arXiv:2302.09917v1 [math.MG] 20 Feb 2023

关于对偶曲率测度的子空间集中

KATHARINA ELLER 和 MARTIN HENK

Abstract. 我们研究凸体的对偶曲率测度的子空间集中，其中这些凸体满足 $\gamma(-K) \subseteq K$，且某个 $\gamma \in (0,1]$。我们给出了依赖于γ的子空间集中上界，尤其是重新得到了对称情形下已知的结果。证明基于一种统一方法，通过散度定理证明必要的子空间集中条件。

1. Introduction

令 $\mathcal{K}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中凸体的集合，即所有具有非空内部的凸紧子集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 构成的族。含原点于其内部的凸体子族，即 $0 \in \operatorname{int} K$，记为 $\mathcal{K}^n_{(o)}$；原点对称凸体的子集，也就是满足 $K = -K$ 的集合 $K \in \mathcal{K}^n$，记为 $\mathcal{K}^n_e$。若凸体 K 的质心位于原点，则称其为中心化的，即

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(K)} \int_K x \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = 0,$$

其中，一般而言，$\mathcal{H}^k$ 表示 k维豪斯多夫测度；提及 n维体积时，我们将用 vol 代替$\mathcal{H}^n$。$\mathbb{R}^n$ 中所有中心对称凸体的集合记为 $\mathcal{K}^n_c$，特别地，我们有 $\mathcal{K}^n_e \subset \mathcal{K}^n_c \subset \mathcal{K}^n_{(o)}$。

按照惯例，对于 x、$y \in \mathbb{R}^n$，记 $\langle x, y\rangle$ 为$\mathbb{R}^n$上的标准内积，记$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ 为 x的欧几里得范数。我们用 B_n 表示n维欧几里得单位球，即 $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$，且$\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_n$，其中 ∂A 是集合 $A \subset \mathbb{R}^n$的边界点集。

经典布伦-明可夫斯基理论有两种影响深远的推广，即 L_p-布伦-明可夫斯基理论和对偶布伦-明可夫斯基理论。二者都是现代凸几何的基石。粗略地说，它们都是通过研究凸体之和的体积而产生的，其中构造和所用的通常明可夫斯基加法被另一种加法所取代。对于 L_p-布伦-明可夫斯基理论，所用的是所谓的 L_p-加法，由 Firey 引入 [17] 和 Lutwak[35, 36, 37]；相关内容亦可参见 [42, 第 9.1、9.2]节。对偶布伦-明可夫斯基理论则采用了所谓的径向加法，该加法由 Lutwak 引入[34]，（另见 [42,第 9.3]节）。

经典布伦-明可夫斯基理论的核心问题之一是明可夫斯基-克里斯托费尔问题：该问题旨在确定刻画球面上的有限博雷尔测度中凸体的表面积测度所需的充要条件。关于这些表面积测度的定义

以及明可夫斯基-克里斯托费尔问题的最新进展，请参阅[42, 第 8]章。

在 Huang、Lutwak、Yang 和 Zhang 的开创性论文 [27] 中，对偶布伦-明可夫斯基理论中这些表面积测度所缺失的“对偶”对应物首次被提出。它们称为对偶曲率测度。与表面积测度不同，这些测度具有显式的积分表示。为此，对于 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$，令 ρ_K 为径向函数；也就是说，对于 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，令

$$\rho_K(x) = \max\{\rho > 0 : \rho\, x \in K\}.$$

那么，对于 $q \in \mathbb{R}$，凸体 K 的 q 阶对偶曲率测度是定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的有限博雷尔测度，其表达式为

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}(\eta) = \frac{1}{n} \int_{\alpha^*_K(\eta)} \rho_K(u)^q \, d\mathcal{H}^{n-1}(u),$$

其中，对于 Borel 集 $\eta \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$，集合 $\alpha^*_K(\eta)$由所有满足以下条件的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 构成：凸体 K 的边界点 $\rho_K(u)u$ 的外单位法向量属于 η。

类比上述经典的闵可夫斯基-克里斯托费尔问题，Huang 等人在 [27]，提出的对偶闵可夫斯基问题，旨在确定有限博雷尔测度 μ 何时是球面上的凸体 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$的 q 阶对偶曲率测度，并给出相应的充要条件。

在这些对偶曲率测度中，有两种特别重要的测度。第 0 阶对偶曲率测度与 K 的极体的亚历山德罗夫积分曲率测度相差一个常数，而相应的闵可夫斯基问题称为亚历山德罗夫问题，已由亚历山德罗夫 [1] 解决。关于亚历山德罗夫问题在 L_p 情形下的推广，请参阅 [28, 39] 及其中的参考文献。

n 阶对偶曲率测度实际上就是锥体积测度 V_K of K，即

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{K,n}(\eta) = \mathrm{V}_K(\eta) = \frac{1}{n} \int_{\nu_K^{-1}(\eta)} \langle \nu_K(u), u \rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-1}(u),$$

其中 $\nu_K(\cdot)$ 是球面像映射（见第 2 节），本质上是 K 正则边界点上的高斯映射。锥体积测度的刻画称为对数闵可夫斯基问题。过去几年中，这一问题在许多不同背景下得到了广泛研究，参见例如
[3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 14, 25, 32, 43, 44, 46], ；关于一般 L_p 情形下的结果，参见例如 [2, 15, 23, 29]。

对于对偶闵可夫斯基问题，有一个显而易见的必要条件，即测度 μ 不能集中在 $\mathbb{S}^{n-1}$的任何闭半球上。正如赵一鸣 [47]所证明的，对于 $q < 0$，这一条件出乎意料地也是充分的。对于正参数 q，情况似乎有所不同，并且会出现定量的“子空间集中”。为描述这一现象，我们设

$$\mathcal{I}(\mu, L) = \frac{\mu(\mathbb{S}^{n-1} \cap L)}{\mu(\mathbb{S}^{n-1})},$$

对于一个线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$、维数为 $\dim L \geq 1$，以及定义在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的非零有限博雷尔测度μ 。在 B¨or¨oczky、Henk、Huang、Lutwak 的共同努力下，

Pollehn、Yang、Zhang、Zhao, [9, 12, 27, 48], 对偶闵可夫斯基问题的一个完整解已知适用于偶数情形，其中 $q \in (0, n)$。

定理 I（定理 1.1, [12]）。设 $q \in (0, n)$，且设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$上的偶的非零有限博雷尔测度。那么存在一个凸体 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 使得 $\mu = \mathbf{C}_{K,\,q}$ 当且仅当

$$\mathcal{I}(\mu, L) < \min\left\{\frac{\dim L}{q}, 1\right\}$$

对于所有真线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$。

对于 $q = n$，即对于对数闵可夫斯基问题，B$\ddot{\text{o}}$r$\ddot{\text{o}}$czky、Lutwak、Yang 和 Zhang 已经给出了偶情形下的完整解答。

定理 II（定理 1.1, [11]）。设 μ 是 $\mathbb{S}^{n-1}$上的偶的非零有限博雷尔测度。那么存在一个凸体 $K \in \mathcal{K}_e^n$ 使得 $\mu = \mathbf{C}_{K,\,n}$ 当且仅当

$$\mathcal{I}(\mu, L) \le \frac{\dim L}{n}, \tag{1.1}$$

对于所有真线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$，并且当 (1.1)对某个 L 成立时，存在一个互补子空间 L' 使得 μ 集中在 $(L \cup L') \cap \mathbb{S}^{n-1}$上。

对于 $q > n$，对偶（偶）闵可夫斯基问题尚未解决，不过至少对于 $q > n + 1$, 已知一些必要条件。

定理 III (定理 1.7, [26])。设 $q > n + 1$ 且 $K \in \mathcal{K}_e^n$。则

$$\mathcal{I}(\widetilde{\mathbf{C}}_{K,q}, L) < \frac{\dim L + q - n}{q}, \tag{1.2}$$

对于所有真线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$,

这个不等式是最佳可能的，而且很可能也是充分条件。对于$n = 2$，(1.2) 甚至对 $q > 2$ 也成立。

对于非偶情形，我们对 $q > 0$ 所知甚少。事实上，关于这一点，只有 $q = n$ (锥体积测度) 情形得到过研究，即便如此，我们也没有匹配的必要和充分条件。B$\ddot{\text{o}}$r$\ddot{\text{o}}$czky 和 Henk [7] (多面体情形另见 [25]) 证明了，对于中心对称凸体，(1.1) 也是必要条件。

