双边关键资源分配系统中的无政府代价

David Sychrovský 布拉格查理大学，捷克
sychrovsky@kam.mff.cuni.cz

Jakub Černý 新加坡南洋理工大学 cerny@disroot.org

Sylvain Lichau 波尔多大学，波尔多，法国
sylvain.lichau@etu.u-bordeaux.fr

Martin Loebl 布拉格查理大学，捷克
loebl@kam.mff.cuni.cz

arXiv:2302.09959v1 [cs.MA] 20 Feb 2023

摘要
在和平时期分配标准可交易商品与危机时期分配稀缺资源时，衡量分配最优性的指标存在显著差异。现实市场能够实现渐近效率，但在分配关键资源时，未必能保证理想的公平分配。为了实现公平性，相关机制往往依赖中央机构；然而，在需求紧迫、迅速行动和良好组织至关重要时，中央机构可能效率低下。本文研究一种名为 *Crisdis* 的混合交易系统，该系统由 Jedličková等人提出，将购买权的公平分配与市场相结合，兼取两者之长。在 Crisdis 中，买方的挫折定义为：依据分配给其的购买权所应享有的商品数量，与其通过交易实际能够获得的商品数量之间的差额。我们将该系统中的无政府状态代价（PoA）定义为原始定义在挫折这一语境下的概念类比。本文的主要贡献是研究 Crisdis 中现实而复杂的双边市场机制的无政府状态代价。所开展的实证分析表明，与不受政府干预的市场相比，我们的系统中的无政府状态代价有所降低。

关键词
无政府代价；拍卖；公平性

1 引言

面向公众的大多数商品旨在提升个人生活质量，或属于奢侈品，并通过标准市场机制进行交易。其他资源则具有更强的社会属性——分配得当时，它们能够提升整个社会的福祉，例如公共住房、学校学位或医疗保健产品。其中，有些资源理应确保人人都能便捷获得，例如基本药物、各类设备，甚至疫苗；只有当足够多的人产生针对未来感染的保护性抗体时，疫苗才能使人群达到群体免疫。在灾害、地方性流行病乃至冲突和战争等紧急时期，这些资源需要迅速且有组织地进行分配，以便在有限时间内惠及尽可能多的符合资格者。

此类公共资源的分配通常由政府服务部门负责，并以低于市场出清价的价格提供，甚至免费提供。然而，将竞争性市场排除在分配过程之外，往往会导致经济和时间方面的低效，这是集中规划固有问题所致 [11]。另一方面，现实世界中的交易市场通常被建模为大型双向拍卖，买卖双方都包含众多参与者，能够灵活可靠地分配商品。问题在于，尽管随着规模扩大，参与者会受到激励而如实交易（从而实现渐近效率 [4]），但最终的商品再分配未必能在人人都能获得商品这一意义上实现社会最优。我们近年来经历的冠状病毒大流行或乌克兰战争等危机，只会进一步加剧财富差距。在此类情形下，维持社会正常运转所必需的稀缺资源很容易被境况更优越的成员左右，因此必须通过精心设计的措施加以制衡。

为兼取两种模式的优势，文献 [14] 提出了一种名为 Crisdis 的混合式分配系统：一个值得信赖的中央机构提供市场，让买方和卖方在多日内进行双边重复交易。每个市场日开始时，该机构向参与成员（例如各家医院）分配购买权，这些购买权与商品一同交易。其他一切事项（定价、储存、交付等）均由卖方和买方自行处理，唯一的要求是：每个交易日结束时，每位买方持有的权利数量必须大于或等于其持有的商品数量。这种安排的直接动机是，出售部分获配权利的交易者能够获得额外资金，并在未来的市场中利用这些资金更好地满足其对关键商品的需求。另一项动机是，中央机构可以利用实时危机数据，独立评估各参与者的需求，并据此分配权利，从而绕过许多拍卖机制的瓶颈——它们容易受到策略性操纵。

Crisdis 的首要目标是在尽可能贴近现实的交易系统中，于危机期间提升所有符合资格的买方获取关键商品的便利程度。为此， [14] 提出了一种衡量半分布式系统所实现分配的社会效率的指标，称为受挫度。受挫度可视为公平性与现实之间经缩放后的负差值：对于参与交易的买方，若其获得的权利（潜在）分配与其购买的商品数量之差不小于零，则受挫度为二者差值经缩放后的结果；否则为零。假设市场达到均衡，交易者的受挫度总和便描述了该系统的无政府代价，即社会选择通过市场而非按照公平机制的建议直接分配商品所付出的代价。

在 [14], 中，作者研究了在基于买方活动的单边拍卖机制下，系统反复交互过程中受挫度的变化。本文通过深入研究一种更贴近现实的双边机制作出了贡献。

1.1 贡献

我们研究由一系列复杂的双边市场和公平机制组成的系统中的交易，该公平机制旨在分配权利并促进社会公益。继[14], 之后，我们聚焦于广为人知且经过深入研究的争议服装分配 [2] ，以实现权利的公平分配；但我们将他们的工作加以拓展，分析多种双重拍卖市场机制，而非简单的英式拍卖。我们在第 3 节介绍这些双重拍卖机制，范围从随机可接受分配到基于平均价格出价的最大清算。

本研究的重点是考察大型复杂系统的行为，因此很难从理论上分析交易者的行为。为此，我们在第 4 节引入一种强化学习算法，尝试近似系统的均衡。第 5 节呈现实证结果。首先，我们进行了全面的数值分析，展示系统能够收敛到多接近均衡的状态。随后，我们开展了一系列消融实验，结果表明，系统在没有公平机制时的无政府代价可能很高。我们证实，结合直观的政府监管措施（例如提高商品的储存价格），带有公平机制的系统能够降低无政府代价。论文最后一部分总结了实验揭示的交易系统所需特性。

1.2 相关工作

我们的研究属于再分配机制领域的文献，尤其关注缓解不平等的机制。与本文最相关的论文或许研究了一个交易同质质量商品的双边市场，并以交易者总效用最大化为目标 [5]。不同之处在于，我们明确将买方的不同需求纳入考量，而且在我们的模型中，效用是共同知识。近期，这项研究被推广到可交易物品具有异质质量、分配最优性的衡量标准更多样化，以及对交易者的不完全观测等情形 [1]。另一项相关研究介绍了多个市场

以及用于将数量有限的相同商品分配给多个买方的非市场机制 [3]。作者表明，当买方的支付意愿与设计者的分配偏好一致时，市场机制是最优的，反之亦然。在我们研究的危机环境中，假设关键资源对所有参与者都极具价值是合理的，但有些参与者可能缺乏获取这些资源所需的货币。再考虑到公平分配商品符合社会的最佳利益，这些结果表明，将分配完全交由不受监管的市场决定并不可取。

我们的实验结果表明，该公平机制在实践中表现良好。

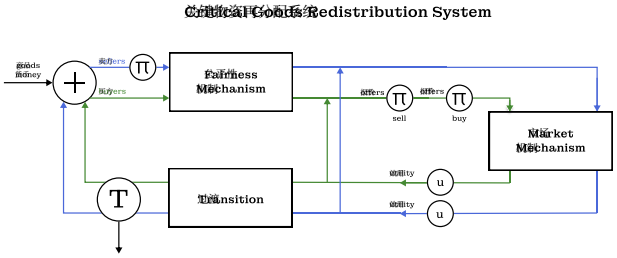

图1：公平机制和市场机制在我们的再分配系统的反馈循环中的位置。外循环的一次迭代对应一个市场。 π 指代策略， T 检查终止条件。

2 问题定义

我们假设存在一个集中式市场，买方和卖方在整个分配危机期间定期使用内部货币交易关键商品。我们只考虑一种商品，并称其为商品。为简化说明，此处假设该商品是可分割的。我们将分配危机中的每个交易期称为一个市场。有限个市场构成一个危机。整个系统的结构如图1所示，附录B中提供了一个简单示例。

