(n, R)$ 否则。

引理 5.3 是 Guichard 对 Hitchin 表示的 Zariski闭包进行分类的推论。为求完整起见，我们在此重述。

定理 5.4 (Guichard [Gui], 另见 Sambarino [Sam20])。设 $\rho: \pi_1(S) \to \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ 是一个 Hitchin 表示。那么，ρ 的 Zariski闭包为$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$、一个主 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$，或共轭于以下其中之一：

- $Sp(2k, R)$ 若 $n = 2k$,
- $SO(k+1, k)$ 若 $n = 2k+1$,
- $G_2(R)$ 如果 $n = 7$。

5.2. 强逼近定理。本节回顾强逼近定理，并建立一些技术引理，以便将该定理应用于我们将要构造的表示。在最后一部分中，我们将需要它来

证明我们的构造提供了无穷多个表示的映射类群轨道。

若 R 是一个环且 $a \in R \setminus \{0\}$，则我们将 R_a 记为 R 在乘法集 $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ 处的局部化。R_a 中的理想与 R 中不包含 a 的任何幂的理想一一对应。

定理 5.5 (强逼近，Weisfeiler [Wei84])。设 G 是一个连通的 有理数域-代数群，且几乎单并且单连通。设Γ 是 G(有理数域)的有限生成的Zariski稠密子群。记

$$R = \mathbb{Z}[\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))].$$

那么存在 $a \in R$、一个有限指数子群 $\Gamma' < \Gamma$，以及 $\mathbf{G}_0$ 在 R_a 上的群概形结构，使得 $\Gamma' < \mathbf{G}_0(R_a)$，并且 Γ' 在

$$\varprojlim_{|R_a/I|<\infty} \mathbf{G}_0\big(R_a/I\big)$$

其中，射影极限取遍 R_a 的理想。

注 5.6. 在定理 5.5的背景下，设 I 是 R_a 的一个理想，满足 R_a/I 有限，并记

$$\pi : \mathrm{G}_0(R_a) \to \mathrm{G}_0\big(R_a/I\big)$$

为典范映射。该定理意味着 $\pi(\Gamma') = \mathbf{G}_0(R_a/I)$。

定理 5.5 对于区分表示的映射类群轨道是必要的。不幸的是，环 R 取决于 Γ。因此，我们需要证明，在我们的设定中可以消除这种依赖。命题 5.10证明了这一点。

定义 5.7. 设 F 是一个数域。F 的一个序是一个子环$R \subset \mathcal{O}_F$，它同时也是秩为 $[F : \mathbb{Q}]$的 Z-模。

引理 5.8. 设 F 是一个全实数域，且 G 是一个连通半单 F-代数群，它在 F 除一个实位外的所有实位上均为紧致。设 $\Gamma < \mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$ 是一个在 G 中扎里斯基稠密的有限生成子群。那么 $\mathbb{Z}[\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))]$ 是 F的一个序。

证明。记 $K =$ 有理数域$(\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))) \subset F$。我们要证明 $K = F$。根据 Vinberg [Vin71], 中的定理1$\mathbb{C}$-基 β，其属于 $\mathfrak{g}$，即 $\mathbf{G}(\mathbb{C})$ 的李代数，使得对所有 $\gamma \in \Gamma$

$$\mathrm{Mat}_\beta(\mathrm{Ad}(\gamma)) \in \mathrm{GL}(n, K) \text{ with } n = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}.$$

由于 Γ 在 G 中扎里斯基稠密，Ad(Γ) 在 Ad(G) 中扎里斯基稠密。因此，Ad(G($\overline{\mathbb{Q}}$)) 定义在 K 上（见 Borel[Bor91]的 AG章中的定理14.4）。记 σ 为 F 的实位，使得 $\mathbf{G}(F_\sigma)$ 非紧致。假设 $K \neq F$。存在一个不同于 σ 的 F 的实位 ι，使得$\sigma_{|K} = \iota_{|K}$。由于 G 定义在 K 上，$\mathbf{G}(F_\sigma) \simeq \mathbf{G}(F_\iota)$，而在 R 上，其中一个是紧致的，另一个则不是。这就产生了矛盾。因此 $K = F$。

现在，$\mathsf{Z}[\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))]$ 是一个有限生成的无挠 Z-模，因此是自由模。由于

$$\mathbb{Z}[\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))),$$

$\mathsf{Z}[\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))] = F$ 的秩为 $[F\colon \mathbb{Q}]$。因此它是 F 的一个序。 □