定理 IV (定理 1.3, [7]). 设 $K \in \mathcal{K}_c^n$. 则

$$\mathcal{I}(\widetilde{\mathbf{C}}_{K,n}, L) \le \frac{\dim L}{n},$$

对于所有真线性子空间 $L \subset \mathbb{R}^n$，并且当某个L 取等号时，存在一个互补子空间 L'，使得 μ 集中在 $(L \cup L') \cap \mathbb{S}^{n-1}$上。

定理I、III、IV 中不等式必要性的证明基于三种不同的方法。本文的主要目的是：i）统一这些方法；ii）基于这种统一，首次建立任意体的对偶曲率测度的子空间集中结果 $K \in \mathcal{K}_{(o)}^n$。

定理 1.1. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$、 $\gamma \in (0,1]$ 使得 $\gamma(-K) \subseteq K$。设 $L \subset \mathbb{R}^n$为一个真子空间，并设 $q \in \mathbb{R}$ 满足 $q >$ 维 $L+1$。则

$$\mathcal{I}(\widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}, L) \leq \begin{cases} \frac{\dim(L)+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}(q-\dim(L))}{q}, q \leq n, \\ \frac{(\dim(L)+q-n)+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}(n-\dim(L))}{q}, q > n+1. \end{cases}$$

对于 $K \in \mathcal{K}^n_e$，即 $\gamma = 1$，该定理实质上蕴含了定理 I 和定理 III的必要性部分。取值范围 $q \leq n$ 中的附加限制 $q >$ 维 $L+1$（而非 $q >$ 维 L）$q \leq n$ 是由我们更一般的方法造成的，但很可能并非必要。对于中心对称凸体$K \in \mathcal{K}^n_c$，上述定理中的非对称参数 γ 至少可取为 $1/n$ （参见 [24, 45]），由此得到如下推论

推论 1.2. 设 $K \in \mathcal{K}^n_c$。设 $L \subset \mathbb{R}^n$ 为真子空间，且设 $q \in \mathbb{R}$满足 $q >$ 维 $L+1$。则

$$\mathcal{I}(\widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}, L) \leq \begin{cases} \frac{\dim(L)+\frac{n-1}{n+1}(q-\dim(L))}{q}, q \leq n, \\ \frac{(\dim(L)+q-n)+\frac{n-1}{n+1}(n-\dim(L))}{q}, q > n+1. \end{cases}$$

数值结果表明，对于 $K \in \mathcal{K}^n_c$，与偶情形一样，相同的不等式也成立。正如我们将看到的，采用我们的方法，这相当于控制方向导数的某个积分；只有在 $q = n$ 的情况下，我们才能高效地处理这一积分，从而得到定理 IV。

为了描述我们基于 [7, 9, 26] 的方法，我们还需要一些记号。对于 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$， $L \subset \mathbb{R}^n$ 一个真子空间以及 $q \in \mathbb{R}$满足 $q >$ 维数 L 的

$$g_{K,L,q}(x) = \int_{K \cap (x+L^\perp)} |z|^{q-n} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{n-\dim L}(z)$$

其中 $x \in K|L$，也就是说， x 属于 K 在 L上的正交投影，而 $L^\perp$ 是 L 的正交补。对于 $q < n$，被积函数在原点处有奇点，且无界。然而，只要要求$q >$ 维数 L，积分就存在。

通过应用 [40] 中的一个广义散度定理，并建立截面函数 g_K的正则性$_{L,\ q}$ 我们将证明

定理 1.3. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$， $L \subset \mathbb{R}^n$ 为一个真子空间，并设 $q \in \mathbb{R}$满足 $q >$ 维数 $L+1$。则有

$$\mathcal{I}(\widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}, L) = \frac{\dim L}{q} + \frac{1}{n} \frac{1}{\widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{K|L} \langle \nabla g_{K,L,q}(x), x \rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim L}(x).$$

对于 $q = n$，函数$g_{K,\ L,\ n}$ 是对数凹的。基于这一性质， [7] 中证明了$\int_{K|L} \langle \nabla g_{K,\ L,\ n}(x)\ x \rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim L}(x) \leq 0$。这意味着定理IV 成立，但维数范围 $L+1 \geq q >$维数 L除外。然而，对于 $q \neq n$，切片函数并非对数凹，因此其表现截然不同。

定理 1.1 将由定理1.3 及以下界立即推出

定理 1.4。设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, $\gamma \in (0,1]$ 满足 $\gamma(-K) \subseteq K$。设 $L \subset \mathbb{R}^n$为真子空间，并设 $q \in \mathbb{R}$ 满足 $q > \dim L + 1$。则有

$$\frac{1}{n\widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_{K|L} \langle \nabla g_{K,L,q}(x), x\rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim L}(x) \leq \begin{cases} \frac{q-\dim(L)}{q}\frac{1-\gamma}{1+\gamma}, q \leq n, \\ \frac{(q-n)+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}(n-\dim(L))}{q}, q > n+1. \end{cases}$$

关于光滑情形下对偶闵可夫斯基问题的结果，我们请参阅[13, 30, 33]及其中的参考文献。本文组织如下：凸几何中的必要记号和预备知识将在第2节给出。定理1.3 的证明见第3 节，我们实际上证明了一个适用于比$g_{K,L,q}(x)$ 更大的函数类的结果（见定理3.8）。第4 节用于证明定理1.4 ，从而也证明定理1.1。

2. 预备知识与记号

我们先介绍关于凸体和函数的一些基本事实，相关内容请参阅[18, 22, 41, 42]。若函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足 $f((1-\lambda)x+\lambda y) \geq \min\{f(x) f(y)\}$，对所有 x， $y \in \mathbb{R}^n$均成立， f 称为拟凹函数（或单峰函数）。

通常，函数 $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$，若存在常数 $L \geq 0$，使得对所有 $x, y \in A$ 均成立，则称其为利普希茨连续函数，或简称利普希茨函数

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

函数 $f: A \to \mathbb{R}^m$ 称为局部利普希茨函数，如果对每个 $x \in A$，都存在一个开邻域 $U \subseteq A$，使得 $f_{|U}$ 是利普希茨函数。通过标准的紧性论证可知，局部利普希茨函数$f: A \to \mathbb{R}^m$ 在 A的所有紧子集上都是利普希茨函数。

对于 $p \in \mathbb{R}$，我们用 $H(p,n)$表示所有函数 $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 的类，这些函数是 p 次正齐次的，即对所有 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$和 $\alpha > 0$，均有

$$f(\alpha x) = \alpha^p f(x).$$

注意，对于 $p < 0$和 $f \in H(p,n)$，我们必有 $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$。下一个命题陈述了这样一个事实：函数 $f \in H(p,n)$若限制在球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上是利普希茨函数，则其在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上是局部利普希茨函数。为便于后续使用，我们将以相当明确的形式陈述这一事实。

引理 2.1. 设 $p \in \mathbb{R}$, $f \in H(p,n)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上是利普希茨的。那么 f 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上是局部利普希茨的。更确切地说，设 $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$。那么对所有 x, $y \in a + \frac{1}{2}|a|B_n$，我们有

$$|f(x) - f(y)| \leq c_f |a|^{p-1} |x-y|,$$

其中 c_f 是一个仅取决于 f的常数。

证明。首先我们注意到，范数的幂函数在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$上是局部利普希茨的。为此，我们注意到

$$\max_{z \in a+\frac{1}{2}|a|B_n} |z|^{p-1} = c_p \, |a|^{p-1}$$

其中 c_p 是一个仅取决于 p的常数。对于 $p \neq 0$，由 x的中值定理可得，$y \in a + \frac{1}{2}|a|B_n$

$$\begin{aligned} | \, |x|^p - |y|^p \, | &\leq |p| \left(\max_{z \in a+\frac{1}{2}|a|B_n} |z|^{p-1} \right) |x-y| \\ &= \bar{c}_p \, |a|^{p-1} \, |x-y| \, , \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\bar{c}_p$ 是一个仅取决于 p的常数。对于 $p = 0$，令 $\bar{c}_p = 0$，该不等式显然仍然成立。

现在令 $\overline{z} = z/|z| \in \mathbb{S}^{n-1}$，其中 $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$，并且令 $\alpha = \max\{f(z) : z \in \mathbb{S}^{n-1}\}$。根据假设，存在常数 L，使得$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \leq L \, |\overline{x} - \overline{y}|$对所有 x、$y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$均成立。由于凸函数$|t\overline{x} - \overline{y}|^2$，$t \in \mathbb{R}$在 $t = \langle \overline{x}$处取最小值，$\overline{y} \rangle \leq 1$，因此对于 $|x| \geq |y|$，我们得到

