arXiv:2302.09962v1 [math.CA] 20 Feb 2023

利用鞍点法求 K-贝塞尔函数的一个渐近式

JIMMY TSENG

Abstract. 利用鞍点法，我们计算了当 $y \to \infty$时，K-贝塞尔函数 $K_{r+it}(y)$的一个渐近式，其中自变量 y 为正实数，阶 $r+it$为较大的复数，且 r 有界；对于固定参数 $0 \le \theta \le \pi/2$，有 $t = y\sin\theta$；或者对于固定参数 $\mu > 0$，有 $t = y$ 双曲余弦 μ。我们用初等工具给出这一已知结果的说明性证明，并阐释这些渐近式是如何得出的。

作为证明的一部分，我们证明了一个新结果，即在 $t = y$ 双曲余弦 μ的情况下，$K_{r+it}(y)$的一个新颖积分表示。这个积分表示仅涉及一个鞍点。

Contents

1. 引言 1 1.1. 结果陈述 2 1.2. 论文概要 3 2. K-贝塞尔函数与鞍点法背景 3 3. $K_{r+it}(y)$的界，其中 $|t|$ 较大， r 有界，且 y 为实数且为正 5 3.1. 第一种情况：$y \ge t \ge 0$ 5 3.2. 第二种情况：$0 < y < t$ 13 参考文献 24

1. Introduction

贝塞尔函数是某些二阶微分方程的解。贝塞尔函数有许多变体，并应用于物理学（及其他科学）、工程学、统计学以及数学本身（仅举数例，见 [3, 5, 7, 11, 15, 16, 20]）。 K-贝塞尔函数（定义见 (2.1)）便是其中一种变体，尤其在解析数论和遍历理论中有重要应用，特别是当它出现在非欧拉普拉斯算子的特征形式（如海克-马斯形式和艾森斯坦级数）的傅里叶展开中时（例如，见 [10, 第 3] 章和 [21] ）。理解 K-贝塞尔函数，尤其是其渐近式，将有助于科学和数学领域的研究，例如计算艾森斯坦级数 [19,定理 1.12] 中的界（另见 [17]）。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 41A60, 33C10。

Key words and phrases. 贝塞尔函数，渐近展开。作者获得了英国工程与自然科学研究委员会项目 EP/T005130/1 的资助。

本文证明了这些渐近式，它们最初由 [19, 定理 1.1 和 1.3]证明。原始证明使用了拉普拉斯方法，这是一种强有力的工具，却无法带来多少深入理解。我们的证明不同于 [19], 中所述的证明，它使用初等工具解释了这些渐近式是如何产生的。我们将找到 K-贝塞尔函数的一种合适的积分表示及相关鞍点，并证明积分主要由其在鞍点附近一个较小的（合适的）邻域上的部分决定，而在该邻域之外的部分可以忽略。此外，我们的证明还给出了K-贝塞尔函数的一种新颖积分表示。这一积分表示是一项新结果，也可能具有独立的研究价值。

1.1. 结果陈述。设 $\nu := r+it$。我们用说明性方法计算的 K-贝塞尔函数的渐近式，分别针对两种情形 $y \geq t \geq 0$ 和 $0 < y < t$ 在定理 1.1 和 1.2 中陈述，并且最早由 [19] （[19, 定理 1.1 和 1.3],）证明。当 $t < 0$时，见注 3.1。注意， $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。符号 $\sim$、 $o(\cdot)$ 和 $O(\cdot)$ 的定义见 [14, 第 1 章第 2] 节。

定理 1.1。设 $M \geq 0$ 和 $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 为固定实数。设 $|r| \leq M$、 $0 < y \in \mathbb{R}$ 和

$$t = y \sin\theta. \tag{1.1}$$

Then

$$K_\nu(y) \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2y\cos\theta}} e^{-y(\cos\theta + \theta\sin\theta)} e^{ir\theta} & \text{if } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ e^{-\frac{\pi}{2}y + i\frac{\pi}{2}r} y^{-1/3} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}}} & \text{if } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

当 $y \to \infty$时。

定理 1.2。设 $M \geq 0$ 和 $\mu > 0$ 为固定的实数。设 $|r| \leq M$、 $0 < y \in \mathbb{R}$，以及

$$t = y\cosh\mu. \tag{1.2}$$

Then

$$K_\nu(y) = \sqrt{\frac{2\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu + ir\frac{\pi}{2}} \Big[\cosh(r\mu) \sin\Big(\frac{\pi}{4} - y\left(\sinh\mu - \mu\cosh\mu\right)\Big) - i\sinh(r\mu)\cos\Big(\frac{\pi}{4} - y\left(\sinh\mu - \mu\cosh\mu\right)\Big)\Big] (1 + o(1))$$

如 $y \to \infty$。

关于定理 1.1 和定理 1.2 与文献中相关结果的比较，参见 [19,备注 1.2 和 1.4]。在 [19, 备注 1.4], 中注意到， $=$ 应替换 $\sim$，并且所显示表达式的右端应乘以 $(1+o(1))$。此外， [2, 19]还有一些相关的一致结果。关于一致性的定义及相关讨论，请参见 [19, 第 1 节和备注 1.7] 。

最后，作为证明定理 1.2 的一部分，我们将给出 $K_\nu(y)$ 的一种积分表示，其中只涉及一个鞍点，即鞍点 $R_0^+ := \mu + i\frac{\pi}{2}$（关于鞍点的定义及其他鞍点的取值，见第 3.2 节）。该积分表示中的积分取自积分路径 $w(u)$，此路径由 (3.15) 给出，并显示于图 1.1 中。这种积分表示见定理 1.3，是一项新结果。

定理 1.3. 设 $\mu > 0$ 是一个固定的实数，$0 < y \in \mathbb{R}$，且 $t = y$ 双曲余弦 μ。那么我们有以下积分表示：

$$
\begin{aligned}
K_\nu(y) =& \frac{1}{2}e^{i\chi}\int_{\mu_-}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(1 - i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u \\
&+\frac{1}{2}e^{i\chi}\frac{e^{-2\pi t+i2\pi r}}{1-e^{-2\pi t+i2\pi r}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right)\,\mathrm{d}w \\
&+\frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{\mu_-}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(1 + i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u \\
&-\frac{1}{2}e^{-i\chi}\frac{e^{-2\pi t+i2\pi r}}{1-e^{-2\pi t+i2\pi r}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right)\,\mathrm{d}w
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

其中 $\psi(u)$：$=$双曲余弦 u 余弦 $w + w$ 双曲余弦 μ，且 χ：
$= \sqrt{t^2 - y^2} - t$ 双曲余弦$^{-1}\left(\frac{t}{y}\right)$。

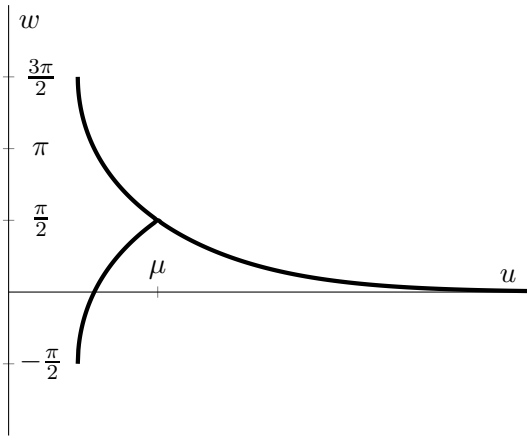

FIGURE 1.1. 定理 1.3 中定义积分所沿用的积分路径。该积分路径上唯一的鞍点是 $R_0^+ = \mu + i\frac{\pi}{2}$。注意，积分路径的两个有限端点分别为 $\mu_- - i\frac{\pi}{2}$ 和 $\mu_- + i\frac{3\pi}{2}$。

1.2. 文章概述。第 2 节致力于定义 K-贝塞尔函数，并简要概述鞍点法。第3.1节致力于证明定理 1.1，第 3.2 节致力于证明定理 1.2 和 1.3。

2. Background on the K-Bessel function and the saddle point method

The K-贝塞尔函数是以下微分方程（称为修正贝塞尔方程）的解

$$
\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0
$$

并可定义为 [12, 第 168] 页（或参见 [13, 第 10.25 节和 10.27]）

$$K_\nu(z) := \frac{1}{2}\pi\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} \tag{2.1}$$

其中 $I_\nu(z)$ 是第一类修正贝塞尔函数

$$I_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{\nu+2m}}{m!\Gamma(\nu+m+1)}.$$

（这里的 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数。） [14]中的第 2 章和第 7 章对 K-贝塞尔函数作了很好的介绍，而关于贝塞尔函数（包括 K-贝塞尔函数）的标准参考文献是 [20]。

对我们以及许多其他应用而言， K-贝塞尔函数的积分表示尤为重要。本文将推导一种新的积分表示，但我们先从一个众所周知的积分表示开始（例如参见 [20, 第 182 页（7）] 或 [13, 公式 10.32.9] ）：

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\cosh R - \nu R}\ \mathrm{d}R = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\cosh R + \nu R}\ \mathrm{d}R \tag{2.2}$$

其中 $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 满足 $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$。

为了计算 K-贝塞尔函数的渐近式，将鞍点法应用于（2.2）是很有启发性的。关于鞍点法的初步介绍见 [6, 第 8]章（另见 [6, 第 7]章）。现在我们对鞍点法的工作原理作一个粗略说明，并将其应用于 K-贝塞尔函数的详细证明留到第 3 节。设 $y \in \mathbb{R}$ 且 $w \in \mathbb{C}$。粗略地说，对于形如以下形式的积分，鞍点法能够帮助我们在 $y \to \infty$时求出其渐近式

$$\int_\gamma e^{-yp(w)}q(w)\ \mathrm{d}w$$

其中 γ 是一条积分路径，函数 $p(w)$和 $q(w)$均为解析函数。由于被积函数是解析的，根据柯西-古萨定理，我们可以相当自由地将 γ变形为更合适的积分路径。最速下降路径是一种合适的积分路径（但并非唯一选择），其特征如下：

