arXiv:2302.09960v2 [math.AG] 5 Oct 2024

# 关于 $G$-诱导簇的自同构群

ARPITA NAYEK、A. J. PARAMESWARAN 和 PINAKINATH SAHA

Abstract. 设 $G$ 是复数域$\mathbb{C}$ 上的伴随型连通半单代数群， $B$ 是 $G$. 的一个Borel子群。设 $F$ 是一个不可约射影$B$-簇。考虑簇 $E := G \times^B F$，它具有 $G$的自然作用；我们称其为 $G$-诱导簇或（$G$， $B$）-诱导簇。在本文中，我们计算某些特定 $G$-诱导簇 $E$.的全体代数自同构所成群中包含恒等自同构的连通分支

## Contents

1. 引言 1 2. 记号与预备知识 5 3. $G$-诱导簇的自同构群 8 4. $G$-舒伯特簇与 $G$-BSDH簇 12 4.1. $G$-舒伯特簇的自同构群的恒等分支：12 4.2. $G$-BSDH簇的自同构群的恒等分支：17 参考文献 26

## 1. Introduction

设 $X$ 是复数域上的一个射影簇。令 $\mathrm{Aut}^0(X)$ 表示 $X$. 的所有代数自同构所成群中包含恒等自同构的连通分支。于是，$\mathrm{Aut}^0(X)$ 具有代数群的结构（见 [20, 定理 3.7，第 17] 页）。此外，该自同构群的李代数同构于 $X$ 上所有切向量场所成的空间，即 $H^0(X, \Theta_X)$，也就是 $X$ 的切层 $\Theta_X$ 的所有整体截面所成的空间（见 [20,引理 3.4，第 13] 页）。

2010 年数学主题分类。14M15。关键词和短语。G-舒伯特簇、切层、自同构群、局部刚性。

设 $G$ 是 $\mathbb{C}.$ 上一个伴随型的连通半单代数群。Demazure [11] 研究了部分旗簇的自同构群，即形如 $G/P$ 的齐性簇，其中 $P$ 是 $G.$ 的一个抛物子群。此外，Demazure 证明了部分旗簇的切丛的所有高阶上同调群均消失。Bott 在复解析框架下的 [3, 定理 VII，第 242] 页中证明了这一点。作为其结果的一个特例，可以得到：完全旗簇的所有代数自同构所成群中包含恒等自同构的连通分支（即形如 $G/B$ 的齐性簇，其中 $B$ 是 $G$ 的一个 Borel子群）可识别为 $G.$

根据 Kodaira-Spencer理论，部分旗簇的切丛的第一上同调群消失，意味着部分旗簇的复结构不存在局部变形。换言之，对于任意一个由复簇 $Y$ 参数化的复簇连续族 $X_y$，若对所有 $y$，$X_y$ 与 $X$ 在拓扑意义下同构，且 $X_0$ 与 $X$ 在解析意义下同构，那么在 $0 \in Y.$ 的一个邻域内，$X_y$ 与 $X$ 在解析意义下同构。

设 $B$ 是 $G.$ 的一个 Borel子群。设 $F$ 是一个射影 $B$-簇。考虑簇

$$E := G \times^B F = G \times F/\sim,$$

其中，$B$ 在 $G \times F$ 上的作用定义为：对于所有 $g \in G$、$b \in B$、$f \in F$，$b \cdot (g, f) = (gb^{-1}, bf)$，而“$\sim$”表示由该作用定义的等价关系。$(g, f)$ 的等价类记作 $[g, f].$。注意，$G$ 在 $E$ 上有一个自然作用，由 $g' \cdot [g, f] = [g'g, f]$ 给出，其中 $g' \in G$、$[g, f] \in E.$。于是，$E$ 是一个射影簇，并带有一个 $G$-作用；我们称之为 $(G, B)$-诱导簇。为简便起见，本文中使用术语 $G$-诱导簇，而不使用 $(G, B)$-诱导簇。

本文研究某些特定的 $G$诱导簇的全体代数自同构群中包含恒等自同构的连通分支。

设 $V$ 是一个 $B$-模。设 $\mathcal{L}(V)$ 是 $G/B$上与 $B$-模 $V.$ 相对应的齐性向量丛。为简便起见，我们将上同调模 $H^j(G/B, \mathcal{L}(V))$ $(j \geq 0)$ 记为 $H^j(G/B, V)$ $(j \geq 0)$。

本文的主要结果如下。

定理1.1（见定理 3.3）。设 $F$是一个不可约射影 $B$-簇。设 $E = G \times^B F$是与 $F$相关联的 $G$-诱导簇。设 $\Theta_E$（分别为 $\Theta_F$）是 $E$（分别为 $F$）的切层。则有

(i) 如果 $H^0(G/B, H^0(F, \Theta_F)) = 0.$，则 $\mathrm{Aut}^0(E) = G$(ii) 假设对于所有 $j \geq 1$，$H^j(F, \mathcal{O}_F)$ 都为零，其中 $\mathcal{O}_F$ 表示 $F.$ 上的结构层。那么，如果对于 $j = 1$，$H^j(G/B, H^0(F, \Theta_F)) = 0$，则 $H^1(E, \Theta_E) = H^0(G/B, H^1(F, \Theta_F))$，2。

定理1.1(ii) 的假设对于一类非常特殊的簇成立，即单有理簇；这类簇还包括旗簇、舒伯特簇以及 Bott-Samelson-Demazure-Hansen 簇（见 [21, 引理 1，第 481] 页）。在这一假设下，定理1.1(ii) 使我们能够比较 $E$ 的局部变形与纤维空间 $F$ 关于底空间 $G/B$ 的局部变形。

设 $T$ 是 $G$ 的一个极大环面， $R$ 是相对于 $T$. 的根集。设 $R^+ \subset R$ 为一组正根。设 $B^+$ 是 $G$ 中包含 $T$、对应于 $R^+$.的Borel子群。设 $B$ 是由 $T$. 确定的、与 $B^+$ 相对的 $G$ 的Borel子群。令 $W = N_G(T)/T$ 表示 $G$ 相对于 $T$的Weyl群，其中 $N_G(T)$表示 $G$中 $T$ 的正规化子。对于$w \in W$，令 $X(w) := \overline{BwB/B}$ 表示 $G/B$ 中对应于 $w$.的舒伯特簇。

考虑 $G$ 在 $G/B \times G/B$. 上的对角作用。于是存在一个 $G$-等变同构

$$\xi : G \times^B G/B \longrightarrow G/B \times G/B$$

由下式给出

$$[g, g'B] \mapsto (gB, gg'B),$$

其中 $g$， $g' \in G$.

对于任意 $w \in W$， $\xi(G \times^B X(w))$是 $G/B \times G/B$中的 $G$-稳定闭不可约子集。此外，$G/B \times G/B$的所有闭不可约 $G$-稳定子集恰好都具有如下形式： $\{\xi(G \times^B X(w)) : w \in W\}$ （参见 [6, 定义2.2.6，第69-70]页）。

对于 $w \in W$，令 $\mathcal{X}(w) := \xi(G \times^B X(w))$。那么 $\mathcal{X}(w)$ 带有作为 $G/B \times G/B$ 的闭子簇的结构，这个 $G$-诱导簇称为与 $w$. 相关联的 $G$-舒伯特簇。今后我们省略 $\xi$，并简写 $\mathcal{X}(w)$ 为 $G \times^B X(w)$。接下来我们证明

命题 1.2（见命题 4.6）。假设 $G$ 是单边的。取满足 $w \neq w_0$ 的 $w \in W$，其中 $w_0$ 表示 $W$. 的最长元素。令 $\Theta_{\mathcal{X}(w)}$ （分别为 $\Theta_{X(w)}$）为 $\mathcal{X}(w)$（分别为 $X(w)$）的切层。那么我们有

(i) $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w)) = G$.
(ii) $H^1(\mathcal{X}(w), \Theta_{\mathcal{X}(w)}) = H^0(G/B, H^1(X(w), \Theta_{X(w)}))$.

因此，若 $G$ 是单边的且 $w \neq w_0 \in W$，则由命题 1.2 可得，只要 $X(w)$ 不存在局部变形，$\mathcal{X}(w)$ 就不存在局部变形。

设 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ 是一个约化表达式，且 $\underline{i} := (i_1, \ldots, i_r)$。令 $Z(w, \underline{i})$ 为与 $(w, \underline{i})$ 相关联的 Bott-Samelson-Demazure-Hansen簇（ $X(w)$ 的自然消解）。它最初由 Bott和 Samelson 在微分几何和拓扑背景下引入（见 [4]）。Demazure [9] 和 Hansen [13] 独立地将这一构造应用于代数几何情形，这也解释了其名称的由来。为简便起见，我们用 BSDH簇代替 Bott-Samelson-Demazure-Hansen簇。

$B$ 在 $Z(w,\underline{i})$ 上有自然左作用。令 $\mathcal{Z}(w,\underline{i}) = G \times^B Z(w,\underline{i})$。那么， $G$-诱导簇 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 是一个光滑射影簇，并且是 $\mathcal{X}(w)$ 的自然消解（见 [6, 推论 2.2，第 70] 页），我们称之为 $G$-Bott-Samelson-Demazure-Hansen 簇（简称 $G$-BSDH簇）。接下来我们证明

命题1.3（见命题 4.13）。假设 $G$ 是单边的，且 $G$ 的秩至少为二。设 $\Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}$ 是 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$上的切层。那么我们有

(i) $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = G.$
(ii) $H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}),\Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}) = 0$ *for* $j \geq 1.$

由命题1.3(ii)， $H^2(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\ \Theta_{\mathcal{Z}(w,i)}) = 0.$因此，根据 $[17,$第$273],$页，我们得出结论：$\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 对单边群 $G$.具有无障碍变形

此外，由命题1.3(ii)， $H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\ \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}) = 0.$因此，根据 $[17,$命题 6.2.10，第$272],$页，我们得出结论： $G$-BSDH簇对单边群 $G$.是局部刚性的

这里应当指出，若 $G$ 不是单边的，则 $H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\,\Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}$)可能非零（见例 4.16）。

鉴于上述结果，以下问题仍未解决：

开放问题：

(1) 假设 $G$ 不是单边的。 $\mathcal{X}(w)$ 或 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 的所有代数自同构构成的群中，包含恒等自同构的连通分支是什么？(2) $\mathcal{X}(w)$ 或 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 的所有代数自同构构成的群是什么？

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们设定记号并回顾一些预备知识。第3节中，我们证明定理1.1。第4节中，我们证明命题 1.2 和命题1.3。

致谢。我们感谢审稿人认真审阅本文，并提出了许多宝贵的意见和评论。我们还感谢 Michel Brion 教授通过电子邮件交流，对本文初稿给予鼓励并提出有益的意见。第一作者感谢金奈数学研究所提供博士后奖学金，并感谢她在该校期间所受到的热情接待。第二、三作者感谢印度政府原子能部 [项目编号：12-R&D-TFR-5.01-0500]提供资助。第三作者感谢塔塔基础研究所提供博士后职位，并感谢他在该所期间所受到的热情接待。

