arXiv:2302.09972v2 [math.CO] 7 Apr 2024

# 最大范数平面中的单色三角形

Alexander Natalchenko* Arsenii Sagdeev†

**摘要**

对于所有非退化三角形 $T$，我们确定了对平面进行着色所需的最少着色数，使得不存在 $T$ 的单色最大范数等距副本。

## 1 引言

现代组合几何既深刻又广博，拥有大量强大的工具。然而，其中一些乍看之下相当简单的问题，却让所有试图解答它们的努力持续数十年而无果。也许这类问题中最令人困扰的是 Nelson[1] 于 1950年提出的寻找色数 $\chi(\mathbb{R}^2)$ 的问题：将欧几里得平面的色数定义为对平面进行着色所需的最少着色数，使得相距单位欧几里得距离的任意两点颜色都不相同。尽管研究历史悠久，目前仅知 $5 \le \chi(\mathbb{R}^2) \le 7$，其中下界直到 2018 才得到，参见 [8, 13]。关于该问题的多维版本，参见 [5]及其中的参考文献。

在他们著名的三部曲中，[9, 10, 11], Erd˝os、Graham、Montgomery、Rothschild、Spencer 和 Straus 奠定了欧几里得 Ramsey 理论的基础。该理论探讨的问题与此类问题风格相近，但所禁止出现单色的构型更为复杂，参见 Graham 的综述 [19]。继一对点之后，第二简单的构型当然是三角形[2]。我们用 $\chi(\mathbb{R}^2, T)$ 表示对平面着色所需的最少颜色数，使得其中不含三角形 $T$ 的任何等距（即平移和旋转后的）副本为单色。Erd˝os 等人在 [11, 猜想 3] 中提出，除等边三角形[3], 外，对于所有三角形 $T$，都有 $\chi(\mathbb{R}^2, T) \ge 3$；也就是说，两种颜色永远不够。尽管许多研究者付出了努力，这一猜想目前仅对少数特殊的三角形族得到了验证，参见 [7, 11, 27, 28]。另一方面，很容易看出 $\chi(\mathbb{R}^2, T) \le \chi(\mathbb{R}^2)$，因此，对于所有三角形 $T$，都有 $\chi(\mathbb{R}^2, T) \le 7$。或许令人惊讶的是，目前尚无更好的普适上界，尽管 Graham 提出了猜想，见 [19, 猜想 11.13] 和 [29], : 对于所有三角形 $T$，都有$\chi(\mathbb{R}^2, T) \le 3$；这一结论已对“不太扁平”的三角形得到了验证，见 [1]。还要提到的是，这个问题的多维变体目前最好的界限最近已在 [26]中取得。另请参见 [4, 14, 17, 31] ，了解平面中的相关几何 Ramsey 结果。

在本文中，我们延续 [15, 22, 24, 25] 的研究脉络，并考虑上述问题在最大范数下的对应问题。为了给出正式定义，我们先回顾一些基本概念和事实。点 $\mathsf{z}_1 = (x_1, y_1)$ 与 $\mathsf{z}_2 = (x_2, y_2)$ 之间的 $\ell_\infty$距离定义为 $\|\mathsf{z}_1 - \mathsf{z}_2\|_\infty = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$。与欧几里得情形不同，求出 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty)$ 的精确值很容易；它定义为对平面进行着色所需的最少颜色数，使得任意两个相距单位 $\ell_\infty$距离的点颜色不同：详见图 1 左侧的广为流传的证明 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty) = 4$，或参见 [24, 第 2 节1] 。若存在一个双射 $f\colon T \to T'$，使得对所有 $\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2 \in T$， $\|\mathsf{z}_1 - \mathsf{z}_2\|_\infty = \|f(\mathsf{z}_1) - f(\mathsf{z}_2)\|_\infty$，则称子集 $T' \subset \mathbb{R}^2$ 是 $T \subset \mathbb{R}^2$的一个 $\ell_\infty$等距副本。最后，我们用 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 表示对平面进行着色所需的最少颜色数，使得没有任何 $\ell_\infty$等距副本 $T$ 是单色的。与之前一样，很容易看出 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T) \le \chi(\mathbb{R}^2_\infty)$，因此对于任意三角形 $T$， $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 只能等于 2、3 或 4。我们将证明这三种情况确实都会出现。

*莫斯科物理技术学院，俄罗斯莫斯科。电子邮箱： natalchenko.ae@gmail.com

†阿尔弗雷德·雷尼数学研究所，匈牙利布达佩斯。电子邮箱： sagdeevarsenii@gmail.com.[1]关于这个问题曲折的起源，请参见 Soifer 在 [30,第 3]节[2]的考察。本文及下文中，我们将三角形视为其三个顶点构成的集合。[3]对于一个等边三角形 $\triangle$，同一组作者指出 $\chi(\mathbb{R}^2, \triangle) = 2$，并在 [11, 猜想 1]中猜测相应的二染色是唯一的；这一猜想后来在 [21]被推翻。

注意，$\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 的值只取决于 $T$的边长，与 $T$在平面中的具体位置无关。对于满足三角不等式 $c \le a+b$的所有正数 $a \le b \le c$，令 $T(a,b,c)$ 为平面上任意三个两两之间的 $\ell_\infty$距离分别为 $a,b,c$ 的点。若 [4]，则该三角形为退化三角形；否则为非退化三角形。注意，如果分数 $\frac{a}{c}$和 $\frac{b}{c}$都是有理数，那么经过适当缩放后，不失一般性，可以假设 $a,b,c$是互素整数。对于所有这类非退化三角形 $T$，我们的下一个结果给出了 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 的精确值。

定理 *1.* 设 $a \le b \le c$为正整数，满足 $c < a+b$且 $\gcd(a,b,c) = 1$。令 $T = T(a,b,c)$。若 (♡) $a+b+c$为奇数，或 (♢) $a$和 $b$为奇数，$c \ge a+b-\gcd(a,b)$，则 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T) = 2$。否则，$\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T) = 3$。

接下来的一个互补结果涵盖了其余“无理”非退化三角形的情形。

**定理 2.** 设 $a \le b \le c$为正实数，满足 $c < a+b$且 $\frac{a}{c}$或 $\frac{b}{c}$为无理数。令 $T = T(a,b,c)$。若(★) $a = q_1\xi$，$b = q_2\eta$，$c = p_1\xi + p_2\eta$，其中奇整数 $p_1, p_2, q_1, q_2$及实数 $\xi, \eta$满足 $\frac{\xi}{\eta}$为无理数，则 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T) = 3$。否则，$\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T) = 2$。

对于退化三角形 $T(a,\ b,\ a+b)$，包括下一个结果在内的若干结果都可由 [15], 推出，该文研究了更一般的问题。为完整起见，我们在此给出其简短证明。

