有限多重集集合的序数度量

Isa Vialard
巴黎-萨克雷大学、法国国家科学研究中心、巴黎萨克雷高等师范学院、形式方法实验室，91190，法国
吉夫叙尔伊韦特

摘要

良部分序及用于度量它们的序数不变量，在集合论、程序验证、证明论以及计算机科学和数学的许多其他领域中都具有重要意义。本文聚焦于编程中最常见的数据结构之一：某个良拟序的有限多重集。对于偏序 X 的有限多重集集合 $M(X)$，可以定义两种自然的序：多重集嵌入和多重集序；当X 是良拟序时， $M(X)$仍是良拟序。尽管这些序的最大序型已为人所知，但其他序数不变量大多仍未明晰。我们的主要贡献是给出可组合计算多重集嵌入的宽度和多重集序的高度的表达式。此外，我们还提出一种新的序数不变量，可用于刻画多重集序的宽度。

2012年 美国计算机协会学科分类计算理论 → 复杂性理论与逻辑；计算理论 → 逻辑与验证；计算理论 → 证明论；计算理论 → 程序推理

关键词与短语良偏序、有限多重集、终止、程序验证

数字对象标识符10.4230/LIPIcs...

arXiv:2302.09881v1 [cs.LO] 20 Feb 2023

引言

偏序的度量涉及许多领域，从集合论到证明论，包括无穷组合学、程序验证、重写理论、证明自动化等诸多领域。

对于有限偏序，存在一些直观的度量概念：显然可以看其基数，也可以看其高度（极大链的长度）或宽度（极大反链的长度）。对于无限偏序，只要它们是良偏序（wpo），即良基且不存在无限反链的偏序 [10, 12]，也存在类似概念。其中两种是高度（极大链的序型）和最大序型（m.o.t.，即极大线性化的序型）。De Jongh 和 Parikh 引入了后一概念，用以度量函数层级 [6]。这些都是超限度量，因此我们称其为序数不变量。Kříž 和 Thomas 提出了最大序型和高度的等价刻画，由此自然引出了第三种序数不变量宽度 [11]。与其他不变量相比，宽度的研究较少；它与良偏序的反链有关，尽管无法将其定义为极大反链的序型。在探索程序终止技术时，Blass 和 Gurevich 将这些刻画发展为一种博弈论视角，带来了有益的直观认识 [4]。

序数不变量已被证明有助于确立程序终止性，或分析良拟序迁移系统（wsts） [5], , 即配置集合构成良拟序且其迁移遵循该序的迁移系统。通过受控坏序列 [9], , 有时也通过受控反链 [14],研究良拟序迁移系统，显然揭示了良拟序迁移系统上的验证问题的复杂性与底层良拟序的最大序型及宽度之间的联系。

以组合方式计算序数不变量至关重要，因为人们可能希望测量的大多数良拟序，都是通过对其不变量已知的更简单良拟序执行经典运算构造而成的。De Jongh 和 Parikh 计算了不交和以及笛卡尔



©Isa Vialard；依据知识共享署名 4.0 国际许可协议授权 莱布尼茨国际信息学会议论文集 达格施图尔城堡–莱布尼茨信息学中心，达格施图尔出版社，德国

积的良拟序的最大序型 [6]。随后，Schmidt 计算了良拟序 [13] 上词嵌入和同胚树嵌入的最大序型。Abraham 和 Bonnet 延续了这一研究方向，计算了笛卡尔积的高度，以及不交和与字典序积的宽度[1]。关于这些结果的完整综述，请参见 [8], ，其中 Džamonja 等人计算了字典序积的序数不变量，以及多重集词嵌入和树嵌入的高度。

有限多重集：本文研究有限多重集集合的序数不变量。多重集是计算机科学中最常见的数据结构之一，在重写理论中尤为常见。通俗地说，集合 X 上的有限多重集是 X 的有限子集，其中一个元素可以出现有限次。可以将良拟序上的有限多重集集合看作有限词集合对等价关系“相差一个排列即相等”取商所得的集合。换言之，多重集可以描述为一个词，其中各项的顺序无关紧要。有限多重集可以表示为从 X 到 $\mathbb{N}$ 的一个具有有限支撑集的函数，该函数将每个元素与其重数相关联。

对于任意有序集合上的有限多重集，通常定义两种序。第一种是多重集序。这种序背后的直观想法是：给定一个多重集 m，可以从中移除一个元素 x，再用任意数量的小于 x 的元素替换它，从而构造出一个更小的多重集。多重集序常见于重写理论和终止性证明的自动化 [7]。

在有限多重集集合上，一种或许更自然但鲜为人知的序是多重集嵌入，也称为项序，见 [15]。Aschenbrenner 和 Pong 将其作为有限词上嵌入序的一种自然推广提出 [3]。

这两种序的一些不变量已经得到测定：Van der Meeren、Rathjen 和 Weiermann [15] 在此基础上 [17]，计算了在良拟序 X 上按多重集序排列的有限多重集集合的最大序型，并为 [18]中计算出的多重集嵌入最大序型表达式提供了新的证明。Džamonja 等人 [8] 证明，多重集嵌入的高度等于按词嵌入排序的有限词集合的高度。值得注意的是，这三项结果给出的表达式都是关于 X的最大序型和高度的函数。然而，多重集序的不变量高度仍有待确定，而这两种序的宽度也都尚未得到研究。

我们的贡献：本文给出了多重集嵌入宽度的函数表达式（定理 2.1）以及多重集序高度的函数表达式（定理 3.1）。

我们进一步证明，多重集序的宽度不能由三个序数不变量中的任何一个函数表示（例 3.2）。尽管如此，我们通过引入第四个序数不变量——最大安全序型（定义 3.6）——解决了这一问题；在该不变量下，宽度可以用函数表示（定理 3.8）。

表1总结了本文的贡献（灰色部分），并将其置于当前最先进的研究成果之中。

表1 $M^{\diamond}(X)$ 和 $M^{r}(X)$ 的序数不变量。

不变量	$M^{\diamond}(X)$	$M^{r}(X)$
最大序型 $\boldsymbol{o}$	$\omega^{\widehat{\boldsymbol{o}(X)}}$	$\omega^{\boldsymbol{o}(X)}$
高度 $\boldsymbol{h}$	$\boldsymbol{h}^{*}(X)$	$\omega^{\boldsymbol{h}(X)}$
宽度 $\boldsymbol{w}$	$\omega^{\widehat{\boldsymbol{o}(X)-1}}$	$\omega^{\underline{\boldsymbol{o}}(X)}$

1 定义与研究现状

1.1 宽度、高度与最大序型

W我们假设读者熟悉序数算术。否则，文中使用的概念
i本文可在附录中找到。

偏序上的一个序列 x_1、……、x_n、……称为好序列，当存在 $i<j$ 使得$x_i \leq x_j$；否则，它是坏序列。如果一个序列中的所有元素两两不可比（即对于任意 $i<j$，都有 $x_i \perp x_j$），则称该序列为反链。

一个良偏序（*wpo*）是指不含无限坏序列的偏序。等价地，良拟序是既良基（即不存在无限严格递减序列）又不含无限反链（即由两两不可比元素组成的序列）的偏序。

设 X 是一个良拟序。我们分别将 X、X 和 X 定义为 X 的坏序列、严格递减序列和反链所构成的树，并按逆前缀序排列（一个序列小于它的前缀）。良拟序中的坏序列、严格递减序列和反链都是有限的，这意味着这些树是良基的。因此，可以定义秩的概念：当一个序列无法扩展时，其秩为 0；否则，其秩是严格大于所有较小序列（按逆前缀序）的秩的最小序数。

