arXiv:2302.10013v1 [quant-ph] 20 Feb 2023

代数量子场论中的复杂度

Stefan Hollands

莱比锡大学理论物理研究所，Brüderstrasse16，04103 莱比锡；MPI-MiS, Inselstrasse 22，04103 莱比锡，德国，stefan.hollands@uni-leipzig.de

Alessio Ranallo

罗马第二大学 Tor Vergata 数学系，Via della Ricerca Scientifica, 1, I-00133 罗马，意大利，ranallo@mat.uniroma2.it

2023年2月21日

摘要

我们研究相对论连续量子场论（QFT）中量子信道复杂度的一种定义，该复杂度由信道与平凡（恒等性）量子信道之间的距离来刻画。我们采用的距离度量基于一种特定的量子信道间散度，该散度源自别尔金-斯塔谢夫斯基（BS）散度。我们在量子场论中代数所需的一般性前提下证明，相应的复杂度具有若干合理性质：（i）复合信道的复杂度不大于其各部分复杂度之和；（ii）对于局域化在类空分离区域的量子信道，复杂度具有可加性；（iii）复杂度具有凸性；（iv）对于一个 N 元测量通道，其复杂度为 log N；（v）对于与具有有限琼斯指数的量子场论包含相关联的条件期望，其复杂度为 log(Jones Index)。本文的主要技术工具是一个针对 BS 散度的新变分原理。

1 引言

量子信息论中一个兼具理论和实际意义的问题，是评估量子态或量子操作的“复杂度”。一种自然的方法是，将从某个被视为“基本”的底层操作集合中选取的最少操作次数，作为复杂度的度量 [1, 2, 3]。这一领域的典型结果包括复杂度在时间演化下增长的界，参见例如 [4, 5]。此外还有

一些关于反德西特/共形场论对应的方案，将边界量子场论（量子场论）中某个态的复杂度增长与体内的各种几何量联系起来，参见例如 [6, 7, 8]。

人们可能会问，如何在不借助全息思想的情况下，直接在相对论连续时空量子场论中定义复杂度这一概念。在量子场论中，首先面临的问题是确定一组合适的基本操作，以此来评估复合操作的复杂度。若要与诸如 [4, 5], 这样的思想保持密切类比，似乎就必须在理论的某种格点正则化中指定一组优选的局域量子场算符。例如，对于高斯场论，具体方案包括 [9, 10], ，但在移除 UV 截断时会导致发散结果[1] 。对于一般的量子场论，我们认为，鉴于普适性现象，算符基和格点正则化都极不唯一；无论如何，它们显然也会破坏理论的相对论不变性。

解决这一问题的一种方法是从更宏观的角度审视问题，不再围绕基本操作这一概念，而是转而关注两个量子信道之间某种合适的"距离"概念 $D(S\|T)$, S, T。于是，复杂度可定义为 $c(T) = D(id\|T)$，即与平凡（恒等）量子信道之间的距离。当然，我们希望 D 具有某些特定性质，以便将其与复杂度这一思想联系起来。自然的要求包括：

- 次可加性： $c(T_1 \circ T_2) \leq c(T_1) + c(T_2)$，这表示复合信道的复杂度不大于各部分复杂度之和。特别地，对于由量子信道构成的单参数（马尔可夫）半群 T_t, $t \geq 0$ 我们可直接得到复杂度至多随时间线性增长，即 $c(T_{Nt_0}) \leq C_0 N$。

- 局域性：如果 T_1 和 T_2 局域化在系统中类空分离的区域，则有 $c(T_1 \circ T_2) = c(T_1) + c(T_2)$。这表示复杂度 c 遵循爱因斯坦因果性／局域性。

- 凸性：考虑以一定概率 p_i 随机执行操作 T_i ，自然会提出这样的要求： $c(\sum p_i T_i) \leq \sum p_i c(T_i)$。

一种获得量子信道散度概念（因此也得到 c）的方法，是从量子态之间通常意义下相应的散度 $D(\varphi\|\psi)$入手[2]φ, ψ （例如参见 [11]），考察 T 和 S 作用于某个态时产生的偏差有多大，并用这一散度加以量化。基于这一思路，一个直观的猜想是

[1]全息方法中也自然会出现相应的散度。[2] 本文遵循算子代数中的惯例，将态 ψ 定义为可观测量代数上的正泛函。对于矩阵代数， $\psi(m) = \mathrm{Tr}(m\rho_\psi)$，其中 ρ_ψ 是相应的密度矩阵；我们的惯例见第 2.1 节。

考虑 $\sup_\psi D(\psi \circ S \| \psi \circ T)$，其中最大化遍历系统的所有归一化态，且 $\psi \circ T$ 是量子信道对该态的作用ψ；本文将其视为作用于可观测量上的期望泛函，见脚注 2。然而，众所周知，这一概念实际上不足以描述量子系统，因为将相关系统与辅助系统耦合，并考虑原系统与辅助系统之间具有适当设计的纠缠的态，可以获得有关量子信道作用的更精细信息。因此，应改为定义

$$D(S\|T) = \sup_{\psi,\mathcal{A}} D(\psi \circ (S \otimes id_{\mathcal{A}}) \| \psi \circ (T \otimes id_{\mathcal{A}})) \tag{1}$$