**命题 1.** 设 $a,b$ 要么是满足 $a \equiv b$ (模 3) 的互素正整数，要么是满足 $\frac{a}{b}$ 为无理数的正实数。那么 $\chi\big(\mathbb{R}^2_\infty, T(a,b,\bar{a}+b)\big) = 3$。

证明。对于下界，注意九元素集合中的任意五点子集 $\{0,a,a+b\}^2 \subset \mathbb{R}^2$ 都包含一个 $\ell_\infty$-等距副本 $T = T(a,\ b,\ a+b)$，因此 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty,\ T) \ge \lceil \frac{9}{4} \rceil = 3$（参见 [15, 命题 17]）。

对于匹配上界，关键在于注意到，$\ell_\infty$-等距副本 $T$ 在基本坐标轴上的两个投影中，至少有一个是 $\{0,a,a+b\}$ 或其“反射” $\{0,b,a+b\}$ 的平移，这正如预期的那样。事实上，两个顶点之间的最大距离 $a+b$ 由它们的 $x$ 坐标或 $y$ 坐标之差的绝对值决定。由此不难看出，第三个顶点在同一坐标轴上的投影由其余两条边的长度唯一确定，也就是说，哪一条是 $a$，哪一条是 $b$ （参见 [15, 引理 12]）。

现在我们声称，图 1右侧的染色不包含$\ell_\infty$-等距副本 $T$如果 $a$ 且 $b$ 是满足 $a \equiv b$ (模 3) 的互素正整数。事实上，每个颜色类在各基本坐标轴上的投影都是 $A = \{x \in \mathbb{R} :\ \lfloor x \rfloor \not\equiv 0 \text{ (模 3)}\}$ 的平移。然而，显然 $A$ 不同时包含 $\{0,a,a+b\}$ 和 $\{0,b,a+b\}$ 的平移（参见 [15, 推论 20]）。

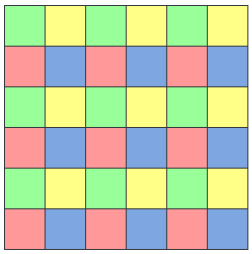
无理数 $\frac{a}{b}$ 的情形类似。设 $H \subset \mathbb{R}$ 是一个哈梅尔基，满足 $a,b \in H$，见第 4 节。对于$z \in \mathbb{R}$, $h \in H$，令 $\lambda_h(z)$ 表示 $z$ 唯一表示为 $H$ 中元素的有理系数有限线性组合时，$h$ 的系数。现在，我们根据图 1 右侧 $\big(\lambda_a(x) + \lambda_b(x)\ \lambda_a(y) + \lambda_b(y)\big) \in \mathbb{Q}^2$ 的颜色，为每个点 $\mathsf{z} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ 着色。仿照上一段的论证，我们可以证明，没有 $\ell_\infty$-等距副本 $T$ 是单色的（参见 [15, 命题 24]）。 □

在剩下的情形 $a \not\equiv b$ （模 3）下，我们猜想三种颜色并不足够；我们通过计算机搜索验证了这一点，适用于 $a+b \le 7$。[5]

**猜想 1.** 设 $a,b$ 是互素正整数，满足 $a \not\equiv b$（模 3）。那么 $\chi\big(\mathbb{R}^2_\infty, T\ (a,b,a+b)\ \big) = 4$ .

下文中，为简便起见，我们将 $\ell_\infty$-距离 和 $\ell_\infty$-等距副本 分别简称为距离和副本。每当讨论平面的二染色时，为了清楚起见，我们将这两种颜色称为红色和蓝色，或 0 和 1。

[4]注意，退化三角形的三个顶点不一定共线，如 (0，0)，(1，0) 和(2，1) 这一例所示。[5]我们观察到，对于尺寸为 $4\times5$, $6\times6$, $8\times9$, $10\times10$, $12\times12$ 和 $12\times13$ 的矩形网格，每一种三染色都包含一个 $\ell_\infty$-等距副本 $T$，分别对应于 $T = T(1,\ 2,\ 3)$, $T(1,\ 3,\ 4)$, $T(2,\ 3,\ 5)$, $T(1,\ 5,\ 6)$, $T(1,\ 6,\ 7)$ 和 $T(3,\ 4,\ 7)$ 的情形。



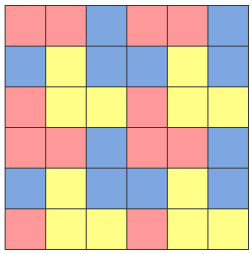


图 1：平面的一种四着色，其中任意相距 $\ell_\infty$ 的点都不同色；以及平面的一种三着色，其中不存在退化三角形 $T(a,\ b,\ a+b)$ 的单色 $\ell_\infty$-等距副本，其中 $a,\ b$ 为任意满足 $a \equiv b$ (模 3) 的互素整数。所有正方形的边长均为 1。

# 2 预备知识

本节中，我们假设三角形 $T = T(a,b,c)$ 的边长 $a,b,c$ 为满足$a \le b \le c$ 且 $c < a+b$ 的实数，即 $T$ 是非退化的。首先，我们给出三个点构成 $T$ 的副本的一个必要条件，然后找出平面上每一种不含 $T$ 单色副本的二染色都满足的一些性质。

## 2.1 非退化三角形的副本

**引理 1.** 设 $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)$、$\mathbf{z}_2 = (x_2, y_2)$、$\mathbf{z}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ 构成 $T$ 的一个副本。那么，差值 $|y_1 - y_2|$、$|y_2 - y_3|$、$|y_3 - y_1|$ 中至少有一个等于 $a$、$b$ 或 $c$。此外，差值$|x_1 + y_1 - x_2 - y_2|$、$|x_2 + y_2 - x_3 - y_3|$、$|x_3 + y_3 - x_1 - y_1|$ 中至少有一个等于 $a+b-c$、$c+a-b$ 或 $b+c-a$。

证明。两点之间的距离由它们的 $x$ 坐标或 $y$ 坐标之差的绝对值决定。因此，根据鸽巢原理，某一个坐标轴（不妨设为 $x$）至少决定了以下三个距离中的两个：$\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_\infty$、$\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3\|_\infty$、$\|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_\infty$。假设 $\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3\|_\infty = |x_2 - x_3| = a$、$\|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_\infty = |x_3 - x_1| = b$。注意，$x_3$ 不可能位于 $x_1$ 和 $x_2$ 之间，因为那样就会得到 $c = \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_\infty \ge |x_1 - x_2| = a + b$，这与结论矛盾。因此，假设 $x_1 = x_3 + b$、$x_2 = x_3 + a$。这意味着 $|x_1 - x_2| = b - a < c = \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_\infty$，从而得到所需的 $|y_1 - y_2| = c$。要证明命题的另一半，注意若 $y_1 = y_2 + c$，则 $|x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = b + c - a$；而若 $y_1 = y_2 - c$，则 $|x_1 + y_1 - x_2 - y_2| = c + a - b$，同样可得所需结论。对于其余所有情形，即坐标轴、指标和边长可能的排列组合，推理也完全相同。 □