## 2. Notation and Preliminaries

本节将介绍一些记号与预备知识。关于代数群和李代数的预备知识，请参阅 [6], [15], [16], [18] 。

设 $G$、 $T$、 $B$、 $R$、 $R^+$和 $W$如引言中所述。记 $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$为 $R^+$中的单根集合，其中 $n$ 是 $G$. 的秩。对于 $\beta \in R^+$，我们使用记号 $\beta > 0$.。记 $W = N_G(T)$为 $G$ 关于 $T$. 的Weyl群。 $W$中对应于 $\alpha_i$ 的单反射记为 $s_i$。对于 $w \in W$，令 $\ell(w)$表示 $w$. 的长度。 $W$ 上的Bruhat-Chevalley序“ $\leq$ ”定义如下：对于 $v$、 $w \in W$和 $v \leq w$ ，当且仅当 $X(v) \subseteq X(w)$时， $v$、 $w \in W$和 $v \leq w$ 满足该序关系。

对于子集 $J \subset S$，令 $W_J$ 为由 $\{s_\alpha$ 生成的 $W$ 的子群： $\alpha \in J\}$. 。对于子集$J \subseteq S$，令 $P_J$ 为 $G$的标准抛物子群，即， $P_J$ 由 $B$ 和 $n_w$生成，其中 $w \in W_J$ ，且 $n_w$ 是 $w$ 在 $G$. 中的一个代表元。子群 $W_J \subseteq W$ 称为 $P_J$. 的Weyl群。对于单根 $\alpha_i$，将相应的抛物子群简单地记为$P_{\alpha_i}$；它称为对应于 $\alpha_i$.的极小抛物子群。

令 $\mathfrak{g}$ 为 $G$. 的李代数，令 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 为 $T$ 的李代数，并令 $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ 为 $B$. 的李代数。记 $X(T)$ 为 $T$. 的所有特征所成的群。我们有 $X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$，即 $\mathfrak{t}$. 的实形式的对偶。由 $\mathfrak{g}$ 的基灵形式诱导的 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ 上的正定 $W$-不变形式记为 $(-,-)$。我们使用记号 $\langle -, - \rangle$ 表示：对于每个 $\mu \in X(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 和 $\alpha \in R.$，有 $\langle \mu, \alpha \rangle = {}^2(\mu,\alpha)/(\alpha,\alpha)$。配对 $\langle \mu, \alpha \rangle$ 通常称为 $\mu$ 和 $\alpha$ 的嘉当配对。我们用 $X(T)^+$ 表示相对于 $B^+$. 的 $T$ 的支配特征集合。令 $\rho$ 表示相对于 $T$ 和 $B^+$. 的 $G$ 的所有正根之和的一半。对于任意单根 $\alpha_i$，我们将对应于 $\alpha_i$ 的基本权记为 $\omega_i$. 。对于 $1 \leq i \leq n$，令 $h(\alpha_i) \in \mathfrak{t}$ 为对应于 $\alpha_i$. 的基本余权。也就是说，$\alpha_i(h(\alpha_j)) = \delta_{ij}$，其中 $\delta_{ij}$ 为克罗内克δ。

回顾一下，与$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$的约化表达式$\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$对应的BSDH簇定义为商空间

$$Z(w, \underline{i}) = \frac{P_{\alpha_{i_1}} \times P_{\alpha_{i_2}} \times \cdots \times P_{\alpha_{i_r}}}{B \times B \times \cdots \times B},$$

其中， $r$重 乘积 $B \times B \times \cdots \times B$通过以下方式在 $P_{\alpha_{i_1}} \times P_{\alpha_{i_2}} \times \cdots \times P_{\alpha_{i_r}}$上从右侧作用：

$$(p_1, p_2, \ldots, p_r) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_r) = (p_1 \cdot b_1, b_1^{-1} \cdot p_2 \cdot b_2, \ldots, b_{r-1}^{-1} \cdot p_r \cdot b_r),\ p_j \in P_{\alpha_{i_j}}, b_j \in B$$

（参见 [9, 定义 1，第73], [6, 定义 2.2.1 节，第64]页）。$(p_1, \ldots, p_r)$ 的等价类记作 $[p_1, \ldots, p_r]$. 。$P_{\alpha_{i_1}}$ 在 $Z(w, \underline{i})$上有一个自然作用，其定义为左乘： $p \cdot [p_1, \ldots, p_r] = [pp_1, \ldots, p_r]$, $p_j \in P_{\alpha_{i_j}}$, $p \in P_{\alpha_{i_1}}$. 。特别地， $B$ 在 $Z(w, \underline{i})$上有一个自然左作用。

注意， $Z(w,\underline{i})$是一个光滑射影簇。BSDH簇带有一个$B$-等变态射

$$\phi_w : Z(w,\underline{i}) \longrightarrow G/B$$

由.....定义

$$[p_1, ..., p_r] \mapsto p_1 \cdots p_r B.$$

那么， $\phi_w$ 是从 $Z(w,\underline{i})$到 $X(w)$的自然双有理满射态射。

令 $f_r$: $Z(w,\underline{i}) \longrightarrow Z(ws_{i_r},\underline{i}')$表示由投影诱导的映射

$$P_{\alpha_{i_1}} \times P_{\alpha_{i_2}} \times \cdots \times P_{\alpha_{i_r}} \longrightarrow P_{\alpha_{i_1}} \times P_{\alpha_{i_2}} \times \cdots \times P_{\alpha_{i_{r-1}}}$$

where $\underline{i}' = (i_1, i_2, \ldots, i_{r-1})$。于是我们注意到， $f_r$是一个 $P_{\alpha_{i_r}}/B \simeq \mathbb{P}^1$-纤维化 .

对于一个 $B$-模 $V$，令 $\mathcal{L}(w,V)$表示与齐性向量丛 $\mathcal{L}(V)$相关联的向量丛在 $G/B$ 上的限制，即限制到 $X(w)$。为简便起见，在不会引起混淆时，我们也用 $\mathcal{L}(w,V)$表示 $\mathcal{L}(w,V)$经 $\phi_w$ 拉回到 $Z(w,\underline{i})$所得的丛。由于对于任意 $B$-模 $V$， $\mathcal{L}(w,V)$在 $Z(w,\underline{i})$上的向量丛是从 $X(w)$拉回的齐性向量丛，因此我们得出结论：对于所有$j \geq 0$ （参见 [6, 定理 3.3.4(b)]），上同调模 $H^j(Z(w,\underline{i}) \ \mathcal{L}(w,V)) \simeq H^j(X(w) \ \mathcal{L}(w,V))$与约化表达式$\underline{i}$. 的选择无关。因此，我们将 $H^j(Z(w,\underline{i}) \ \mathcal{L}(w,V))$记作 $H^j(w,V)$。特别地，若 $\lambda$是 $B$的特征，则我们将上同调模 $H^j(Z(w,\underline{i}) \ \mathcal{L}(w,\lambda))$记作 $H^j(w,\lambda)$，其中 $\mathcal{L}(w,\lambda) = \mathcal{L}(w,\mathbb{C}_\lambda)$，而 $\mathbb{C}_\lambda$表示与 $\lambda$相关联的一维 $B$-模

我们将以下 BSDH簇的递增一步构造作为计算上同调模的基本工具。设 $\alpha$ 是一个单根，使得 $\ell(w) = \ell(s_\alpha w) + 1$.设 $Z(w,\underline{i})$ 是与约化表达式 $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_r}$ 对应的 BSDH簇，其中$\alpha_{i_1} = \alpha$. 那么我们有一个自然的第一因子投影态射

$$p : Z(w,\underline{i}) \to P_\alpha/B$$

其纤维为 $Z(s_\alpha w,\underline{i}')$，其中 $\underline{i}' = (i_2, i_3, \ldots, i_r)$。注意， $p$是 $P_\alpha$-等变的。利用 Leray谱序列，并结合基底为 $\mathbb{P}^1$ 这一事实，对于每个 $B$-模$V$和 $j \geq 0$，我们得到以下 $P_\alpha$-模的短正合列：

$$0 \to H^1(s_\alpha, R^{j-1}p_*\mathcal{L}(w,V)) \to H^j(w,V) \to H^0(s_\alpha, R^j p_*\mathcal{L}(w,V)) \to 0. \quad \text{(SES)}$$

此外，由 [18, II，第366]页，我们有以下同构

$$R^j f_{r*}\mathcal{L}(w,V) \simeq \mathcal{L}(ws_{i_r}, H^j(s_{i_r},V)) \ (j \geq 0)$$

$$R^j p_*\mathcal{L}(w,V) \simeq \mathcal{L}(s_\alpha, H^j(s_\alpha w,V)) \ (j \geq 0)$$

$B$-线性化层。

这里，我们回顾 Demazure 关于$B$-模短正合列的以下结果 [10, 第271] 页：

引理 2.1. 设 $\alpha$ 为一个单根，且 $\lambda \in X(T)$满足 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$. 设 $ev: H^0(s_\alpha, \lambda) \longrightarrow \mathbb{C}_\lambda$ 为求值映射。那么我们有

(1) 若 $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$，则 $H^0(s_\alpha, \lambda) \simeq \mathbb{C}_\lambda$.(2) 若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 1$，则 $\mathbb{C}_{s_\alpha(\lambda)} \hookrightarrow H^0(s_\alpha, \lambda)$，并且存在一个 $B$-模的短正合列：

$$0 \to H^0(s_\alpha, \lambda - \alpha) \longrightarrow H^0(s_\alpha, \lambda)/\mathbb{C}_{s_\alpha(\lambda)} \longrightarrow \mathbb{C}_\lambda \to 0.$$

此外，当 $\langle \lambda, \alpha \rangle = 1$. 时，$H^0(s_\alpha, \lambda - \alpha) = 0$

(3) 设 $n = \langle \lambda, \alpha \rangle$. 。作为一个 $B$-模，$H^0(s_\alpha, \lambda)$ 有一个合成列

$$0 \subseteq V_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq V_0 = H^0(s_\alpha, \lambda)$$

使得 $V_i/V_{i+1} \simeq \mathbb{C}_{\lambda - i\alpha}$ 对 $i = 0, 1, \ldots\ldots, n-1$ 并且 $V_n = \mathbb{C}_{s_\alpha(\lambda)}$.

我们将点作用定义为 $w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$. 。从现在起，我们用 $L_\alpha$ 表示包含 $T$ 的 $P_\alpha$ ( $\alpha \in S$) 的 Levi 子群，并用 $B_\alpha$. 表示子群 $L_\alpha \cap B$

引理 2.2. 设 $V$ 是一个不可约的 $L_\alpha$-模。设 $\lambda$ 是 $B_\alpha$的一个特征。则有

(1) 作为 $L_\alpha$-模，对于每个 $j \geq 0$.，$H^j(L_\alpha/B_\alpha, V \otimes \mathbb{C}_\lambda) \simeq V \otimes H^j(L_\alpha/B_\alpha, \mathbb{C}_\lambda)$。(2) 若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$，则 $H^0(L_\alpha/B_\alpha, V \otimes \mathbb{C}_\lambda)$作为 $L_\alpha$-模同构于 $V$与 $H^0(L_\alpha/B_\alpha, \mathbb{C}_\lambda)$的张量积。此外，对于每个 $j \geq 1$，有 $H^j(L_\alpha/B_\alpha, V \otimes \mathbb{C}_\lambda) = 0$。(3) 若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq -2$，则 $H^0(L_\alpha/B_\alpha, V \otimes \mathbb{C}_\lambda) = 0$，且 $H^1(L_\alpha/B_\alpha, V \otimes \mathbb{C}_\lambda)$同构于 $V$与 $H^0(L_\alpha/B_\alpha, \mathbb{C}_{s_\alpha \cdot \lambda})$的张量积。(4) 若 $\langle \lambda, \alpha \rangle = -1$，则对于每个 $j \geq 0$，$H^j(L_\alpha/B_\alpha, V \otimes \mathbb{C}_\lambda) = 0$。