引理 5.9. 设 $R \subset \mathcal{O}_F$ 是数域 F 的一个序。那么，除有限多个素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_F$ 外，

$$R/R \cap \mathfrak{p} = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}. \tag{2}$$

证明。反设不然。由于 R 是 F的一个序， R 在 $\mathcal{O}_F$ 中的指数有限。记其为 n。设 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_F$ 是一个不满足（2）的素理想，且其剩余域的特征为 $p > n$。这样的素理想存在，因为对于每个素数， $\mathcal{O}_F$ 中仅有有限多个包含它的素理想。

有

$$R/R \cap \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}.$$

作为有限域的子环， $R/R \cap \mathfrak{p}$ 是一个域。回想

$$R\mathfrak{p}/\mathfrak{p} \simeq R/R \cap \mathfrak{p}.$$

因此

$$\left(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\right) / \left(R/R \cap \mathfrak{p}\right) \simeq \left(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\right) / \left(R\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\right) \simeq \mathcal{O}_F/R\mathfrak{p}.$$

后者至少必须包含 p 个元素，因此 $\mathcal{O}_F/R$ 至少包含 p 个元素。这就产生了矛盾。□

下面的命题是对强逼近定理、定理 5.5 在我们所处情形下的改写。

命题 5.10. 设 F 是一个全实数域，G 是一个连通的几乎单且单连通的 F-代数群，并且在 F 的除一个以外的所有实位上都是紧致的。设 $\Gamma < \mathsf{G}(F)$ 是一个有限生成的 Zariski-稠密子群。存在一个有限指数子群 $\Gamma' < \Gamma$、$a \in \mathcal{O}_F$，以及 G_0 在 $(\mathcal{O}_F)_a$ 上的群概形结构，使得 $\Gamma' < \mathsf{G}_0((\mathcal{O}_F)_a)$，并且对于 $\mathcal{O}_F$ 的除有限多个以外的所有素理想 $\mathfrak{p}$， Γ' 满射到

$$\mathrm{G}_0\left(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\right).$$

注记 5.11. 上述表述是有意义的，因为对于 $\mathcal{O}_F$ 中不包含 a 的所有素理想 $\mathfrak{p}$，

$$(\mathcal{O}_F)_a/\mathfrak{p}_a \simeq \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}.$$

证明。令 $R = \mathbb{Z}[\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\Gamma))]$。根据强逼近定理，定理 5.5，存在 $a \in R$，一个有限指数子群 $\Gamma' < \Gamma$ 以及一个定义在$_0$ 上的群概形结构 G R_a，使得 $\Gamma' <$G$_0(R_a)$ 和 Γ' 在.....中稠密

$$\varprojlim_{|R_a/I|<\infty} \mathrm{G}_0\big(R_a/I\big).$$

由于 $R \subset \mathcal{O}_F$，我们也可以将 G_0 视为定义在 $(\mathcal{O}_F)_a$ 上的群概形。令$\mathfrak{p}$为 $\mathcal{O}_F$ 中一个不包含 a 的素理想，并且满足

$$R/R \cap \mathfrak{p} = \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}.$$

由于 R 是 F 的一个序（见引理 5.8），引理 5.9 表明，不满足这两个假设的素理想只有有限多个。如备注5.6所述， Γ' 满射到

$$\mathrm{G}_0\big(R_a/(R \cap \mathfrak{p})_a\big) \simeq \mathrm{G}_0\big(R/(R \cap \mathfrak{p})\big) \simeq \mathrm{G}_0\big(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\big).$$

□

5.3. 定理 **0.2** 的证明。 回顾一下，我们希望证明：对于某个固定的亏格，表 1 中所列的每个格 Λ 在 G 中都包含无穷多个映射类群轨道，其上的 Hitchin 表示是扎里斯基稠密的。

关于 $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathrm{R})$ 的定理 0.2 的证明。令 $n \geq 2$。令 $\Lambda < \mathrm{Sp}(2n, \mathrm{R})$ 为一致格。根据命题 1.10，存在一个定义在全实数域 $F \neq \mathrm{Q}$ 上的四元数代数 A，以及其一个序 $\mathcal{O}$，使得Λ 与 $\mathrm{SU}(\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_n; \mathcal{O})$ 广义可公度。命题 4.3 表明，$\tau_{2n}(\mathcal{O}^1)$ 属于一个与 Λ 广义可公度的格。