这个简单的结论立即给出了以下充分条件：若一种水平着色在每条水平线 $y = y_0$ 上都为常值，或者一种对角线着色在每条对角线上都为常值，则其中不含 $T$ 的单色副本。

**推论 1.** 以下两个陈述成立：

*1.* 设 $C(\cdot)$ 是直线的一种染色，其中任意两点若相距 $a$、$b$ 或 $c$，则着色不同。那么，由方程 $C(x,y) = C(y)$定义的相应平面水平着色中不含 $T$ 的单色副本。 *2.* 设 $C'(\cdot)$ 是直线的一种染色，其中任意两点若相距 $a+b-c$、$c+a-b$ 或 $b+c-a$，则着色不同。那么，由方程$C(x,y) = C'(x+y)$定义的相应平面对角线着色中不含 $T$ 的单色副本。

或许令人惊讶的是，稍后我们将证明，为了求出非退化三角形的 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty,\ T)$ 的精确值，只需考虑这两种着色。更正式地说，我们将证明，对于任何不含 $T$ 单色副本的平面着色，都存在一种水平着色或对角线着色，它使用相同数量的颜色，且同样不含 $T$ 单色副本。

## 2.2 任意二染色中的模式

在本小节中，固定平面的一种红蓝着色，使得 $T$ 的任何副本都不是单色的。若向量 $(x_0,\ y_0)$ 满足对于所有 $x,\ y \in \mathbb{R}$，两点 $(x,\ y)$ 和 $(x+x_0,\ y+y_0)$ 的颜色相同（分别为不同），则称它为一个周期向量（分别为反周期）。显然，这些向量的加法类似于符号的乘法：两个周期向量或两个反周期之和是周期向量，而一个反周期与一个周期向量之和是反周期。

**引理 2**。 以下三个陈述成立：

*1.* 如果四个向量 $(\pm a, c-b)$、$(c-b, \pm a)$ 中有一个不是反周期，则存在长度为 $b+c-a$ 的单色轴平行线段[6] 。 *2.* 如果四个向量 $(\pm b, a-c)$、$(a-c, \pm b)$ 中有一个不是反周期，则存在长度为 $c+a-b$ 的单色轴平行线段。 *3.* 如果四个向量 $(\pm c, b-a)$、$(b-a, \pm c)$ 中有一个不是反周期，则存在长度为 $a+b-c$ 的单色轴平行线段。

证明。 如果 $(b-a, c)$ 不是反周期，那么存在 $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$，使得两点 $(x_1, y_1)$ 和 $(x_1+a-b, y_1-c)$ 的颜色相同，设它们都是红色。容易验证，这一对点与线段 $\{(x_1-b, y) :\ y_1-b \le y \le y_1+a-c\}$ 上任意一点共同构成 $T$ 的一个副本。由于不存在红色的 $T$ 副本，我们得出结论：这条长度为 $a+b-c$ 的竖直线段完全是蓝色的，证毕。其余 11 个向量也可用类似论证处理。 □

推论 *2.* 如果不存在长度为 $c+a-b$ 的单色轴平行线段，那么八个向量 $(\pm a, c-b)$ 、 $(c-b, \pm a)$ 、 $(\pm b, a-c)$ 、 $(a-c, \pm b)$ 都是反周期，且六个[7] 向量 $(2a, 0)$ 、 $(2b, 0)$ 、 $(2c, 0)$ 、 $(0, 2a)$ 、 $(0, 2b)$ 、 $(0, 2c)$ 都是周期向量。此外，如果还存在 $n, m, k \in \mathbb{Z}$ 使得 $0 < 2an+2bm+2ck \le a+b-c$，那么另外四个向量 $(\pm c, b-a)$ 、 $(b-a, \pm c)$ 也都是反周期。

证明。由于 $b+c-a \ge c+a-b$，该条件还意味着不存在长度为 $b+c-a$ 的单色轴平行线段。现在，引理 2 的第一部分和第二部分给出了所需的八个反周期。为了证明 $(2a, 0)$ 、 $(2b, 0)$ 、 $(2c, 0)$ 是周期向量，我们注意到 $(2a, 0) = (a, c-b) - (-a, c-b)$ ， $(2b, 0) = (b, a-c) - (-b, a-c)$ $(2c, 0) = (c-b, a) + (c-b, -a) + (2b, 0)$。对于 $(0, 2a)$ 、 $(0, 2b)$ 、 $(0, 2c)$ 的情形，证明类似。

为证明该命题的后一半，注意到两个非零向量 $(2an+2bm+2ck,\ 0)$ 和 $(0,\ 2an+2bm+2ck)$ 都是周期向量，因为它们是其他向量的线性组合。此外，注意不等式 $2an+2bm+2ck \le a+b-c$ 意味着，长度为 $a+b-c$ 的轴平行线段不可能是单色的。事实上，若该线段为单色，由周期性可知，包含该线段的直线也会是单色的，这就产生了矛盾。现在，引理 2的第三部分给出了剩余的四个反周期。 □

**引理 3**。若 $a < b$，且存在一条长度为 $c+a-b$ 的单色轴平行线段，那么也存在一条单色轴平行直线。

证明。首先，我们考察一个简单但能说明问题的特殊情形： $b = c$。不失一般性，设长度为 $a = c+a-b$ 的单色轴平行线段为 $I := \{(x, 0) :\ 0 \le x \le a\}$，且它是红色的。显然，它的两个端点 $(0, 0)$ 和 $(a, 0)$ 与线段 $J := \{(x, b) :\ a-b \le x \le b\}$ 上的任意一点构成 $T$的一个副本，其中该线段的长度为 $2b-a = a+2(b-a) > a$。由于不存在红色的 $T$副本，我们得出 $J$ 完全是蓝色的。对 $J$ 中的每一对距离为 $a$ 的蓝色点应用类似的论证，可知长度为$a+4(b-a)$的线段 $I' := \{(x, 0) :\ 2a-2b \le x \le 2b-a\}$ 完全是红色的，见图2。以同样的方式继续下去，我们在线 $y = 0$ 上得到一族同心红色线段 $I \subset I' \subset I'' \subset \ldots$，其长度构成公差为 $2(b-a)$ 的递增等差数列。因此，水平线 $y = 0$ 完全是红色的。

现在考虑 $b < c$ 时剩下的一般情形。如果四个向量 $(\pm a,\ c-b)$ 、 $(c-b,\ \pm a)$ 都是反周期，那么 $(2a,\ 0) = (a,\ c-b) - (-a,\ c-b)$ 以及 $(0,\ 2c-2b) = (a,\ c-b) + (-a,\ c-b)$ 都是周期向量。

[6]为澄清此处及下文可能存在的歧义，我们所说的 a *segment* 是指一条闭直线段 t.