此处的最大化是在原始可观测量代数 M 与辅助代数 A 的张量积上所有态中进行的。这也是我们将采用的定义，但须注意一些技术上的细节：我们要处理的是适用于量子场论的、类型足够一般的冯·诺依曼代数。[3]

当然，主要的问题是我们应该从什么出发。 D 一种可能的做法是沿着 [2, 3] 所提出的思路采用几何方法。另一方面，在 [14], 中，作者提出使用经典“瓦瑟斯坦距离”的一种特定量子版本 [15]，参见例如 [16], ，并由此推导出相应复杂度概念的若干令人信服的性质，包括上文列出的那些性质。 [15] 定义的量子瓦瑟斯坦距离适用于希尔伯特空间为$(\mathbb{C}^d)^{\otimes N}$的有限维系统。虽然有可能将其推广到量子场论中出现的 III 型冯·诺依曼代数 [17], ，但我们在此采用不同的做法，转而使用所谓的别尔金-斯塔谢夫斯基（BS）散度 [18] D_{BS}。[4] 最近， [20] 在量子信道判别的背景下研究了这种散度，而它

$$D_{BS}(\varphi\|\psi) = \mathrm{Tr}(\rho_\varphi \log[\rho_\varphi^{1/2}\rho_\psi^{-1}\rho_\varphi^{1/2}]) \tag{2}$$

对于矩阵代数。这里， ρ_ψ 是表示期望泛函 ψ的密度矩阵，即对于所有 $m \in \mathsf{M}$， $\psi(m) = \mathrm{Tr}(m\rho_\psi)$。可以将其推广到任意冯·诺依曼代数 [21, 22]。我们考虑 D_{BS} 的原因是， [23] （另见 [24]）已证明，在有限维情形下，相应的信道散度具有所需的次可加性[5] ，这与

[3]在冯·诺依曼代数的框架下，用另一个冯·诺依曼代数 A 来建模辅助系统是最自然的做法；而限制该系统的性质似乎并不自然，例如，强制要求 A 必须属于某种特定类型，如 I_n。那么，我们还必须考虑一个扩大的希尔伯特空间，使原有的冯·诺依曼代数和辅助代数 A 都作用于其上；也就是说，我们必须考虑冯·诺依曼代数双模，参见例如[12, 13] 及其中的参考文献。[4]在量子场论的背景下，也有人研究过这类散度，见 [19]。[5]事实上，这些作者研究的是相应的 Rényi 型“几何散度”，而 BS 散度正是其极限情形。

其他一些著名的散度（例如更常用的荒木－上米加相对熵 [25]）不同。在这项工作中，我们在一般冯·诺依曼代数的背景下分析相应的信道散度，并证明相应的复杂度概念具有上述性质。

因此，它在量子场论中具有潜在用途。我们还证明了若干其他性质：

1. 若 $T(a) = uau^*$ 是对应于非平凡局域幺正算子的量子信道，则 $c(T) = \infty$。
2. 若 $T(a) = \rho(a)$ 是对应于量子场论的一种非平凡表示（“荷超选择扇区”）的量子信道，则 $c(\rho) = \infty$。3. 若 $M(a) = \sum_{i=1}^{N} e_i a e_i$ 是对应于局域 N 元冯·诺依曼测量的量子信道，则 $c(M) = \log N$。4. 设 E_ρ 是从 $\mathsf{A}(O)$ 到 $\rho(\mathsf{A}(O))$ 的（极小）条件期望，其中 ρ 是一个荷超选择扇区（带荷表示），则

$$c(E_\rho) = \log(\text{Jones Index}) = \log d_\rho^2, \tag{3}$$

这里我们指的是包含 $\rho(\mathsf{A}(O)) \subset \mathsf{A}(O)$ 的琼斯指数 [26]，而 d_ρ 是该扇区的统计（或“量子”）维数。[6]

条目 1)、2) 基本上是否定性结果，但如果我们记得，在连续时空量子场论中，任何局域操作（即发生在有限时空区域内的操作）仍必然涉及无限多个自由度，那么这些结果或许也并非完全不合理。条目 3)、4) 中的量子信道是条件期望。这表明，它们应被视为量子场论中的基本操作。

在 3) 中，实现“设置单个 q-比特”这一思想的特定测量，可以轻而易举地构造如下。设想量子场论有一个“基本”的实标量场 ϕ，并考虑一个位于某个时间切片、边长为 δ 的立方体。令 f 为一个支撑于该立方体内的非负试验函数，并令 $S = \int \phi(0, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^{n-1}\mathbf{x}$，其中 n 是时空的维数；再令 $p_\pm$ 为对应于对 S 进行正/负测量的投影算子。沿 $n-1$ 个空间方向周期性地平移该立方体，我们便可得到一个有限晶格 Λ，以及与之对应的投影算子 $p_{\mathbf{x},\,\sigma}$，$\sigma = \pm$，$\mathbf{x} \in \Lambda$，它们分别关联于（对偶）晶格上的每个点 $\mathbf{x}$。于是，我们可以定义投影 $e(\{\sigma\}) = \prod_{\mathbf{x}\in\Lambda} p_{\mathbf{x},\,\sigma(\mathbf{x})}$，每个投影都对应于测量一种特定的晶格构型 $\{\sigma\}$，例如