为了减少交易过程中的波动性并促进公平性，与 [14], 中类似，我们引入一种称为权利的新型可交易资源。在每个市场中，买方要购买商品，还必须持有等量的权利。在市场开始交易之前，中央公平机制 会根据卖方申报的报价和买方申报的需求向买方分配权利。随后，交易者通过一系列互动，最终公布各自的出价。专门的市场机制 再根据出价分配商品和权利。

消耗需求后剩余的商品资源以及货币随后会转移到下一个市场，因为我们将关键商品的短缺建模为持续较长时间的情况。然而，每个市场结束后，剩余的权利都会消失。

2.1 一个交易期：市场

形式上，我们将市场中商品的交易建模为由参数化不完全信息序贯博弈 $\mathbb{G}(\mathrm{M},\ \mathrm{G}) = (\mathrm{T},\ \mathrm{M},\ \mathrm{G},\ \mathrm{D}\ \phi,\ \mu,\ u,\ k)$表示的双重拍卖。我们用花体字母表示有序集合，用非花体字母表示这些集合中的单个元素。交易者集合 T 由买方 B 和卖方 S 组成；假设买方集合与卖方集合互不相交。集合 $\mathrm{M} = (M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{|\mathcal{T}|}) \in \mathbb{R}^{+}_{0},\ \ |\ |\mathcal{T}$ 确定了每位交易者在市场开始时获得的实际非负货币数量。同样，集合 $\mathrm{G} = (G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_{|\mathcal{T}|}) \in \mathbb{R}^{+}_{0},\ \ |\ |\mathcal{T}$ 规定了每位交易者获得的实际非负商品数量。

这些结果很容易推广到不可分商品的较大数量的周期性交易；更详细的说明见 [14] 。为何这个市场博弈及其策略以$(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ 为参数，将在稍后定义构成这场危机的市场序列时变得明了。

需求 $\mathbf{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_{|\mathcal{B}|}) \in \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|}$描述了每位买方在交易过程中希望获得的理想实际非负商品数量。函数 ϕ 随后实施公平机制，为各个买方分配实际非负的权利 $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_{|\mathcal{B}|}) \in \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|}$。

为了分配权利，该机制需要知道待交易商品的数量。该数量由卖方的参数化策略决定。对于每个卖方 $s \in \mathbf{S}$，集合 Π_s 包含该卖方所有可能的参数化策略，这些策略表示为函数

$$\pi_s : \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|} \times \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|} \times \mathbb{R}_0^{+} \to \mathbb{R}_0^{+,2},$$

并解释为 $\pi_s(\mathbf{M}_{\mathcal{B}}, \mathbf{G}_{\mathcal{B}}\ G_s) = (v_s^G,\ p_s^G)$，其中 $v_s^G \le G_s$表示以价格 p_s^G报出的商品数量。因此，每个 π_s都是买方所拥有的商品和货币数量以及卖方所拥有的商品数量的函数，但与其他卖方可提供的商品数量无关。这对应于卖方进行一些市场调研。每位卖方各采用一种策略所构成的策略组合记为$\pi_{\mathcal{S}} \in \Pi_{\mathcal{S}}$。交易者在特定博弈$\mathbb{G}(\mathbf{M}, \mathbf{G})$中的行为写作$\pi_{\mathcal{S}}(\mathbf{M}, \mathbf{G})$。我们也将他们的报价统称为 $v^G{}_{\mathcal{S}}$ 和 $p^G{}_{\mathcal{S}}$。公平机制定义如下：

定义 1. 对于任意卖方策略组合$\pi_{\mathcal{S}}$，公平机制是一个函数 $\phi : \mathbb{R}_0^{+} \times \mathbb{R}^{+,|\mathcal{B}|} \to \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|}$，在每个博弈 $\mathbb{G}(\mathcal{M},\mathcal{G})$中为每位买方分配权利，并满足

$$\sum_{b \in \mathcal{B}} \phi_b(V, \mathcal{D}) = V \qquad \forall\, \mathcal{D} \in \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|},$$

$$D_b = 0 \Rightarrow \phi_b(V, \mathcal{D}) = 0 \qquad \forall\, \mathcal{D} \in \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|}, \forall b \in \mathcal{B}$$

$$\phi_b(V, \alpha(\mathcal{D})) = \phi_{\alpha^{-1}(b)}(V, \mathcal{D}) \qquad \forall\, \mathcal{D} \in \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|}, \forall b \in \mathcal{B}, \forall \alpha,$$

其中 α是$\mathcal{B}$的一个排列，且 $V(\pi_{\mathcal{S}}, \mathcal{M}, \mathcal{G}) = \sum_{v_s^G \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{M},\mathcal{G})} v_s^G$。

在本文中，我们重点研究一种实现争议服装分配 (CGD) [2] 的公平机制，它是一种研究充分的基准公平方法；下文将分配的权利记作 $\mathbf{R} = \phi(V(\pi_s, \mathbf{M}, \mathbf{G}), \mathbf{D})$。

函数 μ对我们更为重要，它在竞价阶段之后分配资源。竞价由买方的策略决定，买方分两个同时行动阶段行动。首先，在观察卖方的报价以及他们拥有的商品、权利和货币数量后，每位买方声明自己愿意出售的权利数量和价格（$v_b^R,\ p_b^R$）。其次，在观察其他买方的报价后，每位买方声明自己愿意购买的商品和权利的数量及价格（$v_b^R,\ p_b^R,\ v_b^G,\ p_b^G$）。我们假设，公布的价格可以解释为最高价格，也可以解释为平均价格（若从多个卖方处购买），并为每种情况构建不同的 μ 市场机制。随后，可以将每位卖方在两个阶段中的策略一并表示为一个函数

$$\pi_b : \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{S}|} \times \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{S}|} \times \mathbb{R}_0^{+} \times \mathbb{R}_0^{+} \times \mathbb{R}_0^{+} \times \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|} \times \mathbb{R}_0^{+,|\mathcal{B}|} \to \mathbb{R}_0^{+,6},$$

written as $\pi_b(v_{\mathcal{S}}^G, p_{\mathcal{S}}^G, M_b, G_b, R_b, v_{\mathcal{B}}^R, p_{\mathcal{B}}^R) = (v_b^R, p_b^R, \overline{v}_b^R, \overline{p}_b^R, \overline{v}_b^G, \overline{p}_b^G)$. For each buyer $b \in \mathcal{B}$, their set of strategies is Π_b. A profile of one strategy per buyer is denoted as $\pi_{\mathcal{B}} \in \Pi_{\mathcal{B}}$. We write the Cartesian

我们主要关注买方为医院的情形。在这种情况下，准确估算资金和供应并不困难。分配给每位买方的权利是公开信息。

乘积 $\Pi_{\mathcal{S}} \times \Pi_{\mathcal{B}}$ 作为 Π，并将 $\pi \in \Pi$ 表示为所有交易者策略的一个策略组合。市场机制由此形式化定义为：

定义 2. 对于博弈 $\mathbb{G}(\mathcal{M}, \mathcal{G})$中的任意交易者策略组合$\pi$，市场机制是一个函数 μ: $\Pi \times \mathbb{R}^{+,|\mathcal{T}|} \times \mathbb{R}^{+,|\mathcal{B}|} \to \mathcal{T}\mathbb{R}^{+,|\mathcal{T}|} \times \mathbb{R}^{+,|\mathcal{B}|} \times \mathbb{R}^{+}$，它返回交易的一种实现，即市场结束时交易者之间商品、权利和货币的重新分配。我们还要求 μ 满足以下条件：