- 经过 $p'(w)$的一个零点（即鞍点），
- 上 $\mathrm{Im}(p(w))$ 为常数，且
- 上鞍点是 $\mathrm{Re}(-p(w))$ 的局部最大值。

渐近分析只需要考虑沿最速下降路径上 $\mathrm{Re}(-p(w))$ 的全局极大值鞍点（称为最高高度鞍点）。这类鞍点通常只有少数几个。对于 K-贝塞尔函数，根据具体情况，这类鞍点有一个或两个（如果有两个，我们将利用对称性把问题化为一个）。最高高度鞍点是最速下降路径上的点；当 y 很大时，被积函数在这些点处达到最大值。此外，当 y 很大时，积分应由其在最高高度鞍点周围适当小邻域上的限制所主导。因此，鞍点法清晰明了且具有解释性：它包括找出这些邻域，并验证当 y 很大时，积分确实由该限制所主导。最后需要指出的是，并非只能使用最速下降路径，但对于哪些积分路径适合该方法仍存在限制。

3. Bounds for $K_{r+it}(y)$ where $|t|$ large, r bounded, and y is real and positive

现在，我们将应用鞍点法来求 $K_\nu(y)$ 在 $y \to \infty$ 时的一个渐近式。函数 $K_{it}(y)$（即纯虚阶数）的鞍点和最速下降路径已由 N. M. Temme [18] 求得。我们的函数 $K_\nu(y)$ 的鞍点和最速下降路径与之相同，具体证明如下。

我们将从积分表示 (2.2) 开始。存在两种情况： $y \geq t \geq 0$ 和$0 < y \leq t$。

Remark 3.1. 注意，如果 $t < 0$，那么应用 (2.2) 后，我们会得到以下两种情况之一 .

3.1. 第一种情况： $y \geq t \geq 0$。本节将证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明。 $\theta = 0$ （等价地， $t = 0$）和 $\theta = \pi/2$ （或者等价地，$t = y$）这两种情况比较特殊，我们将留到最后讨论。假设 $0 < \theta < \pi/2$。利用 (2.2)，可得

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\varphi(R)} e^{rR}\ \mathrm{d}R \tag{3.1}$$

其中

$$\varphi(R) := \cosh R - iR\sin\theta.$$

鞍点（满足 $\varphi'(R) = 0$ 的 R 值）如下 [18] （另见 [4, 第 2.1] 节）：

$$R_k := i\left((-1)^k\theta + k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

现在令 $R = u + iw$，于是可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(-\varphi(R)) &= -\cosh u\cos w - w\sin\theta\\ \mathrm{Im}(-\varphi(R)) &= -\sinh u\sin w + u\sin\theta\end{aligned}$$

经过鞍点 $R_0 = i\theta$ 的最速下降路径由 $\mathrm{Im}(-\varphi(R)) = \mathrm{Im}(-\varphi(R_0))$ 给出，是如下曲线 [18] （见图3.1）：

$$w = \arcsin\left(\sin\theta\frac{u}{\sinh u}\right), \quad -\infty < u < \infty. \tag{3.2}$$

我们注意到 $w'(0) = 0$，并且 $w'(u)$ 对所有 $-\infty < u < \infty$ 都有界。

利用柯西-古萨定理，我们可以将式（2.2）中沿实轴的积分替换为沿经过鞍点 R_0 的最速下降路径的积分。由此得到如下积分表示：

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y(\cosh u\cos w + w\sin\theta)} e^{ru} e^{irw}\left(1 + i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\ \mathrm{d}u \tag{3.3}$$

只要 $y > t > 0$ 成立。（我们将在下文证明，这个关于 $K_\nu(y)$ 的积分表示对特殊情形 $t = 0$ 和 $t = y$ 也成立。）

考虑沿由 $|u| < \min(\frac{\cot\theta}{2}, \sqrt[4]{\cot_{16}\theta}, \frac{\theta}{4})$ 确定的最速下降路径上、 R_0 鞍点的邻域。（注意，当 $0 < \theta < \pi/2$ 时， $0 < \cot\theta < \infty$。）利用 $\sinh(x)$ $1/(1+x)$ 的泰勒级数和几何级数，我们得到

$$\frac{u}{\sinh u} = 1 - \kappa u^2 + O(u^4) \tag{3.4}$$

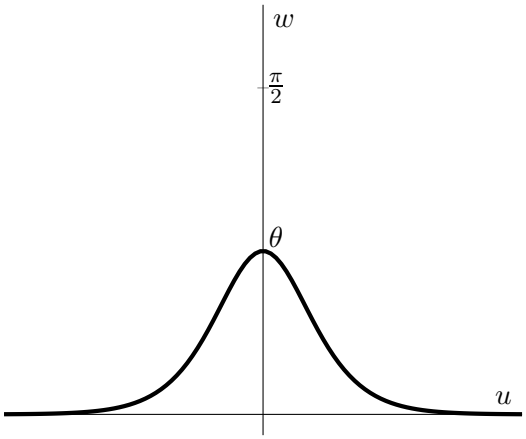

FIGURE 3.1. 第一种情形下的最速下降路径 $y \geq t \geq 0$ when$\theta = \frac{\pi}{4}$。该路径的方程由 (3.2) 给出。

对于小邻域中的 u。这里 $\kappa := \frac{1}{6}$，且隐含常数小于 $1/2$。（关于隐含常数这一概念的定义，请参见 [14, 第 1 章，第 2 节。2]）因此，

$$\cos^2 w = 1 - \sin^2\theta\left(\frac{u}{\sinh u}\right)^2 = \cos^2\theta + 2\kappa u^2\sin^2\theta + O(u^4) \tag{3.5}$$

对于我们的小邻域。这里隐含常数小于 $10\ 9\ \sin^2\theta$。利用 $\sqrt{1+x}$ 的泰勒级数，我们得到

$$\cos w = \cos\theta + \kappa u^2\sin\theta\tan\theta + O(u^3) \tag{3.6}$$

对于我们小邻域中的 u。这里隐含常数小于 $1/2$。注意，由于 $0 < w \leq \theta$，$\cos w \geq 0$。

根据中值定理，存在 $\widetilde{w} \in (w, \theta)$，使得

$$\theta - w = \frac{\sin\theta - \sin w}{\cos\widetilde{w}},$$

由此得到

$$w = \theta - \frac{\kappa\sin\theta}{\cos\widetilde{w}}u^2 + O(u^4) \tag{3.7}$$

对于我们的小邻域。注意，$\cos\theta \leq \cos\ \widetilde{w} < 1$。这里的隐含常数小于$\sin\frac{\theta}{2}\cos\ \widetilde{w} \leq \frac{1}{2}\tan\ \theta$。

取 $1/3 < \delta < 1/2$ 并令

$$y_0^{-\delta} = \begin{cases} \min(\frac{\cot\theta}{2}, \frac{\cot^4\theta}{16}, \frac{1}{2|r|}, \frac{\theta}{4}) & \text{if } |r| > 1 \\ \min(\frac{\cot\theta}{2}, \frac{\cot^4\theta}{16}, \frac{\theta}{4}) & \text{if } |r| \leq 1 \end{cases}.$$

现在，我们沿着由 $|u| < y^{-\delta}$ 确定的最速下降路径，在鞍点 R_0 的一个小邻域内估计 (3.3) 中的积分，其中 $y \geq y_0$。由于我们关注的是

$K_\nu(y)$ 在 $y \to \infty$ 时的行为，因此可以假设 y 很大。利用前面的估计以及 $\cosh(x)$ 的泰勒级数，我们得到

$$\begin{aligned} e^{-y(\cosh u\cos w+w\sin\theta)} &= e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}e^{-yAu^2}e^{-yBu^3} \\ &= e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}e^{-yAu^2}(1+O(y^{1-3\delta})) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} e^{ru} = 1+O(y^{-\delta}), \quad e^{irw-ir\theta} = 1+O(y^{-2\delta}), \\ \left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right) = 1-2i\frac{\kappa\sin\theta}{\cos\widetilde{w}}u+O(u^3) = 1+O(y^{-\delta}) \end{aligned}$$

在我们的小邻域内。这里 $A = \frac{1}{2}\cos\theta+\kappa\sin\theta\tan\theta-\kappa\frac{\sin^2\theta}{\cos\widetilde{w}} > 0$ 以及 $|B| < 11/12$。注意，由于我们处于 0 附近的一个小邻域内，近似式 $e^x = 1+O(x)$ 成立。因此，我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y(\cosh u\cos w+w\sin\theta)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u \\ &\qquad = \frac{1}{2}e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}e^{ir\theta}\left(1+O(y^{1-3\delta})\right)\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-yAu^2}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

（注意，对于我们对 δ 的选择，$3\delta-1<\delta$。）

令 $A_0 = \frac{1}{2}\cos\theta$。现在注意，$A$ 是 y 的函数，其中

$$\lim_{y\to\infty} A = A_0 \text{ and } 0 < A \le A_0.$$

取一个 $\varepsilon > 0$，并令 $\widetilde{A} := \frac{A_0}{1+\varepsilon}$。按照 Copson [6, 第 8 章（36.6）及后续内容中的方法，], 即作变量替换 $u^2 \mapsto y\widetilde{A}u^2$ 并进行估计，我们得到

$$\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\widetilde{A}u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{y\widetilde{A}}}\left(1+o(y^{1-3\delta})\right).$$