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \leq L \, |\overline{x} - \overline{y}| \leq L \left| \frac{|x|}{|y|} \overline{x} - \overline{y} \right| = L \frac{1}{|y|} \, |x-y| \, . \tag{2.2}$$

那么，对 x，$y \in a + \frac{1}{2}|a|B_n$，$|x| \geq |y|$，根据（2.1）和（2.2），可写为

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= | \, |x|^p \, f(\overline{x}) - |y|^p \, f(\overline{y}) | \\ &\leq |y|^p \, |f(\overline{x}) - f(\overline{y})| + |f(\overline{x})| \, | \, |x|^p - |y|^p \, | \\ &\leq |y|^{p-1} \, L \, |x-y| + f(\overline{x}) \bar{c}_p \, |a|^{p-1} \, |x-y| \\ &\leq (c_p \, L + \alpha \bar{c}_p) \, |a|^{p-1} \, |x-y| \, . \end{aligned}$$

由 $c_f = c_p \, L + \alpha \bar{c}_p$，结论得证。 □

对于给定的凸体 $K \in \mathcal{K}^n$，支撑函数 $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义为

$$h_K(u) = \max_{x \in K} \langle u, x \rangle \, .$$

支撑函数是凸的、连续的，特别地，$h_K \in H(1, n)$。超平面

$$H_K(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = h_K(u)\}$$

是 K 的支撑超平面；对于边界点 $v \in \partial K \cap H_K(u)$，向量 u 称为外法向量。若进一步有 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$，则其为外单位法向量。设 $\partial^* K \subseteq \partial K$ 为所有具有唯一外单位法向量的边界点组成的集合。我们指出，不具有唯一外法向量的边界点集合的测度为零，即 $\mathcal{H}^{n-1}(\partial K \setminus \partial^* K) = 0$。

球面像映射 ν_K： $\partial^* K \to \mathbb{S}^{n-1}$ 将点 x 映射到其唯一的外单位法向量。

支撑函数的一种对偶对应概念是径向函数ρ_K： $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ 对于 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$。其定义为

$$\rho_K(u) = \max\{\rho > 0 : \rho u \in K\}.$$

径向函数 ρ_K 为正、连续，并且关于欧几里得度量在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上满足利普希茨条件，具有拟凹性且 $\rho_k \in H(-1,n)$。

令 $\Omega \subset \mathbb{S}^{n-1}$ 为所有满足以下条件的单位向量的集合：对于 $u \in \Omega$，边界点 $\rho_K(u)\, u$ 具有唯一的外法向量。映射 $\alpha_K\colon \Omega \to \mathbb{S}^{n-1}$，其中 $\alpha_K(u) = \nu_K(\rho_K(u)\, u)$，称为径向高斯映射。对于$\eta \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$，$\eta$ 的反向径向高斯像定义为

$$\alpha_K^*(\eta) = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} \,|\, \rho_K(u)u \in H_K(v) \text{ for some } v \in \eta\}.$$

的反向径向高斯像由所有满足以下条件的 $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ 组成：边界点 $\rho_K(u)u$ 具有属于 η 的外单位法向量（参见，例如[27]）。

K中两点之间的最大欧几里得距离，即 K的直径，记为 $D(K)$；对于 A, $B \subset \mathbb{R}^n$

$$d(A,B) = \inf\{\delta > 0 \,|\, A \subseteq B + \delta B_n \text{ and } B \subseteq A + \delta B_n\}$$

表示 A 与 B之间的豪斯多夫距离。

3. Proof of Theorem 1.3

如前所述，我们对定理1.3 的证明策略允许将对偶曲率测度的定义略作扩展，使其依赖于满足齐次性和利普希茨连续性的函数 φ 。受以往推广的启发，例如[38] ，本节将以这一广义形式陈述结果。

定义 3.1. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$、$q \in \mathbb{R}$，且 $\varphi \in H(q-n,n)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上利普希茨连续。对于 Borel 集 $\eta \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$，令

$$\tilde{C}_{K,\varphi,q}(\eta) = \frac{1}{n}\int_{\alpha_K^*(\eta)} \varphi(u)\rho_K(u)^q \, du.$$

显然，当 $\varphi = |\cdot|^{q-n} = \rho_{B_n}^{n-q}$ 时，我们得到对偶曲率测度。不假设齐次性和利普希茨连续性时，我们可以将其与已有定义联系起来：当 $\varphi = \rho_Q^{n-q}$ 时，Lutwak、Yang 和 Zhang 在[38] 中引入的、以星体 Q 为对象的 q 阶对偶曲率测度便可恢复。对于 $\varphi = (h_K \circ \alpha_K)^{-p}\rho_Q^{n-q}$，则可得到 [38] 中引入的 L_p 对偶曲率测度。为求完整，我们提及还有一种更一般的定义，即在 [19, 20] 中引入并研究的一般对偶 Orlicz 曲率测度。不过，我们的定义是为本文提出的新方法量身定制的。

类似于[9, 引理 2.1]，我们可以表示 $\tilde{C}_{K,\varphi,q}(\eta)$ 对于 $q > 0$ 可表示为函数 $\varphi(x)$ 的积分。

引理 3.2。设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$、$q > 0$ 和 $\varphi \in H$（$q-n$、n）。那么

$$\widetilde{C}_{K,\varphi,q}(\eta) = \frac{q}{n}\int_{\{x \in K : x/|x| \in \alpha_K^*(\eta)\}} \varphi(x)\, d\mathcal{H}^n(x). \tag{3.1}$$

证明。 如 [9] 所示，利用球坐标、定义 3.1以及 φ的齐次性可得：

$$\begin{aligned}\frac{q}{n}\int_{\{x\in K:x/|x|\in\alpha_K^*(\eta)\}}\varphi(x)\,d\mathcal{H}^n(x) &= \frac{q}{n}\int_{\alpha_K^*(\eta)}\int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1}\varphi(ru)\,dr\,du\\ &= \frac{q}{n}\int_{\alpha_K^*(\eta)}\varphi(u)\int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1+q-n}\,dr\,du\\ &= \frac{1}{n}\int_{\alpha_K^*(\eta)}\varphi(u)\rho_K(u)^q\,du\\ &= \tilde{C}_{K,\varphi,q}(\eta).\end{aligned}$$

□

由于我们将沿着 K 的仿射平面切片来计算积分 (3.1)，因此对 $x\in\mathbb{R}^n$，$q>0$ 和 $\varphi\in H(q-n,\ n)$ 设定

$$g_{K,L,\varphi,q}(x)=\int_{K\cap(x+L^\perp)}\varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z),$$

其中， L 是 $\mathbb{R}^n$ 的真子空间，其正交补为 $L^\perp$。为了使该积分存在，我们必须假设 $q>\dim L$。注意到

$$\tilde{C}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1})=\int_{K|L} g_{K,L,\varphi,q}(x)\,d\mathcal{H}^{\dim L}(x).$$

在接下来的两个引理中，我们总结该函数的一些基本性质，以便稍后应用散度定理。

引理 3.3. 设 $K\in\mathcal{K}^n_{(o)}$、 $L\subset\mathbb{R}^n$ 为真子空间，且 $q>\dim L$。设 $\varphi\in H(q-n,n)$在 $\mathbb{S}^{n-1}$上利普希茨连续。那么

i) $g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}$ 在 $K|L$上有界。 ii) $g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}$ 在 $K|L$中上半连续。 iii) 对于 $x\in K|L$ ，有

$$\lim_{m\to\infty} g_{K,L,\varphi,q}(e^{-\frac{1}{m}}x)=g_{K,L,\varphi,q}(x).$$

证明。对于 $x\in K|L$ ，令 $K_x=K\cap(x+L^\perp)$，并令 $k=$维数为 L。

对于 i)，令 $R>0$ 使得 $K\subseteq R\,B_n$，并令 $\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ 使得 $\varphi(v)\le\alpha$对所有 $v\in\mathbb{S}^{n-1}$成立。相对于 $L\cup L^\perp$ 中的一个标准正交基使用球坐标，我们可以写出

$$\begin{aligned}g_{K,L,\varphi,q}(x) &= \int_{K_x}\varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\\ &\le \int_{R\,B_n\cap L^\perp}\varphi(z+x)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\\ &= \int_{R\,B_n\cap L^\perp}|z+x|^{q-n}\varphi\left(\frac{z+x}{|z+x|}\right)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\\ &\le \alpha\int_{R\,B_n\cap L^\perp}|z+x|^{q-n}\,d\mathcal{H}^{n-k}(z).\end{aligned}$$

