偏群胚中的组合完备性

Piet Rodenburg 阿
姆斯特丹大学信息学研究
所，2022年12月

摘要。我通过证明组合完备帕戈伊德（偏应用系统）可用两个满足著名恒等式的常量扩张，来刻画它们。一个例子表明，这一类不仅包含偏组合代数的约化结构。

注：本文另有荷兰语版本，标题为 *Combinatorische volledig- heid in partiële groepoïden*。

§1. 引言

读者若仅粗略浏览 Shafer 和 Terwijn 最近发表的论文 [ST]，可能会以为 Feferman 在 [F] 中证明了：在偏群胚中，组合完备性——作者对这一概念的界定相当宽泛——等价于存在两个具有某些性质的元素。然而，若有人去 [F], 中寻找证明，却会一无所获。组合完备性显然意味着存在元素 s 和 k，使得 $sxyz \,!\, xz(\,yz)$ 且 $kxy = x$；但对所有 x 和 y，sxy 都必须存在吗？Feferman 只在 §3.3(1) 中指出，从哲学角度看，认为抽象项 $\mathrm{l}^*x.\mathbf{t}$ 总有取值是合理的；并且在其他组合子公理的背景下，规定 $sxy{\downarrow}$ 足以保证这一点。事实上，正如 Renardel 和 Troelstra 早已在他们的评论 [RT] 中指出的，他对可能未定义项的极简处理，并不能为数学证明提供良好基础。

§2. 预备知识

我用 R^+ 表示二元关系 R 的传递闭包。特别地，$\to^+$ 是重写关系 $\to$（§4）的传递闭包。

我将遵循笛卡尔原理（我思故我在，[D]）：原子断言意味着其主体存在。特别地，$M = M$ 是断言 M 存在的一种方式。更简洁地说，我将用 $M{\downarrow}$ 表示“M 存在”，用 $M{-}$ 表示“M 不存在”。克莱尼等式 ! 的定义如下：

$$M \simeq N \;:\Leftrightarrow\; M{\downarrow} \vee N{\downarrow} \to M = N.$$

上述 Cogito 原理的一个推论是严格性原理：指称一个既存对象的复合表达式，其组成部分也指称既存对象。事实上，只要 N 确实出现在恒等式 $M(N) = P$ — 中，我们就可以将其理解为一个以 N 为主体的原子断言。举一个算术例子：如果

$$x \div (y \div z) = 6,$$

那么 $y \div z$ 存在。（因此 z 不为零。）

在公式中，我用 $\approx$ 表示等号。我将公式 $\mathbf{t} \approx \mathbf{t}$ 简写为 $\mathbf{t}$；于是，克莱尼等式的形式化定义变为

$$\mathbf{s} \simeq \mathbf{t} \;:=\; \mathbf{s} \vee \mathbf{t} \to \mathbf{s} \approx \mathbf{t}.$$

我使用霍尔记法来表示简单的情形区分：

$$M \triangleleft A \triangleright N$$

如果A为真，则为M；如果A为假，则为N。无需涵盖所有情况：M " A为真时取M，否则未定义；而A # N ! N " ¬A。

代数记法遵循[ALV]。特别地，我将集合A上的偏n元运算视为$A \times A^n$的一个子集。按照惯例，零元运算{áa, øñ}——即一个常量——将以其取值a来表示。由于基于偏基本运算定义项运算和多项式运算时需要格外谨慎，下面我将简要介绍它们。

设**A**是一个结构：一个集合A，即**A**的论域，并带有若干个定义在A上、有限元但不一定全定义的基本运算。那么，Clo **A**是**A**的项运算克隆；也就是说，它是包含基本运算和A^n 到A的投影e_i^n: áa_0,..., a_n−1ñ ı⟶ a_i 的最小运算集，其中对所有$i < n <$ ω成立，并且在复合运算下封闭

$$C_m^n\colon \langle f, g_0, \ldots, g_{n-1}\rangle \longmapsto f(g_0, \ldots, g_{n-1}) \qquad n, m \in \omega$$