[6] 最后一个等式直接由指标-统计定理 [27] 得出。

+	−	−	+	−
−	−	+	+	+
−	+	−	−	−
−	+	+	−	+
−	+	+	−	+

相应测量通道的复杂度显然为

$$c(M) = \frac{\mathrm{vol}(\Lambda)}{\delta^{n-1}} \log 2 \tag{4}$$

作为第 4) 项的一个例子，考虑一个由实 N 分量自由复克莱因-戈登量子场 $\phi_I(x)$ $I = 1, \ldots, N$构成的量子场论。我们将 $SU(N)$ 对称性下的电荷中性算符（规范不变可观测量）视为可观测量。考虑希尔伯特空间中的一个态 Ψ，它属于 $SU(N)$ 的某个非平凡表示 R。于是， Ψ 无法通过任何电荷中性算符 a 的作用由真空 Ω 生成，因此建立在 Ψ 上的电荷中性算符表示与真空表示不幺正等价。事实上，根据 DHR理论 [28, 29], ，存在一个电荷中性算符代数的端同态 ρ ，使得

$$\langle \Omega, \rho(a)\Omega \rangle = \langle \Psi, a\Psi \rangle \quad \text{for all charge neutral } a, \tag{5}$$

并且 ρ 以表示 R 实现了带电扇区。该扇区的统计维数 d_ρ 在这种情况下等于表示 R 的维数 d_R ，例如 $d_\rho = N^2 - 1$ ，当 R 是伴随表示时。该构造的细节见下文例 4.10。对于低维量子场论， d_ρ 不必是整数。

事实上，根据琼斯定理，4) $(= d_\rho^2)$ 中的琼斯指数只能取集合 $\{4\cos^2(\pi/n) : n = 3, 4, 5, \ldots\} \cup [4, \infty]$ 中的值；其中最小的非平凡值为 2，例如，（4，3）极小模型（伊辛）中量子维数为 $d_\rho = \sqrt{2}$ 的扇区 ρ 就实现了这一值。我们猜想，对于任意局域通道 T[7]

$$\text{Either} \quad c(T) \geq \log 2 \quad \text{or} \quad T = id \quad (\text{conjecture}), \tag{6}$$

这让人想起著名的朗道尔界。

本文结构如下。第 2 节首先回顾冯·诺依曼代数上态的 f 散度和算子均值理论，并介绍我们的主要技术工具，即 D_{BS} 的变分刻画（命题 2.17）。第 3 节介绍一般类型冯·诺依曼代数的量子信道的 D_{BS} ，并证明一些基本性质。第 4 节将这些结果应用于量子场论。

[7]这尤其意味着，对于任意以量子信道为元素的 1 参数马尔可夫半群 T_t (T_t) ，c 在 $t = 0$ 处必然不连续。

2 预备知识

2.1 冯·诺伊曼代数术语和基本对象

例如，可参见 [30]，作为一般性参考。

- 冯·诺伊曼代数：冯·诺依曼代数 M 是希尔伯特空间上有界算子代数 $B(\mathscr{H})$ 的一个闭 $*-$子代数，并且采用弱算子拓扑。弱拓扑由矩阵元定义，即开邻域为 $N(\xi_i, \eta_i, \varepsilon, a) = \{b : |\langle \xi_i, (b-a)\eta_i \rangle| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}$，其中 $a \in B(\mathscr{H})$ $\xi_i, \eta_i \in \mathscr{H}, \varepsilon > 0$。本文中出现的所有希尔伯特空间都假设为可分的。算子 $m \in$ M 的平方范数 $\|m\|^2$ 定义为正算子 mm^*的谱 $\sigma(mm^*)$ 的上确界。所有此类算子组成的子集记为 M_+ （正部分）。

- 任意有限维冯·诺伊曼代数都同构于某个 n_i 的 $\mathbb{C}$ 上的 $\oplus_{i=1}^{N} M_{n_i}$，其中 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数 $n \times n$ 矩阵组成的代数。

- (双)交换子：冯·诺依曼代数的一种等价刻画是 $\mathrm{M}'' = \mathrm{M}$，其中 $\mathrm{M}' := \{ x \in B(\mathscr{H}) \mid xm = mx \ \forall m \in \mathrm{M}\}$ 是 M 在 $B(\mathscr{H})$ 中的交换子，而 $\mathrm{M}'' = (\mathrm{M}')'$ 是双交换子。若 $\mathrm{M} \cap \mathrm{M}' = \mathbb{C}1$，则称冯·诺依曼代数为因子。记 $\mathrm{A} \vee \mathrm{B} = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})''$为由有界算子集合 A,B 生成的冯·诺伊曼代数。