(1) 交易者出售的商品或权利不得超过其提供的数量；*(2)* 买方购买的商品或权利不得超过其声明的数量；*(3)* 交易者出售商品或权利的价格不得低于要价；*(4)* 买方购买商品或权利的价格不得高于（或平均而言高于）其出价；*(5)* 买方不得从自己手中购买权利。

我们稍微滥用一下记号，用 $\mu^G(\cdot)$ 和 $\mu^{\mathcal{M}}(\cdot)$ 分别表示重新分配商品和货币所受的限制。

请注意，最后一个条件确保买方期望获得的权利数量确实能够实现。若没有这一条件，买方就可以在实际上与自己交易，从而从市场获得较少的权利，即使他们本可以购买更多。市场机制的选择在很大程度上会影响交易者的策略行为。因此，我们将在下一节专门研究多种此类机制。

剩下的就是为每位交易者 t 定义效用函数 $u = (u)_{t \in \mathcal{T}}, u_t : \Pi \times \mathbb{R}^{+,|\mathcal{T}|} \times \mathbb{R}^{+,|\mathcal{T}|} \to \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$。卖方的动机纯粹是获取利润。因此，他们从市场获得的效用就是收到的货币数量。我们在这个简单模型中进一步加入负效用，以反映卖方在每个市场结束时持有的商品。这种惩罚体现了社会希望卖方出售大部分可用关键商品的愿望，例如，可以通过危机期间通常实施的国家惩罚措施来实现。此外，如果市场结束了危机，卖方还会获得少量额外效用，以补偿他们仍然持有的库存商品。具体而言，对于每个 $s \in \mathbf{S}$,

$$u_s(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{G}) = \begin{cases} \mu_s^M(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}) + C_1 \mu_s^G(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}) & \text{NT}, \\ u_s\text{-NT} + C_2 \mu_s^G(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}) & \text{T}, \end{cases} \tag{1}$$

其中，NT/T 分别表示非终端/终端市场，且 C_1 和 C_2是适当的常数。买方的效用应激励其在整个危机期间持续获得商品供应。因此，每个交易期结束后，他们都会根据持有的商品（最多不超过其需求）获得效用，这代表其日常消费（例如，每天的消费）。危机结束时，买方还会根据持有的每个货币单位获得少量效用 C_3。形式上，对于 $b \in \mathbf{B}$,

$$u_b(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{G}) = \begin{cases} \min\left\{D_b, \mu^G(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G})\right\} & \text{NT}, \\ u_b\text{-NT} + C_3 \mu^M(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}) & \text{T}. \end{cases} \tag{2}$$

终端状态效用中附加常数的语义含义，是对危机可能继续发生这一情况进行补偿。

现在让我们再次重申并描述卖方和买方在我们的双边市场中进行交易的整个过程：

如果没有这样的惩罚，并且商品不易腐坏、分配危机持续较长时间，那么卖方的策略行为很可能是以极高的价格持续出售少量商品。

卖方阶段：
（1）每位卖方申报待售商品的数量和价格。（2）公平机制 ϕ向每位买方分配权利。

买方阶段：
(3) 每位买方申报其愿意出售的权利数量及要价。(4) 每位买方根据商品和权利的可用数量及要价，分别申报商品和权利的出价及期望数量。(5) 使用市场机制 μ 对出价进行撮合。(6) 交易者获得其效用。

请注意，我们模型的一个重要方面是，买方只能在市场序列中的下一个市场使用其获得的货币。这使活跃买方比被动买方更早买到关键商品，从而占得优势；获得这一优势的代价是购买额外权利。

2.2 市场序列：危机

我们假设交易以周期性方式进行，按有限的市场序列展开，例如代表多个交易日。形式化地说，危机是一个具有连续状态空间和连续行动空间的部分可观测随机博弈，表示为 $\mathbb{C} = (\mathrm{T},\ \mathrm{D}\ \phi,\ \mu,\ u,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{G}^1,\ T,\ P)$.

T，D ϕ，μ和 u与我们对市场博弈的定义含义相同，并假设在整个危机期间保持不变。这个随机博弈中的每个状态都对应一个市场博弈，初始博弈为 $\mathbb{G}(\mathrm{M}_1,\ \mathrm{G}^1)$。我们对一场全面危机建模，并假设所有交易者都是平稳马尔可夫型的，即依据其对危机当前状态的观测制定策略，也就是说，博弈 $\mathbb{G}$ 具有一些参数 (M，G)。因此，上一节介绍的参数化策略将在整个危机期间采用。每次非终止交易后，卖方会保留未售出的商品数量，买方则会保留货币和未消耗的商品数量，以供下一个市场使用。相反，市场结束后，未使用的权利将被处置。下一个市场开始前，交易者还会获得额外的商品或货币。此过程通过转移函数 P描述：$\Pi \times \mathbb{R}^{+\mathcal{T}},\ |\ |_{\times \mathbb{R}^{+\mathcal{T}}},\ |\ |_{\to \mathbb{R}^{+\mathcal{T}}},\ |\ |_{\times \mathbb{R}^{+\mathcal{T}}},\ |\ |_{\mathcal{T}}$。采用与市场机制 μ相同的记号，我们写作

$$P_t^G(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{G}) = \mu_t^G(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}) + \begin{cases} G_t^1 & \text{if } t \in \mathcal{S} \\ 0 & \text{if } t \in \mathcal{B}, \text{ and} \end{cases}$$

$$P_t^M(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{G}) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in \mathcal{S} \\ \mu_t^M(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G}) + M_t^1 & \text{if } t \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

有限时域记为 T。通常，将没有交易者有动机单方面改变其策略的情形称为均衡。我们考虑折扣 γ下的最优性。

定义 3. 设 $\pi \in \Pi$ 诱导出一系列市场 $((\mathcal{M}_1, \mathcal{G}^1) \ldots, (\mathcal{M}^T, \mathcal{G}^T))$。若对于任意单方面偏离的策略组合 $\hat{}\pi \in \Pi$ 及其对应的一系列市场 $((\hat{}\mathcal{M}_1, \hat{}\mathcal{G}^1) \ldots, \pi$是一个均衡，我们就称之为 $(\hat{}\mathcal{M}^T, \hat{}\mathcal{G}^T))$ 对于所有交易者 t，均满足

$$\sum_{i=1}^{T} \gamma^i u_t(\pi, \mathcal{M}^i, \mathcal{G}^i) \geq \sum_{i=1}^{T} \gamma^i u_t(\hat{\pi}, \hat{\mathcal{M}}^i, \hat{\mathcal{G}}^i).$$

2.3 挫折与无政府代价

传统上，设计系统的效率通过无政府代价这一概念来衡量，它刻画了自利决策者所达成的均衡状态与最优状态之间的差异。系统规划者通常采用的最优性准则是帕累托最优社会福利，即最优状态使参与者个人效用之和最大化。

在我们的工作中，我们借鉴这一思路，但考虑规划者略有不同的目标。在危机中，我们更关注维持一个平等社会，而不是盲目地最大化所有效用。因此，我们研究买方获得的商品数量如何随不同市场机制而变化，并将其与分配给他们的权利数量进行比较。由此产生的差异反映了系统中固有的不平等，正式定义为挫折；它在概念上衡量的与传统无政府代价相同：系统为赋予代理人自主选择的自由，而非实行中央规划所付出的代价。

定义 4. 在策略组合 $\pi \in \Pi$ 和分配的权利 $\mathcal{R} = \phi(V(\pi_S, \mathcal{M}, \mathcal{G}), \mathcal{D})$ 下，买方 b 在市场 $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ 中的挫折定义为

$$f_b(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{G}) = \max\left\{\frac{R_b - \mu_b^G(\pi, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{G})}{R_b}, 0\right\}.$$