定义如下：对于 n 元 f 和 m 元 g_0,..., g_n−1,

$$f(g_0, \ldots, g_{n-1})(x_0, \ldots, x_{m-1}) \simeq f(g_0(x_0, \ldots, x_{m-1}), \ldots, g_{n-1}(x_0, \ldots, x_{m-1})).$$

对于 nÎω，Clo$_n$**A** 是 Clo**A** 中所有 n 元元素的集合。

A 的多项式运算克隆 Pol**A** 的定义类似；除基本运算外，它还包含所有常量：对每个 aÎA，都有一个取值为 a 的零元运算。对于 nÎω，Pol$_n$ **A** 是 Pol**A** 中所有 n 元元素的集合。特别地，Pol$_n$**A** 包含 n 元常值函数——取常值 a 的 n 元函数是 $C_n^0(a)$。

设 $\mathcal{L}$ 是一个代数型：由指定有限元数的运算符号组成的集合。对于给定集合 X 中的变量，类型为 $\mathcal{L}$ 的项集记为 $T_{\mathcal{L}}(X)$。在类型为 $\mathcal{L}$ 的结构 **A** 中——它为每个符号 QÎ $\mathcal{L}$ 指定论域 A 上一个元数与 Q 相应的运算 $Q^{\mathbf{A}}$ ——我们将$T_{\mathcal{L}}(X)$ 的元素解释为从A^X 中所有将 X 赋值到 A 的赋值所构成的集合到A中的偏函数，如下所示：

$$\begin{aligned}&\text{if } \mathbf{t} = x \in X, \text{ then } \mathbf{t}^{\mathbf{A}} \text{ is the projection } e_x^X\colon a \longmapsto a(x);\\ &\text{if } \mathbf{t} = Q\mathbf{s}_1 \ldots \mathbf{s}_n, \text{ then } \mathbf{t}^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}(\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}, \ldots, \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}).\end{aligned}$$

若$X = n$ (= {0,..., n − 1})，则运算$\mathbf{t}^{\mathbf{A}}$ 是 Clo$_n$**A** 的元素。

令$\mathbf{A}_A$ 为**A**的扩张，其中论域A的每个元素都用其专属的常量符号表示。我们用 $\mathcal{L}$È A 表示$\mathbf{A}_A$ 的类型。由于 Pol**A** = Clo$\mathbf{A}_A$，Pol$_n$**A**的元素是运算$\mathbf{p}^{\mathbf{A}}$ ，其中$\mathbf{p}$ Î $T_{\mathcal{L}\cup A}(n)$。

由于由X中的变量构成的项也是由任意超集Y中的变量构成的项，因此记号$\mathbf{t}^{\mathbf{A}}$ 可能有歧义。必要时，我将把$\mathbf{t}_X^{\mathbf{A}}$ 写作从赋值到X的部分函数。使$\mathbf{t}_X^{\mathbf{A}}$ 可能非空的最小X是 Var**t**，即**t**中出现的变量集合。

通常在具体情形下，例如 pargoid 中的乘积，我们会依据上下文来区分运算符号Q和运算$Q^{\mathbf{A}}$，并省略上标。

设 **A** 和 **B** 是同一类型 $\mathcal{L}$ 的结构。如果 A Í B，并且对于每个 n，对每个 n元运算符号 QÎ$\mathcal{L}$ 以及所有 a_1,..., a_n Î A，都有：

$$Q^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n) \simeq Q^{\mathbf{B}}(a_1,\dots,a_n) \lhd Q^{\mathbf{B}}(a_1,\dots,a_n) \in A.$$

§3. Pargoids 与组合完备性

部分应用结构 [B], 或部分群胚，简称 *pargoid*[LE],，是一个非空集合 A，带有一个二元运算 $\cdot$（应用、乘积），该运算不必对 $A \times A$ 中的所有有序对都有定义。如果其乘积运算是全定义的，则称 pargoid 是全定义的，或称为群胚（或应用结构）。