[7]如果 $a = b$ 或 $b = c$，其中一些向量可能重合。

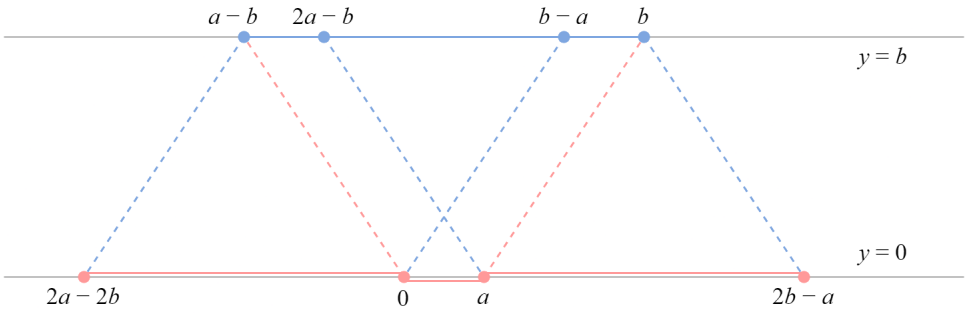



图2：“等腰”情形下红色线段的延伸。

同样，$(0,\ 2a)$ 和 $(2c-2b,\ 0)$ 也都是周期向量。显然，作为这些周期向量长度的两个正数 $2a,\ 2c-2b$ 中，至少有一个不超过它们的半和 $c+a-b$；而 $c+a-b$ 正是由该条件给出的单色轴平行线段的长度。因此，由于周期性，包含这条线段的直线也是单色的，结论得证。

否则，四个向量 $(\pm a, c-b)$、$(c-b, \pm a)$ 中有一个不是反周期，而引理 2 的第一部分保证存在一条更长的单色轴平行线段 $I$，其长度为 $b+c-a > c+a-b$。不失一般性，设 $I=\{(x,0):\ 0\le x\le b+c-a\}$，且它是红色的。假设我们能够证明，这些条件推出线段 $J:=\{(x,a):\ b-c\le x\le 2c-a\}$，其长度为 $b+c-a+2(c-b)\ > b+c-a$，完全是蓝色的。那么，与“等腰”情形中的做法一样，反复应用这一论证，就能证明直线 $y=0$ 上各条同心线段 $I\subset I'\subset I''\subset\dots$ 均为红色，且它们的长度构成公差为 $2(c-b)$ 的递增等差数列，因此水平直线 $y=0$ 也完全是红色的，证毕。

为了证明 $J$ 是蓝色的，我们先将它看作四条较短线段的并集：

$$J_1':=\{(x,a):b-c\le x\le b-a\},\quad J_2':=\{(x,a):b-a\le x\le 2b-a\},$$
$$J_1:=\{(x,a):c\le x\le 2c-a\},\qquad J_2:=\{(x,a):c-b\le x\le c\}.$$

事实上，要证明 $J=J_1'\cup J_2'\cup J_2\cup J_1$，只需验证 $J_2'$ 与 $J_2$相交，也就是说，验证 $2b-a\ge c-b$即可，这由三角不等式 $c\le a+b$立即得出。此外，注意到 $J_1'$ 和$J_2'$ 关于经过线段 $I$中点的竖直线 $2x=b+c-a$（即直线 $J_1$）反射后的图像分别为 $J_2$和3，见图3。因此，要完成证明，只需证明后两条线段是蓝色的。

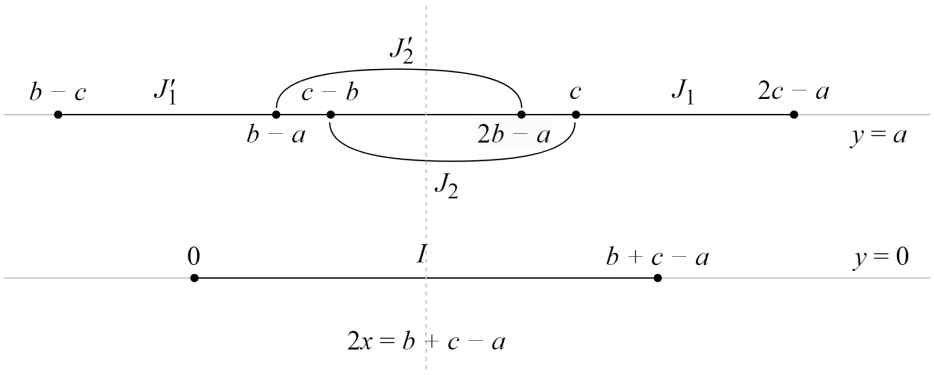



图3：将 $J$ 划分为四条较短线段及其对称轴。

$J_1$ 的情形很简单。对于每个 $(x_0,\ a)\ \in J_1$，不难验证，点 $(x_0-c,\ 0)$ 和 $(x_0+b-c,\ 0)$ 都在直线 $I$ 上，因此它们都是红色。此外，这三个点构成了 $T$ 的一个副本，因此 $(x_0,\ a)$ 是蓝色的。

$J_2$ 的情形比较棘手。任取 $\mathsf{z}_1 = (x_1, a) \in J_2$，并假设它是红色。考虑以下四个点：$\mathsf{z}_2 = (x_1 + b - c, 0)$、$\mathsf{z}_3 = (x_1 + b, c + a - b)$、$\mathsf{z}_4 = (x_1 + b, a - b)$、$\mathsf{z}_5 = (x_1 + b - a, a)$，见图4。注意，$\mathsf{z}_2 \in I$，因此它是红色的。三元组 $\mathsf{z}_1$,$\mathsf{z}_2$,$\mathsf{z}_3$ 和 $\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2$,$\mathsf{z}_4$ 都是 $T$ 的副本，且各含有两个红色点 $\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_2,$，因此 $\mathsf{z}_3$ 和 $\mathsf{z}_4$ 都是蓝色的。最后，由于 $\mathsf{z}_3, \mathsf{z}_4, \mathsf{z}_5$ 也是 $T$ 的一个副本，点 $\mathsf{z}_5$ 是红色的。注意，$\mathsf{z}_1$ 与 $\mathsf{z}_5$ 之间的距离小于 $J_1$ 的长度，也就是说，$b - a < c - a$。因此，我们有 $\mathsf{z}_5 \in J_2 \cup J_1$。如果红点 $\mathsf{z}_5$ 属于 $J_1$，就立刻得到矛盾，因为我们先前已证明这条线段完全是蓝色的。否则，我们用类似的论证，以 $\mathsf{z}_5$ 代替 $\mathsf{z}_1'$，证明点 $\mathsf{z}_5' = (x_1 + 2b - 2a, a)$ 也是红色的。照此继续，我们便在水平线 $y = a$ 上得到一列红点 $\mathsf{z}_1, \mathsf{z}_1'$、$\mathsf{z}_1''$、……，它们的 $x$ 坐标构成一个公差为 $b - a$ 的递增等差数列。一旦这列点中有一点落在蓝色线段 $J_1$ 上，我们便停止这一过程，从而得到所需的矛盾。 □