因此，该系统中的无政府代价是：在均衡 π 达成并引发一系列市场 $((\mathrm{M}_1, \mathrm{G}^1) \ldots, (\mathrm{M}^\tau, \mathrm{G}^\tau))$ 时，买方在 $\tau \leq T$市场序列中经历的累积挫折的归一化值，即：

$$PoA^\tau = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} \sum_{b \in \mathcal{B}} f_b(\pi, \mathcal{M}^i, \mathcal{G}^i)}{\tau |\mathcal{B}|}. \qquad \text{(PoA)}$$

3 市场机制

本节将介绍四种机制，这些机制根据交易者的输入（出价）安排个体交易，以此研究如何重新分配市场中的资源。具体而言，清算约束（要价与出价的兼容性以及可能存在的其他约束条件）将由两个二分图表示：$G_G = (\mathrm{B}, \mathrm{S}\ E_G)$表示商品交易的兼容性，$G_R = (\mathrm{B}_S, \mathrm{B}_B, E_R)$表示权利交易的兼容性。此处，$\mathrm{B}_S$和$\mathrm{B}_R$是B的互不相交的副本，$\mathrm{B}_S$表示权利卖方，$\mathrm{B}_R$ 表示权利买方。B中的交易者既可以是权利卖方，也可以是权利买方，但G_R 不会用边连接代表该交易者的顶点。两者G_G, G_R均配备正实数权重 $w_G\colon\ V_G \to \mathbb{R}$ 和 $w_R\colon\ V_R \to \mathbb{R}$。顶点的权重自然表示各自提供出售的商品或权利数量，以及各自希望购买的商品或权利数量。

我们主要关注绝对 机制，即禁止任何 出价高于要价的交易，也就是说，$p_b^G > p_s^G$和/或 $p_b^R > p_{b'}^R$。本节末尾，我们将介绍一种放宽此条件的机制，使其只对平均 价格成立。

边界情形的研究留待未来工作。

3.1 随机分配

一种简单的随机交易机制用于同时购买权利和商品，流程如下。首先，随机排列买方。按照这一顺序，向每位买方提供随机排列的交易者商品报价列表和权利报价列表。买方先按照列表顺序与卖方交易商品，直到其不再持有任何权利。在第二阶段，买方按照列表顺序以等量交易商品和权利。此过程持续进行，直至买方购买的总数量达到其所需数量，或不再有报价。我们还确保每一步中，要价都低于买方的可接受价格，且买方的购买数量不超过另一方的报价数量。

该机制存在一个不尽如人意的特性。由于向买方展示的报价顺序是随机的，他们往往不会购买最便宜的选项。这种情况可能符合现实，因为没有任何一个买方能够看到所有报价并在其中进行选择。不过，如果交易按顺序进行，买方自然会优先考虑最便宜的报价。这也会激励卖方和交易者以更低的价格报价。

3.2 贪心分配

该算法是对随机分配的改进，旨在解决上一段中提到的问题。开始时，买方会按照商品 p_b^G的可接受价格降序排列。对于每个买方，该机制同样分为两个阶段。在第一阶段，买方使用分配给自己的权利来购买商品，并从最便宜的报价开始。当其不再拥有任何权利时，买方会再次购买数量相同的权利和商品，并且两者都从最便宜的报价开始。我们会持续进行这一过程，直到没有剩余报价，或者该买方已经购买了其所需的数量，然后继续处理下一位买方。

请注意，随机分配和贪心分配是易于实现的启发式方法，但不一定能得到使出价清算数量最大的最优分配。

3.3 使用绝对价格进行最大清算

使用网络流可以获得一种清算出价最大数量的分配，同时还要求买入的权利数量与商品数量相等。我们将采用这种方法的机制称为最大清算。它的优点是也适用于不可分商品。另一个优点是，最大清算分配的结果是一系列单笔交易，其中卖方要价与买方出价相互兼容。每笔交易的最终价格可以通过多种方式从该兼容区间中选定。

定理1. 通过归约到最大流问题，可以高效地找到最大清算分配。因此，对于可分商品和不可分商品，最大清算分配都可以在多项式时间内完成。

证明概要。构造最大流问题的网络，将 G_G和 G_R结合起来。完整版本见附录 C。□

3.4 使用平均价格进行最大清算

与目前介绍的市场机制不同，在这一变体的最大化出清机制中，我们将价格视为

算法 1 均衡学习算法

```
ℬ ← 买方集合，𝒮 ← 卖方集合，  𝔹 ← {}
对于 episode ∈ {1, ...N次模拟} 执行
    对于 τ ∈ {1, ...T} 执行
        G_s ← G_s + G_s^1,  M_b ← M_b + M_b^1
        o_𝒮 ←卖方观测
        π_S ← 剪辑(Π_S (o_S (s)), 0, 1)
        根据 ϕ分配权利
        o_ℬ ← 买方观测
        π̄_ℬ ← 截断(Π_B (o_B (b) π_S),  0,  1)
        π_ℬ ← 截断(Π_B (o_B (b) π_S π̄_B), 0, 1)
        按照市场机制交易 μ
        计算效用u_B u_S
        𝔹 ← 𝔹 ∪ {o_B o_S π_S π_B u_B u_S }
        GB ← max(GB − DB, 0)
        如果 τ mod N训练为零则
            采样 batch ~ 𝔹
            使用 TD3 训练 batch
        结束条件判断
    结束循环
    重置回合
结束循环
```

$\overline{p}_b^G$和 p_b^R是最高平均 价格 b 愿意支付。这是对采用绝对报价的最大化出清机制的一种放宽，因为它允许进行此前不可行的交易。同样，该问题可以高效求解。

定理 2. 使用平均出价，通过线性规划可以高效地找到最大清算分配。

证明概要。该线性规划旨在最大化已售商品的数量，同时确保商品和权利的平均售价不高于目标价格。该线性规划可在多项式时间内求解。完整证明见附录 C。□

重复买方阶段。 为了进一步改善 aMarket 在一次迭代中的清算效果，我们提出一种简单的扩展：使用相同的策略组合 π 重复进行买方阶段 k 次。在每一轮中，商品、权利和货币都会根据选定的市场机制重新分配。

4 学习博弈的均衡

本节介绍我们使用的强化学习算法，用于近似求解危机的均衡。按照文献中的常见做法，我们将整个交互过程视为一个多智能体强化学习（MARL）问题 [6, 10, 12, 13],，并假设学习算法会收敛到一个接近均衡的解。我们还通过计算该解的可剥削性来验证其质量 [9]。卖方和买方被视为代理人，在第 2 节和第 3 节所述的环境中进行交互。每个代理人都经过训练，以最大化其在该环境中的预期折扣未来效用。

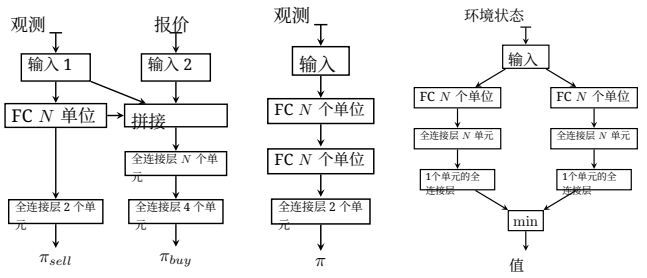

图 2：所用神经网络的架构：（左）卖方行动者，（中）买方行动者，以及（右）评论家。

4.1 学习环境中的效用

接下来确定我们的注意力需要集中在常数 C_i。为简单起见并缩小行动空间，我们假设商品和权利的报价存在一个最高价格 P。由于报价数量受交易者持有的数量限制，交易者的行动范围是一个闭区间。

我们先来看卖方：其效用由两个常数决定，分别代表商品储存价格，以及终端市场中商品数量对应的预期未来效用。我们将后者设为市场出清价格。这意味着卖方预期至少能以该价格卖出商品，这在危机期间是一个合理的假设。商品储存价格 C_1可以任意选取，但必须足够高。如果 $|C_1|_2^T < C_2$，卖方保留商品会更有利，因此销售价格将为 P。