X 的最大序型（或 m.o.t.）记作 $\boldsymbol{o}(X)$，定义为 $Bad(X)$ 中空序列的秩。同样，$\boldsymbol{h}(X)$ 的高度和 $\boldsymbol{w}(X)$ 的宽度分别定义为 $Dec(X)$ 和 $Ant(X)$ 中空序列的秩。$\boldsymbol{o}(X)$、$\boldsymbol{h}(X)$ 和 $\boldsymbol{w}(X)$ 统称为 X 的序数不变量。

由于空序列的秩是严格大于长度为 1 的序列的秩的最小序数，这些定义可以通过以下余项方程归纳地重新表述：

$$\boldsymbol{o}(X) = \sup_{x\in X} (\boldsymbol{o}(X_{\not\geq x}) + 1) \tag{Res-o}$$

$$\boldsymbol{h}(X) = \sup_{x\in X} (\boldsymbol{h}(X_{<x}) + 1) \tag{Res-h}$$

$$\boldsymbol{w}(X) = \sup_{x\in X} (\boldsymbol{w}(X_{\perp x}) + 1) \tag{Res-w}$$

$X_{*x \text{ 定义}=} \{\, y \in X\colon\ y * x \,\}$ 对于 $* \in \{\, \not\geq, <, \perp \,\}$ 称为 X 的一个剩余。

由于 $Dec(X)$ 和 $Ant(X)$ 嵌入在 $Bad(X)$ 中，我们知道 $\boldsymbol{h}(X) \leq \boldsymbol{o}(X)$ 和 $\boldsymbol{w}(X) \leq \boldsymbol{o}(X)$。Kříž 和 Thomas 发现，最大序型也可以由宽度和高度 [11] 来界定：

▶ **定理 1.1**（高度-宽度定理）. 对于任意良拟序 A，
$\boldsymbol{o}(A) \leq \boldsymbol{h}(A) \otimes \boldsymbol{w}(A)$。此外，如果 $\boldsymbol{o}(A)$ 是乘法不可分解的（见附录），且 $\boldsymbol{h}(A) < \boldsymbol{o}(A)$（分别为 $\boldsymbol{w}(A) < \boldsymbol{o}(A)$），那么 $\boldsymbol{w}(A) = \boldsymbol{o}(A)$（分别为 $\boldsymbol{h}(A) = \boldsymbol{o}(A)$）。

1.2 基本数据结构的序数不变量

在计算机科学中，良拟序的和与积是最基本的数据结构。它们的序数不变量很容易通过组合方式计算，值得注意的例外是笛卡尔积的宽度无法通过函数计算 [16]。本文中，这些结构常被用作示例，或出现在证明中。

XX:4 集合有限多重集的序数度量

▶ **引理 1.2** (不交和 [6, 1, 8])。 设 P, Q 是两个良拟序。不交和 $P\dot{+} Q$ 是 P 与 Q 的不交并，并按如下方式排序：对所有 $p \in P, q \in Q$, $p \perp q$。它是一个良拟序，且：

- $o(P \dot{+} Q) = \boldsymbol{o}(P) \oplus \boldsymbol{o}(Q)$,$w(P$
- $\dot{+} Q) = \boldsymbol{w}(P) \oplus \boldsymbol{w}(Q)$.$h(P \dot{+} Q)$
- $= \max(\boldsymbol{h}(P), \boldsymbol{h}(Q))$.

▶ **引理 1.3** (字典序和 [8]). 设 P, Q 是两个良拟序。字典序和 $P + Q$是 P和 Q 的不交并，其排序方式满足：对所有 $p \in P, q \in Q$, $p \leq q$。$\boldsymbol{Ti}$ 是良拟序，且：

- $\boldsymbol{o}(P + Q) = \boldsymbol{o}(P) + \boldsymbol{o}(Q)$，$\boldsymbol{w}($
- $P + Q) = \max(\boldsymbol{w}(P), \boldsymbol{w}(Q))$，$\boldsymbol{h}($
- $P + Q) = \boldsymbol{h}(P) + \boldsymbol{h}(Q)$。

▶ **引理 1.4** (笛卡尔积 [6]). 设 P, Q 是两个良拟序。笛卡尔积 $P \times Q$，其中元素按逐分量进行比较，是良拟序，且：

- $\boldsymbol{o}(P \times Q) = \boldsymbol{o}(P) \otimes \boldsymbol{o}(Q)$,$\boldsymbol{h}(P \times Q) =$上确界{
- $\alpha \oplus \beta + 1 : \alpha < \boldsymbol{h}(P), \beta < \boldsymbol{h}(Q)$ }。

▶ **引理 1.5** （字典序积 [8]）。 设 P, Q 是两个良拟序。 P沿着 Q的字典序积，记作 $P \cdot Q$，其支撑集与 $P \times Q$相同，但排序方式不同：

$$(p, q) \leq_{P \cdot Q} (p', q') \quad \textit{iff} \quad q <_Q q' \text{ , } or\ q = q'\ and\ p \leq_P p' .$$

它是一个良拟序，并且：

- $\boldsymbol{o}(P \cdot Q) = \boldsymbol{o}(P) \cdot \boldsymbol{o}(Q)$,$\boldsymbol{w}$
- $(P \cdot Q) = \boldsymbol{w}(P) \odot \boldsymbol{w}(Q)$.

有关自然和 $\oplus$与积 $\otimes$的定义，以及较少为人所知的基于海森伯格的积 $\odot$，请参阅附录。

1.3 比较良拟序

良拟序之间一种广泛使用且直观的关系是反射 关系。良拟序之间的映射 $f : (A, \leq_A) \to (B, \leq_B)$ 是一个反射，如果 $f(x) \leq_B f(y)$ 蕴含 $x \leq_A y$，也就是说，它是从 $(A, \not\leq_A)$ 到 $(B, \not\leq_B)$ 的态射。当存在从 A 到 B 的反射时，我们记作 $A \hookrightarrow B$。

不过，本文更倾向于使用更强的概念：增广和子结构。

▶ **定义 1.6** (子结构，增广)。 **</style}一个良拟序(**$A, \leq_A$) 是良拟序$(B, \leq_B)$ 的子结构，当且仅当 $A \subseteq B$，且 $\leq_A$ 是 $\leq_B$ 在 A 上的限制。此关系记作$A \leq_{st} B$。类似地，$(A, \leq_A)$ 是$(B, \leq_B)$ 的一个增广，当且仅当 $A = B$ 且 $\leq_B \subseteq \leq_A$。我们将此关系记作 $A \geq_{aug} B$。

显然， $A \leq_{\mathrm{st}} B$ 或 $A \geq_{\mathrm{aug}} B$ 蕴含 $A \hookrightarrow B$。

我们用 $A \equiv B$ 表示 $(A, \leq_A)$ 与 $(B, \leq_B)$ 同构。

我们常常滥用这些记号，写作 $A \leq_{\mathrm{st}} B$ （分别为 $B \leq_{\mathrm{aug}} A$），表示 A 与 B 的某个子结构（分别为扩张）同构。

▶ **例 1.7.** 众所周知，良拟序 X 的高度和最大序型分别由极大链和 X的极大线性化的序型取得。因此$\boldsymbol{h}(X) \leq_{\mathrm{st}} X$ 且 $\boldsymbol{o}(X) \geq_{\mathrm{aug}} X$。

本文中，当我们考虑良拟序 X的子集 Y时，默认 $Y \leq_{\text{st}} X$，即 Y采用将 $\leq_X$ 限制在该子集上的方式排序。

这些概念使我们能够比较良拟序的序数不变量。

▶引理 *1.8*。设 A 和 B 是良拟序。若 $A \leq_{st} B$，则对 $i \in \{o, h, w\}$，有 $i(A) \leq i(B)$。若 $A \geq_{aug} B$，则 $o(A) \leq o(B)$，且 $w(A) \leq w(B)$。然而 $h(A) \geq h(B)$。