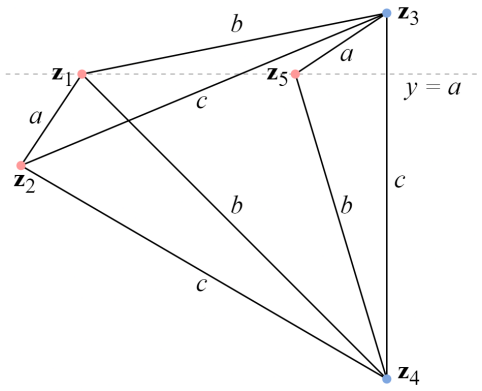



图4：五个点确定 $T$ 的三个副本。

**引理 4.** 如果水平线 $y = 0$ 是红色的，那么直线 $y = a$ 和 $y = b$ 都是蓝色的。此外，如果还存在 $n$、$m \in \mathbb{Z}$，使得 $n + m$ 为偶数且 $c - b \le an + bm \le a$，那么直线 $y = c$ 也是蓝色的。

证明。直线 $y = a$ 上的每个点 $(x_0, a)$ 与两个红色点 $(x_0 - c,0)$ 和 $(x_0 + b - c,0)$ 一起构成 $T$ 的一个副本。因此，直线 $y = a$ 完全是蓝色的。类似地，直线 $y = b$ 上的每个点 $(x_0, b)$ 与两个红色点 $(x_0 - c,0)$ 和 $(x_0 + a - c,0)$ 一起构成 $T$ 的一个副本。因此，直线 $y = b$ 也完全是蓝色的。

为了证明命题的后一半，注意到前一半表明，水平线 $y = an + bm$ 的颜色由 $n + m$ 的奇偶性决定。特别地，如果 $n + m$ 是偶数，那么这条直线就是红色的。现在不难看出，直线 $y = c$ 上的每个点 $(x_0, c)$ 与两个红色点 $(x_0 - b, an + bm)$ 和 $(x_0 + a - b,0)$ 一起构成 $T$ 的一个副本。因此，直线 $y = c$ 也完全是蓝色的，证毕。 □

# 3 定理1

首先，我们注意到，对于任意一个边长为整数 $T = T(a,\ b,\ c)$的非退化三角形 $a \le b \le c$，只要最大公约数$(a,\ b,\ c) = 1$，上界 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty,\ T) \le 3$便可直接由推论1 的前半部分以及 Zhu 提出的推论 2 的以下特殊情形[8] [32, 1] 得到。

**定理 3。** 设 $a \le b \le c$ 为正整数，满足 $c < a + b$ 且 最大公约数$(a, b, c) = 1$。那么，存在一种直线三着色，使得任意两点间距离为 $a$、$b$ 或 $c$ 时，它们的着色都不相同。

[8]也可以从 [20, 定理 3]推出这一结果。事实上，只需对 $\mathbb{Z}_n$ 进行染色（其中 $n$），然后将每个 $x \in \mathbb{R}$ 染成 $\lfloor x \rfloor$ 模 $n$的颜色，以此将染色扩展到整条直线。令 $n$ 分别等于 $a + b$、$b + c$或 $c + a$，便可分别确定三种禁距中的两种，即 $a$ 和 $b$、$b$ 和 $c$，或 $c$ 和 $a$。直接进行分类讨论可知，在这三种情形中至少有一种存在所需的染色，且只使用三种颜色对 $\mathbb{Z}_n$ 进行染色。

因此，要完成证明，我们只需说明：存在一种平面二染色，使得 $T$ 的任何一个副本都是单色，当且仅当 (♡) 或 (♢) 成立。我们先通过以下两种明确的染色方案，证明这些条件的充分性。

**命题 2.** 按照定理 1中的记号，假设 (♡) 成立。考虑由 $C(x,y) = \lfloor x+y \rfloor \bmod 2$定义的平面对角双色染色。则 $T$ 的任何副本都不是单色的。

证明。 显然，当 $\lfloor x_1 \rfloor \not\equiv \lfloor x_2 \rfloor \pmod 2$ 时，只要 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ 之间的距离为奇数即可。由于根据 (♡)，这三个值 $a+b-c, c+a-b$ 和 $b+c-a$ 都是奇数，推论 1 的后半部分即完成证明。 □

**命题 3.** 按照定理 1中的记号，假设 (♢)成立。考虑由 $C(x,y) = \lfloor y/d \rfloor \bmod 2$定义的平面水平双色染色，其中 $d =$ 最大公约数$(a,b)$。则 $T$的任何副本都不是单色的。

证明。反设：存在某些 $\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1)$、$\mathbf{z}_2 = (x_2, y_2)$、$\mathbf{z}_3 = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ 构成 $T$ 的一个副本，使得 $\lfloor y_1/d \rfloor$、$\lfloor y_2/d \rfloor$、$\lfloor y_3/d \rfloor$ 具有相同的奇偶性，譬如三者都是偶数。根据引理 1，不失一般性地可以假设 $y_1 - y_2$ 等于 $a$、$b$或 $c$。注意，前两种情况会立即导出矛盾，因为根据 (♢)，分数 $a/d$ 和 $b/d$ 都是奇数。因此，接下来我们假设 $y_1 - y_2 = c$。特别地，这意味着 $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_\infty = c$，所以距离$\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3\|_\infty$、$\|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_\infty$ 中，一个等于 $a$，另一个等于 $b$。

不难验证，如果 $\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3\|_\infty = a$, $\|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_\infty = b$，那么 $y_1 - b \le y_3 \le y_2 + a$。注意，$\lfloor (y_1 - b)/d \rfloor = \lfloor y_1/d \rfloor - b/d$ 和 $\lfloor (y_2 + a)/d \rfloor = \lfloor y_2/d \rfloor + a/d$ 都是奇数。此外，差值 $(y_2 + a) - (y_1 - b) = a + b - c$ 不超过 $d$ 的 (♢)。因此，当 $y$ 在这两个极值之间变化时，$\lfloor y/b \rfloor$ 的奇偶性不可能从奇数变为偶数再变回奇数。于是，$\lfloor y_3/d \rfloor$ 也是奇数，由此得出矛盾。在剩下的情形中，若 $\|\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_3\|_\infty = b$, $\|\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_1\|_\infty = a$，则有 $y_1 - a \le y_3 \le y_2 + b$，类似的论证即可完成证明。 □