同理，我们有

$$\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-yA_0u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{yA_0}}\left(1+o(y^{1-3\delta})\right).$$

（请注意，此处 $\delta < 1/2$ 很重要。）

Th对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $y_1 > 0$，使得只要 $y \ge y_1$，我们就有 t

$$1 \le \frac{\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-yAu^2}\,\mathrm{d}u}{\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-yA_0u^2}\,\mathrm{d}u} \le \frac{\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\widetilde{A}u^2}\,\mathrm{d}u}{\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-yA_0u^2}\,\mathrm{d}u} = \sqrt{1+\varepsilon}.$$

令 $y \to \infty$ 趋于极限，并注意到 ε 是任意的，我们得到

$$\frac{1}{2}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y(\cosh u\cos w+w\sin\theta)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y\cos\theta}}e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}e^{ir\theta} \tag{3.8}$$

当 $y \to \infty$ 时。（与 [6, (36.7)] 比较。）注意，在纯虚阶数的特殊情形下，这与 [9, 第 87 页（18）] 和 [4,(14)] 相符。

现在考虑积分的其余部分，下面将证明它可以忽略不计。我们首先沿着积分路径 $\ell^+ := \{u + iw(y^{-\delta}) : \ u \geq y^{-\delta}\}$ 进行积分，然后使用柯西-古萨定理。具体细节如下。令

$$y \geq \max\left(y_0, \left(\frac{4|r|}{\cos\theta}\right)^{\frac{1}{1-\delta}}\right). \tag{3.9}$$

沿此积分路径的积分为

$$C := \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\varphi\left(u+iw(y^{-\delta})\right)} e^{r\left(u+iw(y^{-\delta})\right)} \ \mathrm{d}u$$

注意，被积函数来自（3.1）。现在有

$$\begin{aligned}
|C| \leq & \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left(\cosh u\cos w(y^{-\delta}) + w(y^{-\delta})\sin\theta\right)} e^{|r|u} \ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left((1+\frac{u^2}{2})\cos w(y^{-\delta}) + w(y^{-\delta})\sin\theta\right)} e^{|r|u} \ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left(\frac{u^2}{2}\cos w(y^{-\delta}) + \left(\cos\theta + \kappa y^{-2\delta}\sin\theta\tan\theta + O(y^{-3\delta})\right) + \left(\theta - \frac{\kappa\sin\theta}{\cos\widetilde{w}} y^{-2\delta} + O(y^{-4\delta})\right)\sin\theta\right)} e^{|r|u} \ \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

这里使用了双曲余弦 $u \geq 1 + u^2/2$ 这一事实，并应用了（3.6、3.7）。由于 $\kappa\sin\theta\tan\theta - \kappa\sin^2\theta/\cos\widetilde{w} \geq 0$ 以及 $\cos w \geq \cos\theta$，我们有

$$\begin{aligned}
|C| \leq & \frac{e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left(\frac{u^2}{2}\cos\theta\right)} e^{|r|u}\left(1 + O(y^{(1-3\delta)}\right) \ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left(\frac{u^2}{4}\cos\theta\right)}\left(1 + O(y^{(1-3\delta)}\right) \ \mathrm{d}u \\
= & \frac{e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}}{\sqrt{y\cos\theta}}\int_{\frac{y^{1/2-\delta}\sqrt{\cos\theta}}{2}}^{\infty} e^{-u^2}\left(1 + O(y^{(1-3\delta)}\right) \ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{e^{-y(\cos\theta+\theta\sin\theta)}}{\sqrt{y\cos\theta}} \frac{e^{-\frac{y^{1-2\delta}}{4}\cos\theta}}{\frac{y^{1/2-\delta}\sqrt{\cos\theta}}{2} + \sqrt{\frac{y^{1-2\delta}}{4}\cos\theta + \frac{4}{\pi}}}\left(1 + O(y^{(1-3\delta)}\right)
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由（3.9）得出，等式来自变量替换 $yu^2\cos\theta/4 \mapsto u^2$，最后一个不等式则来自 $\mathrm{erfc}(x)$ 的标准界（例如参见 [1, 7.1.13] ）。这表明，当 y较大时， $|C|$ 与我们在（3.8）中计算出的主导行为相比可以忽略不计。

现在让我们沿积分路径 $\ell^-(U) := \{U + iW : \ 0 \leq W \leq w(y^{-\delta})\}$ 对某个$U \geq y^{-\delta}$进行积分：

$$D := \frac{1}{2}\int_0^{w(y^{-\delta})} e^{-y\varphi(U+iW))} e^{r(U+iW))} \ \mathrm{d}W.$$

当 U 足够大时，我们有

$$|D| \leq e^{-y\cosh U\cos\theta} e^{|rU|}\theta,$$

当 U 足够大时，与 (3.8) 相比，这可以忽略不计。令 $s^+(U) := \{v + iw(y^{-\delta}) : U \geq v \geq y^{-\delta}\}$，且 $s^-(U) := \{U + iW\colon\ w(W) \leq W \leq w(y^{-\delta})\}$。于是 $s^+(U) \subset \ell^+$，且$s^-(U) \subset \ell^-(U)$，而 $s^+(U) \cup s^-(U)$ 与最速下降路径的一段 $c(U)$ 相交。于是$s^+(U) \cup s^-(U) \cup c(U)$ 是一条简单闭合曲线，由柯西-古萨定理可知，沿 $c(U)$ 的积分与 (3.8) 相比可以忽略不计。令 $U \to \infty$，可知最速下降路径上满足 $u \geq y^{-\delta}$ 的那一段的积分与 (3.8) 相比也可以忽略不计。对于最速下降路径的剩余部分上的积分，我们注意到 $w(u)$、双曲余弦 u 都是偶函数，类似的证明也表明该积分与 (3.8) 相比可以忽略不计。这就证明了在 $0 < \theta < \pi/2$ 情形下所需的结论。

现在证明 $\theta = 0$ 的情形。证明是前一种情形的简化版。详情如下。该情形的积分表示为

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\cosh u} e^{ru}\ \mathrm{d}u \tag{3.10}$$

因为 $t = 0$。取 $1/3 < \delta < 1/2$ 并令 $y_0 := 2^{1/\delta}$。与前一种情形一样，积分的主导行为来自原点周围的一个小邻域，即 $|u| < y^{-\delta}$其中 $y \geq y_0$。在此邻域内，双曲余弦 $u = 1 + u^2/2 + O(u^4)$。我们先考虑这一部分的贡献:

$$\begin{aligned}
K_\nu(y) = \frac{1}{2}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\cosh u} e^{ru}\ \mathrm{d}u =& \frac{1}{2}e^{-y}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\frac{u^2}{2}}\left(1 + O(y^{1-4\delta})\right)\left(1 + O(y^{-\delta})\right)\ \mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{2}e^{-y}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\frac{u^2}{2}}\left(1 + O(y^{-1/3})\right)\ \mathrm{d}u \\
=& \sqrt{\frac{\pi}{2y}}e^{-y}\left(1 + O(y^{-1/3})\right).
\end{aligned}$$

最后一个等式与 $0 < \theta < \pi/2$ 的情形一样，通过变量替换 $u^2 \mapsto \frac{y}{2}u^2$并利用 $\mathrm{erfc}(x)$ 的标准界来估计 $\mathrm{erf}(x) = 1$ –得到。

在该邻域之外，积分可以忽略。令

$$y \geq \max\left(y_0, (4|r|)^{\frac{1}{1-\delta}}\right).$$

我们有

$$\left|\frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\cosh u} e^{ru}\ \mathrm{d}u\right| \leq \frac{1}{2}e^{-y}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-\frac{y}{4}u^2}\ \mathrm{d}u \leq \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}\frac{e^{-\frac{y^{1-2\delta}}{4}}}{\frac{y^{1/2-\delta}}{2} + \sqrt{\frac{y^{1-2\delta}}{4} + \frac{4}{\pi}}}.$$

对于从 $-\infty$ 到 $-y^{-\delta}$ 的其余积分，我们可以得到类似的界。这便得到了 $\theta = 0$ 情形下所需的结果。

现在我们证明 $\theta = \pi/2$ 的最后一种情形。这里 $t = y$。与前两种情形不同，此处的鞍点 R_k 不再是 1 阶，而是 2 阶（阶的定义见 [8, 第 40] 页）。[1] 仍然只需考虑鞍点 $R_0 = i\pi/2$。现在我们有

$$w = \arcsin\left(\frac{u}{\sinh u}\right), \quad -\infty < u < \infty.$$

[1]当 $\theta < \pi/2$ 时，鞍点对已在 $\theta = \pi/2$ 处合并。

我们剩下 注意， $w'(u)$ 是一个有界奇函数。它在 $u=$ 处有一个跳跃间断点 $0.$

取 $1/4<\delta<1/3$。考虑由 $|u|<1/4$确定的最速下降路径上鞍点 R_0 的邻域。我们有

$$\frac{u}{\sinh u}=1-\kappa u^2+\lambda u^4+O(u^6) \tag{3.11}$$

对于我们的小邻域内的 u。这里 $\kappa=\frac{1}{6}$, $\lambda:=\frac{7}{320}$，且隐含常数小于$1/2$。利用这一点以及$\sqrt{1+x}$的泰勒级数，我们得到

$$\cos w=\sqrt{2\kappa}|u|-\widetilde{\lambda}|u|^3+O(u^5)$$

其中 $\widetilde{\lambda}:=\frac{21}{200}$，且隐含常数小于 2。（注意， $\widetilde{\lambda}$ 的精确值并未参与主导行为的计算。）现在利用 arccos(x)的泰勒级数，我们有

$$w=\frac{\pi}{2}-\sqrt{2\kappa}|u|+\widetilde{\lambda}|u|^3-\frac{1}{6}\left(\sqrt{2\kappa}|u|\right)^3+O(u^5),$$