在良拟序上的大多数运算中，子结构关系和增广关系都是单调的。

1.4 有限多重集集合上的序

我们用 $\mathsf{h}x_1, \ldots, x_n\mathsf{i}$ 表示包含元素 $x_1, \ldots, x_n$ 的有限多重集。符号 $\cup$、$\cap$ 和 $\setminus$ 分别表示并集、交集和差。对于任意 $n \in \mathbb{N}$，$m \times n$ 表示 n 个 m 的并集。例如，令 $m = \mathsf{h}1, 1, 1, 2, 2, 3\mathsf{i}$ 且 $m' = \mathsf{h}1, 1, 2, 4\mathsf{i}$。于是 $m \cup m' = \mathsf{h}1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\mathsf{i}$，且 $m \cap m' = \mathsf{h}1, 1, 2\mathsf{i}$。此外，$m \setminus (m \cap m') = \mathsf{h}2, 3\mathsf{i}$，且 $m' \times 2 = \mathsf{h}1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4\mathsf{i}$

我们用 $|m|$ 表示多重集 m中元素的个数。

在偏序 X的有限多重集集合 $M(X)$ 上，通常定义了两种主要的序：

▶**定义 1.9**（多重集嵌入）。$M^{\diamond}(X) = (M(X) \leq_{\diamond})$按多重集嵌入排序，这也称为项序：

$m \leq_{\diamond} m'$ 当且仅当存在 $f : m \to m'$ 是单射，使得对任意 $x \in m$，$x \leq f(x)$。

▶**定义 1.10**（多重集序）。$M^{r}(X) = (M(X) \leq_{r})$按多重集序排序：

$$m \leq_r m' \iff m = m' \text{ or } \forall x \in m \setminus (m \cap m'), \exists y \in m' \setminus (m \cap m'), x < y\,.$$

多重集序和多重集嵌入都是对 X^* 上词嵌入的增广。因此，根据 Higman 引理 [10]，当 X 是良拟序时，$M^{\diamond}(X)$ 和 $M^{r}(X)$ 也是良拟序。

这两种序的主要区别在于，多重集嵌入非常看重多重集的大小（对于任意多重集 $m, m', m \leq_{\diamond} m'$ implies$|m| \leq |m'|$），而在多重集序中，一个元素可以支配多个元素。例如，$\langle 1\rangle \geq_r \langle 0\rangle \cdot 100$ 属于 $M^{r}(\mathbb{N})$。因此，对于任意良拟序 X，$M^{\diamond}(X) \leq_{\text{aug}} M^{r}(X)$，正如 Aschenbrenner 和 Pong 所观察到的 [3]。

注意，如果 X 是线性序，那么 $M^{r}(X)$ 仍然是线性序，而 $M^{\diamond}(X)$ 则不是。

尽管如此，$\leq_{\diamond}$ 和 $\leq_r$ 在简单数据结构上的表现相似，正如我们将在以下变换引理中看到的：

▶ **引理 1.11**（不交和变换）。对于任意良拟序 A 和 B，$M^{*}(A \sqcup B) \equiv M^{*}(A) \times M^{*}(B)$ 对 $* \in \{\diamond, r\}$。

▶**引理 1.12** (直和变换，多重集序)。对于任意良拟序 A 和 B，$M^{r}(A + B) \equiv M^{r}(A) \cdot M^{r}(B)$

▶ **引理 1.13**（直和变换，多重集嵌入）。对于任意良拟序 A 和 B，$M^{\diamond}(A + B) \leq_{aug} M^{\diamond}(A) \cdot M^{\diamond}(B)$

证明。对于所有 $m \in M^{\diamond}(A+B)$， $m = m_A \cup m_B$ 对于某个 $m_A \in M^{\diamond}(A)$， $m_B \in M^{\diamond}(B)$。设 $m = m_A \cup m_B$、$m' = m'_A \cup m'_B$，使得 $m \leq_{M^{\diamond}(A+B)} m'$。根据定义，存在一个单射函数 $f: m \to m'$，使得对于任意 $x \in m$， $x \leq_{A+B} f(x)$。于是 $f(m_B) \subseteq m'_B$，因此 $m_B \leq_{M^{\diamond}(B)} m'_B$。如果 $m_B <_{M^{\diamond}(B)} m'_B$，则 $(m_A, m_B) <_{M^{\diamond}(A)\cdot M^{\diamond}(B)} (m'_A, m'_B)$。否则 $m_B = m'_B$。于是 $f(m_A) \subseteq m'_A$，因此 $m_A \leq_{M^{\diamond}(A)} m'(A)$。所以 $(m_A, m_B) \leq_{M^{\diamond}(A)\cdot M^{\diamond}(B)} (m'_A, m'_B)$。◀

增广关系和子结构关系相对于多重集序和多重集嵌入是单调的：

▶ **引理 1.14.** 设 A, B 是两个良拟序。那么 $A \leq_{st} B$ 蕴含 $M^{\diamond}(A) \leq_{st} M^{\diamond}(B)$ 且 $M^{r}(A) \leq_{st} M^{r}(B)$。此外， $A \geq_{aug} B$ 蕴含 $M^{\diamond}(A) \geq_{aug} M^{\diamond}(B)$ 且 $M^{r}(A) \geq_{aug} M^{r}(B)$

1.5 有限多重集集合的序数不变量

Van der Meeren、Rathjen 和 Weiermann 计算了 $M^{\diamond}(X)$ 和 $M^{r}(X)$ 的最大序型。

▶ **定理 1.15**（多重集嵌入 [15, 18] 的最大序型）. 设 X 是一个良拟序。
于是 $o(M^{\diamond}(X)) = \omega^{\widehat{o^{X}}()}$，其中 $\widehat{\alpha} \overset{定义}{=} \omega^{\alpha'_1} + \cdots + \omega^{\alpha'_n}$ 对所有 $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ 均成立，并且 α'_i 在 α_i 是一个 ϵ-数与一个有限序数之和时为 $\alpha_i + 1$， 否则为 $\alpha'_i = \alpha_i$。

▶ **定理 1.16**（ [15, 17]的多重集序的最大序型）。 设 X 是一个良拟序。
于是 $o(M^{r}(X)) = \omega^{o(X)}$。

——注意到 $\omega^{o(X)} \leq \omega^{o(X)}$，这是意料之中的，因为 $M^{r}(X) \geq_{\text{aug}} M^{\diamond}(X)$。此外，我们应有 $w(M^{r}(X)) \leq w(M^{\diamond}(X))$，而 $h(M^{r}(X)) \geq h(M^{\diamond}(X))$。遗憾的是，目前我们只知道 $M^{\diamond}(X)$ 的高度。

▶ **定理 1.17**（多重集嵌入的高度 [8]）。 设 X 是一个良拟序。则 $h(M^{\diamond}(X)) = h^{*}(X)$，其中

$$h^{*}(A) \overset{def}{=} \begin{cases} h(A) & \text{if } h(A) \text{ is infinite and indecomposable,} \\ h(A) \cdot \omega & \text{otherwise.} \end{cases}$$

1.6 计算宽度的工具：准不可比子集

在这三个序数不变量中，宽度的研究最少，因为它是较近才引入的。它也是最难研究的不变量：不同于最大序型和高度——它们分别由良拟序的极大线性化和极大链的序型达到——宽度并不体现为某种“极大反链”。

分析良拟序宽度的一个有力工具是准不可比 e
良拟序的子集，这一概念最初在 [16] 中用于若干序数的笛卡尔积。

对于任意偏序 X，当两个元素 x， $y \in X$ 不可比时，我们用 $x \perp y$ 表示。这一记号可以扩展到 X 的子集 Y， Z：当对于每个 $y \in Y$， $z \in Z$， $y \perp z$ 时，我们用 $Y \perp Z$ 表示。

▶ **定义 1.18**。 设 A 是一个良拟序， A_1、……、A_n 是 A的 n 子集。那么 $(A_i)^{i \leq n}$ 是 A 的准不可比子集族，当且仅当对于任意 $i < n$，以及任意有限的 $Y \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_i$，都存在 $A'_{i+1} \subseteq A_{i+1}$，使得 $A'_{i+1} \perp Y$ 且 $A'_{i+1} \equiv A_{i+1}$。