买方的效用取决于其对终端市场中货币未来预期效用的判断。相对惩罚会影响买方获得的平均效用，同样可以任意选取。货币的未来效用是用该货币能够获得的商品效用，至少等于以最高价格购买商品所获得的效用 P。因此， C_3 应与 P成反比。

4.2 学习算法与模型架构

为了训练智能体策略，我们采用一种名为双延迟深度确定性策略梯度（TD3） [7]的行动者-评论家 算法。我们针对在当前场景中寻找解对其进行了修改，并在算法 1 中给出了伪代码。每个交易者 t 的策略 Π_t 是一个高斯分布随机变量，其均值和标准差由神经网络参数化。

我们使用的神经网络架构如图 2 所示。买方行动者需要处理卖方的报价，并在处理其他买方的报价之前，依次对外出售权利。为此，将第一个隐藏层的输出与其他买方的报价拼接起来，并且仅使用第一个隐藏层来预测买方的报价。这样，网络就能在不受其他买方报价影响的情况下获得该买方的报价。由于动作取值范围有限，行动者在输出层的均值上使用 Sigmoid 激活函数，然后进行适当的缩放。标准差则使用 Softplus 激活。

此外，我们通过上行策略更新 [15] 和奖励裁剪增强了原始 TD3 算法，以 $[-1, 1]$。为了加速训练，我们允许卖方共享同一个经验回放缓冲区 $\mathbb{B}$。这样无需使用完全相同的执行器，便可使卖方的策略趋于相似。

5 实证评估

最后，我们通过实际案例展示融合公平性与市场机制的混合系统所具备的特性，以及我们的学习算法的有效性。首先，我们使用 NashConv（一种衡量可剥削性的指标）评估学习所得解的质量。第二部分中，我们研究学习算法的扩展能力如何随交易者数量变化。最后，我们分析在整个危机期间纳入权利在多大程度上影响近似均衡的无政府代价。

我们评估了将三种公平性程度分别与第 3 节中的全部四种市场机制相结合的系统。我们考虑的公平性变体包括以下系统：(i) 不分配权利（即自由市场）；(ii) 权利与 k=1 交易；以及 (iii) 权利与 k=2 交易。

实验设置。 所有实验均在一台计算集群上进行，该集群配备以 2.40GHz 运行的 AMD EPYC 7532 中央处理器。我们仅使用了其 16 个核心中的 5 个和 3GB 随机存取存储器。代码使用 Python 编写，并采用了 tensorflow 2.6、tensorflow-probability 0.15、mip 1.14 和 numpy 1.21。所有线性规划计算均由开源 CBC 求解器完成。算法 1 的所有超参数完整列表见附录 A，代码亦可在此处获取。

实验领域。 我们考虑由 $T = 10$ 个市场组成的序列，每个市场有四个买方和四个卖方。我们选取一个典型设置：四个买方中，有三个获得的资金远多于最后一个买方。同时，这最后一个买方的需求很大，在大多数情况下都超过其他买方的需求。我们将前三个买方称为富裕买方，将最后一个买方称为贫困买方。我们通过从给定区间中均匀随机抽取买方的需求和收益，生成此设置的实例。对于富裕买方，需求 D_b从 U(1，2) 中抽取，收益 M_b^1 ~从 U(4，6) 中抽取。对于贫困买方， D_b ~从 U(4，6) 中抽取，M_b^1 ~从 U(1，2) 中抽取。随后对需求和收益集合进行归一化，使得$\mathbb{E}_{b\sim\mathcal{B}}[D_b] = 1$ 且$\mathbb{E}_{b\sim\mathcal{B}}[M_b^1] = 1/8$。为确定尺度，我们将最高价格设为 $P = 1$。随后将效用中的常数设为 $C_1 = -1/8$、 $C_2 = 1/2$， $C_3 = 1/P = 1$ 和$G_s^1 = 1/|S|$。

5.1 可剥削性

我们通过回合 τ 的可剥削性来衡量候选解的质量。计算可剥削性时，我们采用 NashConv [9], 的概念，其定义如下：

$$\sum_{i=1}^{T}\sum_{t\in\mathcal{T}} u_t(\pi^{\tau}_{-t}\cup\overline{BR}_t(\pi^{\tau}),\overline{\mathcal{M}}^{i_t},\overline{\mathcal{G}}^{i_t}) - u_t(\pi^{\tau},\mathcal{M}^i,\mathcal{G}^i).$$

这里，我们用 $BR_t(\cdot)$ 表示交易者 t 的近似最佳响应。其余策略记为 π_{-t}。 π^{τ}和 $\pi^{\tau}_{-t}\cup BR_t(\pi^{\tau})$ 的市场序列分别记为 (M^i, G^i) 和 (M^{i_t}， G^{i_t})。我们分别为每位交易者训练最佳响应策略 100 个回合，同时固定对手的策略，并从 π^{τ} 中交易者 t 的策略开始。在

这相当于选择一种货币，使得一单位商品的价格至多为 1。

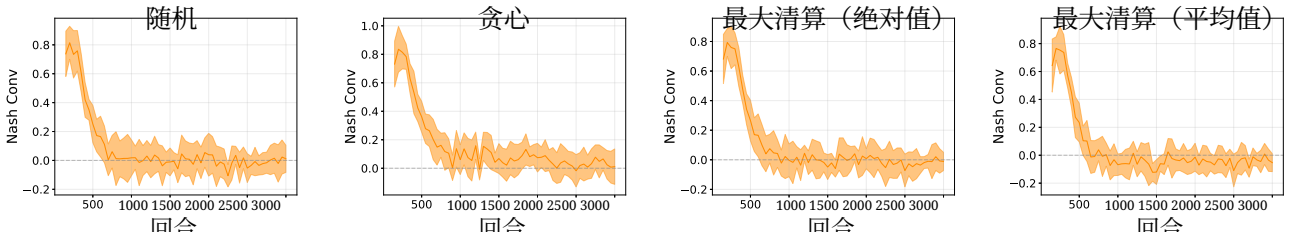

图3：在具有权利和 k=1 交易期的系统中，使用四种不同市场机制学习均衡时，候选解的可剥削性。图中展示了基于十个随机种子得到的均值和标准差。

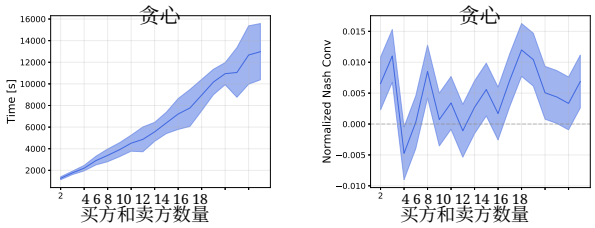

图4：学习均衡所需的计算时间，以及归一化最终可剥削性随交易者数量变化的函数关系。

图3展示了在包含权利和 $k = 1$ 的系统中，采用全部四种市场机制所获得的结果；这些结果是使用不同随机种子进行 10 次运行后的平均值。结果表明，该算法能够达到与均衡足够接近的近似结果。此外，我们验证了纳入权利或 k 的取值对可剥削性没有显著影响。

5.2 可扩展性

在第二个实验中，我们探究计算时间随参与者数量变化的情况。更具体地说，我们研究具有 N 个买方和 N 个卖方的危机。在这些模拟中，我们按照前文所述生成需求和收益，但使用更多交易者。每个买方以 3/4 的概率成为富裕买方，否则成为贫困买方。对于采用贪心市场机制且设有公平机制的系统，使用 $k = 1$时，每个 N所需的计算时间如图4左侧所示。对于 N的每个取值，我们采样了10个实例。该算法的时间复杂度相对于买方和卖方的数量呈近线性关系 N。