对 u 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}=\begin{cases}-\sqrt{2\kappa}+O(u^2) & \text{if } 0^+\le u<1/4\\ \sqrt{2\kappa}+O(u^2) & \text{if } -1/4<u\le 0^-\end{cases}.$$

利用双曲余弦(x)的泰勒级数，可得

$$\cosh u\cos w+w=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{9\sqrt{3}}|u|^3+O(u^5). \tag{3.12}$$

首先注意到

$$\begin{aligned}
&\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}|u|^3\right)}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\
=&\int_0^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}u^3\right)}\left(1-i\sqrt{2\kappa}+O(y^{-2\delta})\right)\,\mathrm{d}u+\int_{-y^{-\delta}}^{0} e^{y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}u^3\right)}\left(1+i\sqrt{2\kappa}+O(y^{-2\delta})\right)\,\mathrm{d}u\\
=&\int_0^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}u^3\right)}\left(1-i\sqrt{2\kappa}+O(y^{-2\delta})+1+i\sqrt{2\kappa}+O(y^{-2\delta})\right)\,\mathrm{d}u\\
=&(2+O(y^{-1/4}))\int_0^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}u^3\right)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

其中第三个等号由变量替换 $u\mapsto -u$ 得出。

因此，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y(\cosh u\cos w+w)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}|u|^3+O(u^5)\right)}e^{ru}e^{O(u)}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}|u|^3\right)}\left(1+O(y^{1-5\delta})\right)\left(1+O(y^{-\delta})\right)\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}\left(1+O\left(y^{-1/4}\right)\right)\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}|u|^3\right)}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}\left(2+O(y^{-1/4})\right)\int_{0}^{y^{-\delta}} e^{-y\left(\frac{4}{9\sqrt{3}}u^3\right)}\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}y^{-1/3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^{1/3}\left(2+O(y^{-1/4})\right)\int_{0}^{\left(4/9\sqrt{3}\right)^{1/3}y^{1/3-\delta}} e^{-u^3}\,\mathrm{d}u\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}y^{-1/3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^{1/3}\left(2+O(y^{-1/4})\right)\frac{\Gamma(\frac{1}{3})-\Gamma(\frac{1}{3},\frac{4}{9\sqrt{3}}y^{1-3\delta})}{3}\\
=&\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}y^{-1/3}\left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^{1/3}\left(2+O(y^{-1/4})\right)\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{3}+o(y^{-1/4})\right)
\end{aligned}$$

其中，在倒数第二个等式中，我们作了变量替换 $u\mapsto u^{1/3}$；在最后一个等式中，我们使用了不完全伽马函数 $\Gamma(a,x)$ 的标准估计（例如，参见 [1, 6.5.32]）。因此，我们有

$$\frac{1}{2}\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y(\cosh u\cos w+w)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\sim e^{-\frac{\pi}{2}y+i\frac{\pi}{2}r}y^{-1/3}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{2}{3}}3^{\frac{1}{6}}},$$

这与纯虚阶数这一特殊情形下的 [20, Pages 78, 247] and [4, (14)] 一致。

现在我们证明积分的其余部分可以忽略。与情形 $0<\theta<\pi/2$ 一样，我们将使用柯西-古萨定理以及 C 和 D 给出的积分路径。令

$$y>\max\left(4^{\frac{1}{\delta}},\left(8\sqrt{3}|r|\right)^{\frac{1}{1-2\delta}}\right). \tag{3.13}$$

我们有

$$\begin{aligned}
|C| \leq & \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left(\cosh u\cos w(y^{-\delta})+w(y^{-\delta})\right)}e^{|r|u}\ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left((1+\frac{u^2}{2})\cos w(y^{-\delta})+w(y^{-\delta})\right)}e^{|r|u}\ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\left(\frac{u^2}{2}\cos w(y^{-\delta})+\left(\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}-\widetilde{\lambda}y^{-3\delta}+O(y^{-5\delta})\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}+\widetilde{\lambda}y^{-3\delta}-\frac{1}{6}\left(\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}\right)^3+O(y^{-5\delta})\right)\right)}e^{|r|u}\ \mathrm{d}u \\
= & \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+\frac{\left(\sqrt{2\kappa}\right)^3}{6}y^{1-3\delta}}\left(1+O(y^{1-5\delta})\right)\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\frac{u^2}{2}\left(\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}-\widetilde{\lambda}y^{-3\delta}+O(y^{-5\delta})\right)}e^{|r|u}\ \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

注意，由于 $0<y^{-\delta}\leq\frac{1}{4}$，我们有 $\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}-\widetilde{\lambda}y^{-3\delta}+O(y^{-5\delta})\geq\frac{1}{2\sqrt{3}}y^{-\delta}$，因为隐含常数的范数小于 2。应用 (3.13)，可得

$$\begin{aligned}
|C| \leq & \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+\frac{\left(\sqrt{2\kappa}\right)^3}{6}y^{1-3\delta}}\left(1+O(y^{1-5\delta})\right)\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\frac{u^2}{4}\left(\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}-\widetilde{\lambda}y^{-3\delta}+O(y^{-5\delta})\right)}\ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}y+\frac{\left(\sqrt{2\kappa}\right)^3}{6}y^{1-3\delta}}\left(1+O(y^{1-5\delta})\right)\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y^{1-\delta}\frac{u^2}{8\sqrt{3}}}\ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{\sqrt{8\sqrt{3}}}{2y^{\frac{1-\delta}{2}}}e^{-\frac{\pi}{2}y+\frac{\left(\sqrt{2\kappa}\right)^3}{6}y^{1-3\delta}}\left(1+O(y^{1-5\delta})\right)\int_{(8\sqrt{3})^{-1/2}y^{\frac{1-3\delta}{2}}}^{\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u \\
\leq & \frac{\sqrt{8\sqrt{3}}}{2y^{\frac{1-\delta}{2}}}e^{-\frac{\pi}{2}y+\frac{\left(\sqrt{2\kappa}\right)^3}{6}y^{1-3\delta}}\left(1+O(y^{1-5\delta})\right)\frac{e^{-\frac{y^{1-3\delta}}{8\sqrt{3}}}}{\frac{y^{\frac{1-3\delta}{2}}}{\sqrt{8\sqrt{3}}}+\sqrt{\frac{y^{1-3\delta}}{8\sqrt{3}}+\frac{4}{\pi}}}.
\end{aligned}$$

由于 $\underline{\left(\sqrt{2\kappa}\right)_6}^{\ 3}-\frac{1}{8\sqrt{3}}=-\frac{5}{72\sqrt{3}}$ 且 $\frac{1-\delta}{2}>\frac{1}{3}$，我们有 $|C|$，与我们计算出的主导行为相比可以忽略不计。

对于 D，我们有以下估计：

$$\begin{aligned}
|D| \leq & \frac{1}{2}\int_{0}^{w(y^{-\delta})} e^{-y(\cosh U\cos W+W)}e^{|rU|}\ \mathrm{d}W \\
\leq & \frac{1}{2}w(y^{-\delta})e^{-y\cosh U\cos(w(y^{-\delta}))}e^{|rU|} \\
= & \frac{1}{2}w(y^{-\delta})e^{-y\cosh U\left(\sqrt{2\kappa}y^{-\delta}-\widetilde{\lambda}y^{-3\delta}+O(y^{-5\delta})\right)}e^{|rU|} \\
= & \frac{1}{2}w(y^{-\delta})e^{-\frac{y^{1-\delta}}{2\sqrt{3}}\cosh U}e^{|rU|},
\end{aligned}$$

当 U 足够大时，这与我们计算出的主导行为相比可以忽略不计。注意，$\cos W\geq\cos(w(y^{-\delta}))$。最速下降路径剩余部分上的积分，可用与 $0<\theta<\pi/2$ 情形类似的方法处理。

这就证明了所有情形下所需的结果。

□

3.2. 第二种情形： $0 < y < t$。本节证明定理 1.2，为此我们必须先证明定理 1.3。定义常数 $\mu > 0$ 为 $t = y$ 双曲余弦 μ，并定义函数

$$\psi(u) := \cosh u \cos w + w \cosh \mu.$$

我们首先求出鞍点和适当的积分表示。

利用（2.2），可得

$$K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y\phi(R)} e^{rR} \, \mathrm{d}R \tag{3.14}$$

其中

$$\phi(R) := \cosh R - iR \cosh \mu.$$

鞍点（满足 $= 0$的 R 值，其中 $\phi'(R)$）如下 [18] （另见 [4, 第 2.1] 节）：

$$R_k^{\pm} := \pm\mu + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

现在令 $R = u + iw$，于是有

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(-\phi(R)) &= -\cosh u \cos w - w \cosh \mu = -\psi(u), \\ \mathrm{Im}(-\phi(R)) &= -\sinh u \sin w + u \cosh \mu. \end{aligned}$$

经过鞍点 $R_k^{\pm}$ 的最陡下降/上升路径由 $\mathrm{Im}(-\phi(R)) = \mathrm{Im}(-\phi(R_k^{\pm}))$ 给出，是以下曲线族 [18]:

$$\sin w = \cosh \mu \frac{u}{\sinh u} \pm \frac{\sinh \mu - \mu \cosh \mu}{\sinh u}. \tag{3.15}$$