令 S 为商空间 $\mathrm{H}^2/\mathcal{O}^1$。经过有限覆盖后，它是一个亏格至少为 2 的闭曲面。记由 τ_{2n} 诱导的 $\pi_1(S)$ 的福克斯表示为 ρ。令 γ 为 S 上的一条简单闭分离曲线。根据引理 5.1，存在 $\mathrm{B} \in \Lambda$，它与 $\rho(\gamma)$ 对易，仅具有正特征值，并且 $\mathrm{B} \notin \tau_{2n}(\mathrm{GL}(2, \mathrm{R}))$。沿 γ 通过 B 对 ρ 进行弯曲得到的表示 ρ_{B} 在 $\mathrm{Sp}(2n, \mathrm{R})$ 中具有扎里斯基稠密像（见引理 5.3）。

此外，表示序列 ρ_{B^k} 对所有$k \geq 1$ 都是扎里斯基稠密的，并产生无穷多个 MCG(S)-轨道的 Hitchin 表示，下面我们将对此加以证明。令 $k \geq 1$ 并记 Γ_k 的像为ρ_{B^k}。由于 F-形式的 Sp_{2n} 是单连通的，强逼近定理（定理 5.5 和命题 5.10）意味着，对于除有限多个素理想之外的所有素理想 $\mathfrak{p}$， $\mathcal{O}_F$的一个有限指数子群 $\Gamma'_k < \Gamma_k$ 满射到 $\mathrm{Sp}(2n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$。 中的引理 5.10 表明

$$\mathrm{Tr}(\Gamma'_k) \equiv \mathcal{O}_F \mod \mathfrak{p}$$

除有限多个 $\mathfrak{p}$ 之外。

假设 $\{\rho_{\mathrm{B}^k}, k \geq 1\}$ 在 MCG(S) 的作用下仅有有限多个轨道。注意，存在 $\mathrm{P} \in \mathrm{Z}[\mathrm{X}]$，使得对所有 M，$\mathrm{Tr}(\tau_{2n}(\mathrm{M})) = \mathrm{P}(\mathrm{Tr}(\mathrm{M}))$。根据我们的假设，存在一个素理想 $\mathfrak{p}$，使得对所有 $k \geq 1$，$\mathrm{Tr}(\Gamma'_k)$ 的约化都是满射，并且映射

$$\mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \to \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}, \ x \mapsto \mathrm{P}(x)$$

不是满射（见 [Sha12]中的推论 1.8）。令 $k \geq 1$ 使得 B^k 模 $\mathfrak{p}$平凡。于是

$$\mathrm{Tr}(\Gamma'_k) = \mathrm{Tr}(\rho(\pi_1(S))) = \mathrm{P}(\mathrm{Tr}(\mathcal{O}^1)) \mod \mathfrak{p}$$

这不是 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$。这是一个矛盾。 □

SL(2k + 1, R) 的定理 0.2 的证明。设 $n = 2k + 1 \geq 3$ 为奇数。设 $F \neq$Q 为全实数域，且 $d \in \mathcal{O}_F$ 在 F的恰好一个实位上为正。定义 $A = (d, d)_F$。设 $\mathcal{O}$ 为 A中的一个序。命题 3.6 表明， $\tau_n(\mathcal{O}^1)$ 属于 SL(n, R) 的一个子群 Λ，该子群与 SU(I$_n$, σ; $\mathcal{O}_F[\sqrt{d}]$) 广义可公度，其中 $\sigma \in$Gal($F(\sqrt{d})/F$) 非平凡。

商 $S :=$ H$^2/\mathcal{O}^1$ 在有限覆盖意义下是一个亏格至少为 2 的闭曲面。令 ρ 为由 τ_{2n} 诱导的 $\pi_1(S)$ 的福克斯表示。令 γ 为 S 上的一条简单闭分离曲线。根据引理 5.1，存在 B $\in \Lambda$，其与 $\rho(\gamma)$ 对易，只有正特征值，并且满足 B $\notin$ SO(J$_n$, R)。沿 γ 通过 B 对 ρ 进行弯曲得到的表示 ρ_{B} 在 SL(n, R) 中具有扎里斯基稠密像（见引理 5.3 ）。

现在我们证明，表示序列 ρ_{B^l} 产生无穷多个 MCG(S)-轨道。令 $l \geq 1$ 并将 Γ_l 记为 ρ_{B^l}的像。由于F-形式的 SL$_n$ 是单连通的，强逼近定理（定理 5.5 和命题 5.10）意味着，对于除有限多个素理想之外的所有素理想 $\mathfrak{p}$，在 $\mathcal{O}_F$中，存在一个有限指数子群 $\Gamma_l' < \Gamma_l$ 满射到

$$\begin{cases} \mathrm{SL}_n\left(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\right) & \text{if } d \text{ is a square in } \mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \\ \mathrm{SU}\left(\mathrm{I}_n, \sigma_0; \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}[\sqrt{d}]\right) & \text{if } d \text{ is not a square in } \mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \end{cases}$$

for

$$\sigma_0 \in \mathrm{Gal}\left(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}(\sqrt{d})/\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}\right)$$