这个定义比 [16], 中的定义略严格，后者只要求$\boldsymbol{w}(A'_{i+1}) = \boldsymbol{w}(A_{i+1})$ 。

这些准不可比子集背后的想法是，有时可以将一个良拟序A 分解为更简单的子集 $A_1, \dots, A_n$，其宽度已知，并使得 $Ant(A_n) + \cdots + Ant(A_1)$ 嵌入 $Ant(A)$ 中。直观地说，这意味着可以将 $A_1, \dots, A_n$的反链合并成 A的一个反链。

这意味着 A 及其子集的宽度之间存在一种实用关系：

▶ **引理 1.19**。 设$(A_i)^{i\leq n}$ 是 A的一个准不可比子集族。那么 $\boldsymbol{w}(A) \geq \boldsymbol{w}(A_n) + \cdots + \boldsymbol{w}(A_1)$。

引理 1.19 很快就会派上大用场，尤其是在引理 2.3 和引理 3.4 的证明中。

2 多重集嵌入的宽度

本节将计算任意良拟序 X 的 $M^\diamond(X)$ 的宽度，而它恰好是 X 的宽度的函数：

▶ **定理 2.1**（多重集嵌入的宽度）。对于任意良拟序 X， $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \omega^{\boldsymbol{o}(X)-1}$。（$\widehat{\alpha}$ 的定义见定理 *1.15*。）

我们已经知道，在某些情况下，多重集嵌入的宽度会达到其最大序型。

▶**引理 2.2**（[8]）。若 $\boldsymbol{o}(X)$ 是无限不可分解序数，则 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(X))$。

证明。根据定理 1.15， $\boldsymbol{o}(M^\diamond(X)) = \omega^{\boldsymbol{o}(X)}$；当 $\boldsymbol{o}(X)$ 不可分解时，它是乘法不可分解的。此外，当 $\boldsymbol{o}(X) > 1$时，根据定理 1.17， $\boldsymbol{o}(M^\diamond(X)) > \boldsymbol{h}^*(X) = \boldsymbol{h}(M^\diamond(X))$。因此，根据定理 1.1， $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(X))$。◀

目前我们先关注序数上的有限多重集集合。首先考虑后继序数的情形。

▶**引理 2.3**。 对于任意后继序数 $\alpha = \beta + 1$, $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) \geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(\beta)) \cdot \omega$。

证明。 记 $M^\diamond_{>k}(X)$为 $M^\diamond(X)$的子结构，其中多重集的元素个数严格大于 k 。根据公式（Res-w），

$$\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) = \sup\{\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)_{\perp m}) + 1 \mid m \in M^\diamond(\alpha)\}\,.$$

我们来计算 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)_{\perp m_n})$，其中 $m_n = \mathsf{h}\beta\mathsf{i} \times n$ 对任意 $n \in \mathbb{N}$成立。令 $M_k \mathsf{def}= \{\, \mathsf{h}\beta\mathsf{i} \times (n-k) \cup m : \ m \in M^\diamond_{>k}(\beta)\,\}$，其中 $k \in [1,n]$ 是 $M^\diamond(\alpha)$ 的子集族。这些子集之所以相关，是因为对于任意 $k \in [1,n]$, $M_k \equiv M^\diamond(\beta)$，以及所有 $m \in \mathsf{M}_k$, $m \perp m_n$ $\mathsf{since}|m| > |m_n|$。此外，$(M_k)^{k\in[1,n]}$ 是 $M^\diamond(\alpha)_{\perp m_n}$的准不可比子集族：对于任意 $i < n$，对于任意有限的 $Y \subset M_1 \cup \cdots \cup M_i$，令 $s(Y) = max\{|m|, m \in Y\}$。注意， M_{i+1} 包含 $M_{i+1} \cap M^\diamond_{>s(Y)}(\beta)$，它与 Y不可比，且与 M_{i+1}同构，而 M_{i+1}也与 $M^\diamond(\beta)$ 同构。

因此，根据引理 1.19， $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)_{\perp m_n}) \geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(\beta)) \cdot n$。因此，方程（Res-w）推出：

$$\begin{aligned} w(M^\diamond(\alpha)) &\geq \sup\{\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)_{\perp m_n}) + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(\beta)) \cdot \omega\,. \end{aligned}$$

◀

XX:8 有限多重集集合的序数度量

▶ **引理 2.4**。 对于任意无限序数 α， $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(\alpha))$。

证明。 我们已经知道 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) \leq \boldsymbol{o}(M^\diamond(\alpha))$。我们通过对 α 归纳证明下界：

- 若 α 是无限不可分解序数，参见引理 2.2。若
- $\alpha = \beta + 1$，则根据引理 2.3，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) &\geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(\beta)) \cdot \omega \\ &\overset{IH}{=} \boldsymbol{o}(M^\diamond(\beta)) \cdot \omega \\ &= \omega^{\widehat{\beta+1}} = \omega^{\widehat{\beta+1}} = \boldsymbol{o}(M^\diamond(\alpha)) \text{ according to Theorem 1.15.}\end{aligned}$$

- 若 $\alpha = \beta + \omega^\rho$ 满足 β， $\omega^\rho < \alpha$ 且 $\rho > 0$，则根据变换引理 1.13， $M^\diamond(\alpha) \geq_{\text{aug}} M^\diamond(\beta) \cdot M^\diamond(\omega^\rho)$。因此，根据引理 1.5，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) &\geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(\beta)) \odot \boldsymbol{w}(M^\diamond(\omega^\rho)) \\ &\overset{IH}{=} \boldsymbol{o}(M^\diamond(\beta)) \odot \boldsymbol{o}(M^\diamond(\omega^\rho)) \\ &= \omega^{\widehat{\beta}} \odot \omega^{\widehat{\omega^\rho}} = \omega^{\widehat{\alpha}} \\ &= \boldsymbol{o}(M^\diamond(\alpha)) \,.\end{aligned}$$

◀

现在我们可以证明，引理 2.2 可推广到任意无限的 X。

▶ **引理 2.5**。 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(X))$ 若 $\boldsymbol{o}(X)$ 是无限的。

证明。 令 $\alpha = \boldsymbol{o}(X)$。那么 $X \leq_{\text{aug}} \alpha$，因此 $M^\diamond(X) \leq_{\text{aug}} M^\diamond(\alpha)$。因此

$$\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) \leq \boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) \leq \boldsymbol{o}(M^\diamond(X)) \,,$$

并且 $\boldsymbol{o}(M^\diamond(X)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(\alpha))$，因为 $\boldsymbol{o}(M^\diamond(X))$ 只取决于 $\boldsymbol{o}(X) = \alpha$。根据引理 2.4， $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\alpha)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(\alpha))$，因此 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \boldsymbol{o}(M^\diamond(X))$。◀

当 X 是有限良拟序时，我们也可以计算 $M^\diamond(X)$ 的宽度：
对于任意 $k < \omega$，我们将 Γ_k 定义为 k 个单元素良拟序的不交并：

$$\Gamma_k \overset{\text{def}}{=} \overbrace{1 \sqcup \cdots \sqcup 1}^{k} \,.$$

▶ **引理 2.6**。 如果 $\boldsymbol{o}(X)$ 是有限的，那么 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \omega^{\boldsymbol{o}(X)-1}$。