为了说明即使交易者数量庞大，我们仍达到了近似均衡，我们再次评估了 NashConv。不过，计算 NashConv 会占用大量计算时间。为了单独考察算法的可扩展性，我们仅在训练结束时评估一次。图 4 右侧展示了按买方数量归一化后的 NashConv 值，以便于比较。结果表明，我们达到了均衡的良好近似。

5.3 市场中的无政府状态代价

这里我们介绍主要结果：实证研究无政府代价在我们的混合系统中如何演变，并将其与一个无干预市场相比，我们对混合系统中无政府代价的变化进行了实证研究。结果如图5所示，展示了社会通过（受监管的）市场而非集中式方式分配关键商品所付出的价格。所有结果均取自10个实例的平均值，并同时显示标准误。顶行比较了采用前文介绍的三种公平性模式的系统，在四种已介绍的市场机制下的无政府状态代价。请注意，具有权利的系统其无政府状态代价始终较低。此外，引入第二个交易期会进一步降低该代价。另一个值得注意的观测是，最大清算分配机制的无政府状态代价低于另外两种较为基础的机制。

底行展示了买方的个体受挫度。正如预期，贫困买方的受挫度最高。除此之外，我们观察到的整体无政府状态代价结果也明显反映在每个买方的受挫度上。有趣的是，结果表明，在交易中引入公平机制不仅有利于贫困买方，也有利于富裕买方。

5.4 买方和卖方中的无政府状态代价

我们针对上述实验领域中每个 $N \in \{2, \ldots, 19\}$，生成包含 N 个买方和 N 个卖方的危机随机实例。图 6 展示了无政府状态代价随 N 变化的情况。对于每个 N，我们生成 10 个实例，图中也显示了标准误。我们此前报告的总体趋势在这里也明显适用于所有市场机制：(i) 自由市场中的无政府状态代价始终最大，而有权利的市场则不然；(ii) 有 $k = 2$ 个买方阶段的市场优于有 $k = 1$ 个阶段的市场。不过，结果也表明，不同市场机制的表现差异很大。在**随机**机制下，无政府状态代价似乎随交易者数量缓慢但持续上升；而在**贪心** 机制下，无政府状态代价则趋于稳定。最有意思的是**最大清算** 机制。无论采用绝对价格还是平均价格，自由市场中的无政府状态代价都持续上升，而有权利的系统中，在买方阶段进行 $k = 1$ 次迭代后，无政府状态代价大多停滞不变。在有 $k = 2$ 个买方阶段的再分配系统中，经过 $N = 6$ 后，无政府状态代价持续下降，其值达到自由市场中的 ≈ 5.93 分之一。

6 结论

据我们所知，我们首次提出了一种明确结合了双边市场机制与

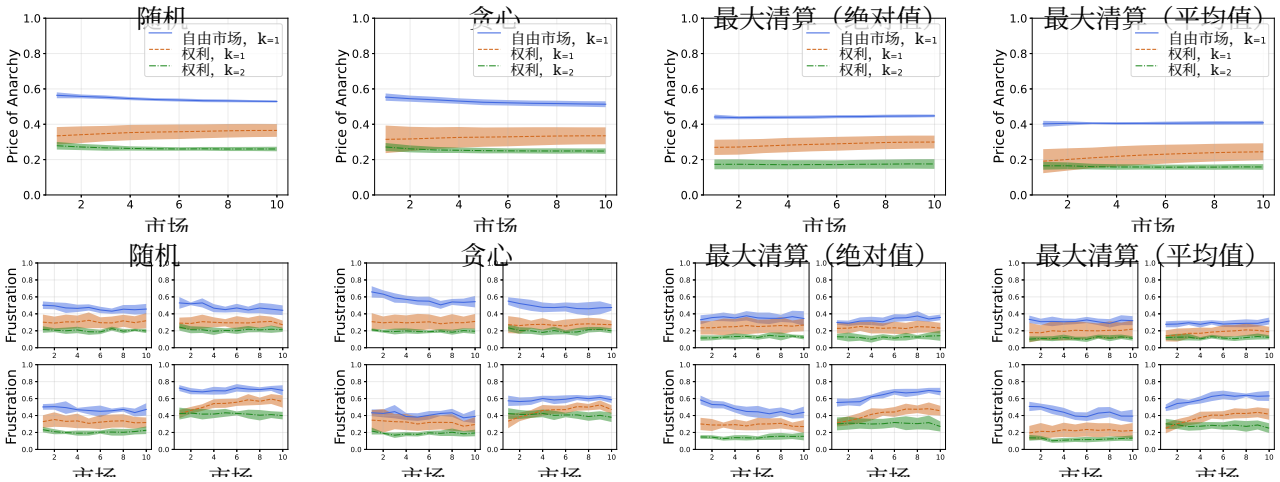

图5：（上）无政府代价；（下）在采用三种公平性变体的系统中，四种不同市场机制下四位买方的个体受挫度。受挫度图中的贫困买方始终位于右下方。

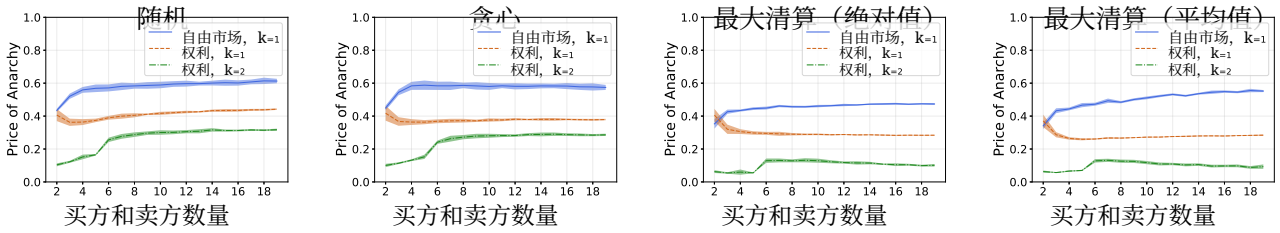

图6：在采用三种公平性变体的系统中，四种不同市场机制下，无政府代价随买方和卖方数量的变化。

公平机制的系统，该公平机制分配购买权，以便在有需要的时期实现更具社会正义的关键商品再分配。我们采用争议服装分配作为权利公平分配的基准方法，并研究了四种独立的交易市场机制：随机、贪心、绝对价格最大清算和平均价格最大清算。我们的两项主要理论结果表明，后两种分配可以在多项式时间内计算得出。随后，我们将系统中的无政府状态代价（PoA）定义为所谓个体受挫度之和，即每位交易者根据公平机制应享有的商品数量与其在市场中实际能够获得的数量之间的差值，并对该差值进行缩放。此外，我们开发了一种强化学习算法，能够近似求得系统的均衡，从而在实践中评估无政府状态代价（PoA）。在工作的最后部分，我们通过一个著名案例展示：对于一个资金不足且供应短缺的买方，引入购买权可能会显著降低受挫度，进而降低无政府状态代价（PoA），尤其是对于优先考虑售出商品数量的机制而言。然而，是否存在一种在极限情况下能够实现零无政府状态代价（PoA）的机制，仍然是一个开放问题。

未来工作。 我们发现本研究存在两项主要局限。首先，我们聚焦于全面爆发的危机，并假设一个较小但恒定的在多个交易周期中补给商品和货币。我们希望研究更复杂的系统动态所带来的影响，例如危机初期需求急剧增加所导致的牛鞭效应。其次，我们将公平性模型限定于争议服装分配。考虑其他模型可能会改变系统动态，或许还能改善无政府状态代价。此外，设计最优公平规则的方式，或可仿照 [8] 对投票机制所采用的方法。