非平凡的。详见§5.3 节 [Aud22]，其中详细讨论了这种二分法。引理 5.6 和 5.7 见于 [Aud22]，它们表明

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_l') = \begin{cases} \mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \mod \mathfrak{p} & \text{if } d \text{ is a square in } \mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \\ \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}[\sqrt{d}] \mod \mathfrak{p} & \text{if } d \text{ is not a square in } \mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \end{cases}$$

除有限多个素理想 $\mathfrak{p}$ 外，对所有素理想均成立。

假设 $\{\rho_{\mathrm{B}^l}, l \geq 1\}$ 在 MCG(S) 的作用下只落在有限个轨道中。如前所述，存在 P $\in$ Z[X]，使得对于所有 M，都有 Tr(τ_n(M)) = P(Tr(M))。根据我们的假设，存在一个素理想 $\mathfrak{p}$，使得对于所有 $l \geq 1$，Tr(Γ_l') 的约化都是满射，并且映射

$$\mathcal{O}_F/\mathfrak{p} \to \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}, \ x \mapsto \mathrm{P}(x)$$

不是满射（见 [Sha12]中的推论 1.8）。令 $l \geq 1$ 使得 B^l 模 $\mathfrak{p}$为平凡的。于是

$$\mathrm{Tr}(\Gamma_l') = \mathrm{Tr}(\rho(\pi_1(S))) = \mathrm{P}(\mathrm{Tr}(\mathcal{O}^1)) \mod \mathfrak{p}.$$

这就产生了矛盾。 □

定理 0.2 关于 $G =$ SL(2n, R) 的证明。设 $n \geq 2$。设 $F \neq$ Q 为一个全实数域。设 A 是定义在 F 上的四元数代数，它恰好在 F 的实位中一个实位 σ 处分裂，且 $\mathcal{O}$ 是 A 的一个序。设 $d \in \mathcal{O}_F$，它恰好在 σ 处为正。命题 4.4 表明， $\tau_{2n}(\mathcal{O}^1)$ 属于 Λ，这是一个与 2nSL(2n, R) 广义可公度的格

辛群(I_n, $\bar{}\otimes\sigma$; $\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}_F[\sqrt{d}]$)。现在的证明完全沿用定理 0.2 关于 $G=\mathrm{SL}(2k+1,\mathbb{R})$ 的证明论证。□

$G=G_2(R)$ 上定理 0.2 的证明。设 Λ 是 $G_2(R)$ 中的一致格。根据命题 3.5，存在一个全实数域 $F\neq Q$，以及 a、$b\in\mathcal{O}_F$，使得对除一个以外的所有嵌入 $\sigma: F\to R$，$\sigma(a)$ 和 $\sigma(b)$ 均为负数，且 Λ 与 $G_2^{a,b}(\mathcal{O}_F)$ 广义可公度。令 $A=(a,b)_F$，并令 $\mathcal{O}$ 为 A 的一个序。命题 3.3 表明，$\tau_7(\mathcal{O}^1)$ 在广义可公度意义下属于 Λ。

证明沿用定理 0.2 关于 $G=\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$ 的论证，使用以下引理。□

引理 5.12。设 $p\neq 2$ 是一个素数，且设 $q=p^n$。令 $G_2(F_q)$ 为与 Dynkin 图 G_2 相关联的有限李型群，它通过其 7 维不可约表示嵌入 $SL_7(F_q)$。则 $Tr(G_2(F_q))=F_q$。

证明。群 $G_2(F_q)$ 是 F_q 上唯一八元数代数 O 的自同构群，见 [SV00] 的 §1.10。我们可以如下描述它。作为 F_q-向量空间，$O=M_2(F_q)\oplus M_2(F_q)$。记四元数代数 $M_2(F_q)$ 的共轭为。对于任意 $A\in M_2(F_q)$，A 是 A 的余子式矩阵的转置。乘法定义如下

$$(A_1,B_1)\cdot(A_2,B_2)=(A_1A_2-\overline{B_2}B_1,B_2A_1+B_1\overline{A_2}),$$

见§1.5，载于[SV00]。我们赋予O 二次型

$$(A,B)\mapsto \mathrm{Det}(A)+\mathrm{Det}(B).$$

O 的一个自同构通过其在 $\langle(I_2,0)\rangle$ 的正交补上的限制，诱导出 $G_2(F_q)$ 的一个元素。

令 $a\in F_q$，并考虑以下自同构

$$\varphi_a:\mathbb{O}\to\mathbb{O},\ (A,B)\to(A,XB)\ \text{where}\ X=\begin{pmatrix}a&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