由于 $q\ge n$ 被积函数有界，因此它是$g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}(x)$。于是设 $q<n$。由于 x 和 z 包含于正交子空间中，我们有 $|z+x|\ge|z|$ 以及

因此我们可以写成

$$g_{K,L,\varphi,q}(x) \le \alpha \int_{R\,B_n\cap L^\perp} |z|^{q-n}\, d\mathcal{H}^{n-k}(z).$$

由于 $q > k$，积分有界。

为了证明 ii)，令 $x \in K|L$ 和 $y_m \in K|L, m \in \mathbb{N}$，其中 $\lim_{m\to\infty} y_m = x$。由布拉施克选择定理，我们可以假设序列$C_m = K_{y_m} - y_m \subset L^\perp$ 收敛于一个紧凸集 $C \subset L^\perp$，且收敛是关于豪斯多夫距离的。因此，K_{y_m} 收敛到 $x + C$，且$x + C \subseteq K \cap (x + L^\perp) = K_x$。然后由勒贝格控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} g_{K,L,\varphi,q}(y_m) &= \lim_{m\to\infty} \int_{K_{y_m}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\
&= \int_{x+C} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\
&\le \int_{K_x} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\
&= g_{K,L,\varphi,q}(x).
\end{aligned}$$

最后，我们来证明 iii)。由于 $0 \in \operatorname{int} K$，对于$m \in \mathbb{N}_{\ge 1}$，有 $e^{-\frac{1}{m}} K_x \subseteq K_{e^{-\frac{1}{m}}x}$。因此

$$\begin{aligned}
g_{K,L,\varphi,q}(e^{-\frac{1}{m}}x) &= \int_{K_{e^{-\frac{1}{m}}x}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\
&\ge \int_{e^{-\frac{1}{m}}K_x} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\
&= e^{-\frac{q-k}{m}} \int_{K_x} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\
&= e^{-\frac{q-k}{m}} g_{K,L,\varphi,q}(x).
\end{aligned}$$

因此 $g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}(x) \le \lim_{m\to\infty} g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}(e^{-\frac{1}{m}}x)$，结合 ii) 即得所述结论。□

接下来，我们要研究 $g_{K,L,\varphi,q}(x)$ 的利普希茨连续性和可微性性质。为此，我们需要以下引理。

引理 3.4. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, $L \subset \mathbb{R}^n$ 是一个真子空间，$q > \dim L$，且 $\varphi \in H(q-n, n)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上是利普希茨连续的。对于 $x \in K|L$，令 $K_x = K \cap (x + L^\perp)$，并令 $U(x, \varepsilon) = x + (\varepsilon B_n \cap L)$，其中 $\varepsilon > 0$。

i) 对于 $x \in \operatorname{int} K|L$，存在 $\overline{\varepsilon}_x > 0$ 和一个常数 $\overline{c}_x$，该常数取决于 x，使得对于所有 $x_1, x_2 \in U(x, \overline{\varepsilon}_x)$，当 $|x_1| \ge |x_2|$

$$\Big| \int_{K_{x_1}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+(x_1-x_2)} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \Big| \le \overline{c}_x |x_1 - x_2|. \tag{3.2}$$

ii) 对于 $x \in \operatorname{int} K|L\setminus\{0\}$，存在 $\varepsilon_x > 0$ 和一个仅取决于 φ 的常数 c_φ，使得对于所有 x_1，$x_2 \in U(x,\varepsilon_x)$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{K_{x_2}} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+x_1-x_2} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\Big| \\ \le \left(c_\varphi \int_{-x_2+K_{x_2}} |z+x|^{q-n-1}\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\right)|x_1-x_2|.\end{aligned} \tag{3.3}$$

证明。令 $k=$维 L。此外，为简便起见，我们将 $K_i = -x_i + K_{x_i} \subseteq L^\perp$ 记作 $i=1$，2。令 $R>0$ 使得 $(1/R)B_n \subseteq K \subseteq RB_n$，并令 $\alpha \in \mathbb{R}_{\ge 0}$使得对所有 $v \in \mathbb{S}^{n-1}$都有 $\varphi(v) \le \alpha$。

对于 i)，注意到

$$\begin{aligned}\Big|\int_{K_{x_1}} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+(x_1-x_2)} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\Big| \\ = \Big|\int_{K_1+x_1} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_2+x_1} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\Big| \\ \le \int_{K_1\setminus K_2 \cup K_2\setminus K_1} \varphi(z+x_1)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\ \le \alpha \int_{K_1\setminus K_2\cup K_2\setminus K_1} |z+x_1|^{q-n}\,d\mathcal{H}^{n-k}(z).\end{aligned}$$

现在我们断言，对于 $z \in K_1 \setminus K_2 \cup K_2 \setminus K_1$，有 $|z+x_1|^{q-n} \le \max\{(2R)^{q-n}, R^{n-q}\}$：

若 $q \ge n$，则这由 $K \subseteq RB_n$得到。因此令 $q<n$，并假设 $|z+x_1|^{q-n} \ge R^{n-q}$，即 $|z+x_1| \le 1/R$。由于 z 和 x_1 包含于正交子空间中，且由于 $|x_1| \ge |x_2|$，我们也有 $|z+x_2| \le 1/R$。由于 $(1/R)B_n \subseteq K$，这意味着对于 $i=1$，2，有 $z+x_i \in K \cap (x_i+L^\perp) = K_{x_i}$，从而得到矛盾 $z \in K_1 \cap K_2$。

我们得出

$$\begin{aligned}\Big|\int_{K_1+x_1} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_2+x_1} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\Big| \\ \le \alpha\,\max\{(2R)^{q-n}, R^{n-q}\}\operatorname{vol}_{n-k}(K_1\setminus K_2 \cup K_2 \setminus K_1).\end{aligned}$$

根据 Groemer 的一个结果 [21, 定理。i)] 关于比较凸体空间中不同度量的方法，我们有

$$\operatorname{vol}_{n-k}(K_1\setminus K_2 \cup K_2\setminus K_1) \le c(n,K)\,d(K_1,K_2).$$

其中，$c(n,K)$ 是一个仅取决于 n 和 K 的常数。另一方面，根据 [31, 引理 2.3]，凸体截面的豪斯多夫距离是局部利普希茨连续的，即存在 $\overline{\varepsilon}_x > 0$ 和一个常数 $c_x > 0$，使得对于所有 x_1、$x_2 \in U(x,\overline{\varepsilon}_x)$，有 $d(K_{x_1}, K_{x_2}) \le c_x|x_1-x_2|$。由于 $d(K_1,K_2) \le d(K_{x_1},K_{x_2})$，我们已经证明

$$\Big|\int_{K_{x_1}} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+(x_1-x_2)} \varphi(z)\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\Big| \le \overline{c}_x|x_1-x_2|$$

对于所有 x_1、$x_2 \in U$（x、$\overline{\varepsilon}_x$）以及某个适当的常数 $\overline{c}_x$。

现在讨论 ii)，在这里我们假设 $x \in \operatorname{int} K|L \setminus \{0\}$。首先注意到

$$\begin{aligned}\left| \int_{K_{x_2}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+(x_1-x_2)} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right| \\ &= \left| \int_{K_2} \varphi(z+x_2)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_2} \varphi(z+x_1)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right| \\ &\le \int_{K_2} |\varphi(z+x_2) - \varphi(z+x_1)|\, d\mathcal{H}^{n-k}(z).\end{aligned}$$

现在令 $\varepsilon_x = \frac{1}{2}|x|$，且 $x_1,\ x_2 \in U(x,\ \varepsilon_x)$。那么对于 $z \in L^{\perp}$，我们有 $z+x_1,\ z+x_2 \in z+x+\frac{1}{2}|x|B_n \subseteq z+x+\frac{1}{2}|z+x|B_n$。由引理 2.1）可得

$$\begin{aligned}\int_{K_2} |\varphi(z+x_2) - \varphi(z+x_1)|\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \\ &\le c_\varphi\, |x_1 - x_2| \int_{K_2} |z+x|^{q-n-1}\, d\mathcal{H}^{n-k}(z),\end{aligned}$$