证明。 设 $k = \boldsymbol{o}(X)$。那么 $\Gamma_k \leq_{\text{aug}} X \leq_{\text{aug}} k$，因此 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\Gamma_k)) \geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) \geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(k))$。
由于 $M^\diamond(\Gamma_1) = \omega$，变换引理 1.11 告诉我们， $M^\diamond(\Gamma_k)$ 与 $\omega \times \cdots \times \omega$ k 个副本的笛卡尔积同构。一般来说，我们不知道如何计算笛卡尔积的宽度，但在这个特殊情形下，我们知道 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(\Gamma_k)) = \omega^{k-1}$ [16]。
此外，根据引理 2.3 应用 $(k-1)$ 次， $\boldsymbol{w}(M^\diamond(k)) \geq \boldsymbol{w}(M^\diamond(1)) \cdot \omega^{k-1} = \omega^{k-1}$。因此 $\boldsymbol{w}(M^\diamond(X)) = \omega^{k-1} = \omega^{\boldsymbol{o}(X)-1}$。

◀

现在我们可以证明本节的主要结果：

▶ **定理 2.1**（多重集嵌入的宽度）。 对于任意良拟序 X, $\boldsymbol{w}(M^{\diamond}(X))$ $= \omega^{\boldsymbol{o}(X)-1}$。（$\widehat{\alpha}$ 的定义见定理 *1.15*。）

证明。 若 $\boldsymbol{o}(X)$ 是有限的，则 $\boldsymbol{o}(X) = \boldsymbol{o}(X)$。另一方面，若 $\boldsymbol{o}(X)$ 是无限的，则$\widehat{\boldsymbol{o}\ X}$ ( ) 也无限，因此 $\widehat{\boldsymbol{o}\ X}$ ( ) $-1 = \widehat{\boldsymbol{o}\ X}$ ( )。由此可得 $\boldsymbol{w}(M^{\diamond}(X)) = \omega^{\boldsymbol{o}\ \widehat{X}\ ()-1}$，这可由引理 2.5 和 2.6 得出。◀

3 多重集序的高度和宽度

最大序型是我们所知的唯一一种能够对多重集序进行组合计算的不变量。

▶ **定理 1.16**（多重集序的最大序型 [15, 17]）。 设 X 是良拟序。那么 $\boldsymbol{o}$ $(M^{r}(X)) = \omega^{\boldsymbol{o}(X)}$。

由于线性序的多重集序仍为线性序，因此我们可以推得，对于任意序数 α， $M^{r}(\alpha)$ $\equiv \omega^{\alpha}$。

$M^{r}(X)$ 的高度有一个类似于定理 1.16 的结果。

▶ **定理 3.1**（多重集序的高度）。 设 X 是一个良拟序。

于是 $\boldsymbol{h}(M^{r}(X)) = \omega^{\boldsymbol{h}(X)}$。

证明。 注意到 $X \geq_{\mathrm{st}} \boldsymbol{h}(X)$，因此 $M^{r}(X) \geq_{\mathrm{st}} M^{r}(\boldsymbol{h}(X)) \equiv \omega^{\boldsymbol{h}(X)}$。因此$\boldsymbol{h}(M^{r}(X))$ $\geq \omega^{\boldsymbol{h}(X)}$。

我们通过对 $\boldsymbol{h}(X)$ 使用归纳法来证明上界。若 $\boldsymbol{h}(X) = 0$，则 $X = \emptyset$，且 $M^{r}(X)$ 只包含空多重集，因此 $\boldsymbol{h}(M^{r}(X)) = 1 = \omega^{0}$。

对于任意多重集 $m \in M^{r}(X)$，我们将 $(\cap_{x\in m} X_{\not\geq x}) \cap (\cup_{x\in m} X_{<x})$ 记作 $X_{<m}$。注意，$X_{<m}$ 是 X 的一个子集，且 $\boldsymbol{h}(X_m) < \boldsymbol{h}(X)$。现在假设 X 非空，且 m 是 X 上的任意多重集：

$$
\begin{aligned}
M^{r}(X)_{<m} &= \bigcup_{m_1+m_2=m, m_1\neq\emptyset} \{\, m' + m_2 \;:\; m' \in M^{r}(X_{<m_1}) \,\} \\
&\equiv \bigcup_{m_1\subseteq m, m_1\neq\emptyset} M^{r}(X_{<m_1})\,.
\end{aligned}
$$

由于 $\boldsymbol{h}(X_{m_1}) < \boldsymbol{h}(X)$，根据归纳假设， $\boldsymbol{h}(M^{r}(X_{<m_1})) \leq \omega^{\boldsymbol{h}(X_{<m_1})} < \omega^{\boldsymbol{h}(X)}$。此外，$\omega^{\boldsymbol{h}(X)}$ 是不可分解的。因此：

$$
\boldsymbol{h}(M^{r}(X)_{<m}) \leq \bigoplus_{m_1+m_2=m, m_1\neq\emptyset} \boldsymbol{h}(M^{r}(\cup_{x\in m_1} X_{<x})) < \omega^{\boldsymbol{h}(X)}\,.
$$

因此，根据方程（Res-h）， $\boldsymbol{h}(M^{r}(X)) \leq \omega^{\boldsymbol{h}(X)}$。 ◀

遗憾的是，多重集序的宽度较难计算，因为 $\boldsymbol{w}(M^{r}(X))$ 并非多重集 X 的序数不变量的函数。以下示例给出了两个良拟序 X_1和 X_2，它们的不变量相同，但 $\boldsymbol{w}(M^{r}(X_1)) \neq \boldsymbol{w}(M^{r}(X_2))$。

▶ **例 3.2**。 设 $H = \Sigma_{n<\omega}\Gamma_n$。 H 的一个有趣性质是， $\boldsymbol{w}(H) = \boldsymbol{h}(H) = \boldsymbol{o}(H) = \omega$。注意， $\boldsymbol{w}(M^{r}(H))$ $\leq \boldsymbol{o}(M^{r}(H)) = \omega^{\omega}$，并且对于所有 $0 < n < \omega$， $\boldsymbol{w}(M^{r}(H)) \geq \boldsymbol{w}(M^{r}(\Gamma_n)) = \omega^{n-1}$。因此， $\boldsymbol{w}(M^{r}(H))$ $= \omega^{\omega}$。

考虑 $X_1 = H + H$ 和 $X_2 = H + \omega$，这两个具有相同序数不变量的良拟序：$\boldsymbol{o}(X_i)$ $= \boldsymbol{h}(X_i) = \omega \cdot 2$，以及 $\boldsymbol{w}(X_i) = \omega$ 对于 $i \in \{\, 1,2 \,\}$。根据引理 1.12，

XX:10 集合有限多重集的序数度量

$\boldsymbol{w}(M^r(X_1)) = \boldsymbol{w}(M^r(H)) \odot \boldsymbol{w}(M^r(H)) = \omega^\omega \odot \omega^\omega = \omega^{\omega\cdot 2}$和 $\boldsymbol{w}(M^r(X_1)) = \boldsymbol{w}(M^r(H)) \odot \boldsymbol{w}(M^r(\omega)) = \omega^\omega \odot 1 = \omega^\omega$。

我们将引入一个新的不变量来解决这一非函数性问题，使多重集序的宽度成为函数。不过首先，我们将给出宽度的上界和下界。

▶**引理 3.3.** 设 X 是良拟序。那么

$$\boldsymbol{w}(M^r(X)) \leq \sup_{x\in X, n<\omega} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle}) \otimes n+1$$

证明。 我们定义如下记号 $\perp$：对于任意多重集 m，$m' \in M^r(X)$，$m \perp m'$ 当且仅当 $m\cap m' = \emptyset$且 $m \perp m'$。