若 pargoid $\mathbf{A} = \langle A, \cdot \rangle$ 中的元素 a 满足：对于任意 $x \in A$，乘积 $a \cdot x$ 均无定义，则称其为左被动。

运算符号 $\cdot$ 通常省略。在三种情况下，我们会明确写出运算点：运算需要特别强调时，例如在定义中；为突出某个应用，例如为了省去括号，我们写作 $x \cdot yz$，而不写作 $x(yz)$；以及某些因子由复杂表达式表示时。我们约定乘积按从左到右的顺序结合：$xyz = (xy)z$。

非全定义的乘积运算会导出全无定义的多项式运算：

PROPOSITION 1. 设 $\mathbf{A} = \langle A, \cdot \rangle$ 是一个非全定义的 pargoid。那么对于所有 n，$\emptyset \in \mathrm{Pol}_n\mathbf{A} \geq 0$。

PROOF. 假设 a_1a_2-。那么 $C_0^2(\cdot, a_1, a_2)$ 是空的零元运算；而 $C_n^0(C_0^2(\cdot, a_1, a_2))$ 是 n 元且为空。

DEFINITION 2. 若对所有 $n \geq 1$，以及 $\mathbf{A}$ 的每个 n 元多项式运算 p，都存在元素 $a \in A$，使得 pargoid $\mathbf{A}$ 是组合完备的
对于所有 $x_1,\dots, x_n \in A$，$ax_1\dots x_n \mathrel{!} p(x_1,\dots, x_n)$。

REMARK. 当 $n = 0$ 时会出现一个问题。如果 $p \neq \emptyset$，那么 p 本身就是合适的 a。但如果 $\mathbf{A}$ 不是全定义的，那么还存在一个没有取值的零元多项式运算；显然，这个运算并不等价于 A 中的某个元素。

定义 2 将群胚的通常定义推广如下：

PROPOSITION 3. 群胚 $\mathbf{A}$ 是组合完备的，当且仅当对所有 $n \geq 0$，以及 $\mathbf{A}$ 的每个 n 元多项式运算 p，都存在某个 $a \in A$，使得对所有 $x_1,\dots, x_n \in A$，$ax_1\dots x_n = p(x_1,\dots, x_n)$。

PROOF。注意，在群胚中，所有多项式运算都是全定义的；因此，对于多项式运算 p 和 q，以及 $x_1,\dots, x_n \in A$：

(*) $$p(x_1,\dots,x_n) \simeq q(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow p(x_1,\dots,x_n) = q(x_1,\dots,x_n).$$

(Þ) 设 p 是一个非空的零元多项式运算。那么 p 是单元素集 $\{\langle a, \emptyset\rangle\}$，其中某个 $a \in A$；因此 $a = p(\emptyset)$。(Ü) 由 (*) 立即得出。

☒

§4. 偏组合代数

半组合代数，简称 *sca*，是一个 pargoid $\mathbf{A}$，其中两个常元符号 s 和 k 的解释满足

$$\mathbf{A} \models (1)\ sxyz \simeq xz(yz)\ \&\ (2)\ kxy \approx x.$$

如果进一步满足，那么一个 sca 就是偏组合代数，简称 *pca*

$$\mathbf{A} \models (0)\ sxy.$$

若一个部分组合代数的乘积运算是全定义的，则称它是全定义的，或称为组合代数。

LEMMA 1 (Bethke)。每个非全定义的部分组合代数都包含一个左被动元素。

PROOF。设$\mathbf{A} = \langle A, \cdot, s, k\rangle$是一个部分组合代数，且$a$、$b$是$A$中乘积未定义的元素。由于$kaa = a$且$kbb = b$，Cogito 原理推出$ka$和$kb$存在；因此根据 (0)，$s(ka)(kb)$存在。由 (1) 和 (2)，现在对每个$x \in A$都有：