•态：态是一个线性、正、正规、归一化泛函 $\psi : \mathrm{M} \to \mathbb{C}$；其中，正表示对所有 $m \in \mathrm{M}$，均有 $\psi(mm^*) \geq 0$；归一化表示 $\psi(1) = 1$。若线性泛函 ψ 超弱连续，则称其为正规；若正线性泛函 ψ 满足 $\psi(mm^*) = 0 \Longrightarrow m = 0$，则称其为忠实。正规态的集合也记作 $\mathrm{M}_{*,+}$。由于我们假设 $\mathscr{H}$ 可分，因此保证存在正规、忠实的正线性泛函。在矩阵代数上，每个态都具有以下形式

$$\psi(m) = \mathrm{Tr}(m\rho_\psi) \tag{7}$$

对于唯一的密度矩阵 ρ_ψ。

- 量子信道：态概念的推广。量子信道 $T : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 是一个正规、正、幺正（意即 $T(1) = 1$）的线性映射，同时也是完全正的，也就是说，$T \otimes id : \mathrm{M} \odot B(\mathscr{K}) \to \mathrm{N} \odot B(\mathscr{K})$ 是正的，其中 $\odot$ 表示代数张量积，$\mathscr{K}$ 是任意希尔伯特空间。若 ψ是 N 上的一个态，则 $\psi \circ T(m) := \psi(T(m))$ 是 M 上的一个态，而 $\psi \mapsto \psi \circ T$

对应于量子信道对态的对偶作用（薛定谔绘景）。许多量子信息论文献采用薛定谔绘景，但这当然只是约定不同。对于有限维冯·诺依曼代数 N，M，薛定谔绘景中的 T作用也可以看作是对密度矩阵（7）的作用 T^+，

$$\mathrm{Tr}(T^+(\rho_\psi)m) = \mathrm{Tr}(\rho_\psi T(m)) \equiv \psi \circ T(m) \quad m \in \mathcal{M}. \tag{8}$$

那么， T^+ 是完全正且保迹的（对应于 T(1) =1）。

- 标准形：若向量 Ω $\in$ $\mathscr{H}$ 满足 MΩ 在强拓扑下于 $\mathscr{H}$中稠密，则称其为循环向量；若 mΩ $= 0 \Longrightarrow m = 0$，则称其为分离向量。对 M 的这种表示及向量，总可以通过忠实正规态 ω的 GNS表示得到。循环分离向量也称为标准向量，而在希尔伯特空间上具有标准向量的 M 的表示称为标准表示。与 Ω 相关联的是 $\mathscr{H}$ 上的一个反线性对合 J，满足 JΩ $=$ Ω，且 JMJ = M′，称为模共轭。形如$aJaJ$Ω $a \in$M 的向量所构成集合的闭包称为“自然锥”，也记作 L^2(M，Ω)$_+ \subset \mathscr{H}$。

- 条件期望：若 N $\subset$M 是冯·诺依曼子代数，则条件期望 E : M $\to$ N 是一个量子信道，满足 E(n_1mn_2) $= n_1E(m)n_2$，对所有 $m \in$M $n_i \in$N 均成立。条件期望的指标 $\lambda_E \in [1, \infty]$ 是所有满足$E(mm^*) \geq \lambda^{-1}mm^*$ 对所有 $m \in$ M 均成立的正实数 λ 的下确界。

- 琼斯指标：假设 N、M 是因子，且存在一个条件期望 E : M $\to$ N。若 $\lambda_E < \infty$，则存在唯一一个被称为“极小条件期望”的 E_0 [31]，使得 λ_{E_0} 为极小；在这种情况下， $\lambda_{E_0} =: [\mathrm{M} : \mathrm{N}]$ 被称为该包含的琼斯-小崎指标 [32, 26]。否则，令 $[\mathrm{M} : \mathrm{N}] = \infty$。

- L^p空间：可以构造所谓的“非交换 L^p 空间”（$p \in [1, \infty]$），在 M 上的正规泛函空间与 M 本身之间进行插值。它们是相对于某个标准向量 Ω 定义的，记作 L^p(M，Ω)，见 [33]。有 L^2(M，Ω) $= \mathscr{H}$。除此之外，我们只需要 L^∞(M，Ω)，它是 $\mathscr{H}$ 的线性子空间；我们主要使用该空间的以下刻画 [33]：作为向量空间，L^∞(M，Ω) $=$ MΩ。巴拿赫空间范数为 kξk$_{L^\infty(\mathcal{M},\ \Omega)}$ $=$ km k，其中 $m \in$M 是满足 $\xi = m$Ω 的唯一元素。

- 对代数：冯·诺依曼代数 M 的对代数 M^{op} 作为向量空间与 M 相同，具有相同的 $*$-运算，但乘法顺序相反$m_1^{op}m_2^{op}$ =$(m_2m_1)^{op}$。