换言之，$m \perp m'$ 当且仅当 m 和 m' 不相交，并且存在 $x \in m$，使得对所有 $y' \in m'$，$x \not\geq y'$，且存在 $x' \in m'$，使得对所有 $y \in m$，$x' \not\geq y$。特别地$x' \not\geq x$。因此，$m \perp m'$ 意味着存在 $x \in m$，使得$\langle x\rangle \perp m'$，这等价于$\langle x\rangle \perp m'$。现在：

$$\begin{aligned} M^r(X)_{\perp m} &\geq_{\mathrm{aug}} \bigsqcup_{m_1+m_2=m, m_1\neq\emptyset} \{\, m'+m_2 \,:\, m' \in M^r(X), m' \perp m_1 \,\} \\ &\equiv \bigsqcup_{m_1\subseteq m, m_1\neq\emptyset} M^r(X)_{\perp m_1} \\ &\leq_{\mathrm{st}} \geq_{\mathrm{aug}} \bigsqcup_{m_1\subseteq m, m_1\neq\emptyset} \bigsqcup_{x\in m_1} M^r(X)_{\perp\langle x\rangle} \end{aligned}$$

因此根据引理 1.2,

$$M^r(X)_{\perp m} \leq \bigoplus_{m_1\subseteq m, m_1\neq\emptyset} \bigoplus_{x\in m_1} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle}) \,.$$

设 $x \in m$，使得 $\boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle})$ 是极大的。则对于某个 $n < \omega$，有 $\boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp m}) \leq \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle})\otimes n$。因此根据公式（Res-w），

$$\boldsymbol{w}(M^r(X)) = \sup_{m\in M^r(X)} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp m}) + 1 \leq \sup_{x\in X, n<\omega} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle}) \otimes n+1 \,.$$

◀

下面给出一个类似的下界：

▶**引理 3.4。** 设 X 是一个良拟序。则

$$\boldsymbol{w}(M^r(X)) \geq \sup_{x\in X, n<\omega} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle}) \cdot n+1$$

证明。 该证明与引理 2.3 的证明具有相同的结构：我们研究 $M^r(X)$ 的剩余，其中包含与某个形如$\langle x\rangle \times n$的多重集不可比的每个元素，并将该剩余切分为一族准不可比子集。

根据公式（Res-w），

$$\begin{aligned} w(M^r(X)) &= \sup_{m\in M^r(X)} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp m}) + 1 \\ &\geq \sup_{x\in X, n<\omega} \boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle\times n}) + 1 \,. \end{aligned}$$

我们来计算任意 $x \in X$ 和 $n < \omega$下 $\boldsymbol{w}(M^r(X)^{\perp\langle x\rangle\times n})$ 的一个下界。对于所有$k \in [1,n]$，令 $M_k = \{\langle x\rangle \times (n-k) \cup m\colon\ m \in M^r(X)^{\perp\langle x\rangle}\}$。注意，对于任意 $k \in [1,n]$，都有 $M_k \equiv M^r(X)^{\perp\langle x\rangle}$；并且对于所有 $m \in M_k$，$m \perp \langle x\rangle \times n$。我们声称，$(M_k)_{k\in[1,n]}$ 是 $M^r(X)^{\perp(\langle x\rangle\times n)}$ 的一个准不可比子集族：令 $i < n$，并令 Y 为$M_1 \cup \cdots \cup M_i$的一个有限子集。我们将 m_Y和 M'_{i+1}定义为

$$m_y \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{j\le i} \bigcup_{m\in(M_j\cap Y)} (m \setminus (\langle x\rangle \times (n-j)))\,,$$

$$M'_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\ \langle x\rangle \times (n-i-1) \cup m_Y \cup m\ :\ m \in M^r(X)_{\perp\langle x\rangle}\ \}\,.$$

注意，M'_{i+1}是 M_{i+1}的子集，且与 M_{i+1}同构，并且 $Y \perp M'_{i+1}$。

因此，根据引理 1.19，$\boldsymbol{w}(M^r(X)^{\perp(\langle x\rangle\times n)}) \ge \boldsymbol{w}(M^r(X)^{\perp\langle x\rangle}) \cdot n$。 ◀

引理 3.3 和 3.4 给出的界实际上相同。此外，它们可以改写为如下形式：$M^r(X)$上的剩余归结为 X上的剩余：

▶**定理 3.5**。对于任意非线性良预序 X，

$$\boldsymbol{w}(M^r(X)) = \sup\{\ \boldsymbol{w}(M^r(X_{\not\ge x}))\cdot\omega\ :\ x \in X, X_{\perp x} \neq \emptyset\ \}\,. \tag{W}$$

证明。对于任意序数 α，上确界$_{n<\omega}(\alpha\cdot n+1) =$上确界$_{n<\omega}(\alpha \otimes n+1) = \alpha\cdot\omega$。因此，根据引理 3.3 和 3.4，

$$\boldsymbol{w}(M^r(X)) = \sup_{x\in X}(\boldsymbol{w}(M^r(X)_{\perp\langle x\rangle})\cdot\omega)\,.$$

令 $x \in X$。若 $X_{\perp x} = \emptyset$，则 $M^r(X)_{\perp\langle x\rangle} = \emptyset$。否则令 $y \in X_{\perp x}$。那么 $\{\langle y\rangle \cup m : m \in M^r(X_{\not\ge x})\} \le_{\text{st}} M^r(X)_{\perp\langle x\rangle} \le_{\text{st}} M^r(X_{\not\ge x})$。因此，若 $X_{\perp x} \neq \emptyset$，则 $\boldsymbol{w}(M^r(X)^{\perp\langle x\rangle}) = \boldsymbol{w}(M^r(X_{\not\ge x}))$；否则 $\boldsymbol{w}(M^r(X)^{\perp\langle x\rangle}) = 0$。◀

方程 (W) 虽然其归纳式表述使其不实用，但有两个原因令我们感兴趣：第一，它证明了 $\boldsymbol{w}(M^r(X)$ 是不可分解的。第二，它的结构与余项方程相呼应：它指的是 X 的一个剩余，而不是如人们可能预期的那样，方程 (Res-w) 中出现的剩余，而是方程 (Res-o) 的剩余。此外，这是一个上确界，其索引不是取自 X，而仅取自 X 中那些与其他元素不可比的元素。换言之，该上确界以去除了“线性”元素的 X 为索引。

这些观察促使我们定义了第四序数不变量：最大安全序型

▶定义 *3.6*（剥离子集、安全子集、最大安全序型）。对于任意良拟序 X，$str(X)\ def = \{\ x \in X\colon\ X_{\perp x} \neq \emptyset\ \}$ 是 X 的剥离子集。如果 X' 是 X 的子集，则称其为安全的：存在一个极大线性化 $\ell : X' \to \boldsymbol{o}(X')$（即一个态射），使得对于所有 $x_1, \ldots, x_n \in X'$，对于所有满足 $\ell(x) < \ell(x_i)$ 的 $x \in X'$，对于任意 $i \in [1,n]$，$(X_{\not\ge x_1,\ldots,x_n})_{\perp x} \neq \emptyset$。我们称 ℓ 验证了安全条件。

X 的最大安全序型，记作 $\mathbf{o}(X)$，是 X 的安全子集的最大序型的上确界：

$$\underline{\mathbf{o}}(X) \stackrel{def}{=} \sup\{\ \boldsymbol{o}(X')\ :\ X' \subseteq X\ \ safe\ \}\,.$$

注意到 $str(str(X)) = str(X)$，并且对于 X 的任意安全子集 X'，$X' \le_{\text{st}} str(X)$，因此 $\mathbf{o}(X) \le \boldsymbol{o}(str(X))$）。乍看之下，方程 (W) 似乎可以改写为关于 $\boldsymbol{o}(str(X)$ 的函数形式，但我们很快就会看到，像安全条件这样更受限制的条件，恰恰是构造这一归纳表达式所需的。

XX：12 有限多重集集合的序数度量

▶ **引理 3.7.** 对于任意良拟序 X，对于任意线性化 ℓ：$str(X) \to \boldsymbol{o}(str(X))$，存在 $str(X)$ 的一个安全子集 X'，使得将 ℓ 限制到 X' 后满足安全条件，并且 $\boldsymbol{o}(X') \geq \delta(\boldsymbol{o}(str(X)))$，其中

$$\delta(\alpha) \stackrel{def}{=} \begin{cases} \alpha \text{ if } \alpha \text{ is limit,} \\ \gamma + \lfloor n/2 \rfloor \text{ if } \alpha = \gamma + n \text{ with } \gamma \text{ limit and } n < \omega. \end{cases}$$