它是 O 的一个自同构，因此定义了 $G_2(F_q)$ 的一个元素。选取 O 的一个基，计算表明其迹为 $a+3$。因此，F_q 中的任意元素都是 $G_2(F_q)$ 中某个元素的迹。□

由于 F形式的特殊正交群$_n$ 并非单连通群，我们无法应用命题 5.10中所述的强逼近定理。因此，我们将改用 Nori [Nor87]中的定理 5.1。在此之前，我们需要证明以下引理。

引理 5.13. 设 Γ 为一个群，$G_1,\dots,G_n$ 为无中心连通单李群。对于所有 $1\leq i\leq n$，设 $\rho_i:\Gamma\to G_i$ 为一个 Zariski 稠密表示。假设不存在满足 $\phi\circ\rho_i=\rho_j$的 $i\neq j$ 及连续同构 $\phi: G_i\to G_j$。那么

$$\rho_1\times\cdots\times\rho_n:\Gamma\to G_1\times\cdots\times G_n$$

是扎里斯基稠密的。

证明。我们将对 $n \geq 1$ 使用归纳法证明该引理。 $n = 1$ 的情形显然。设 $n \geq 2$，并假设结论已对 $n-1$ 证明。记 H 为 $\rho := \rho_1 \times \cdots \times \rho_n$ 的像的Zariski闭包。我们要证明 H 等于 $G := G_1 \times \cdots \times G_n$。

令 π_i： $G \to G_i$ 为到第 i个坐标的投影。根据 [DK02]中的 $\pi_i(H) = G_i$. 令 p_i： $G \to G/G_i$ 为遗忘第 i个坐标的投影。利用归纳假设以及[DK02]中的 $p_i(H) = G/G_i$。

记为

$$H_i = H \cap (\{e\} \times ... \times \{e\} \times G_i \times \{e\} \times ... \times \{e\}) \overset{\pi_i}{\hookrightarrow} G_i.$$

设 $h \in H_i$ 和 $g \in G_i$。存在 $k \in H$ 使得 $\pi_i(k) = g$。因此

$$g\pi_i(h)g^{-1} = \pi_i(khk^{-1}) \in \pi_i(H_i)$$

这证明了 $\pi_i(H_i)$ 是 G_i 的正规子群。

假设存在某个 $1 \leq i \leq n$, $\pi_i(H_i) = G_i$。记为

$$K_i = H \cap (G_1 \times \cdots \times G_{i-1} \times \{e\} \times G_{i+1} \times \cdots \times G_n) \overset{p_i}{\hookrightarrow} G/G_i.$$

取 $g \in G/G_i$。存在 $h \in H$ 使得 $p_i(h) = g$。记 h_i 为其i个坐标。存在 $k \in H_i$ 使得 $\pi_i(k) = h_i$。因此 $hk^{-1} \in K_i$，并且在 p_i 下映射到 g。这表明 $K_i \hookrightarrow G/G_i$ 是一个同构。最后 $H = G$。

否则，假设对于所有 i， $\pi_i(H_i)$ 都是平凡的。取 $g \in G/G_n$。存在唯一的 $\phi(g) \in G_n$，使得 $(g, \phi(g)) \in H$。事实上，若 (g,h) 和 (g,h') 属于 H，则 $(e, h^{-1}h') \in \pi_n(H_n)$，这是平凡的。由此可得

$$(g, \phi(g))(g', \phi(g')) = (gg', \phi(g)\phi(g'))$$

即 ϕ 是一个群同态。由于 $\pi_n(H) = G_n$， ϕ 是满射。

对于每个 $1 \leq i \leq n-1$， ϕ 到 G_i 上的限制要么是平凡的，要么是一个同构。事实上， G_i 在 ϕ 下的像是 G_n的一个正规子群。因此存在 $1 \leq i \leq n-1$ 使得 $\phi_{|G_i}$： $G_i \to G_n$ 是一个同构。由于其图是闭的，它是连续的。其逆映射也同样如此。最后 $\phi_{|G_i} \circ \rho_i = \rho_j$。矛盾。□