为了证明定理的后半部分，我们注意到，如果 (♡) 和 (♢) 均不成立，那么要么 (♣ $a$ 和 $b$ 的奇偶性不同，$c$ 为奇数，要么
(♠) $a$和 $b$为奇数，$c$为偶数，且 $c < a + b -$ 最大公约数$(a,\ b)$。
因此，只需证明在这两种情形下，都不存在不含 $T$ 单色副本的平面二染色。反设存在这样的红蓝着色，并固定一个任意的此类着色。

首先，假设不存在长度为 $c+a-b$ 的单色轴平行线段。一方面，推论 2 的前半部分表明，六个向量 $(2a, 0)$、$(2b, 0)$、$(2c, 0)$、$(0, 2a)$、$(0, 2b)$、$(0, 2c)$ 都是周期向量，它们的所有线性组合也都是周期向量。由于最大公约数$(2a, 2b, 2c) = 2$，我们得出 $(2, 0)$ 和 $(0, 2)$ 都是周期向量。因此，两个坐标均为偶整数的任意向量也都是周期向量。另一方面，注意到 $a + b - c$ 是正偶整数，因此 $a + b - c \ge 2 =$最大公约数$(2a, 2b, 2c)$。所以，在此情形下，我们也可以应用推论 2 的后半部分，得到总共十二个反周期，其中包括 $(a, c-b)$、$(b, a-c)$ 和 $(c, b-a)$。然而，这三个向量中有一个的两个坐标都是偶整数，因此它应当是周期向量，这就产生了矛盾。

其次，我们假设存在一条长度为 $c + a - b$的单色轴平行线段。此外，注意到条件（♣ 和（♠）均可推出 $a < b$。因此，我们可以应用引理3 来找到一条单色轴平行直线。不失一般性，设这条直线的方程为 $y = 0$，且整条直线均为红色。现在，根据引理4 的前半部分，很容易推出：对于所有满足 $i$、$j \in \mathbb{Z}$ 且 $i + j$ 为奇数的情形，水平线 $y = ai + bj$ 均为蓝色。若（♣ 成立，则取 $i = b$、$j = -a$即可得到矛盾。

若（♠）成立，我们采用稍微复杂一些的论证。注意，存在 $n, m \in \mathbb{Z}$ 使得$an + bm = a -$最大公约数$(a, b)$。由于 $a$和 $b$均为奇数，因此我们得出 $n + m$为偶数。此外，不等式$c - b \le an + bm = a -$最大公约数$(a, b) < a$由（♠）可立即得出。因此，在我们的情形下也可以应用引理 4 的后半部分，从而推出，对于所有满足 $i + j$ 为奇数的 $i, j \in \mathbb{Z}$，水平线 $y = ai + cj$ 是蓝色的。最后，取 $i = c$, $j = -a$，即可得到所需的矛盾。

## 定理 2 的证明

本节中的论证很大程度上依赖于选择公理，尤其依赖于哈梅尔基的概念，参见例如 [23, 第 4]章。回顾一下，若子集 $H \subset \mathbb{R}$ 中的每个 $x \in \mathbb{R}$都能唯一地表示为 $H$ 中元素的有理系数有限线性组合，则称 $H \subset \mathbb{R}$ 为哈梅尔基。我们用 $\lambda_h(x)$表示 $h \in H$ 在这一表示中的系数。注意，对于每个 $h \in H$，对所有 $x, y \in \mathbb{R}$，都有$\lambda_h(x+y) = \lambda_h(x) + \lambda_h(y)$。另外回顾一下，每个由（在 $\mathbb{Q}$上）线性无关的实数组成的集合都可以扩充为一个哈梅尔基，参见 [23, 定理 4.2.1]。

设 $T = T(a,b,c)$ 是边长为 $a \le b \le c$的非退化三角形，且以下分数中至少有一个 $a/c, b/c$是无理数。与上一节一样，我们先给出 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 的一个上界，这可直接由推论 1 的后半部分及以下陈述得出。

**命题 4.** 用定理 2中的记号，存在一种直线三着色，使得任意两点之间的距离为 $D := \{a+b-c, c+a-b, b+c-a\}$ 时，它们不会是单色的。此外，若 (★) 不成立，则甚至存在一种具有相同性质的直线二染色。

证明。 首先，我们假设 $c$ 不能表示为 $a$ 和 $b$ 的有理系数线性组合。

我们断言，存在一个哈梅尔基 $H \subset \mathbb{R}$，使得 $c \in H$ 和 $\lambda_c(a) = \lambda_c(b) = 0$。为证明这一点，考虑两种情况。若集合 $\{a,b,c\}$ 在 $\mathbb{Q}$上线性无关，则任意满足 $\{a,b,c\} \subset H$的哈梅尔基 $H$均可满足要求。事实上，$a = a$和 $b = b$分别是 $a$和 $b$的唯一表示，因此 $\lambda_c(a) = \lambda_c(b) = 0$。否则，存在 $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}$，使得 $r_1 a + r_2 b + r_3 c = 0$。根据我们的假设，显然 $r_3 = 0$。于是，任意满足 $\{a,c\} \subset H$ 的哈梅尔基 $H$ 都可满足要求，因为 $a = a$ 和$b = -\frac{r_1}{r_2} a$分别是 $a$和 $b$的唯一表示，因此 $\lambda_c(a) = \lambda_c(b) = 0$，断言得证。

有了这个哈梅尔基，很容易看出，对于所有满足 $|x_1 - x_2| \in D$ 的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，我们有$|\lambda_c(x_1) - \lambda_c(x_2)| = 1$。特别是，这意味着 $\lfloor \lambda_c(x_1) \rfloor \not\equiv \lfloor \lambda_c(x_2) \rfloor \pmod 2$，因此方程$C'(x) = \lfloor \lambda_c(x) \rfloor \bmod 2$ 定义了所需的直线二染色。

现在我们讨论另一种情况： $c$ 可以表示为 $a$ 和 $b$ 的有理系数线性组合，即 $c = \frac{p_1}{q_1} a + \frac{p_2}{q_2} b$，其中整数 $p_1, q_1$，$p_2, q_2$ 满足 $\gcd(p_1, q_1) = \gcd(p_2, q_2) = 1$。令 $\xi := a/q_1, \eta := b/q_2$，将 $c = p_1\xi + p_2\eta$改写。此外，注意到 $\xi/\eta$ 是无理数，否则分数 $a/c$ 和 $b/c$ 都是有理数。令 $H \subset \mathbb{R}$ 为一个满足 $\xi, \eta \in H$ 的哈梅尔基。容易验证，对于所有满足 $|x_1 - x_2| \in D$ 的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，我们有 $|\lambda_\xi(x_1) - \lambda_\xi(x_2)| \in D_1 := \{|p_1 + q_1|, |p_1 - q_1|\}$，并且$|\lambda_\eta(x_1) - \lambda_\eta(x_2)| \in D_2 := \{|p_2 + q_2|, |p_2 - q_2|\}$。这一观察表明，若 $C'_1(\cdot)$ 对整数进行着色，使得任意两个相距 $D_1$ 的整数都不是单色的，那么对于所有满足 $|x_1 - x_2| \in D$ 的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，都有 $C'_1(\lfloor \lambda_\xi(x_1) \rfloor) \ne C'_1(\lfloor \lambda_\xi(x_2) \rfloor)$。类似地，若 $C'_2(\cdot)$ 对整数进行着色，使得任意两个相距 $D_2$ 的整数都不是单色的，那么对于所有满足$|x_1 - x_2| \in D$ 的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，都有 $C'_2(\lfloor \lambda_\eta(x_1) \rfloor) \ne C'_1(\lfloor \lambda_\eta(x_2) \rfloor)$。因此，在本证明余下部分中，我们只考虑这些“整数”着色。