2.2 有界算子的最大 f-散度

参见 [34, 35, 21, 36] 作为一般参考文献。算子均值的概念以及本文所研究的散度，核心在于算子单调函数和算子凸函数的概念。

定义 2.1。令 $I \subset \mathbb{R}$ 为一个区间。$f:\ I \to \mathbb{R}$ 称为

- 算子单调的，如果对于希尔伯特空间上的自伴算子 $f(A) \le f(B)$，只要 A、$B \in B(\mathscr{H})$ 满足 $A \le B$ 且它们的谱满足$\sigma(A)\ \sigma(B)\ \subset I$；

- 算子凸的，如果 $f(\lambda A+(1-\lambda)B)\ \le\ \lambda f(A)\ +(1-\lambda)f(B)\ \ \forall\lambda\ \in$只要 $(0,1)$ A、$B \in B(\mathscr{H})$，且 $\sigma(A)\ \sigma(B)\ \subset I$。

注 2.2。令 $t_0 \in (0,\infty]$ 和 $f\colon\ [0,t_0)\ \to\ \mathbb{R}$。则（$f$ 为算子凸函数且 $f(0)\ \le 0$）当且仅当（$\frac{f(t)}{t}$在 $(0,t_0)$ 上为算子单调函数）。此外，如果$f\colon\ [0,t_0)\ \to \mathbb{R}$ 为算子单调函数，则它也是算子凹函数。虽然反之不成立，但若（f 为算子凹函数且对所有$t \in [0,\infty$都有 $f(t)\ \ge 0$ ）则（f 在 $[0,\infty$ 上为算子单调函数）。

例 2.3. 在 $[0,\infty)$ 上，函数 t^α 是算子单调的，当且仅当 $\alpha \in[0,1]$。t^α 是算子凸的，当且仅当 $\alpha \in [-1,0]\cup[1,2]$。函数 $\log(t)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上是算子单调的。

以下著名的表示式 (9) 可将许多涉及算子单调函数的构造化约为某个特殊算子单调函数的加权平均。考虑定义在 $[0,\infty)$ 上的连续算子单调函数 f，令 $a\ =\ f(0)\ \ b\ =\ f'(\infty):=\lim_{t\to\infty}{}^{f(t)}t$。存在唯一的有限正拉东测度 μ，定义在 $[0,\infty)$ 上，使得

$$f(t) = a + bt + \int_{(0,\infty)} \frac{(1+s)t}{t+s} d\mu(s). \tag{9}$$

定义 *2.4*（久保–安藤均值，[37]）。考虑作用于$B(\mathscr{H})_+$（非负自伴有界算子）上的二元运算 σ，即 $\sigma:\ B(\mathscr{H})_+\times B(\mathscr{H})_+ \to B(\mathscr{H})_+$。记 $\sigma(A\times B)\ =:\ A\sigma B \in B(\mathscr{H})_+$。若对所有 A、B、C、$D \in B(\mathscr{H})_+$，下列条件均成立，则称 σ 为久保–安藤联结

1. 联合单调性，即 $A \le C$，$B \le D$，则 $A\sigma B \le C\sigma D$；

2. 变换不等式，即 $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$;

3. 上半连续性，即当 $A_n \downarrow A$, $B_n \downarrow B$ 强收敛时， $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$也强收敛。

此外，若上述条件成立且满足以下条件，则称 σ 为（*Kubo–Ando* 算子）均值

4. 规范化，即

$$I_{\mathscr{H}}\sigma I_{\mathscr{H}} = I_{\mathscr{H}}.$$

Kubo–Ando 定理建立了算子联络与定义在 $[0,\infty)$ 上的非负算子单调函数之间的一一对应关系，参见 [37, 定理 3.3、3.4]。该同构由 $\sigma \mapsto f$给出，其中$f(t)I_{\mathscr{H}} := I_{\mathscr{H}}\sigma(tI_{\mathscr{H}})$。其逆映射 $f \mapsto \sigma$ 通过取定义在 $[0,\infty)$ 上的非负算子单调函数 f的积分表达式 (9)， $f(t) = a + bt + \int_{(0,\infty)} \frac{(1+s)\,t}{t+s}\, d\mu(s)$，然后定义相应的 σ：

$$A\sigma B := aA + bB + \int_{(0,\infty)} \frac{1+t}{t}[(tA) : B]\, d\mu(t) \tag{10}$$

这里， $A : B$ 是平行和算子联络，它定义为有界二次型（例如参见 [35,引理 3.1.5]）

$$\langle \xi, (A : B)\xi\rangle := \inf\{\langle \zeta, A\zeta\rangle + \langle \xi - \zeta, B(\xi - \zeta)\rangle \ : \ \zeta \in \mathscr{H}\}. \tag{11}$$

当 A 和 B 是具有有界逆算子的正算子时,

$$A : B = (A^{-1} + B^{-1})^{-1}. \tag{12}$$

例 2.5 （左平凡均值和右平凡均值）。左平凡均值 σ_1 由函数 $f(x) \equiv 1$ 诱导，并给出 $A\sigma_1 B = A$。右平凡均值 σ_x 由 $f(x) = x$ 诱导，并给出 $A\sigma_x B = B$。