对于 $G = \mathrm{SO}(k+1, k)$，定理 0.2 的证明。设 $n = 2k+1 \geq 5$ 满足 $k \equiv 1, 2 [4]$。令 Λ 为 $\mathrm{SO}(k+1,k)$中的一个一致格。命题 1.9 表明，它与 $\mathrm{SO}(Q, \mathcal{O}_F)$广义可公度，其中 $F \neq \mathbb{Q}$ 是一个全实数域， $Q \in \mathrm{SL}(n, F)$ 是一个对称矩阵，并且在 F 的所有实位上均为正定，除了某个这样的实位 σ 之外；对于该实位， Q的惯性指数在 k为偶数时等于 $(k+1, k)$，在 k为奇数时等于 $(k, k+1)$。

我们希望将命题 3.1 应用于 F 上某个适当四元数代数的一个序。记 S 为有限位集合 $\mathcal{P}$，它们属于 F 且满足

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(Q) \otimes (-1,-1)_{\mathcal{P}} \neq 1.$$

我们证明 $S \cup V_F \setminus \{\sigma\}$ 的基数为偶数。根据希尔伯特互反律（见 [MR03]中的定理 0.9.10）， $\mathcal{E}_v(Q) \otimes (-1, -1)_v \neq 1$ 在偶数个

赋值 v 处于 F。满足条件 $\mathcal{E}_v(Q) \otimes (-1,-1)_v \neq 1$ 的无穷位 $v \in V_F$ 的数量为 $|V_F| - 1$，因为

$$\mathcal{E}_v(Q) = \begin{cases} 1 & \text{if } v \neq \sigma \\ -1 & \text{if } v = \sigma. \end{cases}$$

因此 $|S| \equiv |V_F| - 1$ [2] 这意味着 $S \cup V_F \setminus \{\sigma\}$ 具有偶数基数。

定理 7.3.6 [MR03] 表明，存在一个四元数代数 A 在 F 上，它恰好只在 $S \cup V_F \setminus \{\sigma\}$ 处分裂。令 $\mathcal{O}$ 为 A 的一个序。命题 3.1 告诉我们，$\tau_n(\mathcal{O}^1)$ 属于 SO(J$_n$,ℝ) 的一个子群；在广义可公度意义下，我们可以假设该子群为 SO$(Q, \mathcal{O}_F)$。

令 $S = \mathrm{H}^2/\mathcal{O}^1$。经过有限覆盖后，我们可以假设 S 是一个亏格至少为 2 的闭曲面。令 γ 为S上的一条简单闭分离曲线。映射 τ_n 诱导出一个福克斯表示 ρ： $\pi_1(S) \to$ SO(J$_n$, R)。引理 5.1 表明，存在 B $\in$ SO$(Q, \mathcal{O}_F)$，它与$\rho(\gamma)$可交换，只有正特征值，但不属于 τ_n(GL(2, R))。如引理 5.3 所示，沿曲线 γ 由 B 弯曲 ρ 得到的弯曲表示 ρ_{B} 在 SO(J$_n$, R) 中具有扎里斯基稠密像。此外，对所有 $l \geq 1$，表示序列ρ_{B^l} 均为扎里斯基稠密，并产生无穷多个 MCG(S)-轨道，下面我们将对此进行说明。固定 $l \geq 1$，并令$\Gamma_l = \rho_{\mathrm{B}^l}(\pi_1(S))$。

对于 $\mathcal{O}_F$ 的每个素理想 $\mathfrak{p}$，记

$$\pi_{\mathfrak{p}} : \mathrm{SO}(Q, \mathcal{O}_F) \to \mathrm{SO}(Q, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$$

模 $\mathfrak{p}$ 约化。令 Ω$(Q, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$ 为 SO$(Q, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$ 的换位子子群。我们首先证明，除有限多个素理想 $\mathfrak{p}$ 外，对每个素理想 $\mathfrak{p}$，$\pi_{\mathfrak{p}}(\Gamma_l)$ 都包含 Ω$(Q, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$。将 Q 乘以一个常数后，我们可以假设其系数属于 $\mathcal{O}_F$。因此 SO(Q) 是一个 $\mathcal{O}_F$-群概形。为简化叙述，将其记为 G。现在$\Gamma_l <$ G$(\mathcal{O}_F) \simeq$ Res$_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}$ G(Z)，它是 GL$_{nd}$(Z) 的一个子群，其中 d 是 F 的次数。我们有

$$\begin{aligned} \Gamma_l &\hookrightarrow \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\, \mathrm{G}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(\sigma_1(Q), \mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{SO}(\sigma_d(Q), \mathbb{R}) \\ \gamma &\mapsto (\sigma_1(\gamma), \ldots, \sigma_d(\gamma)) \end{aligned}$$