我们只使用这些曲线中如图 3.2 实线所示的部分，并将其称为最速下降路径。

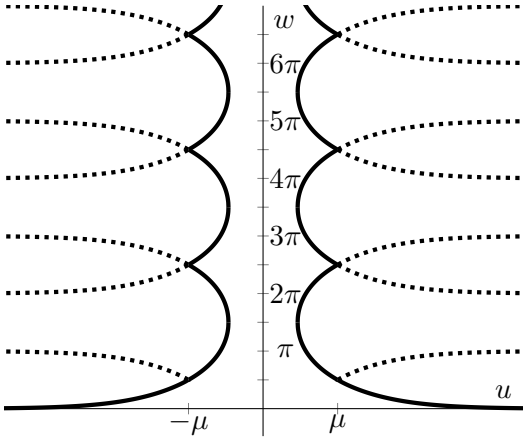

FIGURE 3.2. 第二种情形的最速下降路径 $0 < y \le t$ 用实线表示。该路径的方程由 (3.15) 得出。虚线表示由 (3.15) 得出的其他曲线，它们不属于最速下降路径。

请注意，这条路径由两个分支 $\mathcal{L}^- \cup \mathcal{L}^+$ 组成，中间由虚轴隔开，其中

$$\begin{aligned}&- \mathcal{L}^- \text{ runs from } -\infty \text{ to } 0 \text{ and from } 0 \text{ to } +i\infty,\\ &- \mathcal{L}^+ \text{ runs from } +i\infty \text{ to } 0 \text{ and from } 0 \text{ to } +\infty.\end{aligned}$$

这条路径的重要性质是，在两个分支上，函数 $y\phi(R)$ 的虚部均为常数，即

$$\begin{aligned}\chi := \operatorname{Im}(y\phi(R_0^+)) :=& y\left(\sinh\mu - \mu\cosh\mu\right)\\ =& y\sinh\mu - t\cosh^{-1}\left(\frac{t}{y}\right) = \sqrt{t^2-y^2} - t\cosh^{-1}\left(\frac{t}{y}\right),\\ \chi_- := \operatorname{Im}(y\phi(R_0^-)) =& -\chi\end{aligned}$$

分别对于 $\mathcal{L}^+$ 和 $\mathcal{L}^-$。

利用柯西-古萨定理，我们可以将式 (2.2) 中沿实轴的积分替换为沿最速下降路径的积分：

(3.16)

$$\begin{aligned}K_\nu(y) =& \frac{1}{2}e^{-i\chi_-}\left(\int_{-\infty}^{-\mu} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u + \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w\right)\\ &+\frac{1}{2}e^{-i\chi}\left(-\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w + \int_{\mu}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\right).\end{aligned}$$

我们首先证明可以得到以下积分表示：

命题 3.2。我们有

$$\begin{aligned}K_\nu(y) =& \frac{1}{2}e^{i\chi}\int_{\mu}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(1-i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\ &+\frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{\mu}^{\infty} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\ &+\frac{1}{2}e^{i\chi}\frac{1}{1-e^{-2\pi t+i2\pi r}}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w\\ &-\frac{1}{2}e^{-i\chi}\frac{1}{1-e^{-2\pi t+i2\pi r}}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中积分仅在 $\mathcal{L}^+$上进行。

Remark 3.3. 在纯虚阶数的特殊情形下，(3.17) 化简为 [18, (3.5)]，而 (3.17) 的证明与 [18] 中的证明类似。

证明。为开始证明 (3.17)，首先注意到

$$\begin{aligned}w(u) &= w(-u)\\ \psi(u) &= \psi(-u).\end{aligned}$$

此外， $u(w)$ 是双值的，每个分支对应一个值。为清楚起见，我们暂时用 $u^+(w)$表示 $\mathcal{L}^+$ 上的值，并用 $u^-(w)$表示 $\mathcal{L}^-$上的值，于是有

$$u^+(w) = -u^-(w) \qquad \frac{\mathrm{d}u^+}{\mathrm{d}w} = -\frac{\mathrm{d}u^-}{\mathrm{d}w}.$$

现在令我们在分支 $\mathcal{L}^-$ 上作变量代换 $u \mapsto -u$ ，使得所有积分都只在分支 $\mathcal{L}^+$ 上进行:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{-\mu} e^{-y\psi(u)} e^{ru} e^{irw} \left(1 + i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right) \,\mathrm{d}u &= \int_{\mu}^{\infty} e^{-y\psi(u)} e^{-ru} e^{irw} \left(1 - i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right) \,\mathrm{d}u \\
\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-y\psi(u)} e^{ru} e^{irw} \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right) \,\mathrm{d}w &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} e^{-y\psi(u)} e^{-ru} e^{irw} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right) \,\mathrm{d}w.
\end{aligned}$$

现在我们有两个关于 $\mathrm{d}w$ 的积分，并且二者都是在 $\mathcal{L}^+$ 的一段上积分。此外，这两个积分都可以化为有限区间上的积分。给定

$$P(w) := e^{-y\cosh u\cos w + ru}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right) \qquad Q(w) := e^{-y\cosh u\cos w - ru}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right),$$

我们有 $P(w) = P(w + 2\pi)$ 以及 $Q(w) = Q(w + 2\pi)$，因为在关于 $\mathrm{d}w$ 的积分的积分上下限内， $u(w) = u(w + 2\pi)$ 成立。因此，利用几何级数（其有效性是因为 $t > 0$），我们得到

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} P(w) e^{-tw+irw} \,\mathrm{d}w &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi t + i2\pi r}} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} P(w) e^{-tw+irw} \,\mathrm{d}w \\
\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\infty} Q(w) e^{-tw+irw} \,\mathrm{d}w &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi t + i2\pi r}} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} Q(w) e^{-tw+irw} \,\mathrm{d}w
\end{aligned}$$

综合以上结果即可得到（3.17），如所要求。

□

现在取 $\mathcal{L}^+$ 上从 $w = \frac{3}{2}\pi$ 到 $w = \frac{5}{2}\pi$ 的部分（包括端点），并沿纵轴向下平移 2π。将平移后的这部分记为 $\mathcal{L}^0$。注意， $\mathcal{L}^0$ 不与 $\mathcal{L}^-$ 相交，且仅在一点（即鞍点 R_0^+）与 $\mathcal{L}^+$ 相交。虽然 w（u）在 $\mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^0$ 上是多值的，但我们注意到， w（u）在 $\mathcal{L}^0$ 上以及在 $\mathcal{L}^+$ 中与 $0 \le w \le 3\pi/2$ 相对应的部分上是单值的。

令 $\mu_- := u(-\pi/2) = u(3\pi/2)$。为计算主导行为，我们需要对积分表示 (3.17) 做两处修改。第一，将积分路径从$\frac{3}{2}\pi$ 平移至 $\frac{5}{2}\pi$ ，平移量为 -2π （这部分积分将在 $\mathcal{L}^0$ 上进行）；第二，将一些关于 w 的积分转换为关于 u 的积分。现在，我们可以推导出证明第二种情形（即定理 1.3）所需的积分表示。定理 1.3 中的积分所沿的积分路径见图 1.1。

定理 1.3 的证明。作变量替换 $w \mapsto w - 2\pi$，可得

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w = e^{-2\pi t+i2\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w$$

$$\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w = e^{-2\pi t+i2\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w$$

现在注意到 $w(u)$ 在 $\mathcal{L}^0$ 以及 $\mathcal{L}^+$上都是双射，因此在这些区间上，我们可以将关于 w 的积分换为关于 u的积分。

根据微积分， μ_-是 $\mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^0$上 u的最小值。特别地，我们有 $0 < \mu_- < \mu$。因此，利用换元定理，我们有

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w = \int_{\mu_-}^{\mu} e^{-y\psi(u)}e^{-ru}e^{irw}\left(1-i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w}+i\right)\,\mathrm{d}w = -\int_{\mu_-}^{\mu} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u.$$

所需结果由此得出。

□

定理 1.2 的证明。定理 1.3 中的积分表示特别适用于鞍点法。在命题中的每个积分里，我们现在进行变量替换，令 $\rho := u - \mu$，并估计 $\rho = 0$附近的积分。

首先注意到我们有

$$\sin w = \sin(w(\rho+\mu)) = \frac{\rho\cosh\mu + \sinh\mu}{\sinh\rho\cosh\mu + \cosh\rho\sinh\mu}.$$

取足够小的 $\rho_0 > 0$，使得我们可以在等式 (3.18) 的第二个等号处应用几何级数。令 $|\rho| \le \rho_0$.。利用 $\sinh x$ 和 $\cosh\ x$ 的泰勒级数，我们得到

$$\begin{aligned}
\sin w =& \frac{\rho\cosh\mu + \sinh\mu}{\sinh\mu\left(1+\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\frac{\rho^3}{6}+O(\rho^4)\right)} \\
=& \left(\rho\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}+1\right)\left[1-\left(\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\frac{\rho^3}{6}+O(\rho^4)\right)\right. \\
&+\left(\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\frac{\rho^3}{6}+O(\rho^4)\right)^2 \\
&\left.-\left(\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\frac{\rho^3}{6}+O(\rho^4)\right)^3+O(\rho^4)\right] \\
=& 1-\frac{1}{2}\rho^2+\left(-\frac{\cosh^2\mu}{6\sinh^2\mu}+\frac{\cosh\mu}{2\sinh\mu}\right)\rho^3+O(\rho^4).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

注意，$\sinh\mu \neq 0$，因为 $\mu > 0$。

现在选择足够小的 $\rho_1 > 0$，以便我们可以在（3.19）的第三个等式中对函数 $\sqrt{1+x}$应用泰勒级数。进一步限制 ρ，要求 $|\rho| \le \min(\rho_0, \rho_1)$