致谢

本研究得到捷克内政部的 CRISDIS 项目（编号 VI04000107）以及 SIMTech-NTU 复杂系统联合实验室的支持。计算资源由“e-Infrastruktura CZ”项目（e-INFRA CZ LM2018140）提供，该项目由捷克共和国教育、青年和体育部支持。作者还要感谢一位匿名审稿人，他建议研究交易者数量对无政府代价的影响。

参考文献

[1] Mohammad Akbarpour、Piotr Dworczak 和 Scott Duke Kominers。2020。《再分配机制》。可见于 *SSRN 3609182*（2020）。[2] R.J. Aumann 和 M. Maschler。1985。《塔木德中的破产问题：博弈论分析》。《经济理论杂志》*36，195-213*（1985）。[3] Daniele Condorelli。2013。用于最优分配稀缺资源的市场与非市场机制。《博弈与经济行为》82（2013），582–591。[4] Martin W Cripps 和 Jeroen M Swinkels。2006。大型双向拍卖的效率。《计量经济学》74，1（2006），47–92。[5] Piotr Dworczak、Scott Duke Kominers 和 Mohammad Akbarpour。2021。《通过市场进行再分配》。《计量经济学》89，4（2021），1665–1698。[6] Haobo Fu、Weiming Liu、Shuang Wu、Yijia Wang、Tao Yang、Kai Li、Junliang Xing、Bin Li、Bo Ma、QIANG FU 和 Yang Wei。2022。在大规模不完全信息博弈中的演员-评论家策略优化。载于国际学习表征会议。https://openreview.net/forum?id=DTXZqTNV5nW [7] Scott Fujimoto、Herke Hoof 和 David Meger。2018。解决演员-评论家方法中的函数逼近误差。（2018），1587–1596。[8] Raphael Koster、Jan Balaguer、Andrea Tacchetti、Ari Weinstein、Tina Zhu、Oliver Hauser、Duncan Williams、Lucy Campbell-Gillingham、Phoebe Thacker、Matthew Botvinick 和 Christopher Summerfield。2022。借助民主人工智能进行以人为中心的机制设计。《自然·人类行为》6，10（2022年10月1日），1398–1407。https://doi.org/10.1038/s41562-022-01383-x[9] Marc Lanctot、Vinicius Zambaldi、Audrunas Gruslys、Angeliki Lazaridou、Karl Tuyls、Julien Pérolat、David Silver 和 Thore Graepel。2017。多智能体强化学习的统一博弈论方法。*arXiv* 1711.00832（2017 10 48550 2207 00898）。https://doi.org/ . /ARXIV. . Siqi [10] Liu、Luke Marris、Daniel Hennes、Josh Merel、Nicolas Heess 和 Thore Grae- pel。2022。NeuPL：神经群体学习。*arXiv* 预印本 *arXiv:2202.07415*（2022）。[11] John R Moroney 和 CAK Lovell。1997。市场经济与计划经济的相对效率。《南方经济学杂志》（1997），1084–1093。[12] Paul Muller、Shayegan Omidshafiei、Mark Rowland、Karl Tuyls、Julien Pérolat、Siqi Liu、Daniel Hennes、Luke Marris、Marc Lanctot、Edward Hughes、Zhe Wang、Guy Lever、Nicolas Heess、Thore Graepel 和 Rémi Munos。2019。一种多智能体学习的通用训练方法。*CoRR* abs/1909.12823（2019）。arXiv:1909.12823 http://arxiv.org/abs/1909.12823[13] Julien Perolat、Bart de Vylder、Daniel Hennes、Eugene Tarassov、Florian Strub、Vincent de Boer、Paul Muller、Jerome T Connor、Neil Burch、Thomas Anthony 等。2022。运用无模型多智能体强化学习掌握战略棋。*arXiv* 电子预印本（2022），arXiv–2206。[14] J. Černý、A. Jedličková、M. Loebl 和 D. Sychrovský。2022。关键分配系统。*arXiv* 2207 00898 2022 10 48550 2207 00898。（）。[15] https://doi.org/ . /ARXIV. . OriolVinyals、Igor Babuschkin、WojciechM. Czarnecki、MichaëlMathieu、Andrew Dudzik、Junyoung Chung、David H. Choi、Richard Powell、Timo Ewalds、Petko Georgiev、Junhyuk Oh、Dan Horgan、Manuel Kroiss、Ivo Danihelka、Aja Huang、L. Sifre、Trevor Cai、John P. Agapiou、Max Jaderberg、Alexander Sasha Vezhnevets、Rémi Leblond、Tobias Pohlen、Valentin Dalibard、David Budden、Yury Sulsky、James Molloy、Tom Le Paine、Caglar Gulcehre、Ziyun Wang、Tobias Pfaff、Yuhuai Wu、Roman Ring、Dani Yogatama、Dario Wünsch、Katrina McKinney、Oliver Smith、Tom Schaul、Timothy P. Lillicrap、Koray Kavukcuoglu、Demis Hassabis、Chris Apps 和 David Silver。2019。运用多智能体强化学习达到《星际争霸II》宗师级水平。《自然》（2019），1–5。

A 超参数

实验使用了以下参数值：

Actor 学习率 $3\cdot 10^{-4}$Critic 学习率 10^{-3}Actor 隐藏层大小 32 Critic 隐藏层大小 256 批次大小 512 L2 惩罚项 10^{-2} 折扣因子 γ 0.99 目标网络更新率 0.002 Actor 训练频率 3 熵惩罚项 $3\cdot 10^{-3}$训练回合数 3000 NashConv 训练回合数 100

B 更简单的再分配系统示例

考虑一个有两个买方 $\{b,\ b\prime\}$ 和一个卖方 s 的再分配系统示例。设买方 b 拥有更多资金，而另一位买方 $b\prime$ 有更大的需求，形式化表示为 $(\mathrm{M}_b^1,\ \mathrm{M}_{b\prime}^1) = (2,\ 1)$ 和 $(\mathrm{D}_b^1,\ \mathrm{D}_{b\prime}^1) = (1,\ 3)$。此外，设卖方有两个单位的商品待售。

假设卖方以价格 $p^G = 1$ 出售其全部库存 $(v^G = 2)$，根据争议衣物规则，权利的分配结果为 $(\mathrm{R}_b^1,\ \mathrm{R}_{b\prime}^1) = (0。5,\ 1。5)$。在向买方发放权利后，第二位买方 $b\prime$ 意识到，他们可以用拥有的货币单位直接购买一个单位的商品，于是将剩余的半个权利拿出来出售。假设他们选择的价格为 $p_{b\prime}^G = 1$。另一位买方 b 无意出售其权利，因为他们更愿意用它购买商品，而且 $b\prime$ 也不太可能购买该权利。设可接受价格和数量声明如下

$$(v_b^R, p_b^R, \overline{v}_b^R, \overline{p}_b^R, \overline{v}_b^G, \overline{p}_b^G) = (0, 0, 0.5, 1, 1, 1), \tag{3}$$

$$(v_{b\prime}^R, p_{b\prime}^R, \overline{v}_{b\prime}^R, \overline{p}_{b\prime}^R, \overline{v}_{b\prime}^G, \overline{p}_{b\prime}^G) = (0.5, 1, 0, 0, 1, 2). \tag{4}$$

接下来，使用市场机制对出价进行清算。在这个例子中，我们将展示第 3.2 小节定义的贪心分配，因为它是本文所考虑的市场机制中最直观的一种。

- 我们先来看买方 $b\prime$，因为 $p_{b\prime}^G > p_b^G$：（1）由于可接受价格 $p_{b\prime}^G$ 大于 p^G，第一阶段将 $\min\left\{v^G, v_{b\prime}^G, R_{b\prime} - v_b^R, \mathcal{M}_{b\prime}^1 / p^G\right\} = 1$ 数量售给买方 $b\prime$。（2）在第二阶段，$\overline{b\prime}$ 什么也不买，因为其期望数量和购买商品的期望价格均为零，而且已经买了 $\overline{v}_{b\prime}^G$ 数量的商品。