其中 c_φ 是一个依赖于 φ的常数。 □

命题 3.5. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, $L \subset \mathbb{R}^n$ 为真子空间，$q >$ 维数为 L，且 $\varphi \in H(q-n, n)$在 $\mathbb{S}^{n-1}$上是利普希茨的。

i) $g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}(x)$在 $\operatorname{int}(K|L) \setminus \{0\}$中是局部利普希茨的。ii) $g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}(x)$在 $\operatorname{int}(K|L)$中几乎处处可微。iii) 设 $q >$ 维数为 $L+1$。那么

$$\int_{K|L} |\langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x\rangle|\, d\mathcal{H}^{\dim L}(x) < \infty.$$

证明。 第二个陈述可由 i) 通过拉德马赫定理直接推出（参见 [16] 中的定理 3.1.6）。为验证 i)，我们使用引理3.4 及其记号。设 $x \in \operatorname{int} K|L \setminus \{0\}$，$\delta_x = \min\{\varepsilon_x, \overline{\varepsilon}_x\}$，并设$x_1, x_2 \in U(x, \delta_x)$，且假设 $|x_1| \ge |x_2|$。于是

$$\begin{aligned}|g_{K,L,\varphi,q}(x_1) - g_{K,L,\varphi,q}(x_2)| \\ &= \left| \int_{K_{x_1}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right| \\ &\le \left| \int_{K_{x_1}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+(x_1-x_2)} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right| \\ &\quad + \left| \int_{K_{x_2}} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) - \int_{K_{x_2}+(x_1-x_2)} \varphi(z)\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right| \\ &\le |x_1 - x_2| \left(\overline{c}_x + c_\varphi \int_{-x_2+K_{x_2}} |z+x|^{q-n-1}\, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right).\end{aligned}$$

再次假设 $K \subseteq RB_n$，我们可以对其作如下估计

$$|g_{K,L,\varphi,q}(x_1) - g_{K,L,\varphi,q}(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \left(\overline{c}_x + c_\varphi \int_{RB_n \cap L^\perp} |z + x|^{q-n-1} \, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \right).$$

由于 $|z + x| \leq 2R$ 当 $q - n - 1 \geq 0$ 时，最后一个积分可由 $\widetilde{c} = (2R)^{q-k-1} \mathrm{vol}_{n-k}(B_n \cap L^\perp)$ 界定。如果 $q - n - 1 < 0$，我们注意到 $|z + x| \geq |x| > 0$，因此

$$\int_{RB_n \cap L^\perp} |z + x|^{q-n-1} \, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \leq \widetilde{c}_x = |x|^{q-n-1} R^{n-k} \mathrm{vol}_{n-k}(B_n \cap L^\perp).$$

综上，我们得到：

$$|g_{K,L,\varphi,q}(x_1) - g_{K,L,\varphi,q}(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \left(\overline{c}_x + c_\varphi \max\{\widetilde{c}, \widetilde{c}_x\} \right), \tag{3.4}$$

这证明了 i)。

为了验证 iii)，我们首先说明，在 $x \in \operatorname{int} e^{-\frac{1}{m}} K|L \setminus \{0\}$ 且 $q > \dim L + 1$ 的情形下，我们可以使 (3.4) 中的常数与 x 无关。

我们从 $\widetilde{c}_x$ (3.4) 中出现的 $q - n - 1 < 0$ 开始。如果$q > \dim L + 1$，因此 $q - n - 1 > \dim L - n$，积分 $\int_{RB_n \cap L^\perp} |z + x|^{q-n-1} \, d\mathcal{H}^{n-k}(z)$ 可由常数 $\widetilde{c}'$ 从上方界定，对任意 $x \in K|L$ 均成立。因此，(3.4) 化为

$$|g_{K,L,\varphi,q}(x_1) - g_{K,L,\varphi,q}(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \left(\overline{c}_x + c_\varphi \max\{\widetilde{c}, \widetilde{c}'\} \right),$$

对所有 $x_1, x_2 \in U(x, \delta_x)$。通过标准的紧性论证，我们可以将所有 $x \in e^{-\frac{1}{m}} K|L$ 对应的常数 c_x 界定为一个常数 $\overline{c}$，因此得到

$$|g_{K,L,\varphi,q}(x_1) - g_{K,L,\varphi,q}(x_2)| \leq |x_1 - x_2| \left(\overline{c} + c_\varphi \max\{\widetilde{c}, \widetilde{c}'\} \right),$$

对所有 $x_1, x_2 \in U(x, \delta_x)$，以及 $x \in e^{-\frac{1}{m}} K|L \setminus \{0\}$。因此，对于任意 $x \in e^{-\frac{1}{m}} K|L \setminus \{0\}$，其中 $\nabla g_{K,L,\varphi,q}(x)$ 存在，成立

$$\begin{aligned} |\langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x \rangle| &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|g_{K,L,\varphi,q}(x + \varepsilon x) - g_{K,L,\varphi,q}(x)|}{|\varepsilon|} \\ &\leq \left(\overline{c} + c_\varphi \max\{\widetilde{c}, \widetilde{c}'\} \right) |x|. \end{aligned}$$

根据 ii)，$K|L$ 中几乎处处存在梯度，因此我们有

$$\begin{aligned} &\int_{K|L} |\langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x \rangle| \, d\mathcal{H}^{\dim L}(x) \\ &\quad = \lim_{m \to \infty} \int_{e^{-\frac{1}{m}} K|L} |\langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x \rangle| \, d\mathcal{H}^{\dim L}(x) < \infty. \end{aligned}$$

□

关于命题 3.5 i)，我们指出，一般而言 $g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}$ 在 0 处并非局部利普希茨连续，如下例所示：设 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$且 $\varphi(\cdot) = |\cdot|^{q-n}$，记 $K = B_k \times B_{n-k} \subset \mathbb{R}^n$ 且 $L = \mathbb{R}^k$。注意， K 的截面经过平移后相同。因此，式（3.2）中的求和项为零，局部利普希茨连续性仅由式（3.3）中的项决定

在零点的连续性。设 $k+1>q>k$ 和 $x\in K|L$ 满足 $|x|<1$。如前所述，我们得到

$$\begin{aligned}
g_{K,L,q}(x)=&\int_{B_{n-k}}|x+z|^{q-n}\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\\
=&\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{n-k-1}}r^{n-k-1}|x+ru|^{q-n}\,du\,dr\\
=&(n-k)\mathrm{vol}(B_{n-k})|x|^{q-k}\int_0^{\frac{1}{|x|}}s^{n-k-1}\sqrt{s^2+1}^{q-n}\,ds\\
\leq&(n-k)\mathrm{vol}(B_{n-k})|x|^{q-k}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-q}\int_0^1 s^{q-k-1}\,ds+\int_1^{\frac{1}{|x|}}s^{q-k-1}\,ds\right)\\
\leq&(n-k)\mathrm{vol}(B_{n-k})\frac{1}{q-k}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-q}|x|^{q-k}+1-|x|^{q-k}\right).
\end{aligned}$$

另一方面，有

$$\begin{aligned}
g_{K,L,q}(0)=&\int_{B_{n-k}}|z|^{q-n}\,d\mathcal{H}^{n-k}(z)\\
=&\int_0^1\int_{\mathbb{S}^{n-k-1}}r^{q-k-1}\,du\,dr\\
=&(n-k)\mathrm{vol}(B_{n-k})\frac{1}{q-k}.
\end{aligned}$$

这给出

$$\begin{aligned}
&\frac{|g_{K,L,q}(x)-g_{K,L,q}(0)|}{|x|}\\
\geq&(n-k)\mathrm{vol}(B_{n-k})\frac{1}{q-k}|x|^{q-k-1}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-q}\right),
\end{aligned}$$

当 $|\widetilde{x}|$ 趋于零时，它趋于无穷大。

下一个引理给出了通过逆高斯映射表示 $\mathrm{C}_{K,\,\varphi,\,q}(\eta)$ 的方法，该引理已针对 $\varphi=|\cdot|^{q-n}$ 在 [27] 中证明，而稍微一般化的情形也可用类似方法证明。

引理 3.6. 设 $K\in\mathcal{K}^n_{(o)}$，$q>0$。设 $\varphi\in H(q-n,n)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上利普希茨连续。再设 $\eta\subseteq\mathbb{S}^{n-1}$ 为一个 Borel 集。则

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}(\eta)=\frac{1}{n}\int_{\nu_K^{-1}(\eta)}\langle\nu_K(x),x\rangle\varphi(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

证明。参见 [27, 引理 3.5]。 □

我们旨在将子空间上的对偶曲率测度表示为整个球面上的对偶曲率测度的一个倍数，再加上一个取决于 $g_{K、\,L、\,\varphi、\,q}$的方向导数的项。按照 [8, 25] 中提出的方法，可以通过散度定理证明这一点。我们将用到 [40] 中提出的如下散度定理。