$$s(ka)(kb)x \simeq kax(kbx) \simeq ab,$$

所以 $s(ka)(kb)x\downarrow$。 ☒

THEOREM 2。一个 pargoid 是组合完备的，当且仅当它可以扩展为一个半组合代数；并且它要么是全定义的，要么包含一个左被动元素。

PROOF. (Þ) 设 **A** 是一个组合完备偏群。组合完备性意味着 **A** 中存在元素 s 和 k，满足

$$(1)\ sxyz \simeq xz(yz)\ \ \&\ \ (2a)\ kxy \simeq x.$$

由于 x 遍历 **A** 中已有的元素，(2a) 等价于

$$(2)\ kxy \approx x.$$

如果 **A** 不是全定义的，根据 §3，命题 1，有 $\emptyset \in \mathrm{Pol}_1\mathbf{A}$。由组合完备性，必定存在 $a \in A$，使得对所有 $x \in A$

$$ax \simeq \emptyset(x),$$

因此 $ax\uparrow$。

(Ü) 设 $\mathbf{A} = \langle A, \cdot, s, k\rangle$ 是一个半组合代数。令 C 为类型 $\{\cdot, s, k\}$，并令 $T_{C\cup A}(Y)$ 表示由可数无限变量集 Y 构成的形式 **A**-多项式集合。按通常方式，对每个 $x \in Y$，定义一个运算 l^*x，将 $T_{C\cup A}(Y)$ 映射到 $T_{C\cup A}(Y \setminus \{x\})$: $\mathrm{l}^*x.\mathbf{p}$ 为

$\mathbf{i} := skk$ if $\mathbf{p} = x$,

若 x 不出现在 **p** 中，则为 $k\mathbf{p}$,

$s(\mathrm{l}^*x.\,\mathbf{r})(\mathrm{l}^*x.\,\mathbf{q})$；否则，若 $\mathbf{p} = \mathbf{rq}$。

对 **p** 作简单归纳法可知，x 不会出现在 $\mathrm{l}^*x.\,\mathbf{p}$ 中。接下来我们再次对 **p** 作归纳法，证明对于所有 $b \in A$ 和 $c\colon Y \setminus \{x\} \longrightarrow A$,

$$(\lambda^* x.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \simeq \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c \cup \{\langle b, x\rangle\}) \qquad (\lambda^*).$$

我们将右侧的表达式化简为 $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b)$。

1o $\mathbf{p} = x$。需证明，对于任意 $b \in A$，$skkb = b$。根据 (1),

$$skkb \simeq kb(kb);$$

根据 (2)，kbb 存在，因此 kb 也存在；再次根据 (2)，$kb(kb) = b$。

2o x 不出现在 **p** 中。取 $c \in A^{Y\setminus\{x\}}$。我们必须证明

$$k \cdot \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c) \cdot b \simeq \mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c, b), \qquad \text{for each } b \in A.$$

注意，$\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\,!\,\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)$。如果 $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ 存在，那么

$$k\cdot\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b=\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$$

根据 (2)。另一方面，如果 $\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ 不存在，那么根据严格性原理，$k\cdot\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b$ 也不存在。

3o $\mathbf{p}=\mathbf{rq}$。取 $c\,\hat{\mathrm{I}}\,A^{Y}\setminus\{x\}$。我们要证明

$$s\cdot(\lambda^{*}x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot(\lambda^{*}x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b\simeq\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)\cdot\mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b),\quad\text{for each } b\in A.$$

如果 $\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)\cdot\mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)$ 存在，那么根据严格性原理，$\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)$ 和 $\mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)$ 也存在；再根据归纳假设，$(\mathrm{l}^{*}x.\,\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ 和 $(\mathrm{l}^{*}x.\,\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)$ 也存在。因此我们可以应用 (1)。反过来，设

$$s\cdot(\lambda^{*}x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot(\lambda^{*}x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b\ \text{exists}.$$