其中 σ_i 是 F 到 R 中的嵌入，参见 [PR94] 中的 §2.1.2。由于 Γ_l 在 SO$(Q, \mathcal{O}_F)$ 中扎里斯基稠密，因此对每个嵌入 σ_i： $F \hookrightarrow$ R，它在 SO$(\sigma_i(Q)$, R) 中也扎里斯基稠密。假设存在 $i \neq j$，使得 $\sigma_i \circ \rho_{\mathrm{B}^l}$ 与 $\sigma_j \circ \rho_{\mathrm{B}^l}$ 共轭。那么对所有 $x \in$，Tr(Γ_l)，$\sigma_i(x) = \sigma_j(x)$。我们在引理 5.8 中证明了 $F =$ Q(Tr(Ad(Γ_l))) $\subset$Q(Tr(Γ_l))。因此，σ_i 和 σ_j 在F上相同，这不可能。根据引理 5.13，Γ_l 在 Res$_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}$ G 中扎里斯基稠密。[9]

设 $m \geq 1$ 和 p 为素数。对于任意子群 $A <$ GL$_m$(F$_p$)，我们将由 A 中阶为 p的元素生成的 A 的子群记为 A^+。它是一个正规子群。设

$$r_p : \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_p)$$

[9]注意，Γ_l 属于 SO$(k+1, k)$ 的连通分支。

为约化映射。定理 5.1 中 [Nor87] 表明，除有限多个素数 p

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\,\mathrm{G}(\mathbb{F}_p)^+ < r_p(\Gamma_l) < \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\,\mathrm{G}(\mathbb{F}_p).$$

回顾，对于任意素数 p

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\,\mathrm{G}(\mathbb{F}_p) \simeq \mathrm{G}(\mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_F) \simeq \mathrm{G}(\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F) \simeq \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{G}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$$

其中 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathcal{O}_F$中的素理想。对于几乎所有素理想 $\mathfrak{p}$

$$\mathrm{G}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}) \simeq \mathrm{SO}(\mathrm{I}_n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$$

因为对于几乎所有素理想 $\mathfrak{p}$， Q 在 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$ 上非退化，因此等价于 I_n 或 $\lambda\,\mathrm{I}_n$，其中 λ 在 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{p}$中不是平方。现在

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\,\mathrm{G}(\mathbb{F}_p)^+ \simeq \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathrm{SO}(\mathrm{I}_n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})^+ = \prod_{\mathfrak{p}|p} \Omega(\mathrm{I}_n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$$

因为 $\Omega(\mathrm{I}_n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$ 是 $\mathrm{SO}(\mathrm{I}_n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p})$ 的一个正规单指数为2的子群，见第3章 §5，载于 [Suz82]。因此

$$r_p(\Gamma_l) \simeq \prod_{\mathfrak{p}|p} \pi_{\mathfrak{p}}(\Gamma_l) \implies \Omega(\mathrm{I}_n, \mathcal{O}_F/\mathfrak{p}) < \pi_{\mathfrak{p}}(\Gamma_l)$$

对于几乎所有素理想 $\mathfrak{p}$。最后，利用 12^{10} 的引理 5. [Aud22], , 我们得出结论：$\mathrm{Tr}(\Gamma_l)$ 模 $\mathfrak{p}$ 的约化对于几乎所有素理想 $\mathfrak{p}$都是满射。证明的最后部分与 0.2 中关于 $G = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ 的定理证明相同。

令 $k \equiv 0、3[4]$ 和 F 为一个全实数域。我们要证明， $\Lambda_F = \mathrm{SO}(q, \mathcal{O}_F)$（定义见 §1.3）包含无穷多个扎里斯基稠密的 Hitchin 表示的映射类群轨道。令 A 为 F 上的任意四元数代数，它恰好在 q 不正定的实位处分裂。令 $\mathcal{O}$ 为 A 中的一个序，并记$S = \mathbb{H}^2/\mathcal{O}^1$。从现在起，证明过程与 $k \equiv 1, \ 2[4]$ 的情形相同。 □

References

[Aud22] Jacques Audibert. 分裂实李群的非一致格中的扎里斯基稠密曲面群，2022年。arXiv:2206.01123。[Bor91] Armand Borel. *Linear algebraic groups* 126 *Graduate Texts in Math-* , 第 卷。施普林格 *ematics* 出版社，纽约，第二版，。[DK02] Fran.coise Dal'Bo 和 Inkang Kim. 对称空间的标记长度刚性。*Comment. Math. Helv.*，77(2):399–407，2002年。[Dou22] Sami Douba. 每个维数都存在含有扎里斯基稠密曲面子群的双曲格，2022年。arXiv:2207.04255。[EO73] P. Eberlein 和 B. O'Neill. 可见流形。 *Pacific J. Math.* 46 45 109, , : – 。[FG06] Vladimir Fock 和 Alexander Goncharov. 局部系统的模空间与高阶 Teichm ¨ 103 1 211, uller 理论。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, ( ): – 。