定理 3.7. 设 $A \in \mathcal{K}^n$。设 $G\colon A \to \mathbb{R}^n$ 是一个有界向量场，并且在某个 $a \in A$ 的 $A\setminus\{a\}$ 中局部利普希茨连续。此外，假设 $\operatorname{div} G \in L_1(A)$。则有

$$\int_A \operatorname{div} G(x)\, d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\partial^* A} \langle G(x), \nu_A(x)\rangle\, d\mathcal{H}^n(x).$$

这是 [40] 中命题 7.4.3 所述散度定理的一个特殊情形，该命题针对有界变差集和容许向量场。局部利普希茨向量场和凸体满足这些假设。下一个定理在某种程度上是我们的主要结果，因为它通过定理 3.7将 $\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1}\cap L)$ 与 $\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1})$ 联系起来。所有后续结果都以此为基础。

定理 3.8。设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$，$L \subset \mathbb{R}^n$ 是一个真子空间，且 $q >$ 维数为 L。设 $\varphi \in H(q-n,n)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上利普希茨连续。此外，假设对于任意 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\int_{e^{-\frac{1}{m}}K|L} |\langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x\rangle|\, d\mathcal{H}^{\dim L}(x) < \infty.$$

则有

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}(\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}, L)\\ =&\frac{\dim L}{q} + \frac{1}{n}\frac{1}{\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1})}\lim_{m\to\infty}\int_{e^{-1/m}K|L} \langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x\rangle\, \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim L}(x).\end{aligned}$$

证明。 我们遵循 [8]中引理 3.3 的证明思路。令维数为 $L = k$，并且对于 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 我们定义

$$E_m = e^{-\frac{1}{m}}K|L.$$

E_m 相对于子空间 L 的相对边界记作 $\bar{\partial} E_m$。我们定义向量场 $G\colon K|L \to \mathbb{R}^n$ 如下：

$$G(x) = g_{K,L,\varphi,q}(x)x.$$

根据命题 3.5 ii) G在 $K|L$ 上几乎处处可微，且其散度 $\operatorname{div} G$ 为

$$\operatorname{div} G(x) = k g_{K,L,\varphi,q}(x) + \langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x\rangle. \tag{3.5}$$

因此，由（3）可得

$$\begin{aligned}&\int_{E_m} |\operatorname{div} G(x)|\, d\mathcal{H}^k(x)\\ &\qquad \leq k\frac{n}{q}\tilde{C}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1}) + \int_{E_m} |\langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x\rangle|\, d\mathcal{H}^k(x) < \infty.\end{aligned}$$

因此有散度 $\operatorname{div} G \in L_1(E_m)$。于是我们可以应用散度定理，即定理3.7 并得到

$$\int_{E_m} \operatorname{div} G(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\bar{\partial}^* E_m} \langle G(x), \nu_{E_m}(x)\rangle\, d\mathcal{H}^{k-1}(x). \tag{3.6}$$

首先考虑（3.6）的右端。对于正则边界点$x \in \bar{\partial}^* K|L$，我们有 $\nu_{K|L}(x) = \nu_{E_m}(e^{-\frac{1}{m}}x)$，因此可以写成

$$\begin{aligned}\int_{\bar{\partial}^* E_m} \langle G(x), \nu_{E_m}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{k-1}(x) &= e^{-\frac{k-1}{m}} \int_{\bar{\partial}^* K|L} \langle G(e^{-\frac{1}{m}}x), \nu_{K|L}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \\ &= e^{-\frac{k}{m}} \int_{\bar{\partial}^* K|L} g_{K,L,\varphi,q}(e^{-\frac{1}{m}}x)\langle x, \nu_{K|L}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{k-1}(x).\end{aligned}$$

由引理 3.3 iii) 可知，对于 $m \to \infty$，$g_{K,L,\varphi,q}(e^{-\frac{1}{m}}x) \to g_{K,L,\varphi,q}(x)$ 逐点成立；结合勒贝格控制收敛定理以及$g_{K,L,\varphi,q}(x)$ 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty} \int_{\bar{\partial}^* E_m} \langle G(x), \nu_{E_m}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \\ &\quad = \int_{\bar{\partial}^* K|L} g_{K,L,\varphi,q}(x)\langle x, \nu_{K|L}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \\ &\quad = \int_{\bar{\partial}^* K|L} \int_{K\cap(x+L^\perp)} \varphi(z)\langle x, \nu_{K|L}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-k}(z) \, d\mathcal{H}^{k-1}(x).\end{aligned}$$

现在令 $M = \partial K \cap (L^\perp + \bar{\partial}^* K|L)$。那么，$M$中的正则点集恰好是 K 的所有正则边界点中其唯一外法向量属于 $L \cap \mathbb{S}^{n-1}$的点集。根据引理 3.6，可得

$$\begin{aligned}(3.7)\qquad &\lim_{m\to\infty} \int_{\bar{\partial}^* E_m} \langle G(x), \nu_{E_m}(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{k-1}(x) \\ &\qquad = \int_M \varphi(z)\langle z|L, \nu_{K|L}(z|L)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &\qquad = \int_{\nu_K^{-1}(L\cap\mathbb{S}^{n-1})} \varphi(z)\langle z, \nu_K(z)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &\qquad = n\tilde{C}_{K,\varphi,q}(L \cap \mathbb{S}^{n-1}).\end{aligned}$$

接下来我们转向（3.6）的左侧，它根据（3.5）为

$$\begin{aligned}&\int_{E_m} \operatorname{div} G(x) \, d\mathcal{H}^k(x) \\ &\quad = k \int_{E_m} g_{K,L,\varphi,q}(x) \, d\mathcal{H}^k(x) + \int_{E_m} \langle \nabla g_{K,L,\varphi,q}(x), x\rangle \, d\mathcal{H}^k(x).\end{aligned}$$

再次由勒贝格控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \int_{E_m} g_{K,L,\varphi,q}(x) \, d\mathcal{H}^k(x) &= \int_{K|L} g_{K,L,\varphi,q}(x) \, d\mathcal{H}^k(x) \\ &= \frac{n}{q}\tilde{C}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1}).\end{aligned}$$

因此，由（3.6）和（3.7）最终得到

$$\begin{aligned}&\lim_{m\to\infty}\int_{E_m}\langle\nabla g_{K,L,\varphi,q}(x),x\rangle\,d\mathcal{H}^k(x)\\&\quad=\lim_{m\to\infty}\int_{\bar\partial^* E_m}\langle G(x),\nu_{E_m}(x)\rangle\,d\mathcal{H}^{k-1}(x)-k\lim_{m\to\infty}\int_{E_m}g_{K,L,\varphi,q}(x)\,d\mathcal{H}^k(x)\\&\quad=n\tilde C_{K,\varphi,q}(L\cap\mathbb{S}^{n-1})-k\frac{n}{q}\tilde C_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1}).\end{aligned}$$

□

结合引理 3.5 iii)，我们得到定理1.3 的一个稍作推广的推论：

推论 3.9. 设 $K\in\mathcal{K}^n_{(o)}$，$L\subset\mathbb{R}^n$ 是一个真子空间，且 $q>\dim L+1$。设 $\varphi\in H(q-n,n)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上利普希茨连续。则有

$$\begin{aligned}n\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1}\cap L)=&\frac{n}{q}\dim(L)\widetilde{\mathrm{C}}_{K,\varphi,q}(\mathbb{S}^{n-1})\\&+\int_{K|L}\langle\nabla g_{K,L,\varphi,q}(x),x\rangle\,d\mathcal{H}^{\dim L}(x).\end{aligned}$$

4. Proof of Theorem 1.1 and 1.4

现在我们回到函数 $\varphi=|\cdot|^{q-n}$，根据 q，我们需要区分该函数的拟凹范围 $q\le n$ 和凸范围 $q\ge n+1$。拟凸范围 $n<q<n+1$ 仍未解决。

现在设 $K\in\mathcal{K}^n_{(o)}$，$\gamma\in[0,1]$，使得 $\gamma(-K)\subseteq K$。为了将这一事实用于我们的目的，我们注意到，对于任意 $x\in K|L$

$$-\gamma\left(K\cap(x+L^\perp)\right)\subseteq K\cap\left(-\gamma x+L^\perp\right).$$