注意，如果两个互素整数 $p_1, q_1$ 中的一个是偶数，那么另一个就是奇数。另一对 $p_2, q_2$ 也同样如此。因此，如果 (★) 不成立，也就是说，四个整数$p_1, q_1, p_2, q_2$ 中至少有一个是偶数，那么对于某个 $i = 1,2$， $D_i$ 只包含奇整数。于是，由 $C'_i(n) = n \bmod 2$ 定义的二染色中，不存在距离相隔 $D_i$ 的单色整数，正如所需。

最后，只需证明：如果 (★) 成立，那么对于某个 $i = 1,2$，存在一种对整数的三着色，使得任意两个整数之间的距离都不为 $D_i$，且它们不会是单色的。粗略地说，这是因为每个 2-退化 图的色数都不超过 3。更正式地，我们按照绝对值不减的顺序排列整数，并迭代构造所需的染色。假设经过 $m$ 步后，我们已经为前 $m$ 个整数着色，并考察下一个整数，例如 $n$。在形如 $n \pm d$, $d \in D_i$ 的四个整数中，至少有两个的绝对值大于 $|n|$，因此它们尚未着色。于是，至多有两种着色不能用于给 $n$ 着色，因此至少有一种着色可用。以同样的方式继续下去，即可得到所需的三着色。

注意，前面的论证要求 $0 \notin D_i$。然而，对于 $D_1$或 $D_2$，情况总是如此。事实上，若 $0 \in D_1 \cap D_2$，则 $p_1 = \pm q_1$ 且 $p_2 = \pm q_2$。因此，形如 $\pm a \pm b$ 的四个表达式之一等于 $c$，这与不等式链 $0 < a \le b \le c < a + b$ 矛盾。

□

既然我们已经得到了 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 的上述上界，为了完成定理 2 的证明，现在只需得到匹配的下界。也就是说，我们需要证明 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T) > 2$（当 (★) 成立时），

也就是说，若 $a = q_1\xi$, $b = q_2\eta$, $c = p_1\xi + p_2\eta$ 对于某些奇整数 $p_1$， $p_2$， $q_1$， $q_2$ 以及实数 $\xi$， $\eta$ 满足条件 $\xi/\eta$ 为无理数。与上一节一样，我们用反证法来证明。因此，假设相反的结论成立，并固定平面的一种任意红蓝着色，其中不含 $T$ 的任何单色副本。

首先，假设存在一条长度为 $c+a-b$的单色轴平行线段。显然，在我们的情形下有 $a \neq b$，因此引理3蕴含存在一条单色轴平行直线。不失一般性，设这条直线的方程为 $y = 0$，且它完全是红色的。注意，集合 $\{an + bm\colon\ n,\ m \in \mathbb{Z}\}$ 是稠密的，因为分数 $a/b$ 是无理数。特别地，这意味着我们可以利用引理4 的两个部分，推得对于所有满足 $i$、 $j$、 $k \in \mathbb{Z}$ 且 $i+j+k$ 为奇数的 $y = ai + bj + ck$，水平线 $y = ai + bj + ck$ 是蓝色的。取三个奇整数 $i = p_1q_2$、 $j = q_1p_2$、 $k = -q_1q_2$，可得水平线 $y = 0$ 是蓝色的，这就导出了矛盾。

其次，我们假设没有长度为 $c+a-b$ 的轴平行线段是单色的。回想集合$\{an+bm\colon\ n, m \in \mathbb{Z}\}$ 是稠密的，因此我们可以利用推论 2 的两部分，总共找到着色的十二个反周期。特别地，它们的线性组合 $\mathbf{v}_1 := (b+c-a, 0) = (b-a, c) - (-a, c-b) - (a-c, b)$也是一个反周期。类似的论证表明，$\mathbf{v}_2 := (c+a-b, 0)$和 $\mathbf{v}_3 := (a+b-c, 0)$也都是反周期。考虑三个整数 $i = (q_1p_2 - q_1q_2)/2$、 $j = (p_1q_2 - q_1q_2)/2$ 和 $k = (p_1q_2 + q_1p_2)/2$。一方面，它们的和 $i+j+k = p_1q_2+q_1p_2-q_1q_2$是奇数，因此线性组合 $i\mathbf{v}_1+j\mathbf{v}_2+k\mathbf{v}_3$是一个反周期。另一方面，不难验证后一个向量等于 $(0, 0)$，这是一个平凡的周期向量，矛盾。

## 5 总结性讨论

尽管猜想1 是本文主要的未解问题，我们还是简要讨论一些其他问题。**具有相同色数的有限域**。给定一个三角形 $T$，De Bruijn–Erd˝os 定理 [2] 的超图版本 $V \subset \mathbb{R}^2$ 表明，存在一个有限的$V$，具有如下性质：若将 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, T)$ 种颜色中的少于 $\ell_\infty$着色，则其中包含一个 $T$的单色等距副本。自然的问题是，这种 $V$的最小规模是多少？本文的证明可以推出非退化情形下该数量的一些上界，但这些上界可能远非最优。

**分数色数**。对于边长为整数的三角形 $T$，求出 $d_f(\mathbb{Z}^2, T)$ 的精确值将很有意义；该值定义为整数格点$\mathbb{Z}^2$ 的一个子集在不含 $\ell_\infty$的 $T$等距副本时所能达到的最大渐近密度。这等价于确定分数色数$\chi_f(\mathbb{R}^2_\infty, T)$，见 [3]。与我们此前的结果不同，这个问题仅在非退化三角形的情形下仍未解决。事实上，对于退化三角形 $T$, [15, 命题 17] 给出等式 $d_f(\mathbb{Z}^2, T) = d_f(\mathbb{Z}, T)^2$，从而将问题化为一维问题；该问题后来在 [16]中得到了解决。