证明。 令 $\downarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} \{\ \gamma : \gamma < \beta\ \}$ 为任意序数 β。我们通过对 $\beta \leq \boldsymbol{o}(str(X))$ 进行归纳法证明：存在 $X_\beta \subseteq \ell^{-1}(\downarrow \beta)$，它是 $str(X)$ 的安全子集，其中将 ℓ 限制于 X_β 后验证安全条件，使得 $\boldsymbol{o}(X_\beta) \geq \delta(\beta)$。此外，对于所有 $\beta < \beta' \leq \boldsymbol{o}(str(X))$，$X_\beta \subseteq X_{\beta'}$。

令 $X_0 = \emptyset$，并且如果 $\beta = \beta' + 1$ 具有 β 极限序数，则令 $X_\beta = X_{\beta'}$。

如果对于某个 β' 有 $\beta = \beta' + 2$（它不必是极限序数），那么令 $x = \ell^{-1}(\beta')$ 并令 $x' = \ell^{-1}(\beta' + 1)$。如果 $X_{\beta'} \cup \{x\}$ 是 $\mathsf{str}(X)$ 的安全子集，则令 $X_\beta = X_{\beta'} \cup \{x\}$。否则，这意味着存在 $y \in X_{\beta'}$，使得对于任意 $z \in \mathsf{str}(X)^{\perp y}$，都有 $z \geq x$。假设 $X_{\beta'} \cup \{x'\}$ 也不是安全子集：这同样意味着存在 $y' \in X_{\beta'}$，使得对于任意 $z \in \mathsf{str}(X)^{\perp y}$，都有 $z \geq x'$。我们知道 $x \not\geq x'$，并且 y、$y' \not\geq x$、x'，由此可以推导出 $y \perp x$、$y' \perp x'$ 和 $x \geq y'$。我们还可以推导出，如果 $x \perp x'$，那么 $x' \geq y$，否则 $x \perp y'$。因此 $y \perp y'$，这与假设矛盾。所以 $X_\beta = X_{\beta'} \cup \{x'\}$ 是安全的。在这两种情况下，根据归纳假设，$\boldsymbol{o}(X_\beta) = \boldsymbol{o}(X_{\beta'} + 1) \geq \delta(\beta') + 1 \geq \delta(\beta)$。

若 β 是极限序数，则令 $X_\beta = \cup_{\beta' < \beta} X_{\beta'}$。容易看出 X_β 是安全的，并且根据归纳假设，$\boldsymbol{o}(X_\beta) \geq \sup_{\beta' < \beta} \delta(\beta') = \beta$。◀

因此 $\delta(\boldsymbol{o}(str(X))) \leq \mathbf{o}(X) \leq \underline{\boldsymbol{o}}(str(X))$，于是存在一个安全子集，其最大序型达到 $\mathbf{o}(X)$。我们还可以观察到，当 $\boldsymbol{o}(str(X))$ 是极限序数时，$\mathbf{o}(X) = \underline{\boldsymbol{o}}(str(X))$，因此这为最大安全序型达到最大序型提供了一个充分条件。

下面给出方程 (W) 的一个具体的非归纳式改写，揭示了 $\boldsymbol{w}(M^r(X))$ 如何依赖于$\mathbf{o}(X)$。

▶ **定理 3.8**（多重集序的宽度）。设 X 是一个良拟序。
那么 $\boldsymbol{w}(M^r(X)) = \omega^{\mathbf{o}(X)}$。

证明。 $(\geq)$ 设 X' 是 X的一个安全子集。对 $\boldsymbol{o}(X')$进行归纳：
当 $\boldsymbol{o}(X') = 0$ 时，$\boldsymbol{w}(M^r(X)) \geq 1$。
设 $\boldsymbol{o}(X') > 0$：根据定理 3.5，

$$\begin{aligned} w(M^r(X)) &= \sup\{\ \boldsymbol{w}(M^r(X_{\not\geq x})) \cdot \omega\ :\ x \in X, X_{\perp x} \neq \emptyset\ \} \\ &\geq \sup\{\ \boldsymbol{w}(M^r(X_{\not\geq x})) \cdot \omega\ :\ x \in X'\ \}, \end{aligned}$$

因为对于任意 $x \in X'$，$X_{\perp x} \neq 0$。
X' 是安全的，因此存在一个极大线性化 ℓ：$X' \to \boldsymbol{o}(X')$，它满足安全条件。设 $x = \ell(\beta)$，其中某个 $\beta < \boldsymbol{o}(X')$。那么 $\ell^{-1}(\downarrow \beta)$ 是 $X'_{\not\geq x}$ 的一个安全子集；满足安全条件的极大线性化是 l 限制在 $\ell^{-1}(\downarrow \beta)$ 上的结果。因此，根据归纳假设，$\boldsymbol{w}(M^r(X_{\not\geq x})) \geq \omega^\beta$。因此：

$$w(M^r(X)) \geq \sup\{\ \omega^\beta \cdot \omega\ :\ \beta < \boldsymbol{o}(X')\ \} = \omega^{\boldsymbol{o}(X')}.$$

$(\leq)$ 根据 $\mathbf{o}(X)$ 归纳法。
如果 $\mathbf{o}(X) = 0$，那么 X 是线性的，因此 $\boldsymbol{w}(M^r(X)) = 1$。
否则，令 $\alpha = \mathbf{o}(X)$。假设存在 $x \in X$，满足 $X_{\perp x} \neq \emptyset$，使得$\mathbf{o}(X_{\not\geq x}) = \alpha$。这意味着存在 $X_{\not\geq x}$ 的安全子集 X' 以及一个极大

线性化 $\ell\colon\ X' \to \alpha$，其满足安全条件。令 $\ell'\colon\ X_{\not\geq x} \cup \{x\} \to \alpha + 1$，使得对于任意 $y \in X'$，$\ell'(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha$ 且 $\ell'(y) \stackrel{\text{def}}{=} \ell(y)$。则 ℓ' 是满足安全条件的极大线性化，适用于 X 的子集 $X' \cup \{x\}$，该子集的最大序型为$\alpha + 1$。因此 $\mathbf{o}(X) \geq \alpha + 1$，我们得出矛盾。

对于所有满足 $\overline{X_{\perp x}} \neq \emptyset$ 的 $x \in X$，我们现在知道 $\underline{\mathbf{o}}(X_{\not\geq x}) < \alpha$。因此，根据归纳假设，$\boldsymbol{w}(M^r(X_{\not\geq x}))\cdot\omega \leq \omega^\alpha$。所以，根据定理 3.5，$\boldsymbol{w}(M^r(X)) \leq \omega^{\mathbf{o}(X)}$。 ◀

这对这个新的不变量提出了许多问题：我们已经知道，它受到紧密限制（引理 3.7），并且可以由某个安全子集的最大序型达到。我们还知道，当 $\boldsymbol{o}(str(X)) = \boldsymbol{o}(X)$ 是一个极限序数时，良拟序的最大安全序型即可达到其最大序型。以组合方式计算它也相当容易：

▶ 命题 3.9。对于任意非空良拟序 A，B，$\mathbf{o}(A + B) = \mathbf{o}(A) \pm \mathbf{o}(B)$，$\mathbf{o}(A \times B) = 1 + (\boldsymbol{o}(A) - 1) \oplus (\boldsymbol{o}(B) - 1)$，$\mathbf{o}(A \times B) \geq (\boldsymbol{o}(A) - 1) \otimes \boldsymbol{o}(B)$。

结论

我们计算了有限多重集在多重集嵌入下的宽度。对于多重集序，我们找到了其高度的一个简单公式，并证明其宽度不能由任何常见的序数不变量表示。尽管如此，我们引入了一种新的序数不变量——最大安全序型，在该不变量下，宽度可以表示为函数。