证明。（1）由 [18, 命题 4.8、5.12，第 53、77 页，I]得出。

（2）–（4）的证明由（1）以及 [18, 命题 5.12，第 77 页，I；命题 5.2，第 218 页，II]得出。□

设 $w \in W$, $\alpha$ 是单根，并令 $v = ws_\alpha$。由引理 2.2 可得以下引理。

引理 2.3. 若 $\ell(w) = \ell(v) + 1$，则有

（1）若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$，则对所有 $j \geq 0$，$H^j(w, \lambda) = H^j(v, H^0(s_\alpha, \lambda))$。（2）若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$，则对所有 $j \geq 0$，$H^j(w, \lambda) = H^{j+1}(w, s_\alpha \cdot \lambda)$。（3）若 $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq -2$，则对所有 $j \geq 0$，$H^{j+1}(w, \lambda) = H^j(w, s_\alpha \cdot \lambda)$。（4）若 $\langle \lambda, \alpha \rangle = -1$，则对每个 $j \geq 0$，$H^j(w, \lambda)$ 均为零。

证明。取 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ 的约化表达式 $\alpha_{i_r} = \alpha$.，其中 $v = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{r-1}}$ 是 $v$. 的约化表达式。令 $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ 和 $\underline{i'} = (i_1, i_2, \ldots, i_{r-1})$。现在考虑

如上定义的 $P_{\alpha_{i_r}}/B(\simeq \mathbb{P}^1)$ 纤维化 $f_r\colon\ Z(w,\underline{i}) \longrightarrow Z(v,\underline{i'})$。那么，我们有一个同构

$$R^j f_{r*}\mathcal{L}(w,\lambda) \simeq \mathcal{L}(v, H^j(s_\alpha,\lambda)) \text{ for } j \geq 0$$

$B$-线性化层的。

证明（1）：由于 $\langle\lambda、\ \alpha\rangle \geq 0$，根据引理 2.2(2)可知 $R^1 f_{r*}\mathcal{L}(w,\lambda) = \mathcal{L}(v, H^1(s_\alpha,\lambda)) = 0.$ 因此，通过应用 Leray 谱序列的一个退化情形（见 $[18,$ 第 14 章第 14.6 节，第 369 页，II$]$），对于所有 $j \geq 0.$，有 $H^j(w,\lambda) = H^j(v, H^0(s_\alpha,\lambda))$

证明（2）：由于 $\langle\lambda、\ \alpha\rangle \geq 0$，我们有 $\langle s_\alpha\cdot\lambda、\ \alpha\rangle < 0.$ 因此，根据引理 2.2，我们有$f_{r*}\mathcal{L}(w, s_\alpha\cdot\lambda) = \mathcal{L}(v, H^0(s_\alpha, s_\alpha\cdot\lambda)) = 0.$ 因此，通过应用 Leray谱序列的一个退化情形，我们有 $H^{j+1}(w, s_\alpha\cdot\lambda) = H^j(v, H^1(s_\alpha, s_\alpha\cdot\lambda))$。根据 $[10,$ 定理1$]$，我们有 $H^0(s_\alpha,\lambda) = H^1(s_\alpha, s_\alpha\cdot\lambda)$。故证明得证。

证明 (3)：此情形与 (2) 类似。

证明 (4)：由于 $\langle\lambda,\alpha\rangle = -1$，由引理 2.2(4) 可得 $R^j f_{r*}\mathcal{L}(w,\lambda) = 0$当 $j \geq$0 时。因此，通过应用 Leray谱序列的一个退化情形，我们有$H^j(w,\lambda) = 0$ 对所有 $j \geq 0.$ □

下面的关键引理将用于计算本文中的上同调模。

令 $p\colon\ G \longrightarrow G$ 为万有覆盖。令 $L_\alpha$（分别地，$B_\alpha$）为$\sim L_\alpha$（分别地，$B_\alpha$）的逆像。回顾不可分解 $B_\alpha$-模的结构（参见 $[8]$,$[2,$ 推论 9.1，第 $130]$ 页）。

引理 2.4。任意有限维不可分解 $B_\alpha$-模 $V$都同构于 $V'\otimes\mathbb{C}_\lambda$，其中 $V'$ 是 $L_\alpha$ 的某个不可约表示，$\lambda$ 是 $B_\alpha$的某个特征。

## 3. Automorphism group of a $G$-induced variety

本节研究由 $G$ 诱导的簇的全体代数自同构群中包含恒等自同构的连通分支。

设 $F$ 是一个不可约射影 $B$-簇，$E = G\times^B F$ 是与 $F.$相关联的 $G$-诱导簇。考虑自然投影映射

$$\pi : E \longrightarrow G/B;\ \ [g,f] \mapsto gB.$$

那么，对于 $G/B$上的 $G$ 自然作用，$\pi$ 是一个以 $G/B$ 为底、纤维为$F.$的 $G$-等变纤维化

观察：对于 $G$诱导的簇 $E$，如果 $B$ 在 $F$ 上的作用可扩张为 $G$在 $F$ 上的作用，那么映射

$$\psi : G \times F \longrightarrow G/B \times F, \quad (g, f) \mapsto (gB, gf)$$

诱导 $G$-等变 同构 $G \times^B F \longrightarrow G/B \times F$，其中 $G$在 $G/B \times F$上对角作用 .

命题 3.1。于是， $\pi$ 诱导一个满同态 $\pi_* : \mathrm{Aut}^0(E) \longrightarrow G$ ，其为代数群之间的同态。特别地，$\mathrm{Aut}^0(E)$ $=$核 $\pi_* \rtimes G$，其中 $\ker \pi_*$ 表示 $\pi_*$.的核

证明。由于 $F$ 是一个不可约射影簇，我们有 $\pi_* \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{G/B}$，其中 $\mathcal{O}_E$ 和 $\mathcal{O}_F$分别表示 $E$ 和 $F$ 上的结构层。因此，根据 [5, 推论 2.2，第 45]页， $\pi$诱导一个代数群同态

$$\pi_* : \mathrm{Aut}^0(E) \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(G/B)$$

定义如下:

$$f \mapsto \pi_*(f) : gB \mapsto \pi(f(y)); \text{ where } y \in \pi^{-1}(gB).$$

由于 $\pi^{-1}(gB)$ 是连通射影簇，由刚性引理可知 $\pi_*(f)$ 定义良好（参见 [5, 命题 2.1.，第 42] 页）。此外，由于 $\mathrm{Aut}^0(G/B) = G$ （参见 [11], [1, 定理 2，第 75] 页），我们有 $\pi_* : \mathrm{Aut}^0(E) \longrightarrow G$.

令 $\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(E)$ 为由 $G$ 在 $E$. 上的自然作用所诱导的映射。注意， $\sigma$ 不是平凡映射，因为 $G$ 在 $E$ 上的作用是有效作用，这是因为它下降为 $G$ 在 $G/B$ 上的有效作用。因此， $\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(E)$ 是代数群的单射同态。于是， $\pi_*$ 是代数群的满同态。因此，我们有 $\mathrm{Aut}^0(E)$ $= \ker \pi_* \rtimes G$. □

一个有趣的问题是，何时存在 $E$ 与 $G/B \times F$ 之间的同构?

我们已经注意到，如果 $B$ 对 $F$ 的作用可以扩张为 $G$ 对 $F$ 的作用，那么 $E$ 与 $G/B \times F$. 之间存在一个 $G$- 等变同构

这里，我们给出另一个充分条件，在该条件下， $E$ 与 $G/B \times F$. 之间存在一个 $G$-等变同构

命题 3.2. 假设存在一个 $B$-等变态射 $\Phi : E \longrightarrow F$，使得$\Phi_* \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F$. 那么有

(i) $E \simeq G/B \times F$.(ii)
$\mathrm{Aut}^0(E)$ $= G \times \mathrm{Aut}^0(F)$.

证明。（i）的证明：由于 $\Phi_* \mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F$，根据 [5, 推论 2.2，p.45] $\Phi$ 诱导出代数群同态 $\Phi_* : \mathrm{Aut}^0(E) \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(F)$。注意，根据命题 3.1， $G \subset \mathrm{Aut}^0(E)$。因此，$G$ 通过映射 $\Phi_*$作用于 $F$，也就是说， $G$ 对 $F$ 的作用由 $g * f = \Phi(g \cdot z)$ 给出，其中

$g \in G$, $f \in F$和 $z \in \Phi^{-1}(f)$（见 [5, 命题 2.1 的证明, p.42]）。此外，由于 $\Phi$是$B$-等变的， $G$ 对 $F$ 的这一作用是 $B$ 对 $F$. 的作用的扩张。因此，根据上述观察，我们有一个 $G$-等变同构 $E \simeq G/B \times F$。

（ii）的证明：利用（i）和 [5, 推论 2.3, p.46], ，我们有 $\mathrm{Aut}^0(E) = \mathrm{Aut}^0(G/B) \times \mathrm{Aut}^0(F)$。此外，由于 $\mathrm{Aut}^0(G/B) = G$（见 [11]），我们有 $\mathrm{Aut}^0(E) = G \times \mathrm{Aut}^0(F)$。

□

定理 3.3. 设 $F, E$ 如前。设 $\Theta_F$（分别为 $\Theta_E$）是 $F$（分别是 $E$）的切层。则有

（i）$\mathrm{Aut}^0(E) = G$, 若 $H^0(G/B, H^0(F, \Theta_F)) = 0$.（ii）假设 $F$满足 $H^j(F, \mathcal{O}_F) = 0$对所有 $j \geq 1$.成立。则 $H^1(E, \Theta_E) = H^0(G/B, H^1(F, \Theta_F))$, 若 $H^j(G/B, H^0(F, \Theta_F)) = 0$适用于 $j = 1, 2$。

证明。（i）的证明：回想一下， $\pi\colon E \longrightarrow G/B$是由 $[g, f] \mapsto gB$给出的自然投影，其中 $g \in G$，且 $f \in F$.

考虑 $\mathcal{O}_E$-模的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \Theta_E \longrightarrow \pi^*\Theta_{G/B} \longrightarrow 0, \tag{3.1}$$

其中 $\mathcal{R}$ 表示关于映射 $\pi$.的相对切层

因此，（3.1）导出如下长正合列

$$0 \to H^0(E, \mathcal{R}) \to H^0(E, \Theta_E) \to H^0(E, \pi^*\Theta_{G/B}) \to H^1(E, \mathcal{R}) \to H^1(E, \Theta_E) \to \cdots \tag{3.2}$$

of $G$-modules.

由于 $H^0(F, \mathcal{O}_F) = \mathbb{C}$且 $\pi$是一个射影态射，我们有

$$\pi_*(\pi^*\mathcal{O}_{G/B}) = \pi_*\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_{G/B}. \tag{3.3}$$

现在利用投影公式（见 [14, 第三章，习题 8.3，第 253] 页）和（3.3），我们有

$$\pi_*(\pi^*\Theta_{G/B}) = \Theta_{G/B} \otimes \pi_*\mathcal{O}_E = \Theta_{G/B}. \tag{3.4}$$

此外，由于 $H^0(G/B, \Theta_{G/B}) = \mathfrak{g}$ (参见 [11],[1, 定理 2，第 75 页和定理 1，第 130] 页)，我们有 $H^0(E, \pi^*\Theta_{G/B}) = \mathfrak{g}$.