成立。我们有

$$\begin{aligned}\cos w = \cos(w(\rho+\mu)) &= \pm\sqrt{1-\sin^2 w} \\ &= \pm|\rho|\sqrt{1+\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho+O(\rho^2)} \\ &= \pm\left(|\rho|+\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)|\rho|\rho+O(\rho^3)\right).\end{aligned} \tag{3.19}$$

现在取 $\rho_2>0$ 足够小，使得

$$\left(|\rho|+\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)|\rho|\rho+O(\rho^3)\right)\geq 0. \tag{3.20}$$

这里的隐含常数与 (3.19) 中的隐含常数相同。再次限制 ρ，要求满足 $|\rho|\leq \min(\rho_0,\rho_1,\rho_2)$。

为清楚起见，定义如下:

$$\begin{aligned}w^0(u) :=& w(u) \text{ on } \mathcal{L}^0 \\ w^+(u) :=& w(u) \text{ on } \mathcal{L}^+ \text{ for } 0\leq w(u)\leq 3\pi/2\end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned}\psi^0(u) &:= \cosh u\cos w^0 + w^0\cosh\mu \\ \psi^+(u) &:= \cosh u\cos w^+ + w^+\cosh\mu\end{aligned}$$

分别记 $\psi(u)$ 在 $\mathcal{L}^0$ 上和在 $\mathcal{L}^+$ 上对应于 $0\leq w\leq 3\pi/2$。注意，当 $\mathcal{L}^+$ 时，对于足够小的 $\delta>0$, 我们有

$$\begin{cases}\cos\left(w^+(\delta+\mu)\right)<0 \text{ if } \delta<0 \\ \cos\left(w^+(\delta+\mu)\right)>0 \text{ if } \delta>0\end{cases},$$

因此，我们有

$$\cos w^+ = \cos(w^+(\rho+\mu)) = \rho+\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2+O(\rho^3).$$

On $\mathcal{L}^0$，对于足够小的 $\delta>0$，若 $\delta<0$，则有 $\cos\left(w^0\right)>0$，因此我们有

$$\cos w^0 = \cos(w^0(\rho+\mu)) = -\rho-\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2-O(\rho^3).$$

注意，$\cos\ w^+$ 和 $\cos w^0$ 表达式中的隐含常数相同。注意，$\rho\leq 0$ 在 $\mathcal{L}^0$ 上。

现在选取足够小的 $\rho_3>0$，以便我们可以在 $\cos w^+$ 和 $\cos\ w^0$ 的表达式中对函数 $\arccos(x)$ 应用泰勒级数。再次限制 ρ，要求满足

$|\rho| \leq \min(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ 成立。我们有

$$w^+ = w^+(\rho+\mu) = \frac{\pi}{2} - \rho - \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2 + O(\rho^3) \tag{3.21}$$

$$w^0 = w^0(\rho+\mu) = \frac{\pi}{2} + \rho + \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2 + O(\rho^3).$$

因此，利用上述结果以及双曲余弦(x)和双曲正弦(x)的泰勒级数，可得

$$\begin{aligned}\psi^+(\rho+\mu) =& \cosh\rho\cosh\mu\cos w^+ + \sinh\rho\sinh\mu\cos w^+ + w^+\cosh\mu\\ =& \cosh\mu\left(\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2\right) + (\sinh\mu)p^2\\ &+ \cosh\mu\left(\frac{\pi}{2} - \rho - \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2\right) + O(\rho^3)\\ =& \frac{\pi}{2}\cosh\mu + (\sinh\mu)p^2 + O(\rho^3)\end{aligned}$$

类似地，

$$\psi^0(\rho+\mu) = \frac{\pi}{2}\cosh\mu - (\sinh\mu)p^2 + O(\rho^3). \tag{3.22}$$

另外，取 $\rho_4 > 0$ 足够小，使得

$$\left|-\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)\rho^2 + O(\rho^3)\right| \leq \frac{|\rho|}{2}. \tag{3.23}$$

最后，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right) &= -1 + O(\rho)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^0(\rho+\mu)\right) &= 1 + O(\rho).\end{aligned}$$

现在考虑 (1.3) 中的积分。应用变量替换 $\rho = u - \mu$，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mu_-}^{\infty} e^{-y\psi^+(u)}e^{-ru}e^{irw^+}\left(1 - i\frac{\mathrm{d}w^+}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\ &\quad= \int_{\mu_- - \mu}^{\infty} e^{-y\psi^+(\rho+\mu)}e^{-r(\rho+\mu)}e^{irw^+(\rho+\mu)}\left(1 - i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right)\right)\,\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_{\mu_-}^{\infty} e^{-y\psi^+(u)}e^{ru}e^{irw^+}\left(1 + i\frac{\mathrm{d}w^+}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\ &\quad= \int_{\mu_- - \mu}^{\infty} e^{-y\psi^+(\rho+\mu)}e^{r(\rho+\mu)}e^{irw^+(\rho+\mu)}\left(1 + i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right)\right)\,\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

取 $1/3 < \ \delta < 1/2$ 并令 $y_0^{-\delta} = \min(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \mu - \mu_-, 1/2)$。选取 $y_1 > 0$，使得

$$\frac{\left(y^{1-\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right) y^{1-2\delta} + O(y^{1-3\delta})\right)\sinh\mu}{2} - |r| \geq 0 \tag{3.24}$$

$$\left|\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right) y^{1-2\delta} + O(y^{1-3\delta})\right| \leq \frac{y^{1-\delta}}{2}$$

对所有 $y \geq y_1$ 均成立。这里，隐含常数与上文 $\cos w^+$ 中的相同。现在，我们估计鞍点 R_0^+ 在由 $|\rho| < y^{-\delta}$ 确定的 $\mathcal{L}^+$ 上的小邻域内的积分，其中 $y \geq \max(y_0, y_1)$. 利用上述估计，我们以类似于第3.1节的方式化简，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\psi^+(\rho+\mu)} e^{-r(\rho+\mu)} e^{irw^+(\rho+\mu)} \left(1 - i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right)\right) \mathrm{d}\rho \\
&\quad = e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - r\mu + ir\frac{\pi}{2}} \left[1 + i + O\left(\max(y^{-\delta}, y^{1-3\delta})\right)\right] \int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y(\sinh\mu)\rho^2} \mathrm{d}\rho \\
&\quad = \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - r\mu + ir\frac{\pi}{2}} \left[1 + i + O\left(\max(y^{-\delta}, y^{1-3\delta})\right)\right]
\end{aligned}$$

其中，在最后一个等式中，我们作变量代换 $\rho^2 \mapsto y(\text{双曲正弦}\,\mu)\rho^2$，并对互补误差函数 $\operatorname{erfc}(x)$ 应用了标准界。

同理，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{-y^{-\delta}}^{y^{-\delta}} e^{-y\psi^+(\rho+\mu)} e^{r(\rho+\mu)} e^{irw^+(\rho+\mu)} \left(1 + i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right)\right) \mathrm{d}\rho \\
&\quad = \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu + r\mu + ir\frac{\pi}{2}} \left[1 - i + O\left(\max(y^{-\delta}, y^{1-3\delta})\right)\right].
\end{aligned}$$

现在我们来计算主导项，即如下表达式：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} e^{i\chi} \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - r\mu + ir\frac{\pi}{2}} (1+i) + \frac{1}{2} e^{-i\chi} \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu + r\mu + ir\frac{\pi}{2}} (1-i) \\
&\quad = \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu + ir\frac{\pi}{2}} \left(\cosh(i\chi - r\mu) + i\sinh(i\chi - r\mu)\right) \\
&\quad = \sqrt{\frac{\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu + ir\frac{\pi}{2}} \left[\cosh(r\mu)\left(\cos\chi - \sin\chi\right) - i\sinh(r\mu)\left(\cos\chi + \sin\chi\right)\right] \\
&\quad = \sqrt{\frac{2\pi}{y\sinh\mu}} e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu + ir\frac{\pi}{2}} \left[\cosh(r\mu)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) - i\sinh(r\mu)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right)\right].
\end{aligned} \tag{3.25}$$

这里，最后一个等式是由一个简单的观察得出的

$$\begin{aligned}
\cos(\chi) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \chi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) \\
\sin(\chi) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \chi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right).
\end{aligned}$$

为了证明（3.25）是主导项，我们现在说明其余部分可以忽略不计。与第3.1节一样，我们将选取一条更合适的积分路径，并使用柯西-古萨定理。考虑这个积分

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{\mu_-}^{\mu-y^{-\delta}} e^{-y\psi^+(u)}e^{ru}e^{irw^+}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w^+}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{\mu_--\mu}^{-y^{-\delta}} e^{-y\psi^+(\rho+\mu)}e^{r(\rho+\mu)}e^{irw^+(\rho+\mu)}\left(1+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right)\right)\,\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

并将积分所沿的那段最速下降路径替换为积分路径$\ell_1\cup\ell_2$，其中

$$\begin{aligned} \ell_1 &:= \left\{\left(\mu-y^{-\delta}-u, w^+(\mu-y^{-\delta})\right) : 0\le u\le \mu-y^{-\delta}-\mu_-\right\} \\ \ell_2 &:= \left\{\left(\mu_-, w^+(\mu-y^{-\delta})+\theta\right) : 0\le\theta\le 3\pi/2-w^+(\mu-y^{-\delta})\right\}. \end{aligned}$$