因此，对任意 $\lambda\in[0,1]$，我们有

$$\left(\frac{\gamma+\lambda}{1+\gamma}\right)K_x+\left(\frac{(1-\lambda)\gamma}{1+\gamma}\right)(-K_x)\subseteq K_{\lambda x}\tag{4.1}$$

其中，对 $y\in K|L$，我们令 $K_y=K\cap(y+L^\perp)$。注意，左侧一般严格大于 λK_x，而后者包含于 $K_{\lambda x}$，因为 $0\in K$。

4.1. 拟凹范围 $q\le n$。首先，我们以另一种但等价的形式陈述[7] 中的一个引理。

引理 4.1. 设 $K\in\mathcal{K}^n$，且 $\dim(K)=k$。设 $\varphi\in H(p,n)$ 在 k 维紧凸集上拟凹、偶且可积。则对于 $\lambda_0,\lambda_1>0$，有

$$\int_{\lambda_0K+\lambda_1(-K)}\varphi(z)\,d\mathcal{H}^k(z)\ge(\lambda_0+\lambda_1)^{p+k}\int_K\varphi(z)\,d\mathcal{H}^k(z).$$

证明。令 $\lambda=\frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}\in[0,1]$，得到

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_0K+\lambda_1(-K)}\varphi(z)\,d\mathcal{H}^k(z)=&(\lambda_0+\lambda_1)^{p+k}\int_{\lambda K+(1-\lambda)(-K)}\varphi(z)\,d\mathcal{H}^k(z)\\\ge&(\lambda_0+\lambda_1)^{p+k}\int_K\varphi(z)\,d\mathcal{H}^k(z),\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式用到了引理3.1。在 [7]。 □

引理 4.2. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, $\gamma \in [0,1]$ 使得 $\gamma(-K) \subseteq K$, $L \subset \mathbb{R}^n$ 为真子空间，且 $\dim(L) < q \leq n$。令 $x \in \operatorname{int} K|L$ ，并假设$\nabla g_{K,\ L,\ q}(x)$ 存在。则有

$$\langle \nabla g_{K,L,q}(x), x\rangle \leq \frac{1-\gamma}{\gamma+1}\left(q-\dim(L)\right) g_{K,L,q}(x).$$

证明。 对于 $y \in K|L$ 令 $K_y = K \cap (y + L^{\perp})$, 令 $\lambda \in [0,1)$ 并设 $\lambda_0 = \frac{\gamma+\lambda}{\gamma+1}$ 且 $\lambda_1 = \gamma\frac{1-\lambda}{\gamma+1}$。由（4.1）可得

$$\lambda_0 K_x + \lambda_1(-K_x) \subseteq K_{\lambda x}$$

且引理4.1 给出

$$\begin{aligned} g_{K,L,q}(\lambda x) &= \int_{K_{\lambda x}} |z|^{q-n}\, d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z) \\ &\geq \int_{\lambda_0 K_x + \lambda_1(-K_x)} |z|^{q-n}\, d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z) \\ &\geq (\lambda_0+\lambda_1)^{n-\dim(L)+q-n} \int_{K_x} |z|^{q-n}\, d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z) \\ &= \left(1+(1-\lambda)\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{q-\dim(L)} g_{K,L,q}(x). \end{aligned}$$

令 $\lambda = 1-\varepsilon$，得

$$\frac{g_{K,L,q}((1-\varepsilon)x) - g_{K,L,q}(x)}{\varepsilon} \geq \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} g_{K,L,q}(x),$$

其中 $f(t) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}t+1\right)^{q-\dim(L)}$。因此,

$$\begin{aligned} \langle \nabla g_{K,L,q}(x), -x\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g_{K,L,q}((1-\varepsilon)x) - g_{K,L,q}(x)}{\varepsilon} \\ &\geq f'(0)\, g_{K,L,q}(x) \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(q-\dim(L)\right) g_{K,L,q}(x). \end{aligned}$$ □

注4.3。引理 4.2 对截面函数$g_{K,\ L,\ \varphi,\ q}$ 也成立， 当$\varphi \in H(q-n,n)$为拟凹且为偶函数时。

4.2. 凸情形在范围 $q \geq n+1$ 内。

引理 4.4. 设 $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n_{(o)}$ 满足 $\dim(K_i) = k$, $\operatorname{vol}(K_0) = \operatorname{vol}(K_1)$, 并假设它们的仿射包平行。对于 $\lambda_0, \lambda_1 > 0$ 和 $p \geq 1$, 有

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda_0 K_0 + \lambda_1 K_1} |z|^p\, d\mathcal{H}^k(z) + \int_{\lambda_0 K_1 + \lambda_1 K_0} |z|^p\, d\mathcal{H}^k(z) \\ \geq &(\lambda_0+\lambda_1)^k |\lambda_0-\lambda_1|^p \left(\int_{K_0} |z|^p\, d\mathcal{H}^k(z) + \int_{K_1} |z|^p\, d\mathcal{H}^k(z)\right). \end{aligned}$$

证明。令$\lambda = \frac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}$ 并在 [26], 中应用定理 1.9，可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\lambda_0 K_0+\lambda_1 K_1} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) + \int_{\lambda_0 K_1+\lambda_1 K_0} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z)\\
=&(\lambda_0+\lambda_1)^{p+k} \left(\int_{\lambda K_0+(1-\lambda)K_1} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) + \int_{\lambda K_1+(1-\lambda)K_0} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) \right)\\
\geq&(\lambda_0+\lambda_1)^{p+k} |2\lambda-1|^p \left(\int_{K_0} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) + \int_{K_1} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) \right)\\
=&(\lambda_0+\lambda_1)^{k} |\lambda_0-\lambda_1|^p \left(\int_{K_0} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) + \int_{K_1} |z|^p \, d\mathcal{H}^k(z) \right). \qquad \square
\end{aligned}$$

引理 4.5. 设 $K \in \mathcal{K}^n_{(o)}$, $\gamma \in [0,1]$ 使得 $\gamma(-K) \subseteq K$, $L \subset \mathbb{R}^n$ 为真子空间，并设 $q \geq n+1$。令 $x \in \operatorname{int} K|L$，并假设 $\nabla g_{K,\,L,\,q}(x)$ 存在。则有

$$\langle \nabla g_{K,L,q}(x), x \rangle \leq \left((q-n) + \frac{1-\gamma}{\gamma+1}(n-\dim(L)) \right) g_{K,L,q}(x).$$

证明。对于 $y \in K|L$ 令 $K_y = K \cap (y+L^\perp)$，令 $\lambda \in [0,1)$ 并设 $\lambda_0 = \frac{\gamma+\lambda}{\gamma+1}$ 以及 $\lambda_1 = \gamma\frac{1-\lambda}{\gamma+1}$。由（4.1）可得

$$\lambda_0 K_x + \lambda_1(-K_x) \subseteq K_{\lambda x}$$

且引理 4.4 给出，对于 $K_0 = K_x$, $K_1 = -K_x$

$$\begin{aligned}
g_{K,L,q}(\lambda x) &= \int_{K_{\lambda x}} |z|^{q-n} \, d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z)\\
&\geq \int_{\lambda_0 K_x+\lambda_1(-K_x)} |z|^{q-n} \, d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z)\\
&\geq (\lambda_0+\lambda_1)^{n-\dim(L)} |\lambda_0-\lambda_1|^{q-n} \int_{K_x} |z| \, d\mathcal{H}^{n-\dim L}(z)\\
&= \left(1+(1-\lambda)\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{n-\dim(L)} \lambda^{q-n} g_{K,L,q}(x).
\end{aligned}$$

令 $\lambda = 1-\varepsilon$，可得

$$\frac{g_{K,L,q}((1-\varepsilon)x) - g_{K,L,q}(x)}{\varepsilon} \geq \frac{f(\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon} g_{K,L,q}(x)$$

由 $f(t) = (1-t)^{q-n}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}t+1\right)^{n-\dim(L)}$。因此，

$$\begin{aligned}
\langle \nabla g_{K,L,q}(x), -x \rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g_{K,L,q}((1-\varepsilon)x) - g_{K,L,q}(x)}{\varepsilon}\\
&\geq f'(0) g_{K,L,q}(x)\\
&= \left(-(q-n) + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(n-\dim(L)) \right) g_{K,L,q}(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