另一方面，由命题 3.1 可知， $\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(E)$ 是代数群的一个单同态。由于 $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^0(E)) = H^0(E, \Theta_E)$（参见 [20, 引理 3.4，第 13] 页），微分 $d\sigma\colon \mathfrak{g} \longrightarrow H^0(E, \Theta_E)$ 是李代数的一个单同态。

因此，(3.2) 给出了以下短正合列

$$0 \longrightarrow H^0(E, \mathcal{R}) \longrightarrow H^0(E, \Theta_E) \longrightarrow H^0(E, \pi^*\Theta_{G/B}) \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

$G$模的。

现在，由于 $\mathcal{R}$ 到 $F$ 的限制与 $F$的切层 $\Theta_F$ 一致，因此$H^0(E,\mathcal{R}) = H^0(G/B, H^0(F,\Theta_F))$。因此，我们有 $H^0(E,\mathcal{R}) = 0$，因为 $H^0(G/B, H^0(F,\Theta_F)) = 0$。因此，利用（3.5），我们有 $H^0(E,\Theta_E) = \mathfrak{g}$，因为 $H^0(E,\pi^*\Theta_{G/B}) = \mathfrak{g}.$。因此，$\mathrm{Aut}^0(E) = G.$

（ii）的证明：由于 $H^j(F,\mathcal{O}_F) = 0$ 对于 $j \geq 1$，我们有

$$R^j\pi_*(\pi^*\mathcal{O}_{G/B}) = R^j\pi_*\mathcal{O}_E = 0 \text{ for } j \geq 1. \tag{3.6}$$

因此，利用投影公式（见 [14, 第三章，习题 8.3，第 253] 页）以及 (3.6)，我们有

$$R^j\pi_*(\pi^*\Theta_{G/B}) = \Theta_{G/B} \otimes R^j\pi_*(\mathcal{O}_E) = 0 \text{ for all } j \geq 1. \tag{3.7}$$

对于 $\pi$ 和 $\pi^*\Theta_{G/B}$，Leray谱序列的 $E_2^{i,j}$ 项为

$$E_2^{i,j} = H^i(G/B, R^j\pi_*(\pi^*\Theta_{G/B})). \tag{3.8}$$

由于对于所有 $j \geq 1$ 都有 $R^j\pi_*(\pi^*\Theta_{G/B}) = 0$ （见 (3.7)），我们有 $E_2^{i,j} = 0$ 对于 $j \geq 1.$。因此，利用 Leray谱序列的退化情形以及 (3.4)，我们有

$$H^j(E,\pi^*\Theta_{G/B}) = H^j(G/B, \pi_*(\pi^*\Theta_{G/B})) = H^j(G/B,\Theta_{G/B})$$

对于 $j \geq 1.$

现在，由于对所有 $j \geq 1$ 都有 $H^j(G/B,\Theta_{G/B}) = 0$ （见 [11],[1, 定理 2，第 75 页及定理 1，第 130] 页），我们有 $H^j(E,\pi^*\Theta_{G/B}) = 0$，因此 $j \geq 1.$。于是，(3.2) 导出以下正合列

$$0 \to H^0(E,\mathcal{R}) \to H^0(E,\Theta_E) \to H^0(E,\pi^*\Theta_{G/B}) \to H^1(E,\mathcal{R}) \to H^1(E,\Theta_E) \to 0$$

$G$ 模的正合列，并且

$$H^j(E,\mathcal{R}) \simeq H^j(E,\Theta_E) \text{ for } j \geq 2. \tag{3.9}$$

此外，利用 (3.5) 和 (3.9)，我们有

$$H^j(E,\mathcal{R}) \simeq H^j(E,\Theta_E) \text{ for } j \geq 1. \tag{3.10}$$

现在，由于对 $j = 1$、2 有 $H^j(G/B, H^0(F,\Theta_F)) = 0$，利用与该谱序列相关联的五项正合序列，我们有 $H^1(E,\Theta_E) = H^0(G/B, H^1(F,\Theta_F))$. □

推论 3.4。设 $F$, $E$ 如定理 3.3 中所述，且 $F$ 满足 $H^0(G/B, H^0(F,\Theta_F)) = 0$，但 $H^0(F,\Theta_F) \neq 0.$。那么 $E$ 与 $G/B \times F.$ 不同构。特别地， $B$ 对 $F$ 的作用不能扩展为 $G$ 对 $F.$的作用

证明。若 $E \simeq G/B \times F$，则由 [5, 推论 2.3，p.46], $\mathrm{Aut}^0(E) = \mathrm{Aut}^0(G/B) \times \mathrm{Aut}^0(F)$。由于 $\mathrm{Aut}^0(G/B) = G$(见 [11])，我们有 $\mathrm{Aut}^0(E) = G \times \mathrm{Aut}^0(F)$。此外，由于 $H^0(F,\Theta_F) \neq 0$，根据[20, 引理 3.4，p.13], 我们得出 $\mathrm{Aut}^0(F)$ 不是平凡群。因此，$\mathrm{Aut}^0(E) \neq G$，这与定理 3.3(i) 矛盾。□

注：对于任意 $G$-诱导簇 $E$，我们可以从定理 3.3 的证明中得到以下观察。

(1) 令 $\pi_*$ : $\mathrm{Aut}^0(E) \longrightarrow G$ 如命题 3.1 中所述。则有 $\mathrm{Lie}(\ker \pi_*) = H^0(E, \mathcal{R}) = H^0(G/B, H^0(F, \Theta_F))$。

(2) $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^0(E))$ 适合以下正合列

$$0 \to H^0(E, \mathcal{R}) \to H^0(E, \Theta_E) \to \mathfrak{g} \to 0$$

作为 $G$-模。由于存在一个嵌入 $\mathfrak{g} \hookrightarrow H^0(E, \Theta_E)$，它来自 $G$ 在 $E$上的忠实作用，因此上述正合列分裂，即 $H^0(E, \Theta_E) = H^0(E, \mathcal{R}) \oplus \mathfrak{g}$ 作为$G$-模。

## 4. $G$-Schubert variety and $G$-BSDH-variety

在本节中，我们假设 $G$ 是一个伴随型的单边简单代数群。本节研究一个 $G$-舒伯特簇和 $G$-BSDH簇的所有代数自同构所成群中包含恒等自同构的连通分支。

### 4.1. $G$-舒伯特簇自同构群的恒等分支：

我们回顾文献 [19]中关于舒伯特簇自同构群的一些结果。

回忆一下，对于 $w$ 中的 $W$，与 $w$ 相关联的 $G/B$ 中的舒伯特簇通常记为$X(w)$，其定义为

$$X(w) := \overline{BwB/B} \subset G/B.$$

对于 $G/B$上 $G$ 的左作用，令 $P = \mathrm{Stab}_G(X(w))$表示 $G$.中 $X(w)$的稳定子。由于 $B \subset \mathrm{Stab}_G(X(w))$，$P$ 是 $G$的抛物子群。此外，由于 $P$ 包含 $B$，它是 $G$ 的一个标准抛物子群，形式为 $P_{I(w)}$，其中 $I(w)$是 $S$的某个子集。这个 $S$ 的子集$I(w)$恰好由满足 $w^{-1}(\alpha) < 0$的 $\alpha \in S$ 组成，也就是说，$w^{-1}(\alpha)$是一个负根。由于 $P_{I(w)}$ 是连通的，$P_{I(w)}$ 在 $X(w)$上的自然左作用诱导出一个映射

$$\varphi_w : P_{I(w)} \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(X(w)).$$

令 $\alpha_0$ 表示相对于 $T$ 和 $B^+$. 的 $G$ 的最高根，令 $\mathfrak{p}_{I(w)}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的抛物李子代数。那么 $\mathfrak{p}_{I(w)}$ 是 $P_{I(w)}$ 的李代数。

**定理 4.1.** 映射 $\varphi_w$ 是代数群的满同态。

定理 4.1 在 [19, 定理 4.2(1)，第772] 页中针对光滑舒伯特簇进行了陈述，但其证明适用于任意舒伯特簇。这里我们简要概述证明。

证明。回顾 [20, 引理 3.4，第13] 页，Lie(Aut$^0(X(w)))= H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)})$。要证明$\varphi_w$ 是满射，只需证明 $d\varphi_w : \mathfrak{p}_{I(w)} \longrightarrow H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)})$ 是满射。

设 $\Theta_{G/B}$ 是 $G/B.$ 的切层。注意， $\Theta_{G/B}$ 是与 $G/B.$ 的切丛 $\mathcal{L}(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ 对应的层。此外，我们有 $H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)}) \subseteq H^0(X(w)\ \Theta_{G/B}|_{X(w)})$ $=H^0(w, \mathfrak{g}/\mathfrak{b})$。

根据 [19, 引理 3.5，第 770], 页，限制映射 $H^0(G/B, \mathfrak{g}/\mathfrak{b}) \longrightarrow H^0(w, \mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ 是满射。因此，对于 $D' \in H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)}) \subseteq H^0(w, \Theta_{G/B}|_{X(w)}) = H^0(w, \mathfrak{g}/\mathfrak{b})$，存在 $D \in H^0($ $G/B, \Theta_{G/B})$，使其在限制映射下的像为 $D'.$ 。因此， $D$ 保持了 $G/B$ 中 $X(w)$ 的理想层，故 $D \in$ Lie(Stab$_G(X(w))) = \mathfrak{p}_{I(w)}.$ 。由此引理得证。□

我们回顾一些稍后会用到的定义和事实（见 [3],[1],[22]） .

设 $\lambda \in X(T)$。若 $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ 对某个 $\alpha \in R^+$ 成立，则称 $\lambda$ 为奇异的；否则称其为非奇异的。

$\lambda$ 的指标定义为 ind$(\lambda) := min\{\ell(w) | w(\lambda) \in X(T)^+\}.$

事实 1. 若 $\beta \in R$ 满足 $\beta + \rho$ 非奇异，则 $\beta = \alpha_0$ 或 $\beta$ 是某个单根的负根。

事实 2. 若 $\beta \in R$ 满足 $\beta + \rho$ 非奇异，则 $\beta + \rho$ 的指标为 0 或 1（见 [22, 第 47 页-48]）。此外，若 $\beta + \rho$ 的指标为 0（分别为 1），则 $\beta = \alpha_0$ （分别为 $\beta$）是某个单根的负根。

我们使用以下关于齐性向量丛上同调消失的 Bott定理，其证明可见于 [12, 定理 1，第 129] 页

设 $P$ 是 $G$ 的一个包含 $B$ 的抛物子群。设 $V$ 是一个 $P$-模。那么 $V$ 具有一个滤过

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_t = V$$

由 $P$-子模构成，使得 $V_i/V_{i-1}$ 是最高权为 $\lambda_i (1 \leq i \leq t)$ 的不可约 $P$-模。我们称这些权为 $V$ 的最高权，并将权的集合记为 $\Lambda_P(V) :=\{\lambda_i : \ 1 \leq i \leq t\}$。我们在此指出，尽管滤过并不唯一，但权的集合 $\Lambda_P(V)$ 是唯一确定的，这是由 $V$ 关于 $L$-模分解为不可约分支的直和得到的，其中 $L$ 表示 $P$ 的 Levi因子。令 $I_P(V) :=\{$ind$(\lambda_i + \rho) : \ \lambda_i + \rho$ 是非奇异的，且 $\lambda_i \in \Lambda_P(V)\}$。