例 2.6 （α–几何均值）。 α–几何均值由算子单调函数定义

$$f_\alpha(t) := t^\alpha = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{t}{s+t} \frac{ds}{s^{1-\alpha}}, \quad t \geq 0, \alpha \in (0,1). \tag{13}$$

因此，相应的测度 μ_α 和常数 a_α， b_α 如式 (9) 所示，为

$$d\mu_{f_\alpha} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{t^\alpha dt}{t(t+1)}, \quad a_\alpha = b_\alpha = 0. \tag{14}$$

具体例包括左平凡均值、右平凡均值以及满足 $\alpha = 1/2$ 的几何均值。

例 2.7 （对数）。 对数 $f(t) = \log t$ 在 $(0, \infty)$ 上是算子单调的，并且形式上具有 $a = -\infty$、 $b = 0$ 和 $d\mu_{\log} = t^{-1}(1+t)^{-1}dt$。我们通常考虑近似 $f_n(t) := \log(t + \frac{1}{n})$ $n \in \mathbb{N}$，它在 $[0, \infty)$ 上是算子单调的，其中 $a_n = -\log n$， $b_n = 0$。

考虑两个有界正算子，使得 $B \leq \lambda A$ 对于某个 $\lambda < \infty$成立。那么 $f(A^{-1/2}BA^{-1/2}) \leq f(\lambda)I$是一个有界算子，而与算子单调函数 f 对应的 Kubo-Ando 均值σ 也可表示为 [37,定理 3.3]

$$A\sigma B = A^{1/2} f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}, \tag{15}$$

从积分表示（9）、（10）以及平行和（12）的表达式可以看出这一点。以下散度最早出现在 [38] 中，随后在 [39], [40]中得到了进一步发展。

定义 2.8. 考虑一个非负算子单调函数 f： $[0, \infty) \to [0, \infty)$，其由 （9） 刻画；再考虑正迹类算子 A, B，使得 $B \leq \lambda A$ 对于某个 $\lambda > 0$成立。那么， A 相对于 B 的“最大量子 f–散度”定义为

$$D_f(A\|B) := -\log \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}(A\sigma B), \tag{16}$$

其中， σ 是与 f对应的算子联络。

注 2.9. 对于一般的正迹类算子 A， B 使得 $B \leq \lambda A$可能对任何 $\lambda < \infty$都不成立，定义如下

$$D_f(A\|B) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} D_f(A + \varepsilon C\|B + \varepsilon C) \in (-\infty, +\infty]. \tag{17}$$

这里， C是任意满足如下条件的有界正算子：对于某个 $\lambda < \infty$， $\lambda^{-1}(A + B) \leq C \leq \lambda(A + B)$。根据算子联络的单调性，极限存在，因为该序列单调递减。根据下面引理 2.12 的一个特例，该极限与 C 的具体选择无关。

2.3 冯·诺依曼代数上的最大 f-散度

算子联络和最大 f-散度可以从有界算子推广到更一般的情形，例如推广到适当类别的无界正二次型 [41, 42, 43]。在本文中，我们主要关注冯·诺依曼代数 M 上两个正正规泛函 φ， ψ 之间的算子联络和最大 f-散度的概念。文献 [22, 21] 对这一情形进行了详尽研究，可作为一般参考。基于附录 D]中的结果 [21,，例如可以相当容易地得到一种变分刻画

，它将成为本文大多数后续发展的基础。

冯·诺依曼代数框架下的出发点是 Connes 余循环，以及下面这个著名结果 [44], 定义可参见例如 [33] 关于模算子 Δ_ψ 和 Connes 余循环 $[D\psi : D\varphi]_t$。

引理 2.10. 设 ψ, φ 是$\mathcal{M}$上的正规正泛函，并假设 $\psi \leq \lambda\varphi$对于 $\lambda > 0$成立。那么，*Connes* 余循环导数 $[D\psi : D\varphi]_t$ 可延拓为一个弱连续（取值于$\mathcal{M}$的）函数 $[D\psi : D\varphi]_z$，其对条带 $-1/2 \leq \mathrm{I}z \leq 0$ 中的 z 解析，且在内部解析。生成元 $[D\psi : D\varphi]_{-i/2} \in \mathcal{M}$ 的范数小于 $\sqrt{\lambda}$，并且 $\Delta_\psi^{1/2} = [D\psi : D\varphi]_{-i/2}\Delta_\varphi^{1/2}$。

利用这一点和下一个引理，可以定义 [22]:

定义 2.11。 设 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个算子单调函数，并且 φ、ψ 是 $\mathcal{M}$ 上的正规正泛函，且存在 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda^{-1}\varphi \leq \psi \leq \lambda\varphi$。则有正可逆算子 $T_\varphi^\psi := ([D\psi : D\varphi]_{-i/2})^* [D\psi : D\varphi]_{-i/2} \in \mathcal{M}$。定义关于 ψ 的 φ 的最大量子 f–散度为

$$D_f(\varphi\|\psi) := -\log(\varphi(f(T_\varphi^\psi))). \tag{18}$$

引理 2.12。 （见 *[22]*）设 φ、ψ 是 $\mathcal{M}$ 上的正规正泛函。对于每个 $\phi \sim \varphi + \psi$，即存在 $\lambda > 0$ 使得 $\lambda^{-1}(\varphi + \psi) \leq \phi \leq \lambda(\varphi + \psi)$，极限