定理1.4的证明。引理3.2 与引理4.2 以及引理4.5 分别结合可得以下界

$$\int_{K|L} \langle \nabla g_{K,L,q}(x), x \rangle \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim L}(x) \leq c_q \int_{K|L} g_{K,L,q}(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^{\dim L}(x) = c_q \frac{n}{q} \widetilde{\mathrm{C}}_{K,q}(\mathbb{S}^{n-1})$$

with

$$c_q = \begin{cases} (q-\dim(L))\frac{1-\gamma}{1+\gamma}, q \le n, \\ (q-n)+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}(n-\dim(L)), q > n+1. \end{cases} \quad \square$$

定理1.1的证明。该结论可由定理1.3 与方向导数的界相结合，作为一个简单推论得出，即定理1.4。□

Acknowledgements

作者感谢 Christian Kipp 提出的宝贵意见和建议。

References

[1] A. Aleksandrov。给定积分曲率的凸曲面的存在性与唯一性。载于 *CR (Doklady) Acad. Sci. URSS (NS)*，第35卷，第131–134页，1942年。[2] G. Bianchi、K. J. B¨or¨oczky和A. Colesanti。 $p < 1$的 L_p 闵可夫斯基问题中的光滑性。 *J. Geom. Anal.*，30(1):680–705，2020年。[3] K. J. B¨or¨oczky。对数闵可夫斯基猜想与 L_p-闵可夫斯基问题。2022年10月。[4] K. J. B¨or¨oczky和A. De。具有超平面对称性的情形下对数闵可夫斯基问题的稳定解。 *J. Differential Equations*，298:298–322，2021年。[5] K. J. B¨or¨oczky、P. Heged˝us和G. Zhu。关于离散对数闵可夫斯基问题。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(6):1807–1838，2016年。[6] K. J. B¨or¨oczky、P. Heged˝us和G. Zhu。离散对数闵可夫斯基问题。 *Acta Math. Hungar.* 146 2 449 465, 2015

，( ): – 。[7] K. J. B¨or¨oczky和M. Henk。一般中心对称凸体的锥体积测度。*Adv. Math.*，286:703–721，2016年。[8] K. J. B¨or¨oczky和M. Henk。锥体积测度与稳定性。 *Adv. Math.*，306:24–50，2017年。[9] K. J. B¨or¨oczky、M. Henk和H. Pollehn。对称凸体的对偶曲率测度的子空间集中。 *Journal of Differential Geometry*，109(3):411–429，2018年。[10] K. J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang和G. Zhang。对数闵可夫斯基问题。 *J. Amer. Math. Soc.*，26(3):831–852，2013年。[11] K. J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang和G. Zhang。对数闵可夫斯基问题。 *Journal of the American Mathematical Society*，26(3):831–852，2013年。[12] K. J. B¨or¨oczky、E. Lutwak、D. Yang、G. Zhang和Y. Zhao。对称凸体的对偶闵可夫斯基问题。 *Adv. Math.*，356:106805，30，2019年。[13] S. Chen和Q.-R. Li。关于平面对偶闵可夫斯基问题。 *Adv. Math.*，333:87–117，2018年。[14] S. Chen、Q.-R. Li和G. Zhu。非对称测度的对数闵可夫斯基问题。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，371(4):2623–2641，2019年。[15] K.-S. Chou和X.-J. Wang。 L_p-闵可夫斯基问题与中心仿射几何中的闵可夫斯基问题。 *Advances in Mathematics*，205(1):33–83，2006年。[16] H. Federer。 *Geometric measure theory*。施普林格，2014年。[17] W. J. Firey。凸体的 p-均值。 *Mathematica Scandinavica*，10:17–24，1962年。[18] R. J. Gardner。 *Geometric tomography*，第6卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。[19] R. J. Gardner、D. Hug、W. Weil、S. Xing和D. Ye。Orlicz–布伦–闵可夫斯基理论中的一般体积及相关的闵可夫斯基问题 I。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 58 1 1 35, 2019

，( ): – 。[20] R. J. Gardner、D. Hug、S. Xing和D. Ye。Orlicz–布伦–闵可夫斯基理论中的一般体积及相关的闵可夫斯基问题 II。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 59 1 1 33, 2020

，( ): – 。

[21] H. Groemer。关于凸体的对称差度量。 *Beiträge zur Algebra und Geometrie. Contributions to Algebra and Geometry* 41 1 107 114, 2000 , ( ): – 。[22] P. M. Gruber。 *Convex and discrete geometry*，第336卷。施普林格，2007年。[23] L. Guo、D. Xi和Y. Zhao。 $0 \leq p < 1$的 L_p 弦闵可夫斯基问题。2023年1月。[24] P. C. Hammer。凸体的质心。 *Proceedings of the American Mathematical Society* 2 4 522 525, 1951 , ( ): – 。[25] M. Henk和E. Linke。多胞体的锥体积测度。 *Adv. Math.*，253 62，2014 50: – 。[26] M. Henk和H. Pollehn。偶对偶闵可夫斯基问题的必要子空间集中条件。 *Adv. Math.*，323:114–141，2018年。[27] Y. Huang、E. Lutwak、D. Yang和G. Zhang。对偶布伦–闵可夫斯基理论中的几何测度及其相关闵可夫斯基问题。 *Acta Mathematica* 216 2 325 388, 2016 , ( ): – 。[28] Y. Huang、E. Lutwak、D. Yang和G. Zhang。关于L_p积分曲率的 L_p-亚历山德罗夫问题。 *Journal of Differential Geometry*，110(1):1–29，2018年。[29] D. Hug、E. Lutwak、D. Yang和G. Zhang。关于多胞体的 L_p 闵可夫斯基问题。 *Discrete & Computational Geometry. An International Journal of Mathematics and Computer Science* 33 4 699 715, 2005 , ( ): – 。[30] Y. Jiang和Y. Wu。关于 2 维对偶闵可夫斯基问题。 *J. Differential Equations* 263 6 3230 3243, 2017 , ( ): – 。[31] V. Klee。凸体的多面体截面。 *Acta Mathematica* 103 3 4 243 267, 1960 , (-): – 。[32] A. V. Kolesnikov。球面上的质量输运泛函及其在对数闵可夫斯基问题中的应用。 *Mosc. Math. J.*，20(1):67–91，2020年。[33] Q.-R. Li、W. Sheng和X.-J. Wang。通过高斯曲率流解决亚历山德罗夫问题与对偶闵可夫斯基问题。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，22(3):893–923，2020年。[34] E. Lutwak。对偶混合体积。 *Pacific Journal of Mathematics* 58 2 531 538, 1975 , ( ): – 。[35] E. Lutwak。布伦–闵可夫斯基–菲雷理论 I：混合体积与闵可夫斯基问题。 *Journal of Differential Geometry*，38(1):131–150，1993年。[36] E. Lutwak。若干仿射等周不等式。 *Handbook of convex geometry*，第151–176页，1993年。[37] E. Lutwak。布伦–闵可夫斯基–菲雷理论 II：仿射与几何极小表面积。 *Advances in Mathematics*，118(2):244–294，1996年。[38] E. Lutwak、D. Yang和G. Zhang。 L_p *Advances in Mathematics* 329 85 132, 2018 对偶曲率测度。 , : – 。[39] S. Mui。关于负 p 的 L^p 亚历山德罗夫问题。 *Adv. Math.*，408(第 A 部分): 论文编号 108573，26，2022年。[40] W. F. Pfeffer。 *The divergence theorem and sets of finite perimeter*。CRC出版社，2012年。[41] R. T. Rockafellar。 *Convex analysis*，第18卷。普林斯顿大学出版社，1970年。[42] R. Schneider。 *Convex bodies: The Brunn–Minkowski theory*。数学及其应用百科全书。剑桥大学出版社，第2版，2013年。[43] A. Stancu。离散平面 L_0 167 1 160 174, 2002 -闵可夫斯基问题。 *Adv. Math.*，( ): – 。[44] A. Stancu。关于离散二维 L_0-闵可夫斯基问题的解的数量。 *Adv. Math.*，180(1):290–323，2003年。[45] W. S¨uss。 ¨关于椭球区域的一个仿射不变量。 *Archiv der Mathematik*，1(2):127–128，1948年。[46] G. Xiong。凸多胞体锥体积泛函的极值问题。 *Adv. Math.*，225(6):3214–3228，2010年。[47] Y. Zhao。负指标对偶闵可夫斯基问题。 *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 56 2 18, 2017 , ( ): 。[48] Y. Zhao。偶对偶闵可夫斯基问题的解的存在性。 *Journal of Differential Geometry* 110 3 543 572, 2018 , ( ): – 。

Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Sekr. Ma 4-1, Strasse des 17 Juni 136, D-10623 Berlin, Germany*Email address*: {eller, henk}@math.tu-berlin.de