Then

$$\begin{aligned}s\cdot(\lambda^{*}x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot(\lambda^{*}x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b=&\\(\lambda^{*}x.\mathbf{r})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b\cdot((\lambda^{*}x.\mathbf{q})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}(c)\cdot b)&\quad\text{by (1)}\\=\mathbf{r}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)\cdot\mathbf{q}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b)&\quad\text{by induction hypothesis}\\=\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}(c,b).&\end{aligned}$$

根据严格性原理，(l*) 蕴含：

$$\mathrm{Dom}\,(\lambda^{*}x.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{Y\setminus\{x\}}\supseteq\{c\in A^{Y\setminus\{x\}}\mid\exists b\in A.\,c\cup\{\langle b,x\rangle\}\in\mathrm{Dom}\,\mathbf{p}^{\mathbf{A}}_{Y}\}\qquad(\mathrm{D}\lambda^{*}).$$

设 d 是 $\mathbf{A}$ 的左被动元素。取 $p\,\hat{\mathrm{I}}\,\mathrm{Pol}_{n}\mathbf{A}$。设 $p=\mathbf{p}^{\mathbf{A}}$，其中$\mathbf{p}\,\hat{\mathrm{I}}\,T_{C\cup A}(x_1,\ldots,x_n)$；定义

$$a:=\ d\lhd\mathrm{Dom}\,p=\emptyset\rhd(\lambda^{*}x_1\ldots\lambda^{*}x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{\emptyset}.$$

如果定义域$p=\emptyset$，那么$ab_1\ldots b_n$ 和$p(b_1,\ldots,b_n)$对所有$b_1,\ldots,b_n\,\hat{\mathrm{I}}\,A$都同样发散。现在假设定义域$p\neq\emptyset$。于是我们使用 (Dl*)，经过$n$步得出 $(\mathrm{l}^{*}x_1\ldots\mathrm{l}^{*}x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}\downarrow}_{\emptyset}$。接下来我们计算

$$\begin{aligned}ab_1\ldots b_n&\simeq(\lambda^{*}x_1\ldots\lambda^{*}x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}b_1\ldots b_n&&\text{by definition}\\&\simeq(\lambda^{*}x_2\ldots\lambda^{*}x_n.\mathbf{p}(b_1,x_2,\ldots,x_n))^{\mathbf{A}}b_2\ldots b_n&&\text{by }(\lambda^{*})\\&\simeq(\lambda^{*}x_3\ldots\lambda^{*}x_n.\mathbf{p}(b_1,b_2,x_3,\ldots,x_n))^{\mathbf{A}}b_3\ldots b_n&&\text{likewise}\\&\simeq&&\\&!\ \mathbf{p}(b_1,\ldots,b_n)^{\mathbf{A}}=p(b_1,\ldots,b_n).&&\end{aligned}$$

由此可得，**A**是组合完备的。

如果**A**没有左被动元素，那么根据引理1，**A**是全定义的。于是**A**没有空多项式运算，因此只需定义

$$a\ :=\ (\lambda^{*}x_1\ldots\lambda^{*}x_n.\mathbf{p})^{\mathbf{A}}_{\emptyset}$$

以证明**A**是组合完备的。 ⊠

CORLLARY 3. 偏组合代数是组合完备的。

PROOF. 偏组合代数是半组合代数；根据引理1，非全定义的偏组合代数含有一个左被动元素。T

例4

令 $C = \{\cdot, s, k\}$ 为组合子代数的类型，X 为任意变量集，N 为项重写系统 CL := 在 $T_C(X)$ 中的范式集合。

$$sxyz \to xz(yz),$$
$$kxy \to x.$$

在N上定义乘积运算 * 如下

$$\mathbf{m} * \mathbf{n} := \text{the normal form of } \mathbf{mn}.$$

（系统 CL 是合流的，因此范式是唯一的。参见 [Te]。）

结构$\mathbf{N} = \langle N, *, s, k \rangle$是一个部分组合代数：CL 的重写规则对应于定律 (1) 和 (2)，并且如果**m**和**n**是 CL 的范式，那么s**mn**也是范式。因此，推论3蕴含**N**（或者说，其 pargoid 约化结构）是组合完备的。