引理 4.2. 设 $\mathcal{L}_P(V)$ 是与一个 $P$-模$V$相对应的、定义在 $G/P$上的齐性向量丛。则有如下结论：

$$H^j(G/P, \mathcal{L}_P(V)) = 0 \ if \ \ j \notin I_P(V).$$

这里回顾推论 4.3 第 774] 页中映射 $\varphi_w$ 从 [19, 出发的核的描述。令 Supp($w$) := $\{\alpha \in S\colon\ s_\alpha \leq w\}$, 并令 $T(w) = \bigcap_{\alpha\in\text{支撑}(w)} \ker(\alpha)$。对于 $w \in W$，令$R^+(w^{-1}) := \{\beta \in R^+ :\ w^{-1}(\beta) < 0\}$。对于 $\beta \in R$, 令 $U_\beta$ 表示与 $\beta$相对应的 $G$的根子群。令 $U_{\leq w}$ 为由以下元素生成的 $U$ （ $B$的幺幂根）的根子群

$$\langle U_{-\beta} : \beta \in R^+ \setminus \bigcup_{v\leq w} R^+(v^{-1})\rangle$$

令 $K_w := \ker \varphi_w$。令 $\mathfrak{k}_w$ 表示 $K_w$ 的李代数。于是

引理 4.3. $K_w$ （分别地， $\mathfrak{k}_w$）由 $T$（$w$）（分别地，Lie($T(w)$)) 和 $U_{\leq w}$（分别地，李($U_{\leq w}$)）生成。

引理 4.4. 假设 $w \in W$ 满足 $w \neq w_0$. 。那么对于所有 $j \geq 0$， $H^j(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}) = 0$ 。

证明。考虑短正合列

$$0 \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{p}_{I(w)} \to \mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b} \to 0$$

$B$-模。因此我们有如下长正合列

$$0 \to H^0(G/B, \mathfrak{b}) \to H^0(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}) \to H^0(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b}) \to$$
$$H^1(G/B, \mathfrak{b}) \to H^1(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}) \to H^1(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b}) \to \cdots$$

$G$模的。利用 [19, 引理 3.4、定理 4.1，第 770 页-771], ，我们有 $H^j(G/B, \mathfrak{b}) = 0$ 对于$j \geq 0$。因此，由上述正合列可得:

$$H^j(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}) = H^j(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b}) \text{ for all } j \geq 0.$$

注意， $\mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b}$ 是一个 $B$-模，其中 $\mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b}$ 中出现的权都是正根。此外，由于 $\mathfrak{p}_{I(w)} \neq \mathfrak{g}$，作为 $w \neq w_0$，最高根 $\alpha_0$ 不会出现在 $\mathfrak{p}_{I(w)}/\mathfrak{b}$中。因此，利用事实 2 和引理 4.2，即得证明。□

现在我们证明

引理 4.5. 假设 $w \neq w_0 \in W.$，则对于所有$j \geq 0.$，我们有 $H^j(G/B, H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)}))$

证明。由定理 4.1，我们得到以下短正合列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{k}_w \longrightarrow \mathfrak{p}_{I(w)} \longrightarrow H^0(X(w), \Theta_{X(w)}) \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

$B$-模的。

由于 $w \neq w_0$，由引理 4.4 可得 $H^j(G/B, \mathfrak{p}_{I(w)}) = 0$ 对 $j \geq 0.$。因此，由与 (4.1) 相关的长正合列可得:

$$H^j(G/B, H^0(X(w), \Theta_{X(w)})) = H^{j+1}(G/B, \mathfrak{k}_w) \text{ for } j \geq 0.$$

由引理 4.3 可得

$$\mathfrak{k}_w = \mathrm{Lie}(T(w)) \oplus \bigoplus_{\beta \in A} \mathbb{C}_{-\beta}.$$

其中 $A = R^+ \setminus \bigcup_{v \le w} R^+(v^{-1})$。

假设 $\mathrm{Supp}(w) = S$，则 $T(w)$ 是一个平凡群。根据上述描述，对于所有 $\alpha \in S$，$(\mathfrak{k}_w)_{-\alpha} = 0$。因此，利用事实 2 和引理 4.2，我们得出 $H^j(G/B, \mathfrak{k}_w) = 0 \text{for } j \ge 0$。于是，对于所有 $j \ge 0$，$H^j(G/B, H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)})) = 0$。

假设 $\mathrm{Supp}(w) \subset S$。定义 $J^c := S \setminus \mathrm{Supp}(w)$。注意 $J^c \subset A$.令 $L_{J^c}$ 为 $P_{J^c}$ 的 Levi 子群，且 $B_{J^c} = B \cap L_{J^c}$。于是我们有 $P_{J^c}/B \simeq L_{J^c}/B_{J^c}$.。注意 $P_{J^c}/B = X(w_{0,\ J^c})$，其中 $w_{0,\ J^c}$ 表示 $W_{J^c}$ 的最长元素。令 $r = |J^c|$。令 $c = s_{i_r} \cdots s_{i_1}$ 为一个约化表达式，使得对于 $1 \le j \ne k \le r$，$\alpha_{i_j} \ne \alpha_{i_k}$，即 $c$ 是 $W_{J^c}$ 的 Coxter 元素。现在将 $c$ 的这个约化表达式扩展为约化表达式 $w_{0,\ J^c} = s_{i_N} \cdots s_{i_{r+1}} s_{i_r} s_{i_{r-1}} \cdots s_{i_1}$，以计算

$$H^j(L_{J^c}/B_{J^c}, \mathfrak{k}_w) \ \text{ for } j \ge 0,$$

其中 $\ell(w_{0,\ J^c}) = N$。

注意，由于 $G$ 是单边的，对于任意一对 $\alpha$、$\beta \in R$，只要满足 $\alpha \ne \pm\beta.$，$\langle -\beta、\ \alpha\rangle = -1$ 只能是 0 或 1。因此，若 $\langle -\beta、\ \alpha\rangle = 1$，则 $-\beta + \alpha$ 不是一个根。类似地，若 $\langle -\beta、\ \alpha\rangle = -1$，则$-\beta - \alpha$ 不是一个根。注意，若 $\beta \in A$ 满足 $\langle -\beta、\ \alpha_{i_1}\rangle = -1$，那么显然 $\beta - \alpha_{i_1}$ 是一个正根。

~因此，根据上述对 $\mathfrak{k}_w$的描述，$\mathfrak{k}_w$ 的不可分解 $B_{\alpha_{i_1}}$-直和项如下:

$$\mathbb{C}h(\alpha_{i_1}) \oplus \mathbb{C}_{-\alpha_{i_1}}; \mathbb{C}h(\alpha)\ (\alpha \ne \alpha_{i_1})\ ; \mathbb{C}_{-\beta}\ (\text{ for } \langle \beta, \alpha_{i_1}\rangle = 0);$$

$$\mathbb{C}_{-\beta} \oplus \mathbb{C}_{-\beta-\alpha_{i_1}}\ (\text{ for }\ \langle -\beta, \alpha_{i_1}\rangle = 1);$$

$$\mathbb{C}_{-\beta}\ (\text{ for} \langle -\beta, \alpha_{i_1}\rangle = -1 \text{ such that } \beta - \alpha_{i_1} \notin A).$$

由引理 2.4 可得:

$$\mathbb{C}h(\alpha_{i_1}) \oplus \mathbb{C}_{-\alpha_{i_1}} = V(1) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_{i_1}};$$

$$\mathbb{C}h(\alpha) = V(0)\ (\alpha \ne \alpha_{i_1});$$

$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0)\ (\text{ for }\ \langle \beta, \alpha_{i_1}\rangle = 0);$$

$$\mathbb{C}_{-\beta} \oplus \mathbb{C}_{-\beta-\alpha_{i_1}} = V(1)\ (\text{ for } \langle -\beta, \alpha_{i_1}\rangle = 1);$$

$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_{i_1}}\ (\text{ for } \langle -\beta, \alpha_{i_1}\rangle = -1 \text{ such that } \beta - \alpha_{i_1} \notin A);$$

~其中 $V(i)$ 表示一个 $i+1$ 维不可约 $L_{\alpha_{i_1}}$-模。因此，利用引理 2.2 可得：

$$H^0(s_{i_1},\mathfrak{k}_w)=\bigoplus_{\alpha\in J^c\setminus\{\alpha_{i_1}\}}\mathbb{C}h(\alpha)\qquad\bigoplus_{\substack{\beta\in A\setminus\{\alpha_{i_1}\}\\ \text{except those with}\\ \langle\beta,\alpha_{i_1}\rangle=1 \text{ and } \beta-\alpha_{i_1}\notin A}}\mathbb{C}_{-\beta}$$

and

$$H^j(s_{i_1},\mathfrak{k}_w)=0 \text{ for all } j\geq 1.$$

同样，对字符串 $s_{i_r}\cdots s_{i_2}$ 递归进行推导，可得零权以及单根的负值不会出现在 $H^0(s_{i_r}\cdots s_{i_1},\mathfrak{k}_w)$ 和 $H^j(s_{i_r}\cdots s_{i_1},\mathfrak{k}_w)=0$ for all $j\geq 1$. 中

因此，对字符串 $s_{i_N}\cdots s_{i_{r+1}}$ 逐步进行推导，可得零权以及单根的负值不会出现在 $H^0(L_{J^c}/B_{J^c},\mathfrak{k}_w)$ 和 $H^j(L_{J^c}/B_{J^c},\mathfrak{k}_w)=0$ for all $j\geq 1$. 中

考虑自然投影映射

$$p: G/B\longrightarrow G/P_{J^c}.$$

由于 $H^j(P_{J^c}/B,\mathfrak{k}_w)=0$ for all $j\geq 1$, $R^jp_*\mathcal{L}(\mathfrak{k}_w)=0$ for $j\geq 1$。因此，应用退化情形下的 Leray谱序列可得

$$H^j(G/B,\mathfrak{k}_w)=H^j(G/P_{J^c},H^0(P_{J^c}/B,\mathfrak{k}_w)) \text{ for all } j\geq 1.$$

由于 $H^0(P_{J^c}/B,\mathfrak{k}_w)$ 是一个 $B$-模，其权属于根，但不包括单根的负根，利用事实 2 和引理 4.2，我们有 $H^j(G/P_{J^c},H^0(P_{J^c}/B,\mathfrak{k}_w))=0$ for $j\geq 1$. 因此，对于所有 $j\geq 0$. □，有 $H^j(G/B,H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)}))=0$

命题 4.6. 假设 $w\neq w_0\in W$. 。则有

(i) $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w))=G$.
(ii) $H^1(\mathcal{X}(w),\Theta_{\mathcal{X}(w)})=H^0(G/B,H^1(X(w),\Theta_{X(w)}))$.

证明. （i）的证明：由引理 4.5，我们有 $H^0(G/B,H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)}))=0.$。因此，由定理 3.3(i)，我们有 $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w))=G$.

（ii）的证明：由引理 4.5，我们有 $H^j(G/B,H^0(X(w)\ \Theta_{X(w)}))=0$，对所有 $j\geq 1$ 均成立。利用 [6, 定理 3.1.1(a)，第 84] 页，可得 $H^j(X(w)\ \mathcal{O}_{X(w)})=0$，对所有 $j>0$. 均成立。因此，由定理 3.3(ii)，我们有 $H^1(\mathcal{X}(w)\ \Theta_{\mathcal{X}(w)})=H^0(G/B,H^1(X(w)\ \Theta_{X(w)}))$. □

推论 4.7. 设 $w\in W$ 满足 $w\neq id$、$w_0$，其中 $id$ 表示 $W$. 的单位元。则 $\mathcal{X}(w)$ 不同构于 $G/B\times X(w)$。

证明. 若 $\mathcal{X}(w) = G/B \times X(w)$，则根据 [5, 推论 2.3，第 46], 页，$\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w)) = \mathrm{Aut}^0(G/B) \times \mathrm{Aut}^0(X(w))$。由于 $\mathrm{Aut}^0(G/B) = G$ （见 [11]），我们有 $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w)) = G \times \mathrm{Aut}^0(X(w))$。此外，由于 $w \neq id$， $X(w)$ 包含一个具有正维数的开 $B$-轨道，从而 $B$ 在 $X(w)$ 上非平凡地作用。因此，我们得出 $\mathrm{Aut}^0(X(w))$ 不是平凡群。于是，$\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w)) \neq G$，这与命题 4.6(i) 矛盾，因为 $w \neq w_0$. □

注 4.8. 若 $w = w_0$，则有 $\mathcal{X}(w) = G/B \times G/B$. 因此 $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{X}(w)) = G \times G$ 且$H^j(\mathcal{X}(w), \Theta_{\mathcal{X}(w)}) = 0$ $(j \geq 1)$，其中 $w = w_0$.