在 ℓ_1 上的积分为

$$A_1 := \frac{1}{2}\int_{\mu-y^{-\delta}}^{\mu_-} e^{-y\left[\cosh\left(u+iw^+(\mu-y^{-\delta})\right)-i\left(u+iw^+(\mu-y^{-\delta})\right)\cosh\mu\right]}e^{r\left(u+iw^+(\mu-y^{-\delta})\right)}\,\mathrm{d}u,$$

其中被积函数由式 (3.14) 得出。作变量替换 $\rho=u-\mu$，得到

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{e^{-yw^+(\mu-y^{-\delta})\cosh\mu+r\mu+irw^+(\mu-y^{-\delta})}}{2}\int_{-y^{-\delta}}^{\mu_--\mu} & e^{-y\left[\cosh(\rho+\mu)\cos\left(w^+(\mu-y^{-\delta})\right)\right]} \\ & \times e^{-y\left[i\sinh(\rho+\mu)\sin\left(w^+(\mu-y^{-\delta})\right)-i(\rho+\mu)\cosh\mu\right]}e^{r\rho}\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

因此，当 $-y^{-\delta}\ge\mu_--\mu$时，我们有

$$\begin{aligned} |A_1| &\le \frac{e^{-yw^+(\mu-y^{-\delta})\cosh\mu+r\mu}}{2}\int_{\mu_--\mu}^{-y^{-\delta}} e^{-y\left(\cosh(\rho+\mu)\cos\left(w^+(\mu-y^{-\delta})\right)\right)}e^{r\rho}\,\mathrm{d}\rho \\ &\le \frac{e^{r\mu-y\left[\cosh(\mu-y^{-\delta})\cos\left(w^+(\mu-y^{-\delta})\right)+w^+(\mu-y^{-\delta})\cosh\mu\right]}}{2}\int_{\mu_--\mu}^{-y^{-\delta}} e^{r\rho}\,\mathrm{d}\rho \\ &\le \frac{e^{r\mu-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu-y\left(y^{-\delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)y^{-2\delta}+O(y^{-3\delta})\right)\left(\cosh\mu-\cosh(\mu-y^{-\delta})\right)}}{2}\int_{\mu_--\mu}^{-y^{-\delta}} e^{r\rho}\,\mathrm{d}\rho. \end{aligned}$$

这里，第二个不等式成立是因为 $\cos\left(w^+(\mu-y^{-\delta})\right)<0$，第三个不等式则来自我们上面计算出的近似值以及式 (3.20) 成立这一事实。

根据中值定理，存在 $\mu-y^{-\delta}<\widetilde{\mu}<\mu$ 使得双曲余弦$(\mu-y^{-\delta})$ =双曲余弦 $\mu-y^{-\delta}$ 双曲正弦 $\widetilde{\mu}$。由于 $0<\mu_-\le\mu-y^{-\delta}$ 成立，我们有双曲正弦 $\widetilde{\mu}>0$。因此，

我们得到以下上界：

$$\begin{aligned}|A_1| \leq & \frac{e^{r\mu - y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - \left(y^{1-2\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu} - \frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)y^{1-3\delta} + O(y^{1-4\delta})\right)\sinh\widetilde{\mu}}}{2} \int_{\mu_- - \mu}^{-y^{-\delta}} e^{r\rho}\ \mathrm{d}\rho \\ \leq & \begin{cases} \frac{1}{2}e^{r\mu - y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - y^{1-2\delta}\sinh\widetilde{\mu}}(1 + O(y^{1-3\delta}))O(1 + y^{-\delta}) & \text{if } r \neq 0 \\ \frac{1}{2}e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - y^{1-2\delta}\sinh\widetilde{\mu}}(1 + O(y^{1-3\delta})) & \text{if } r = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

当 $1 - 2\delta > 0$ 时，这表明 A_1 相较于主导项可以忽略，正如所需。对 ℓ_2 的积分为

$$A_2 := \frac{i}{2}\int_{w^+(\mu - y^{-\delta})}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y[\cosh(\mu_- + i\theta) - i(\mu_- + i\theta)\cosh\mu]}e^{r(\mu_- + i\theta)}\ \mathrm{d}\theta.$$

利用 (3.21, 3.23)，可得

$$\begin{aligned}|A_2| \leq & \frac{1}{2}e^{r(\mu_-)}\int_{\frac{\pi}{2} + \frac{y^{-\delta}}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y(\cosh(\mu_-)\cos\theta + \theta\cosh\mu)}\ \mathrm{d}\theta \\ \leq & \frac{1}{2}e^{r(\mu_-)}\int_{\frac{\pi}{2} + \frac{y^{-\delta}}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\left(\cosh(\mu_-)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \theta\cosh\mu\right)}\ \mathrm{d}\theta \\ = & \frac{1}{2}e^{r(\mu_-) - y\cosh(\mu_-)\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{2} + \frac{y^{-\delta}}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\theta(\cosh\mu - \cosh(\mu_-))}\ \mathrm{d}\theta \\ = & \frac{e^{r(\mu_-) - y\frac{\pi}{2}\cosh\mu - \frac{y^{1-\delta}}{2}(\cosh\mu - \cosh(\mu_-))}}{2y\left(\cosh\mu - \cosh(\mu_-)\right)}\left(1 - e^{\left(-y\pi + \frac{y^{1-\delta}}{2}\right)(\cosh\mu - \cosh(\mu_-))}\right),\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由以下事实推出：对所有 $\theta \geq \pi/2$，$\pi/2 - \theta \leq \cos\theta$。这表明 A_2，因此 A 相较于主导项可以忽略，正如所需。

考虑积分

$$B := \frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\psi(u)}e^{ru}e^{irw}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}w} + i\right)\ \mathrm{d}w$$

并用积分路径替换最速下降路径的一段

$$\ell_3 := \left\{(\mu_-, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi\right\}$$

以得到

$$B = \frac{i}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y[\cosh(\mu_- + i\theta) - i(\mu_- + i\theta)\cosh\mu]}e^{r(\mu_- + i\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

其中被积函数来自（3.14）。因此，我们有

$$|B| \leq \frac{1}{2}e^{r(\mu_-) + y\cosh(\mu_-)}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y\theta\cosh\mu}\ \mathrm{d}\theta = \frac{e^{r(\mu_-) + y\cosh(\mu_-)}}{2y\cosh\mu}\left(e^{y\frac{\pi}{2}\cosh\mu} - e^{-y\frac{3\pi}{2}\cosh\mu}\right)$$

并且

$$\left|\frac{e^{-2\pi t+i2\pi r}}{1-e^{-2\pi t+i2\pi r}}B\right| \le \frac{e^{r(\mu_-)+y\cosh(\mu_-)}}{y\cosh\mu}\left(e^{-y\frac{3\pi}{2}\cosh\mu}-e^{-y\frac{7\pi}{2}\cosh\mu}\right)$$

与主导项相比可以忽略不计，正如所需。

令 $U_0=\mu+1/2$。现在我们来考虑积分

$$\begin{aligned}C :=& \frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{\mu+y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\psi^+(u)}e^{ru}e^{irw^+}\left(1+i\frac{\mathrm{d}w^+}{\mathrm{d}u}\right)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}e^{-i\chi}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\psi^+(\rho+\mu)}e^{r(\rho+\mu)}e^{irw^+(\rho+\mu)}\left(1+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(w^+(\rho+\mu)\right)\right)\,\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

并用以下积分路径族替换积分所沿的最速下降路径段

$$\begin{aligned}\ell_4 :=& \ell_4(U) :=\{(u,w^+(\mu+y^{-\delta})) : \mu+y^{-\delta}\le u\le U\}\\ \ell_5 :=& \ell_5(U) :=\{(U,w^+(\mu+y^{-\delta})-\theta) : 0\le\theta\le w^+(\mu+y^{-\delta})-w^+(U)\}\end{aligned}$$

对于任意 $U\ge U_0$。沿 ℓ_4 的积分为

$$C_1 := C_1(U) := \frac{1}{2}\int_{\mu+y^{-\delta}}^{U} e^{-y\left[\cosh\left(u+iw^+(\mu+y^{-\delta})\right)-i\left(u+iw^+(\mu+y^{-\delta})\right)\cosh\mu\right]}e^{r\left(u+iw^+(\mu+y^{-\delta})\right)}\,\mathrm{d}u,$$

其中被积函数来自（3.14）。

进行变量替换 $\rho=u-\mu$ 后，对于所有 $U\ge U_0$，我们有，

$$\begin{aligned}|C_1| \le& \frac{e^{-yw^+(\mu+y^{-\delta})\cosh\mu+r\mu}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\cosh(\rho+\mu)\cos\left(w^+(\mu+y^{-\delta})\right)}e^{|r|\rho}\,\mathrm{d}\rho\\ \le& \frac{e^{-yw^+(\mu+y^{-\delta})\cosh\mu+r\mu}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y(\cosh\rho\cosh\mu+\sinh\rho\sinh\mu)\cos\left(w^+(\mu+y^{-\delta})\right)}e^{|r|\rho}\,\mathrm{d}\rho\\ \le& \frac{e^{-yw^+(\mu+y^{-\delta})\cosh\mu-y\cosh\mu\cos\left(w^+(\mu+y^{-\delta})\right)+r\mu}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-y\rho\sinh\mu\cos\left(w^+(\mu+y^{-\delta})\right)}e^{|r|\rho}\,\mathrm{d}\rho\\ \le& \frac{e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu+O(y^{1-3\delta})+r\mu}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-\rho\left(y^{1-\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)y^{1-2\delta}+O(y^{1-3\delta})\right)\sinh\mu}e^{|r|\rho}\,\mathrm{d}\rho\\ \le& \frac{e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu+O(y^{1-3\delta})+r\mu}}{2}\int_{y^{-\delta}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho\left(y^{1-\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)y^{1-2\delta}+O(y^{1-3\delta})\right)\sinh\mu}\,\mathrm{d}\rho\\ \le& \frac{4e^{-y\frac{\pi}{2}\cosh\mu-\frac{1}{4}y^{1-2\delta}\sinh\mu+r\mu}}{y^{1-\delta}\sinh\mu}\left(1+O(y^{1-3\delta})\right)\end{aligned}$$