推论3的逆命题是

(†) 每个组合完备偏群都可以扩展为一个部分组合代数。

通过对例4稍作变通，我们将证明(†)并不成立。

例5

设 **N** 如上例所示；只需假设 X 是无限集。令 $\omega := s\mathbf{ii}$。项 ω 属于 N，但 $\omega * \omega$ 不存在。定义：$\mathbf{d} := s(k\omega)(k\omega)$。于是 **d** 是 **N** 的一个左被动元素（根据引理1的证明）。现在令

$$L := \{\mathbf{n} \in N \mid (\mathbf{n} * x)\downarrow \text{ for } x \in X \setminus \mathrm{Var}\mathbf{n}\},$$

并且 $N¢ = L \cup \{\mathbf{d}\}$. 注意，$L$ 包含所有不含常量符号 s 和 k 的项。令 **N¢** 为 **N** 的相对子结构，其论域为$N¢$。

PROPOSITION 5.1. **N¢** 是一个半组合代数。

PROOF. 设**p**和**q**是$T_C(X)$中的元素，且在 CL 中$\mathbf{p} \to \mathbf{q}$。那么，**p**和**q**要么具有相同的范式，且该范式属于$N¢$；要么二者在$N¢$中都没有范式。因此$\mathbf{N¢} \models \mathbf{p} ! \mathbf{q}$；并且若$\mathbf{q} \in X$，则$\mathbf{N¢} \models \mathbf{p} \approx \mathbf{q}$。由此，**N¢**满足等式 (1) 和 (2)。§

COROLLARY 5.2. **N¢**是组合完备的。

PROOF. 将定理 2 与上述命题，以及 pargoid **P** 的左被动元素在**P**的相对子结构中也左被动这一事实结合起来。

⊡

CL 范式ω属于L，因为$\omega * x = xx$。因此$k\omega \in L$也成立。同理，$s\omega\mathbf{i} \in L$：$s\omega\mathbf{i} * x = xxx$；并且$k(s\omega\mathbf{i}) \in L$。现在注意到$s\omega\mathbf{i} * \omega$-：

$$s\omega\mathbf{i}\omega \to \omega\omega(\mathbf{i}\omega) \to^+ \omega\omega\omega \to^+ \omega\omega\omega.$$

因此，范式$s(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega)$在**N**中是左被动的（参见引理1的证明）；但$s(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega) \neq \mathbf{d}$，所以$s(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega) \notin N¢$。因此$\mathbf{N¢} \not\models (0)$；所以**N¢**不是部分组合代数。

然而，这尚未否定 (†)，因为形式上，组合完备性是 pargoid $\mathbf{N¢}\restriction\{\cdot\}$ 的一种性质。

PROPOSITION 5.3. 不存在$\mathbf{t}, \mathbf{u} \in N¢$，使得 $\langle N¢, *, \mathbf{t}^{\mathbf{N}}, \mathbf{u}^{\mathbf{N}} \rangle$ 是一个部分组合代数。

PROOF. 我们将证明，不存在$\mathbf{t}\hat{I}N¢$，使得

(3) $$\mathbf{N}' \vDash \mathbf{t}xy \;\&\; \mathbf{t}xyz \simeq xz(yz).$$

设 **t** 满足 (3)。那么 $\mathbf{N}' \vDash \mathbf{t}(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega)$。取三个变量 x、y 和 z，它们都不属于 Var**t**。由 (3) 可得，由于 $xz(yz)\downarrow$，

$$\mathbf{t}xyz \to^{+} xz(yz);$$

在归约中将 $k(s\omega\mathbf{i})$ 代入 x，并将 $k\omega$ 代入 y 后，结果为

$$\mathbf{t}(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega)z \to^{+} k(s\omega\mathbf{i})z(k\omega z).$$

但是 $k(s\omega\mathbf{i})z(k\omega z)$ 可归约为 $s\omega\mathbf{i}\omega$，因此没有范式。所以

$$(\mathbf{t}(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega))^{\mathbf{N}'}_{X}(1_X) \notin L;$$