4.2. $G$-BSDH 簇自同构群的恒等分支：设 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$为一个约化表达式，且 $\underline{i} := (i_1, \ldots, i_r)$。设 $v = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{r-1}}$且 $\underline{i}' := (i_1, \ldots, i_{r-1})$。

考虑 $P_{\alpha_{i_r}}/B$ $(\simeq \mathbb{P}^1)$ 纤维化

$$\pi_r : G/B \to G/P_{\alpha_{i_r}}.$$

那么，纤维积 $Z(w, \underline{i})$ 是 $Z(v, \underline{i}')$ 与 $G/B$ 在 $G/P_{\alpha_{i_r}}$ 上关于映射 $\pi_r$ 和 $\pi_r \circ \phi_v$： $Z(v, \underline{i}) \to G/P_{\alpha_{i_r}}$ 的纤维积。因此有如下 $B$-等变纤维积图：

$$\begin{array}{ccc} Z(w, \underline{i}) := Z(v, \underline{i}') \times_{G/P_{\alpha_{i_r}}} G/B & \xrightarrow{\phi_w} & G/B \\ \downarrow{\scriptstyle f_r} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_r} \\ Z(v, \underline{i}') & \xrightarrow{\pi_r \circ \phi_v} & G/P_{\alpha_{i_r}} \end{array} .$$

注意， $P_{\alpha_{i_r}}/B$-纤维化 $f_r$： $Z(w, \underline{i}) \to Z(v, \underline{i}')$ 已在第 2 节中定义。注意，相对于 $\pi_r$ , $G/B$ 上的相对切丛是线丛 $\mathcal{L}(\alpha_{i_r})$。因此，由上述 $B$-等变纤维积图可得以下短正合列

$$0 \to \mathcal{L}(w, \alpha_{i_r}) \to \Theta_{Z(w,\underline{i})} \to f_r^* \Theta_{Z(v,\underline{i}')} \to 0$$

这是定义在 $Z(w, \underline{i})$ 上的 $B$-等变向量丛的短正合列。因此，我们得到以下长正合列

$$0 \to H^0(w, \alpha_{i_r}) \to H^0(Z(w, \underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) \to H^0(Z(v, \underline{i}'), \Theta_{Z(v,\underline{i}')}) \to$$

$$H^1(w, \alpha_{i_r}) \to H^1(Z(w, \underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) \to H^1(Z(v, \underline{i}'), \Theta_{Z(v,\underline{i}')}) \to \cdots$$

$B$-模的长正合列。

引理 4.9. 设 $(w, \underline{i})$、$(v, \underline{i}')$ 如上所述。则有正合列

$$0 \to H^0(w, \alpha_{i_r}) \to H^0(Z(w, \underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) \to H^0(Z(v, \underline{i}'), \Theta_{Z(v,\underline{i}')}) \to 0$$

$B$模。进一步，对于所有 $j \geq 1.$， $H^j(Z(w, \underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) = 0$

证明。根据 [19, 推论 3.6，第 771] 页可得，对于所有 $j \geq 1$， $H^j(w, \alpha_{i_r}) = 0$。因此，利用上述长正合列即可得出第一部分的证明。第二部分的证明通过对 $r$ 使用归纳法，并利用上述长正合列和 [19, 推论 3.6，第 771] 页得出（参见 [7,命题 3.1(2)，第 673] 页）。□

引理 4.10. 设 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ 是一个约化表达式，且 $\alpha_{i_r} = \alpha.$。则有以下结论：

(1) 若对所有 $1 \leq k \leq r-1$， $\langle \alpha、 \alpha_{i_k} \rangle = 0$，则 $B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权为 $\alpha$、0、 $-\alpha$，且重数均为一。(2) 若 $\alpha_{i_k} \neq \alpha$ ($1 \leq k \leq r-1$)，但存在一个整数 $1 \leq k \leq r-1$ 使得 $\langle \alpha、 \alpha_{i_k} \rangle = -1$，则 $B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权为 0、 $-\alpha$，或属于负根中非单根之负根的那些根。此外，每个权的重数均为一。(3) 若对某个 $1 \leq k \leq r-2$， $\alpha_{i_k} = \alpha$，则 $B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权属于负根中非单根之负根的那些根，且重数为一。

证明。（1）的证明：利用 Borel-Weil-Bott，我们有

$$H^0(s_{i_r}, \alpha) = \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha}.$$

由于 $\langle \alpha、 \alpha_{i_k} \rangle = 0$ 对所有 $1 \leq k \leq r-1$，利用短正合列、引理 2.4 和引理 2.2，我们有

$$H^0(w, \alpha) = \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha}.$$

因此（1）得证。

（2）的证明：设 $1 \leq m \leq r-1$ 是满足 $\langle \alpha、 \alpha_{i_m} \rangle = -1.$ 的最大整数。由假设， $\langle \alpha、 \alpha_{i_k} \rangle = 0$ 对所有 $m+1 \leq k \leq r-1.$ 均成立。因此由（1）可得

$$H^0(s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_r}, \alpha) = \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha}.$$

~利用引理 2.4， $H^0(s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_r}, \alpha)$ 的不可分解 $B_{\alpha_{i_m}}$-直和项如下

$$\mathbb{C}_\alpha = V(0) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_{i_m}};$$
$$\mathbb{C}_0 = V(0);$$
$$\mathbb{C}_{-\alpha} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{\omega_{i_m}}.$$

然后利用短正合列和引理 2.2，我们得到

$$H^0(s_{i_m} \cdots s_{i_r}, \alpha) = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}_{-\alpha-\alpha_{i_m}}.$$

进一步递归地运用短正合列、引理 2.4 和引理 2.2，我们得出， $B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权为 0、 $-\alpha$，或属于非单根负根。并且，每个权的重数均为一。

（3）的证明：假设 $1 \leq m \leq r-2$ 是满足 $\alpha_{i_m} = \alpha.$ 的最大整数。由于 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ 是一个约化表达式，存在一个整数 $m+1 \leq t \leq r-1$，使得 $\langle \alpha, \alpha_{i_t} \rangle = -1.$。因此，根据（2），$B$-模 $H^0(s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_r}, \alpha)$ 的权为 0、$-\alpha$，或属于非单根负根，且每个权的重数均为一。~然后运用引理 2.4，$H^0(s_{i_{m+1}} \cdots s_{i_r}, \alpha)$ 的不可分解 $B_{\alpha_{i_m}}$-直和项具有以下形式之一

$$\mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha} = V(1) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_{i_m}};$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} \oplus \mathbb{C}_{-\beta-\alpha} = V(1) \text{ for } \langle -\beta, \alpha \rangle = 1;$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{\omega_{i_m}} \text{ for } \langle -\beta, \alpha \rangle = 1;$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_{i_m}} \text{ for } \langle -\beta, \alpha \rangle = -1;$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \text{ for } \langle -\beta, \alpha \rangle = 0;$$

~其中 $V(i)$ 表示一个 $i+1$ 维不可约 $L_{\alpha_{i_m}}$-模。因此，利用短正合列和引理 2.2，我们得出 $B$-模 $H^0(s_{i_m} \cdots s_{i_r}, \alpha)$ 的权属于负根，但不包括重数为一的单根的负根。进一步，通过递归地利用短正合列、引理 2.4 和引理 2.2，我们得出 $B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权属于负根，但不包括重数为一的单根的负根。□

引理 4.11. 假设 $G$ 的秩至少为二。设 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ 为一个约化表达式，且 $\alpha_{i_r} = \alpha.$ 那么，对于所有 $j \geq 0$，我们有 $H^j(G/B, H^0(w, \alpha)) = 0$。

证明。$B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权属于引理 4.10 中所述的三个互斥情形之一。我们逐一讨论这些情形来证明该引理。

情形 1：假设 $B$-模 $H^0(w, \alpha)$ 的权为 $\alpha$、0 和 $-\alpha.$

由于 $G$ 的秩至少为二，存在一个 $\beta$ 属于 $S$，使得 $\langle \alpha, \beta \rangle = -1.$ 考虑自然投影映射

$$p : G/B \longrightarrow G/P_{\{\alpha,\beta\}}.$$

令 $v = s_\alpha s_\beta s_\alpha.$。注意到 $P_{\{\alpha,\beta\}}/B = X(v)$。利用引理 2.4

$$H^0(w, \alpha) = V(2),$$

其中 $V(2)$ 表示 ~一个三维不可约 $L_\alpha$-模。因此，由引理 2.2 可得

$$H^0(s_\alpha, H^0(w, \alpha)) = \mathbb{C}_\alpha \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha};$$
$$H^1(s_\alpha, H^0(w, \alpha)) = 0.$$

由于 $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$，利用引理 2.4，$H^0(s_\alpha, H^0(w, \alpha))$ 的不可分解~ $B_\beta$-直和项具有以下形式之一：

$$\mathbb{C}_\alpha = V(0) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_\beta};$$
$$\mathbb{C}_0 = V(0);$$

$$\mathbb{C}_{-\alpha} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{\omega_\beta}.$$

利用引理 2.2，我们得到

$$H^0(s_\beta, H^0(s_\alpha, H^0(w,\alpha))) = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}_{-\alpha-\beta}$$

$$H^1(s_\beta, H^0(s_\alpha, H^0(w,\alpha))) = 0.$$

因此，利用短正合列可得

$$H^0(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}_{-\alpha-\beta}$$

$$H^1(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0;$$

进一步递归地利用短正合列，可得

$$H^j(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0 \ (j \geq 2).$$

~利用引理 2.4，$H^0(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha))$ 的不可分解 $B_\alpha$-直和项如下

$$\mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha} = V(1) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_\alpha}; \mathbb{C}_{-\alpha-\beta} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_\alpha}.$$

因此，利用引理 2.2 可得

$$H^0(s_\alpha, H^0(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha))) = 0$$

$$H^1(s_\alpha, H^0(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha))) = 0.$$

利用短正合列，我们得出

$$H^0(s_\alpha s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0$$

$$H^1(s_\alpha s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0.$$

此外，由于对所有 $j \geq 2$，$H^j(s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0$，利用短正合列可得，对所有 $j \geq 2.$，$H^j(s_\alpha s_\beta s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0$。换言之，我们有

$$H^0(P_{\{\alpha,\beta\}}/B, H^0(w,\alpha)) = 0$$

$$H^j(P_{\{\alpha,\beta\}}/B, H^0(w,\alpha)) = 0 \ (j \geq 1).$$

因此，对所有 $j \geq 1.$，$R^j p_* \mathcal{L}(H^0(w,\alpha)) = 0$。故应用 Leray 谱序列的退化情形可得

$$H^j(G/B, H^0(w,\alpha)) = H^j(G/P_{\{\alpha,\beta\}}, H^0(P_{\{\alpha,\beta\}}/B, H^0(w,\alpha))) \text{ for all } j \geq 0.$$

由于 $H^0(P_{\{\alpha,\beta\}}/B, H^0(w,\alpha)) = 0$，由此可得，对所有 $j \geq 0$，$H^j(G/B, H^0(w,\alpha)) = 0$ .