更高维。这些色数的多维版本也有类似情形。对于每个退化三角形 $T$，常数 $c = c(T) > 1$ 使得 $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, T) = \big(c + o(1)\big)^n$，这一结果如 $n \to \infty$ 所示，已在 [15] 中得到。与此同时，这样的 $c(T)$ 若存在，目前也只对少数几种非退化三角形 $T$ 已知。例如，假设 $T = T(a, a, b)$ 是一个等腰三角形。如果它的底边不长于腰，即如果$b \le a$，那么 [15, 定理 5] 表明 $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, T) = \big(2 + o(1)\big)^n$。然而，如果底边较长，那么我们只知道 $\big(3/2+o(1)\big)^n \le \chi(\mathbb{R}^n_\infty, T) \le \big(1+a/b+o(1)\big)^n$；当三角形接近等边时，这个上界仅比平凡不等式 $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, T) \le \chi(\mathbb{R}^n_\infty) = 2^n$ 略好。

**更大构形**。尽管有些退化三角形需要四种颜色才能对平面着色，使其任何 $\ell_\infty$-等距副本都不是单色，但对于所有足够大的禁形，$\mathcal{M}$三种颜色总是足够的，见 [15, 命题 7]的证明。或许，条件 $|\mathcal{M}| \ge 4$ 本身就已足够。因此，对于每个足够大的 $\mathcal{M}$，色数 $\chi(\mathbb{R}^2_\infty, \mathcal{M})$ 等于 2 或 3；而且不难看出这两种情况确实都会出现，见 [15, 定理 8]。因此，一个合理的问题是，是否存在一个简单的判据可以区分这两种情况。

**其他度量**。 关于平面的色数，纳尔逊经典问题在许多其他非欧度量下的对应问题已有研究，参见 [6, 12, 18]。研究这些度量下不存在给定三角形单色副本的染色也可能很有趣。

## 致谢

我们感谢 N´ora Frankl 就猜想1 进行了有益的讨论，也感谢 Panna Geh´er 提供参考文献 [1]并提醒我们关注。第二作者受 ERC 高级资助项目“GeoScape”（编号 882971）支持。

## 参考文献

[1] O. Aichholzer 和 D. Perz。《着色欧几里得平面中的三角形》。第 35 届欧洲计算几何研讨会（EuroCG 2019）。2019。[2] N. de Bruijn 和 P. Erd˝os。《无限图的着色问题与关系理论中的一个问题》。Indigationes Mathematicae 13（1951），371–373。[3] G. J. Chang、D. D.-F. Liu 和 X. Zhu。《距离图与 $t$着色》。Journal of Combinatorial Theory, Series B 75.2（1999），259–269。[4] X. Cheng 和 Z. Xu。《各种构型的欧几里得 Gallai-Ramsey》。arXiv:2305.18218（2023）。[5] D. Cherkashin、A. Kulikov 和 A. Raigorodskii。《低维欧几里得空间的色数》。离散应用数学 243 （ 2018 ），125–131。[6] K. B. Chilakamarri。《闵可夫斯基度量空间中的单位距离图》。Geometriae Dedicata 37.3（1991），345–356。[7] G. Currier、K. Moore 和 C. H. Yip。《平面的任意二染色都包含单色三项等差数列》。arXiv:2402.14197（2024）。[8] A. de Grey。《平面的色数至少为 5》。Geombinatorics 28.1（2018），559–583。[9] P. Erd˝os、R. Graham、P. Montgomery、B. Rothschild、J. Spencer 和 E. Straus。《欧几里得 Ramsey 定理 I》。组合理论杂志 A 辑 14（1973），341–363。[10] P. Erd˝os、R. Graham、P. Montgomery、B. Rothschild、J. Spencer 和 E. Straus。《欧几里得 Ramsey 定理 II》。Bolyai 数学学会研讨会，无限集与有限集 10（1975），529–557。[11] P. Erd˝os、R. Graham、P. Montgomery、B. Rothschild、J. Spencer 和 E. Straus。《欧几里得 Ramsey 定理 III》。Bolyai 数学学会研讨会，无限集与有限集 10（1975），559–583。[12] G. Exoo、D. Fisher 和 D. Ismailescu。《闵可夫斯基平面的色数——正多边形情形》。Geombinatorics 31.2（2021），49–67。[13] G. Exoo 和 D. Ismailescu。《平面的色数至少为 5：一种新证明》。离散与计算几何 64.1（2020），216–226。[14] N. Frankl、P. Geh´er、A. Sagdeev 和 G. T´oth。《闵可夫斯基平面中的单色无限集》。arXiv:2308.08840（2023）。[15] N. Frankl、A. Kupavskii 和 A. Sagdeev。《最大范数 Ramsey 理论》。arXiv:2111.08949（2021）。[16] N. Frankl、A. Kupavskii 和 A. Sagdeev。《Schmidt 和 Tuller 关于一维堆积与覆盖的猜想的解答》。arXiv:2203.03873（2022）。[17] J. F¨uhrer 和 G. T´oth。《欧几里得 Ramsey 理论中的等差数列》。arXiv:2402.12567（2024）。[18] P. Geh´er。《关于闵可夫斯基平面色数的注记：正多边形情形》。arXiv:2301.13695（2023）。[19] R. Graham。《欧几里得 Ramsey 理论》。离散与计算几何手册，第第三版。Chapman and Hall/CRC，2017，281–297。[20] C. Heuberger。《关于循环图的平面性与可着色性》。离散数学 268.1-3（2003），153–169。[21] V. Jel´ınek、J. Kyn˘cl、R. Stola˘r 和 T. Valla。《双色平面中的单色三角形》。Combinatorica 29.6（2009），699–718。

[22] V. Kirova 和 A. Sagdeev。《没有长单色单位等差数列的赋范空间二染色》。*arXiv:2203.04555* （2022）。[23] M. Kuczma。函数方程与不等式理论导论：柯西方程与詹森不等式。2009，595。[24] A. Kupavskii 和 A. Sagdeev。《所有有限集在最大范数下都是 Ramsey 集》。*Forum of Mathematics,Sigma*。第 9 卷。剑桥大学出版社。2021。[25] A. Kupavskii、A. Sagdeev 和 N. Frankl。《无限集可以在切比雪夫度量下成为 Ramsey 集》。*Russian Mathematical Surveys* 77.3（2022），549–551。[26] A. Kupavskii、A. Sagdeev 和 D. Zakharov。《切角》。*arXiv:2211.17150* （2022）。[27] L. E. Shader。《所有直角三角形在 $E^2$中都是 Ramsey 的！》*Journal of Combinatorial Theory, Series A* 20.3（1976），385–389。[28] I. D. Shkredov。《关于欧几里得 Ramsey 理论的一些问题》。*Analysis Mathematica* 41.4（2015），299–310。[29] A. Soifer。《三着色平面中的三角形》。*Geombinatorics* 1.2（1991），11–12。[30] A. Soifer。数学染色书：染色数学及其创作者的多彩人生。Springer，2009。[31] V. Voronov。《带有一个禁距区间的平面的色数至少为 7》。*arXiv:2304.10163* （2024）。[32] X. Zhu。《距离集基数为 3 的距离图的圆色数》。*Journal ofGraph Theory* 41（2002），195–207。