其中，第三个不等式成立是因为对于 $\rho>0$，$0<w^+(\mu+y^{-\delta})<\pi/2$、双曲余弦 $\rho\ge 1$ 和双曲正弦 $\rho\ge\rho$；第四个不等式由上述近似得出，而第五和第六个不等式则由 (3.24) 得出。这表明，对于所有 $U\ge U_0$，$C_1(U)$ 上的积分与主导项相比可以忽略不计，正如所需。

ℓ_5 上的积分为

$$C_2 := C_2(U) := \frac{i}{2}\int_{w^+(\mu+y^{-\delta})}^{w^+(U)} e^{-y[\cosh(U+i\theta)-i(U+i\theta)\cosh\mu]}e^{r(U+i\theta)}\ \mathrm{d}\theta,$$

其中被积函数来自（3.14）。我们有

$$\begin{aligned}
|C_2| \leq & \frac{1}{2}e^{rU}\int_0^{w^+(\mu+y^{-\delta})} e^{-y(\cosh U\cos\theta+\theta\cosh\mu)}\ \mathrm{d}\theta \\
\leq & \frac{1}{2}e^{rU}w^+(\mu+y^{-\delta})e^{-y\cosh U\cos\left(w^+(\mu+y^{-\delta})\right)} \\
= & \frac{1}{2}e^{rU}\left(\frac{\pi}{2}-O(y^{-\delta})\right)e^{-\cosh U\left(y^{1-\delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\cosh^2\mu}{3\sinh^2\mu}-\frac{\cosh\mu}{\sinh\mu}\right)y^{1-2\delta}+O(y^{1-3\delta})\right)}
\end{aligned}$$

其中，第二个不等式由以下观察得出：对于所有 $\theta\in[0,w^+(\mu+y^{-\delta})]$，$0<\cos\left(w^+(\mu+y^{-\delta})\right)\leq\cos\theta$。这表明，当 U 足够大时，$C_2(U)$ 上的积分与主导项相比可以忽略不计，正如所需。因此，C 上的积分与主导项相比可以忽略不计，正如所需。

对于其余积分，我们注意到，为了得到命题 3.2 中的积分表示，我们对 $\mathcal{L}^-$ 上的积分作了变量代换 $u\mapsto -u$。我们已经在上文估计了沿 $\mathcal{L}^-$ 绕 $(-\mu,\pi/2)$ 的积分。现在利用柯西-古萨定理，将其余部分替换为沿以下积分路径的积分

$$\begin{aligned}
\ell_1^- &:= \left\{\left(-\mu+y^{-\delta}+u, w(-\mu+y^{-\delta})\right) : 0\leq u\leq \mu-y^{-\delta}-\mu_-\right\} \\
\ell_2^- &:= \left\{\left(-\mu_-, w(-\mu+y^{-\delta})+\theta\right) : 0\leq\theta\leq 3\pi/2-w(-\mu+y^{-\delta})\right\} \\
\ell_3^- &:= \left\{(-\mu_-,\theta) : -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3}{2}\pi\right\} \\
\ell_4^- &:= \ell_4^-(U) := \{(u, w(-\mu-y^{-\delta})) : -U\leq u\leq -\mu-y^{-\delta}\} \\
\ell_5^- &:= \ell_5^-(U) := \{(-U, w(-U)-\theta) : 0\leq\theta\leq -w(-\mu-y^{-\delta})+w(-U)\}.
\end{aligned}$$

沿这些积分路径的积分分别为

$$A_1^- := \frac{1}{2}\int_{-\mu+y^{-\delta}}^{-\mu_-} e^{-y\left[\cosh\left(u+iw(-\mu+y^{-\delta})\right)-i\left(u+iw(-\mu+y^{-\delta})\right)\cosh\mu\right]}e^{r\left(u+iw(-\mu+y^{-\delta})\right)}\ \mathrm{d}u$$

$$A_2^- := \frac{i}{2}\int_{w(-\mu+y^{-\delta})}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y[\cosh(-\mu_-+i\theta)-i(-\mu_-+i\theta)\cosh\mu]}e^{r(-\mu_-+i\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

$$B^- := \frac{i}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{-y[\cosh(-\mu_-+i\theta)-i(-\mu_-+i\theta)\cosh\mu]}e^{r(-\mu_-+i\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

$$C_1^- := C_1^-(U) := \frac{1}{2}\int_{-U}^{-\mu-y^{-\delta}} e^{-y\left[\cosh\left(u+iw(-\mu-y^{-\delta})\right)-i\left(u+iw(-\mu-y^{-\delta})\right)\cosh\mu\right]}e^{r\left(u+iw(-\mu-y^{-\delta})\right)}\ \mathrm{d}u$$

$$C_2^- := C_2^-(U) := \frac{i}{2}\int_{w(-U)}^{w(-\mu-y^{-\delta})} e^{-y[\cosh(-U+i\theta)-i(-U+i\theta)\cosh\mu]}e^{r(-U+i\theta)}\ \mathrm{d}\theta$$

其中每个被积函数均来自 (3.14)。作变量替换 $u \mapsto -u$，利用 $w(x)$ 和 $\cosh x$ 均为偶函数这一事实，并应用我们用于证明 A_1、A_2、B、C_1、C_2 分别相对于主导项可忽略的类似证明，可得 A_1^-、A_2^-、B^-、C_1^-、C_2^- 分别相对于主导项可忽略，正如所需。由此定理得证。

□

References

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, 《数学函数手册：含公式、图表和数学表格》。美国国家标准局应用数学丛书，第 55 卷，美国政府印刷局，华盛顿哥伦比亚特区，1964 年。[2] C. B. Balogh, *Asymptotic expansions of the modified Bessel function of the third kind of imaginary order.* 《SIAM 应用数学杂志》15（1967），1315–1323。[3] M. Bˆocher, *On some applications of Bessel's functions with pure imaginary index*, 《数学年刊》6（1892），第 6 期，137–160。[4] A. R. Booker、A. Str

¨

Bounds and algorithms for the K-Bessel function of imaginary order. **16** 2013 78 108

ombergsson 和 H. Then, 《伦敦数学学会计算与数学杂志》（ ），–。[5] J. T. Conway, *Inductance Calculations for Noncoaxial Coils Using Bessel Functions*, 《IEEE 磁学汇刊》，第 43 卷，第 3 期，（2007 年 3 月），1023–1034。[6] E. T. Copson, 《渐近展开》。1965 年原版重印本。剑桥数学丛书，第 55 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2004 年。[7] R. Diaz、W. J. Rice 和 D. L Stokes, *Fourier-Bessel reconstruction of helical assemblies*, 《酶学方法》482（2010），131–165。[8] A. Erd´elyi, 《渐近展开》。多佛出版社有限公司，纽约，1956 年。[9] A. Erd´elyi、W. Magnus、F. Oberhettinger 和 F. G. Tricomi, 《高等超越函数》，第二卷。麦格劳-希尔图书公司有限公司，纽约，1953 年。[10] H. Iwaniec, 《自守形式的谱方法》，第二版，数学研究生教材第 53 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛；《伊比利亚美洲数学杂志》，马德里，2002 年。[11] B. G. Korenev, 《贝塞尔函数及其应用》，E. V. Pankratiev 从俄文译出。解析方法与特殊函数，第 8 卷，泰勒-弗朗西斯集团，伦敦，2002 年。[12] H. M. MacDonald, *Zeroes of the Bessel Functions*, 《伦敦数学学会会刊》30（1898/99），165–179。

[13] *NIST Digital Library of Mathematical Functions.* http://dlmf.nist.gov/，2020-12-15 发布的 1.1.0 版。F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编。[14]F. W. J. Olver, 《渐近理论与特殊函数》。计算机科学与应用数学。学术出版社

[Harcourt Brace Jovanovich 出版社的子公司]，纽约-伦敦，1974年。

[15] C. Robert, *Modified Bessel functions and their applications in probability and statistics*, 《统计与概率快报》9 (1990), 第2期, 155–161页。[16]E. O. Steinborn 和 E. Filter, *Translations of fields represented by spherical-harmonic expansions for molecular calculations: Translations of reduced Bessel functions Slater-types-orbitals and other functions* , **38**, 1975 273 281 , 《理论化学学报》( ) – 。[17] A. Str¨ombergsson, *On the uniform equidistribution of long closed horocycles*, 《杜克数学杂志》123 (2004), 第3期, 507–547页。[18] N. M. Temme, *Steepest descent paths for integrals defining the modified Bessel functions of imaginary order.* **1** 1994 1, 14 24 《应用分析方法》( ), 第–期。[19] J. Tseng, *Eisenstein series and an asymptotic for the K-Bessel function* **56** 2021 1, , 323 345 《拉马努金杂志》( ), 第–期。[20] G. N. Watson, 《贝塞尔函数理论论述》, 剑桥大学出版社, 英格兰剑桥, 1944年。[21] P. Zhao, *Quantum variance of Maass-Hecke cusp forms*, 《数学物理通讯》297 (2010), 第2期, 475–514页。

Department of Mathematics, University of Exeter, Exeter, EX4 4QF, UK

Email address: j.tseng@exeter.ac.uk