情形 2：假设 $B$-模 $H^0(w,\alpha)$ 的权为 0、$-\alpha$，或属于非单根负根的负根，且每个权的重数均为一。

考虑自然投影映射

$$p : G/B \longrightarrow G/P_\alpha.$$

~利用引理 2.4， $H^0(w,\alpha)$ 的不可分解 $B_\alpha$-直和项具有以下形式之一:

$$\mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha} = V(1) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_\alpha};$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} \oplus \mathbb{C}_{-\beta-\alpha} = V(1);$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{\omega_\alpha} \text{ for } \langle -\beta, \alpha\rangle = 1;$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \otimes \mathbb{C}_{-\omega_\alpha} \text{ for } \langle -\beta, \alpha\rangle = -1;$$
$$\mathbb{C}_{-\beta} = V(0) \text{ for } \langle -\beta, \alpha\rangle = 0;$$

~其中， $V(i)$ 表示一个 $i+1$ 维不可约 $L_\alpha$-模。因此，根据引理 2.2，我们得出 $B$-模 $H^0(s_\alpha, H^0(w,\alpha))$ 的权属于负根，但不包括单根的负根，且重数为一； $H^1(s_\alpha, H^0(w,\alpha)) = 0$. 因此， $R^j p_* \mathcal{L}(H^0(w,\alpha)) = 0$ 对所有 $j \geq 1$. 均成立。因此，应用 Leray谱序列的一个退化情形，我们有

$$H^j(G/B, H^0(w,\alpha)) = H^j(G/P_\alpha, H^0(P_\alpha/B, H^0(w,\alpha))) \text{ for all } j \geq 0.$$

由于 $H^0(P_\alpha/B, H^0(w,\alpha))$ 是一个 $B$-模，其权属于负根，但不包括单根的负根，利用事实 1、事实 2 和引理 4.2，我们有$H^j(G/P_\alpha, H^0(P_\alpha/B, H^0(w,\alpha))) = 0$ 对所有 $j \geq 0$.均成立

情形 3: 假设 $B$-模 $H^0(w,\alpha)$ 的权属于负根，且不包括重数为一的单根的负根。那么利用事实 1、事实 2 和引理 4.2，我们得到 $H^j(G/B, H^0(w,\alpha)) = 0$ 对所有 $j \geq 0$. □

设 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{r-1}} s_{i_r}$ 是一个约化表达式，且 $\underline{i} = (i_1, i_2 \ldots, i_{r-1}, i_r)$.

引理 4.12. 假设 $G$ 的秩至少为二。那么我们有

$$H^j(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})})) = 0 \text{ for } j \geq 0.$$

证明. 根据引理 4.9，我们有以下短正合列

$$0 \to H^0(w,\alpha) \to H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) \to H^0(Z(v,\underline{i}'), \Theta_{Z(v,\underline{i}')}) \to 0$$

$B$-模的，其中 $\alpha = \alpha_{i_r}$、 $v = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_{r-1}}$ 和 $\underline{i}' = (i_1, i_2 \ldots, i_{r-1})$.

因此我们有以下长正合列

$$0 \to H^0(G/B, H^0(w,\alpha)) \to H^0(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})})) \to H^0(G/B, H^0(Z(v,\underline{i}'), \Theta_{Z(v,\underline{i}')}))$$
$$\to H^1(G/B, H^0(w,\alpha)) \to H^1(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})})) \to \cdots$$

$G$ 模的。利用引理 4.11，我们得到

$$H^j(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})})) \simeq H^j(G/B, H^0(Z(v,\underline{i}'), \Theta_{Z(v,\underline{i}')})) \text{ for all } j \geq 0$$

因此，对该序列的长度使用归纳法可得，对于所有 $j \geq 0$，有 $H^j(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}) \ \Theta_{Z(w,\underline{i})})) \simeq H^j(G/B, H^0(s_{i_1}, \alpha_{i_1}))$。因此，利用引理 4.11，我们完成证明。□

命题 4.1 3. 假设 $G$ 的秩至少为二。那么我们有如下 :

(i) $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = G$.(ii) $H^j(\mathcal{Z}(w, \underline{i}) \ \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}) = 0$ 对于 $j \geq 1$.

证明. （i）的证明：由引理 4.12，我们有 $H^0(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}) \ \Theta_{Z(w,\underline{i})})) = 0$. 因此，由定理 3.3(i)，我们有 $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = G$.

（ii）的证明：我们采用与定理 3.3(ii) 的证明相同的方法。

回忆一下，$\mathcal{Z}(w,\underline{i}) = G \times^B Z(w,\underline{i})$。考虑自然第一分量投影

$$\pi : \mathcal{Z}(w,\underline{i}) \to G/B.$$

因此我们得到如下正合列

$$0 \to \mathcal{R} \to \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})} \to \pi^*\Theta_{G/B} \to 0$$

在 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 上的向量丛，其中 $\mathcal{R}$ 表示关于 $\pi$. 的 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 上的相对切丛。由于当 $j \geq 1$ 时，$H^j(G/B, \Theta_{G/B})$ 和 $H^j(Z(w,\underline{i}) \ \mathcal{O}_{Z(w,\underline{i})})$ 消失（参见 [11],[1, 定理 2，第 75 页以及定理 1，第 130] 页），由关于 $\pi$ 的 Leray谱序列和投影公式可知，当 $j \geq 1$ 时，$H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}) \ \pi^*\Theta_{G/B})$ 也消失。此外，利用命题 3.1 以及与上述短正合列相关的长正合列，我们得到如下结果:

$$0 \to H^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \mathcal{R}) \to H^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \Theta_{\mathcal{Z}(w,i)}) \to H^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \pi^*\Theta_{G/B}) = \mathfrak{g} \to 0$$

$$H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \mathcal{R}) \simeq H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \Theta_{\mathcal{Z}(w,i)}) \text{ for all } j \geq 1.$$

由于 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 上的相对切丛，因此 $\mathcal{R}$ 在 $Z(w,\underline{i})$ 上的限制为 $\Theta_{Z(w,\underline{i})}$。由引理 4.9，我们有

$$H^j(Z(w,\underline{i}), \mathcal{R}|_{Z(w,\underline{i})}) = H^j(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) = 0 \ \text{ for } j \geq 1.$$

因此我们有

$$\pi_*\mathcal{R} = \mathcal{L}(H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}))$$

$$R^j\pi_*\mathcal{R} = 0 \text{ for } j \geq 1.$$

Ther因此，通过使用 Leray谱序列的一个退化情形，我们得到

$$H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \mathcal{R}) = H^j(G/B, H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})})).$$

因此，利用引理 4.12，我们完成了证明。□

推论4.14. 假设 $G$ 的秩至少为二且 $w \neq id.$ 那么 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 不同构于 $G/B \times Z(w,\underline{i})$。

证明. 如果 $\mathcal{Z}(w,\underline{i}) = G/B \times Z(w,\underline{i})$，那么根据 [5, 推论 2.3，第 46] 页，我们有 $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = \mathrm{Aut}^0(G/B) \times \mathrm{Aut}^0(Z(w,\underline{i}))$。由于 $\mathrm{Aut}^0(G/B) = G$（见 [11]），我们有 $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = G \times \mathrm{Aut}^0(Z(w,\underline{i}))$。此外，由于 $w \neq id$, $Z(w,\underline{i})$ 包含一个具有正维数的开 $B$-轨道，从而 $B$ 在 $Z(w,\underline{i})$ 上非平凡地作用。因此，我们得出 $\mathrm{Aut}^0(Z(w,\underline{i}))$ 不是平凡群。于是，$\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) \neq G$，这与命题 4.13(i) 矛盾。□

注 4.15. 若 $G$ 的秩为一，则对于 $w = id$ 或 $w = s_\alpha$，$\mathcal{Z}(w,\underline{i})$同构于 $G/B \times Z(w,\underline{i})$。此外，对于 $w = s_\alpha$，有 $\mathcal{Z}(w,\underline{i}) \simeq G/B \times G/B \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。因此

$$\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = G \times G \text{ and } H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}) = 0 \quad for \quad j \geq 1.$$

进一步，对于 $w = id$，有 $\mathcal{Z}(w,\underline{i}) \simeq G/B \simeq \mathbb{P}^1$。因此

$$\mathrm{Aut}^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i})) = G \quad and \; H^j(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}) = 0 \quad for \quad j \geq 1.$$

我们以一个例子结束本文，该例表明若 $G$ 不是单边的，则 $H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})})$可能不为零，即 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$不是局部刚性的。

例 4.16. 设 $G = \mathrm{SO}(5,\mathbb{C})$。令 $w = s_1 s_2 s_1$, $\underline{i} = (1,2,1)$。则 $H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i}), \Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}) \neq 0$.

证明。考虑如下的 $B$-等变纤维积图:

$$\begin{array}{ccc} Z(w,\underline{i}) & \xrightarrow{\phi_w} & G/B \\ {\scriptstyle f_3}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z(w_1,\underline{i}_1) & \xrightarrow{\pi\circ\phi_{w_1}} & G/P_{\alpha_1} \end{array}$$

其中 $w_1 = s_1 s_2$，以及 $\underline{i}_1 = (1,2)$。由于 $\pi$ 是 $P_{\alpha_1}/B (\simeq \mathbb{P}^1)$-纤维化，关于 $\pi$ 的 $G/B$ 上的相对切丛是线丛 $\mathcal{L}(\alpha_1)$。因此，由上述图表可得如下正合列

$$0 \to \mathcal{L}(w,\alpha_1) \to \Theta_{Z(w,\underline{i})} \to {f_3}^* \Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)} \to 0$$

这是定义在 $Z(w,\underline{i})$ 上的向量丛正合列。注意，根据 [19, 推论 6.4，p.780] 可知 $H^2(w,\alpha_1) = 0$。由此得到一个长正合列

$$0 \to H^0(w,\alpha_1) \to H^0(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) \to H^0(Z(w_1,\underline{i}_1), \Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})$$

$$\to H^1(w,\alpha_1) \to H^1(Z(w,\underline{i}), \Theta_{Z(w,\underline{i})}) \to H^1(Z(w_1,\underline{i}_1), \Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)}) \to 0,$$

的 $B$-模。

注意，利用引理 2.1 或 Borel-Weil-Bott 定理可得

$$H^0(s_1,\alpha_1) = \mathbb{C}_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha_1} \text{ and } H^1(s_1,\alpha_1) = 0.$$

注意， $P_{\alpha_1}$ 的幺幂根 $R_u(P_{\alpha_1})$ 在 $B$-模 $\widetilde{H^0(s_1,\alpha_1)}$ 上作用平凡，因为它在 $P_{\alpha_{i_1}}/B.$ 上作用平凡。作为 $B_{\alpha_2}$-模， $H^0(s_1,\alpha_1)$ 的不可分解直和项为 $\mathbb{C}_{\alpha_1}$、 $\mathbb{C}_{-\alpha_1}$ 和 $\mathbb{C}_{0.}$。因此，由引理 2.4 可得:

$$\mathbb{C}_{\alpha_1} = V(0)\otimes\mathbb{C}_{\alpha_1}, \mathbb{C}_0 = V(0)\otimes\mathbb{C}_0, \text{ and } \mathbb{C}_{-\alpha_1} = V(0)\otimes\mathbb{C}_{-\alpha_1}$$