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} D_f(\varphi + \varepsilon\phi\|\psi + \varepsilon\phi) \in (-\infty, +\infty]$$

存在，且与上述 ϕ 的选择无关。

因此，作出如下定义 [22] 是有意义的。

定义 2.13。 设 φ, ψ 是 $\mathcal{M}$ 上的正规正泛函，且 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ 是一个算子单调函数。φ 关于 ψ 的最大量子 f-散度定义为

$$D_f(\varphi\|\psi) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} D_f(\varphi + \varepsilon\phi\|\psi + \varepsilon\phi) \tag{19}$$

其中 ϕ 是 $\mathcal{M}$ 上满足 $\phi \sim \varphi + \psi$ 的任意正正规泛函。注意，我们可以选择 $\phi = \varphi + \psi$。

注 2.14。 若 $\mathrm{M} = B(\mathscr{H})$ 是 I 型冯·诺依曼因子（或更一般地，是因子的直和），则 M 上的正正规泛函与 $\mathscr{H}$ 上的正迹类算子一一对应。在此对应关系下，上述最大 f-散度的定义化简为定义 2.8 和注 2.9。

注 2.15。细心的读者会注意到，与 [22], 相比，我们在定义 2.11 中要求 f 是算子单调的，而非算子凸的；态的顺序也反了过来，并且我们引入了对数。引入对数只是为了方便，使熵在张量积下具有可加性。若忽略对数，那么对于非负算子单调函数，我们的定义就化简为 [22] 的 $-\hat{}S_{-f}(\psi\mathrm{k}\varphi)$，注意到 $-f$ 是算子凸的。当然， [22] 的定义适用于更大的函数类，即所有算子凸函数。

2.4 最大 f–散度的性质

在冯·诺依曼代数的框架下，关于 D_f 和 D_{BS}以及态之间相应的连接 σ [8], 的许多性质已有研究，参见例如 [21,定理 4.4、命题 4.5]。在本文中， D_f 的变分公式和 BS 散度 D_{BS} 将成为重点，由此可以回过头来直接看出其中许多性质。首先，为冯·诺依曼代数 M 上的两个正规正泛函 φ， ψ 定义平行和 (12) 的一个类似概念：($z \in$M)

$$(\varphi : \psi)(zz^*) := \inf\{\varphi(xx^*) + \psi(yy^*) \mid x + y = z, x, y \in \mathcal{M}\}. \tag{20}$$

于是 φ： ψ 是 M 上的正正规泛函+ ，并通过将一般元素写成 M+中元素之差的形式，将其扩展到整个 M。利用平行和的概念，接下来可以通过类似公式的方式，定义与算子单调函数 f 相关联的算子均值 $\varphi\sigma\psi$ ，其表示为 (9)： $[0, \infty)$ $\to [0, \infty)$，作用于 M 上的两个正正规泛函之间 (10):

$$(\varphi\sigma\psi)(m) := a\varphi(m) + b\varphi(m) + \int_{(0,\infty)} \frac{1+t}{t}[(t\varphi) : \psi](m)\, d\mu(t), \tag{21}$$

其中 $a, b, d\mu$ 与 $a, b < \infty$ 对应于算子单调函数 f:$[0, \infty) \to [0, \infty)$，如式（9）所示。结合 [21, 定理 D.7、D.8、D.10], 可得

$$D_f(\varphi\|\psi) = -\log\left(a\varphi(1) + b\psi(1) + \int_{(0,\infty)} \frac{1+t}{t}[(t\varphi) : \psi](1)\, d\mu(t)\right). \tag{22}$$

由此关系和（20）即可轻松得到变分公式；另见 [36, 注 9.2] ，其中给出了 M $= B($ $\mathscr{H})$ 情形下一个密切相关的公式:

[8]本文将经常使用略显不严谨的术语“Kubo-Ando 均值”来指代此概念，尽管 Kubo-Ando 均值通常指的是 f： $[0, \infty) \to [0, \infty)$ 为算子单调函数且 $f(1) = 1$ 的情形。

命题 2.16。设 $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个单调函数，其表示为(9)，其中 a, $b<\infty$。设 ψ,φ 是$\mathcal{M}$上的正规正泛函。则有

$$\begin{aligned} &D_f(\varphi\|\psi)\\ &= -\log\left(a\varphi(1)+b\psi(1)+\inf_{(0,\infty)\xrightarrow{x}\mathcal{M}}\int_{(0,\infty)}(1+t)\left[\varphi(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\psi(y_ty_t^*)\right]d\mu(t)\right), \end{aligned} \tag{23}$$