[10]即使域不是素数，定理 5.12 的证明仍然成立。

[Gui] Olivier Guichard. 正表示与极大表示的扎里斯基闭包。准备中。[Ham15] Ursula Hamenst¨adt. 秩一局部对称空间中的不可压缩曲面。 *Geom. Funct. Anal.*，25(3):815–859，2015年。[Ham17] Ursula Hamenst¨adt. 特征簇中的特殊点，2017年。国际理论科学中心。[JM86] Dennis Johnson 和 John J. Millson. 与紧双曲流形相关的变形空间。 *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*，14(1):99–102，1986年。[KLM18] Jeremy Kahn、Fran。cois Labourie 和 Shahar Mozes. 某些半单群的一致格中的曲面群，2018年。arXiv:1805.10189。[KM12] Jeremy Kahn 和 Vladimir Markovic. 在闭双曲三维流形中浸入近似测地曲面。 *Ann. of Math. (2)*，175(3):1127–1190，2012年。[Lab06] Fran.cois Labourie. 阿诺索夫流、曲面群与射影空间中的曲线。*Invent. Math.*，165(1):51–114，2006年。[Lew82] D. W. Lewis. 除代数上厄米形式的等距分类。 *Linear Algebra Appl.*，43:245–272，1982年。[LR14] D. D. Long 和 A. W. Reid. 构造薄群，载于 *Thin groups and superstrong approximation* 61 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 151 ，第 卷，第 – 166 页。剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[LR16] D. D. Long 和 A. W. Reid. SL(3, R) 中余紧格里的薄曲面子群。 *Illinois J. Math.*，60(1):39–53，2016年。[LRT11] Darren D. Long、Alan W. Reid 和 Morwen Thistlethwaite. SL(3, Z) 中的扎里斯基稠密曲面子群。 *Geom. Topol.*，15(1):1–9，2011年。[LT18] D. D. Long 和 M. B. Thistlethwaite. SL(4, $\mathbb{Z}$) 中的扎里斯基稠密曲面子群。 *Exp. Math.*，27(1):82–92，2018年。[LT20] D. D. Long 和 M. Thistlethwaite. SL($2k+1, \mathbb{Z}$) 中的扎里斯基稠密曲面群，2020年。[Mil13] Milne. 李代数、代数群与李群，版本 2.00，2013年。[Mor15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*。Deductive Press，2015年。[MR03] Colin Maclachlan 和 Alan W. Reid. *The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds*，数学研究生教材第 219 卷。施普林格出版社，纽约，2003年。[Nor87] Madhav V. Nori. 关于 $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ 的子群。 *Invent. Math.*，88(2):257–275，1987年。[PR94] Vladimir Platonov 和 Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*，第 139 卷。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1994年。由 Rachel Rowen 从 1991 年俄文原版翻译。[Sam20] Andr´es Sambarino. 正表示的无穷小扎里斯基闭包，2020年。arXiv:2012.10276。[Sar14] Peter Sarnak. 关于薄矩阵群的笔记。载于 *Thin groups and superstrong approximation* 61 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 343 362 ，第 卷，第 – 页。剑桥大学出版社，剑桥，2014年。[Ser73] J.-P. Serre. *A course in arithmetic*。数学研究生教材，第 7 号。施普林格出版社，纽约—海德堡，1973年。由法文译出。[Sha12] Christopher J. Shallue. 有限域上的置换多项式，2012年。arXiv:1211.6044。[Suz82] Michio Suzuki. *Group Theory I*。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1982年。[SV00] Tonny A. Springer 和 Ferdinand D. Veldkamp. *Octonions Jordan algebras* ，。数学 *and exceptional groups* 专著丛书。施普林格出版社，柏林，2000年。[Vin71] `E. B. Vinberg. 半单线性群稠密子群的定义环。*Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*，35:45–55，1971年。[Wei84] Boris Weisfeiler. 半单代数群中扎里斯基稠密子群的强逼近。 *Ann. of Math. (2)*，120(2):271–315，1984年。

[Wie18] AnnaWienhard。《高阶 Teichmüller 理论导论》。载于，第 – 页。World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，。

Sorbonne Université and Université Paris Cité CNRS IMJ-PRG F-75005 „, , Paris France.

Email address: audibert.j@outlook.fr