其中 $V(0)$ 表示平凡的一维 $L_{\alpha_2}$-模。由于 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle = -2$，利用引理 2.2 可得:

$$H^0(s_2,H^0(s_1,\alpha_1)) = \mathbb{C}_0\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1}\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1-\alpha_2}\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1-2\alpha_2} \text{ and } H^1(s_2,H^0(s_1,\alpha_1)) = \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2}$$

因为 $s_2\cdot\alpha_1 = \alpha_1+\alpha_2.$

利用 $w = s_2s_1$ 的短正合列，对于 $B$-模 $V = \mathbb{C}_{\alpha_1}$ 和 $j = 0$，1，我们有

$$H^0(s_2s_1,\alpha_1) = H^0(s_2,H^0(s_1,\alpha_1)) \text{ and } H^1(s_2s_1,\alpha_1) = H^1(s_2,H^0(s_1,\alpha_1)).$$

因此我们有

$$H^0(s_2s_1,\alpha_1) = \mathbb{C}_0\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1}\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1-\alpha_2}\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1-2\alpha_2} \text{ and } H^1(s_2s_1,\alpha_1) = \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

注意，作为一个 $B_{\alpha_1}$-模， $H^0(s_2s_1,\alpha_1)$ 的不可分解直和项如下

$$\mathbb{C}_0\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1}, \mathbb{C}_{-\alpha_1-\alpha_2}, \text{ and } \mathbb{C}_{-\alpha_1-2\alpha_2}.$$

此外，由引理 2.4

$$\mathbb{C}_0\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1} = V(1)\otimes\mathbb{C}_{-\omega_1}, \mathbb{C}_{-\alpha_1-\alpha_2} = V(0)\otimes\mathbb{C}_{-\omega_1}, \text{ and } \mathbb{C}_{-\alpha_1-2\alpha_2} = V(0)\otimes\mathbb{C}_{-\alpha_{1-2\alpha_2}}$$

其中 $V(i)$ 表示一个 $i+1$ 维不可约 $L_{\alpha_1}$-模。因此，利用引理 2.2，我们得到如下

$$H^0(s_1,H^0(s_2s_1,\alpha_1)) = \mathbb{C}_{-\alpha_1-2\alpha_2} \text{ and } H^1(s_1,H^0(s_2s_1,\alpha_1)) = 0$$

类似地，由于 $\langle\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\rangle = -1$，利用引理 2.2，我们得到

$$H^0(s_1,H^1(s_2s_1,\alpha_1)) = \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2}\oplus\mathbb{C}_{\alpha_2}.$$

因此，利用（短正合列），我们得到如下

$$H^0(w,\alpha_1) = \mathbb{C}_{-\alpha_1-2\alpha_2} \text{ and } H^1(w,\alpha_1) = \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2}\oplus\mathbb{C}_{\alpha_2}.$$

回顾以下短正合列

$$0\to\mathcal{L}(w_1,\alpha_2)\to\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)}\to {f_2}^*\Theta_{Z(w_2,\underline{i}_2)}\to 0$$

$Z(w_1,\underline{i}_1)$ 上的向量丛，其中 $w_2 = s_1$ 和 $\underline{i}_2 = (1)$。

注意，根据 [19, 推论 6.4，p.780] 可得 $H^2(w_1,\alpha_2) = 0$。由此得到一个长正合列

$$0\to H^0(w_1,\alpha_2)\to H^0(Z(w_1,\underline{i}_1),\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})\to H^0(Z(w_2,\underline{i}_2),\Theta_{Z(w_2,\underline{i}_2)})$$

$$\to H^1(w_1,\alpha_2)\to H^1(Z(w_1,\underline{i}_1),\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})\to H^1(Z(w_2,\underline{i}_2),\Theta_{Z(w_2,\underline{i}_2)})\to 0,$$

$B$-模的。

注意到 $Z(w_2,\underline{i}_2)\simeq P_{\alpha_1}/B$. 因此我们有

$$H^0(Z(w_2,\underline{i}_2),\Theta_{Z(w_2,\underline{i}_2)})=H^0(s_1,\alpha_1)=\mathbb{C}_{\alpha_1}\oplus\mathbb{C}_0\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1}$$

and

$$H^1(Z(w_2,\underline{i}_2),\Theta_{Z(w_2,\underline{i}_2)})=H^1(s_1,\alpha_1)=0.$$

由于 $\alpha_2$ 是短根，根据 [19, 推论 5.6，第 778] 页，可得 $H^1(w_1,\alpha_2)=0$。因此，由上述讨论可得

$$H^1(Z(w_1,\underline{i}_1),\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})=0.$$

利用（短正合列），我们有 $H^0(w_1,\alpha_2)=\mathbb{C}_0\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_2}\oplus\mathbb{C}_{-\alpha_1-\alpha_2}$。因此，由与 $Z(w_1,\underline{i}_1)$ 对应的上述长正合列可得

$$H^0(Z(w_1,\underline{i}_1),\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})_\mu=0$$

对于 $\mu=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$. 因此，由与 $Z(w,\underline{i})$ 对应的上述长正合列可得以下短正合列

$$0\to H^1(w,\alpha_1)\to H^1(Z(w,\underline{i}),\Theta_{Z(w,\underline{i})})\to H^1(Z(w_1,\underline{i}_1),\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})\to 0$$

$B$-模。由于 $H^1(Z(w_1,\underline{i}_1)\,\Theta_{Z(w_1,\underline{i}_1)})=0$，我们有

$$H^1(Z(w,\underline{i}),\Theta_{Z(w,\underline{i})})=H^1(w,\alpha_1)=\mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2}\oplus\mathbb{C}_{\alpha_2}.$$

回顾 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})=G\times^B Z(w,\underline{i})$。考虑自然第一分量投影

$$\pi:\mathcal{Z}(w,\underline{i})\to G/B.$$

因此我们得到以下正合列

$$0\to\mathcal{R}\to\Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})}\to\pi^*\Theta_{G/B}\to 0$$

$\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 上的向量丛，其中 $\mathcal{R}$ 表示相对于 $\pi$. 的 $\mathcal{Z}(w,\underline{i})$ 上的相对切丛。注意，由于 $H^1(G/B,\Theta_{G/B})$ 和 $H^1(Z(w,\underline{i})\,\mathcal{O}_{Z(w,\underline{i})})$ 均消失，$H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\,\pi^*\Theta_{G/B})$ 也消失。因此，我们得到以下正合列

$$0\to H^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i}),\mathcal{R})\to H^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i}),\Theta_{\mathcal{Z}(w,i)})\to H^0(\mathcal{Z}(w,\underline{i}),\pi^*\Theta_{G/B})=\mathfrak{g}$$
$$\to H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i}),\mathcal{R})\to H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i}),\Theta_{\mathcal{Z}(w,i)})\to 0$$

的 $G$-模。因此，利用注释（2）（见推论 3.4 之后），我们有 $H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\,\Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})})=H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\,\mathcal{R})$。由上述计算可知，$H^0(Z(w,\underline{i})\,\Theta_{Z(w,\underline{i})})$ 的非零权是根。由于非奇异根的指标至多为一，利用引理 4.2，我们有 $H^2(G/B,H^0(Z(w,\underline{i})\,\Theta_{Z(w,\underline{i})}))=0$。

因此，要证明由五项正合序列可知 $H^1(\mathcal{Z}(w,\underline{i})\,\Theta_{\mathcal{Z}(w,\underline{i})})$ 不为零，只需证明 $H^0(G/B, H^1(Z(w,\underline{i})\,\Theta_{Z(w,\underline{i})}))$ 不为零。注意，$H^1(Z(w,\underline{i})\,\Theta_{Z(w,\underline{i})}) = \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_{\alpha_2}$。为了计算上同调模 $H^0(G/B, \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_{\alpha_2})$，我们固定一个约化表达式 $w_0 = s_1s_2s_1s_2$. 然后利用（SES），我们有

$$H^0(G/B, \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_{\alpha_2}) = \mathbb{C}_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_{\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_{-\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_{-(\alpha_1+\alpha_2)} = V(\omega_1),$$

其中，$V(\omega_1)$ 表示最高权为 $\omega_1$. 的有限维不可约 $G$-模 □

## References

[1] D. N. Akhiezer，《复分析中的李群作用》，数学研究专题 E 27，Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden，1995。[2]V. Balaji、S. Senthamarai Kannan、K.V. Subrahmanyam，《舒伯特簇上线丛的上同调-I》，Transformation Groups 9 (2004), no.2, 105-131。[3] R. Bott，《齐性向量丛》。Ann. Math.66(2) (1957), 203-248。[4] R. Bott、H. Samelson，《Morse理论在对称空间中的应用》。Amer. J. Math. 80 (1958), 964-1029。[5] M. Brion，《关于纤维丛的自同构群》，Publ.Math.Urug.12 (2011), 39-66。[6] M. Brion、S. Kumar，《几何与表示论中的弗罗贝尼乌斯分裂方法》，数学进展，第231卷，Birkh¨auser Boston, Inc., Boston, MA, 2005。[7] B. N. Chary、S. S. Kannan、A. J. Parameswaran，《Bott-Samelson-Demazure-Hansen簇的自同构群》，Transformation Groups 20 (2015), no. 3, 665-698。[8] E. Cline、B. Parshall、L. Scott，《诱导模与表示的扩张，II》，J. London Math. Soc. (2), 20 (1979), 403-414。[9] M. Demazure，《广义舒伯特簇的解消》，Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup. (4) 7 (1974), 53-88。[10] M. Demazure，《Bott定理的一个非常简单的证明》，Invent. Math. 33 (1976), 271-272。[11] M. Demazure，《Borel簇的自同构与变形》，Invent. Math. 39:2 (1977), 179-186。[12] P. Griffiths，《齐性复流形的一些几何与解析性质，I》，Acta Math. 110 (1963), 115-155。[13] H. C. Hansen，《关于旗流形上的循环》，Math. Scand. 33 (1973),269-274。[14] R. Hartshorne，《代数几何》，数学研究生教材系列（GTM，第52卷）（1977）。[15] J. E. Humphreys，《李代数与表示论导论》，Springer-Verlag，Berlin Heidelberg，New York，1972。[16] J. E. Humphreys，《线性代数群》，Springer-Verlag，Berlin Heidelberg，New York，1975。[17] D. Huybrechts，《复几何：导论》，Springer-Verlag，Berlin Heidelberg，New York，2005。[18] J. C. Jantzen，《代数群的表示》（第二版），数学调查与专著，第107卷，2003。[19] S. S. Kannan，《关于光滑舒伯特簇的自同构群》，Algebr. Represent. Theory 19 (2016), no 4, 761-782。[20] H. Matsumura、F. Oort，《群函子的可表示性与代数概形的自同构》，Invent. Math. 4 (1967), 1-25。[21] J. P. Serre，《关于单有理簇的基本群》，J. London Math. Soc. 34 (1959), 481-484。[22] D. M. Snow，《齐性向量丛》，https://www3.nd.edu/~snow/Papers/HomogVB.pdf。

SRM University-AP, Neerukonda, Guntur, Andhra Pradesh 522240, India
电子邮箱：arpita.n@srmap.edu.in

Tata Inst. of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Colaba Mumbai 400005, India
电子邮箱：param@math.tifr.res.in

Tata Inst. of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Colaba Mumbai 400005, India
电子邮箱：psaha@math.tifr.res.in