研究最大安全序型是一个有待进一步探索的课题：是否存在等价的刻画？它与其他概念有何关联？能否通过组合方式计算？能否定义一个有趣的良拟序类，使得最大安全序型总是与最大序型一致？

参考文献

1 U. Abraham 和 R. Bonnet。满足有限反链性质的偏序集的豪斯多夫定理。Fund. Math., 159(1):51–69, 1999。 doi:10.4064/fm-159-1-51-69。2 H. J. Altman。序数上的中间算术运算。Mathematical Logic Quarterly, 63(3–4):228–242, 2017。 doi:10.1002/malq.201600006。3 M. Aschenbrenner 和 Wai Yan Pong。单项式理想的序。Fundamenta Mathemat- icae, 181(1):27–74, 2004。4 A. Blass 和 Y. Gurevich。程序终止与良偏序。ACM Trans. Computational Logic, 9(3):1–26, 2008。 doi:10.1145/1352582.1352586。5 R. Bonnet、A. Finkel、S. Haddad 和 F. Rosa-Velardo。良结构转移系统表达能力的序数理论。Information and Computation, 224:1–22, 2013。 doi:10.1016/j.ic.2012.11.003。6 D. H. J. de Jongh 和 R. Parikh。良偏序与层级。Indag. Math., 39(3):195–207, 1977。 doi:10.1016/1385-7258(77)90067-1。7 N. Dershowitz 和 Z. Manna。用多重集序证明终止。Communications of the ACM, 22(8):465–476, 1979。 doi:10.1145/359138.359142。8 M. Džamonja、S. Schmitz 和 Ph. Schnoebelen。良拟序和有限反链序中的序数不变量。载于 P. Schuster、M. Seisenberger 和 A. Weiermann（编），Well Quasi-Orders in Computation, Logic, Language and Reasoning，《Trends in Logic》第 53 卷，第 2 章，第 29–54 页。Springer，柏林／海德堡，德国，2020。 doi:10.1007/978-3-030-30229-0 2.

9 D. Figueira、S. Figueira、S. Schmitz 和 Ph. Schnoebelen。利用狄克逊引理得到的 Ackermann 型和原始递归界。载于第 26 届 IEEE 计算机科学逻辑研讨会（LICS 2011）论文集，加拿大多伦多，2011 年 6 月，第 269–278 页。IEEE Comp. Soc. Press，2011。doi:10.1109/LICS.2011.39。10 G. Higman。抽象代数中的整除序。Proc. London Math. Soc. (3), 2(7):326–336, 1952。 doi:10.1112/plms/s3-2.1.326。11 I. Kříž 和 R. Thomas。拉姆齐理论与良偏序理论中的序数类型。载于 J. Nešetřil 和 V. Rödl（编），Mathematics of Ramsey Theory，《算法与组合数学》第 5 卷，第 57–95 页。Springer，柏林／海德堡，德国，1990。 doi:10.1007/978-3-642-72905-8 7.12 J. B. Kruskal。良拟序、树定理与 Vazsonyi 猜想。Trans. Amer. Math. Soc., 95(2):210–225, 1960。 doi:10.2307/1993287。13 D. Schmidt。良偏序及其最大序型。载于 P. Schuster、M. Seis- enberger 和 A. Weiermann（编），Well Quasi-Orders in Computation, Logic, Language and Reasoning，《Trends in Logic》第 53 卷，第 12 章，第 351–391 页。Springer，2020。doi:10.1007/978-3-030-30229-0_13。14 S. Schmitz。有损计数器机的参数化复杂性。载于第 46 届国际自动机、语言与程序设计大会（ICALP 2019）论文集，希腊帕特雷，2019 年 7 月，《莱布尼茨国际信息学会议论文集》第 132 卷，第 129:1–129:15 页，德国达格施图尔，2019。莱布尼茨信息学中心。 doi:10.4230/LIPIcs.ICALP.2019.129。15 J. Van der Meeren、M. Rathjen 和 A. Weiermann。良偏序与大韦布伦数。《数学逻辑档案》，54(1–2):193–230, 2015。 doi:10.1007/s00153-014-0408-5。16 I. Vialard。良序的笛卡尔积。arXiv:2202。07487 [cs.LO],2022 年 2 月。已投稿发表。URL： http://arxiv.org/abs/2202.07487。17 A. Weiermann。证明项重写系统的终止性。载于第 5 届计算机科学逻辑研讨会（CSL '91）论文集，瑞士伯尔尼，1991 年 10 月，《计算机科学讲义》第 626 卷，第 419–428 页。Springer，1991。 doi:10.1007/BFb0023786。18 A. Weiermann。有限多重集上项序的最大序型计算。载于第 5 届欧洲可计算性大会（CiE 2009）论文集，德国海德堡，2009 年 7 月，《计算机科学讲义》第 5635 卷，第 488–498 页。Springer，2009。doi:10.1007/978-3-642-03073-4_50。

A 关于序数算术

我们假定读者熟悉序数 [2]上的和 $\alpha+\beta$ 与积 $\alpha\cdot\beta$ 的概念。不过，我们还是回顾一些读者可能不太熟悉的定义。

▶ **定义 A.1** (左减法)。 对于任意序数 $\alpha\geq\beta$，差 $\alpha-\beta$ 是满足 $\beta+(\alpha-\beta)=\alpha$的唯一序数。特别地，

$$\alpha-1\stackrel{def}{=}\begin{cases}\alpha \text{ if } \alpha \text{ is infinite,}\\ n-1 \text{ if } \alpha=n<\omega\,.\end{cases}$$

▶ **定义 A.2** (康托尔正规形)。 任意序数 α 都可以表示为康托尔正规形，即 $\alpha=\sum_{i<n}\omega^{\alpha_i}$，其中 α_0、…、α_{n-1}是满足 $\alpha_0\geq\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_{n-1}$的序数。此表示是唯一的。

▶ **定义 A.3** (自然运算)。 设 $\alpha=\sum_{i<n}\omega^{\alpha_i}$ 和 $\beta=\sum_{i<m}\omega^{\beta_i}$ 是康托尔正规形中的两个序数。

自然和，又称黑森堡和， $\alpha\oplus\beta$ 定义为 $\gamma=\sum_{i<n+m}\omega^{\gamma_i}$，其中 $\gamma_0\geq\cdots\geq\gamma_{n+m-1}$对 α_0、…、α_{n-1}、β_0、…、β_{m-1}重新排序。

自然积 $\alpha\otimes\beta$ 定义为 $\bigoplus_{i<n,\ j<m}\omega^{\alpha_i\oplus\beta_j}$。

另一种积是由黑森堡和导出的:

▶ **定义 A.4** （基于海森伯格的积 [1]）。 基于海森伯格的积 $\alpha \odot \beta$ 通过以下关系归纳定义:

$$\alpha \odot 0 = 0\,,\ \alpha \odot (\beta + 1) = (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha\,,$$
$$\alpha \odot \beta = \sup\{\ \alpha \odot \gamma :\ \gamma < \beta\ \} \text{ 对于极限序数 } \beta。$$

我们总有 $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \odot \beta \leq \alpha \otimes \beta$。

▶**定义 A.5**。序数 α 是:

- 当 $\omega^\alpha = \alpha$ 时为一个 ϵ-数 。当对所有 β、$\delta < \alpha$，都有 $\beta + \delta < \alpha$ 时，称其为不可分解 。等价地，不可分解序数是形如 ω^β 的序数，其中 β 是任意序数。它们有时也称为主加法序数。当对所有 β、$\delta < \alpha$，都有 $\beta \cdot \delta < \alpha$ 时，称其为乘法不可分解 。等价地，乘法不可分解序数是形如 ω^β 的序数，其中 β 是不可分解序数。它们有时也称为主乘法序数。