因此，$\mathbf{t}(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega)$ 的范式必定是 **d**。我们由此得出，一方面，$\mathbf{t}(k(s\omega\mathbf{i}))(k\omega)z$ 可归约为 $s\omega\mathbf{i}\omega$；另一方面，它也可归约为 $\mathbf{d}z$，进而归约为$\omega\omega$。由于 CL 是合流的，$\omega\omega\omega$ 和 $\omega\omega$ 应当有一个共同的归约结果。但显然并非如此。

☒

例6

图灵在 [Tu] 中描述了一种计算机器的概念，并论证它涵盖了所有可能设想的算法。存在图灵机及其计算的双射枚举，使得谓词 $Texy$，

“输入 x 时，图灵机 e 在计算 y 后终止”，

是原始递归的，而从表示某次计算的数中读出结果（如果存在）的函数 U 是可计算的。指标为 e 的可计算函数定义如下：

$$\varphi_e(x) \simeq U(\mu y.Texy).$$

根据递归定理，存在全定义的可计算函数 f 和 g，使得对所有 x、y、z Î $，

$$\varphi_{f(x)}(y) \simeq x \;\text{ and }\; \varphi_{g(x,y)}(z) \simeq \varphi_{\varphi_x(z)}(\varphi_y(z));$$

以及全定义的可计算函数 h，使得对所有 x 和 y Î $，$\mathrm{j}^{h(x)}(y) = g(x, y)$。

现在令 s 为 h 的一个指标，并令 k 为 f 的一个指标。在 $ 上定义乘积运算如下：

$$x \cdot y \simeq \varphi_x(y).$$

Then

$$k \cdot x = f(x) \quad \text{en} \quad s \cdot x \cdot y = g(x, y);$$

更不用说，定律 (1) 和 (2) 都成立。因此，á$, ·, s, kñ 是一个偏组合代数。

§5. 结论

上述内容可以视为又一个例子，说明在偏运算下进行推理有多么复杂。

在我看来，多项式运算的定义尽可能一般。顺便说一句，采用较不一般的定义会扩大组合完备 pargoid 的类别，因此并不会减少例5上方陈述 (†) 的反例。

Feferman 的论证适用于 Shafer 和 Terwijn 在 [ST] 中研究的可计算性理论帕戈伊德——例6描述了其中最简单的一个。

因此，例6中的函数 g 将两个数转换为算法代码；只要我们不对这些代码抱有过高期望，这种转换总是可能的。然而，组合完备偏群并无内在理由必须将代码与风险计算区分开来。

致谢。与 Henk Barendregt 讨论本文早期版本后，论文的表述得到了显著改进。

参考文献

[ALV] Ralph N. McKenzie、George F. McNulty 和 Walter F. Taylor：《代数、格与簇》。第一部分。Belmont，1987 年。[B] I ngemarie Bethke：关于外延偏组合代数的存在性。《符号逻辑学杂志》LII:3（1987），819-33。[D] René Descartes：《谈谈正确引导理性和寻求科学真理的方法》。Leiden，1637 年。[F] Solomon Feferman：显式数学的语言与公理。载于《代数与逻辑》，J.N. Crossley 编（1975），第 87-139 页。[LE] E.S. Ljapin 和 A.E. Evseev：《偏代数运算理论》。Dordrecht，1997 年。[RT] Gerard Renardel de Lavalette 和 Anne Troelstra：对 [F] 的评论。《符号逻辑学杂志》IL:1（1984），308-311。[S] Robert I. Soare：《图灵可计算性》。Berlin，2016 年。[ST] Paul Shafer 和 Sebastiaan A. Terwijn：偏组合代数的序数分析。《符号逻辑学杂志》LXXXVI（2021），1154-1188。[Te] Terese：《项重写系统》。Cambridge，2003 年。[Tu] A.M. Turing：论可计算数及其在判定问题上的应用。《伦敦数学学会会刊》第二辑，42（1936），230-265。