- 接下来来看买方 b：
（1）由于 $\overline{p}_b^G \geq p^G$，买方 b 使用分配给自己的权利，在第一阶段购买 $\min\left\{v^G - 1, \overline{v}_{b\prime}^G, R_b - v_b^R, \mathcal{M}_b^1 / p^G\right\} = 0.5$ 单位的商品。

(2) 最后，在第二阶段，b 分别从 $b\prime$ 和 s 处等量购买权利和商品，购买

$$\min\left\{v^G - 1.5, \overline{v}_b^R, \overline{v}_b^G - 0.5, \frac{\mathcal{M}_b^1 - 0.5p^G}{p^G + p_{b\prime}^R}\right\} = 0.5$$

单位商品。b 支付的货币按 p^G 和 $p_{b\prime}^R$ 的比例分配给 s 和 $b\prime$，在本例中两者各占一半。

市场机制以这种方式重新分配资源后，买方最终拥有（1，1）单位的商品和（0．5，0．5）单位的货币。卖方也将其用于交易的全部商品售出。

再分配系统通过使用转移函数从买方的商品中扣除其需求来结束本次交易迭代，从而模拟消费。于是，买方不再拥有商品，并且双方都获得一点效用。转移函数还模拟买方的外部收入和卖方的补给，为他们提供额外的货币和商品，以用于随后的市场。该模型假设，这些定期补充资源的数量在整个危机期间保持不变，并且等于交易者在第一个市场开始时拥有的货币和商品。总而言之，这意味着在再分配系统第二次迭代开始时，买方拥有（2．5，1．5）单位的货币，而卖方拥有两单位的商品。

与自由市场相比，带有权利的再分配系统因此保证买方 $b\prime$ 在第二个市场开始时额外获得 0.5 单位货币。这使他们将来能够购买更多商品，从而减少不断累积的挫折感。挫折感减少多少，不仅取决于交易者的策略，也取决于市场机制。如果采用最大清算机制，在这个简单案例中结果不会改变，因为出价没有其他清算方式。

C 证明

定理 3. 通过归约到最大流问题，可以高效地求得最大清算分配。因此，无论是可分商品还是不可分商品，最大清算分配都可以在多项式时间内求得。

证明。给定图 G_G, G_R 的互不相交副本，我们按如下方式构造一个最大流问题实例：
(1) 引入两个新顶点 s, t；(2) 用一条弧 (s, v) 将 s 与 B 中的每个顶点 v 连接起来，B 位于 G_G 中。这条弧的容量 $cap(s, v)$ 等于 v 的剩余权利数量，即分配数量减去打算出售的数量。显然，每个买方至少希望购买 $cap(s, v)$ 数量的商品。(3) 用一条弧 (s, v) 将 s 与 B_S 中的每个顶点 v 连接起来，B_S 位于 G_R 中。这条弧的容量等于 $w_R(v)$，即 Right v 打算出售的数量（可能为零）；(4) 将 G_R 的每条边朝向 B_B，并令 (x, y) 的容量等于 $w_R(y)$，即 Right y 打算购买的数量；(5) 将 G_G 的每条边朝向 S，并令 (x, y) 的容量等于 $w_G(y)$，即 Good y 打算出售的数量；(6) 引入 B 的一个副本 B′，并用一条弧 (v, v') 将 G_R 中 B_B 的每个顶点 $v \in$ 与其副本 $v' \in$B′ 连接起来，其容量为 $w_R(v)$，即 Right y 打算购买的数量；(7) 按照 G_G 中副本 v 与 S 的连接方式，将 B′ 中的每个 $v' \in$ 连接到 S，将这些新边朝向 S，并令每条终止于 S 中 $y \in$ 的此类弧的容量为 $w_G(y)$，即 Good y 打算出售的数量；

(8) 用弧 (y, t) 将 S 中的每个顶点 y 与 t 连接起来，其容量为 $w_G(y)$，即 Good y 打算出售的数量。

至此，最大流问题实例的构造完成。显然，从 s 到 t的最大流可实现一种出价清算，使售出的商品数量达到最大。同时，确保权利与相同数量的商品一并购得。□

定理 4. 利用平均出价的最大清算分配可以通过线性规划高效求得。

证明 我们可以通过以下线性规划求得最大清算分配，其中变量$r_{b,b'}$表示由 b将数量为 $(b, b_r) \in E_R$的权利售予 b_r的数量，而变量 $g_{s,b}$表示由 s将数量为 $(s, b) \in E_G$的商品售予 b的数量。我们还引入变量 m 和 M，分别表示买方购买商品数量的最小值和最大值。此外，我们定义 c 为 $c = \epsilon * U$，其中 ϵ 是目标函数所需的灵敏度，U是 $(M - m)$ 的一个上界：

$$U = \max_{b \in B} \left(\min(d_b, \sum_{(s, b) \in E_G} w_G(s)) \right)$$；c将用于归一化（$M - m$），以免影响目标函数的其余部分。在我们的实验中，我们使用了 $c = \frac{1}{1000}$。

$$\max \sum_{(s,b) \in E_G} g_{s,b} - c(M - m) \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{(s,b) \in E_G} g_{s,b} \le r_b + \sum_{(b',b) \in E_R} r_{b',b} - v_b^R \quad \forall b \in B \quad (2)$$

$$\sum_{(s,b) \in E_G} g_{s,b} \le \overline{v}_b^G \quad \forall b \in B \quad (3)$$

$$\sum_{(s,b) \in E_G} g_{s,b} \le v_s^G \quad \forall s \in S \quad (4)$$

$$\sum_{(b,b') \in E_R} r_{b,b'} \le v_b^R \quad \forall b \in B \quad (5)$$

$$m \le \sum_{s \in S} g_{s,b} \quad \forall b \in B \quad (6)$$

$$M \ge \sum_{s \in S} g_{s,b} \quad \forall b \in B \quad (7)$$

$$\sum_{(s,b) \in E_G} g_{s,b} * p_s^G \le \overline{p}_b^G \sum_{(s,b) \in E_G} g_{s,b} \quad \forall b \in B \quad (8)$$

$$\sum_{(b'b) \in E_R} p_{b'}^R * r_{b',b} \le \overline{p}_b^R \sum_{(b'b) \in E_R} r_{b',b} \quad \forall b \in B \quad (9)$$

$$\sum_{(s,b) \in E_G} p_s^G g_{s,b} + \sum_{(b'b) \in E_R} p_{b'}^R r_{b',b} \le M_b \quad \forall b \in B \quad (10)$$

$$g_{s,b} \ge 0 \quad \forall (s, b) \in E_G \quad (12)$$

$$r_{t,b} \ge 0 \quad \forall (t, b) \in E_R \quad (13)$$

在这个线性规划中，目标函数 (1) 最大化商品交换，并将分配分散到各个买方。随后，约束条件 (2) 和 (3) 确保买方购买的商品少于其拥有的权利，且其购买的商品数量不超过其期望数量 v_b^G。约束条件 (4) 限制卖方可出售的商品数量，确保其最多为 v_s^G，即卖方承诺愿意出售的数量。同样，约束条件 (5) 要求出售商品的买方，出售数量至多为其打算出售的数量 v_b^R。约束条件 (6)（分别为 (7)）确保 m 不高于（分别不低于）买方购买的最少（分别最多）商品数量；目标函数的形式则确保 m 恰好等于这一数量。约束条件 (8) 要求买方平均支付的商品价格至多为 p_b^G。约束条件 (9) 强制买方平均支付的权利价格至多为 p_b^R。约束条件 (10) 是预算约束。□