其中，下确界取遍所有具有有限值域的阶梯函数 $x:(0,\infty)\to\mathcal{M}$，使得当 t 足够小时满足 $x_t=1$，当 t 足够大时满足 $x_t=0$，且 $y_t:=1-x_t$。

证明。注意，由于 $0\le[(t\varphi):\psi](1)\le\min(\psi(1)\ t\varphi(1))$，我们可以选取一个 $\delta>0$，以及一个 $K<\infty$，使得

- $|\int_{(0,\delta)}(1+t)\varphi(1)d\mu-\int_{(0,\delta)}\frac{1+t}{t}[(t\varphi):\psi](1)d\mu|\le\varepsilon$
- $|\int_{(K,\infty)}\frac{1+t}{t}\psi(1)d\mu-\int_{(K,\infty)}\frac{1+t}{t}[(t\varphi):\psi](1)d\mu|\le\varepsilon$

然后我们定义 $y_t=0,t<\delta$，以及 $y_t=1,t>K$。接下来，构造一个具有有限值域的阶梯函数 $x:(\delta,K)\to\mathrm{M}$，使得 $\int_{(\delta,K)}(1+t)\left[\varphi(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\psi(y_ty_t^*)\right]d\mu$ 在容差 ε 内逼近 $\int_{(\delta,K)}\frac{1+t}{t}[(t\varphi):\psi](1)$。这可以通过利用拉东测度 μ 的内正则性来实现；有关这一标准步骤的详细信息，请参见 [45]。 □

上述命题不涵盖算子单调函数 $f(t)=\log(t)$（在表示式 (9) 中形式上为 $a=-\infty$）。由于这一情形是别尔金-斯塔谢夫斯基（BS）散度的基础，并且对我们而言尤其有趣，因此我们对其进行明确处理。首先考虑 M 上满足 $\varphi\sim\psi$ 的一对正正规泛函。将 BS 散度定义为

$$D_{BS}(\varphi\|\psi):=-\varphi(\log(T_\varphi^\psi)) \tag{24}$$

对于不满足 $\varphi\sim\psi$ 的一般正正规泛函对，我们仿照定义 2.13 定义 $D_{BS}(\varphi\|\psi)$。BS 散度可以看作与 $f_\alpha(t)=t^\alpha$, $\alpha\in(0,1)$ 相对应的最大几何 α-散度的极限 $\alpha\to1$。

命题 2.17。我们有

$$D_{BS}(\varphi\|\psi)=\sup\sup\left\{\varphi(1)\log n-\int_{1/n}^{\infty}\left[\varphi(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\psi(y_ty_t^*)\right]\frac{dt}{t}\right\}, \tag{25}$$

其中，第一个 上确界 取遍 $n\in\mathbb{N}$，第二个则取遍 x上的有限值域阶梯函数，其中 x由命题 *2.16* 中的$(\frac{1}{n},\infty)$ 给出。

证明。 考虑逼近序列 $f_n(t) := \log(t + \frac{1}{n})$ $t \geq 0$，它具有积分表示 $f_n(t) = -\log n + \int_{1/n}^{\infty} \frac{s}{t+s} \frac{dt}{t}$。对于每个这样的 f_n，命题 2.16 中的同一论证均适用。在 (0,1) 上应用单调收敛定理，并在 $[1, \infty$ 上应用控制收敛定理，即可得证。

□

现在列出 D_f 和 D_{BS}的一些主要性质，参见 [21, 定理 4.4、命题 4.5]。

1.（数据处理不等式）设 $T : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ 是冯·诺依曼代数 M 和 N 之间的一个正正规幺正线性映射，满足施瓦茨性质 $T(nn^*) \geq T(n)T(n)^*$ 对所有 $n \in \mathrm{N}$ [9] 均成立。则 $D_f(\varphi \circ T \| \psi \circ T) \leq D_f(\varphi \| \psi)$。

2.（下半连续性）设 φ_n, ψ_n 是逐点收敛到正规正泛函 φ, ψ 的正规正泛函序列，其中 $n \to \infty$。则$D_f(\varphi \| \psi) \leq \liminf_n D_f(\varphi_n \| \psi_n)$。

3.（鞅性质）考虑一个冯·诺依曼代数 M，以及一个递增的冯·诺依曼子代数序列 $\{\mathrm{M}_n\}$，满足 $\mathrm{M} = (\bigcup_n \mathrm{M}_n)''$。于是

$$D_f(\varphi \restriction_{\mathcal{M}_n} \| \psi \restriction_{\mathcal{M}_n}) \nearrow D_f(\varphi \| \psi). \tag{26}$$

4.（联合凸性和次可加性）泛函 $\mathrm{M}_{*,+} \times \mathrm{M}_{*,+} \xrightarrow{D_f} (-\infty, +\infty]$具有联合凸性和次可加性。

D_{BS}也具有类似的性质。

注 2.18。 第 2 项在 [21, 定理 4.4、命题 4.5] 中并未给出；事实上，对于一般的冯·诺依曼代数，它被作为猜想提出于 [21, 问题 4.13]。命题 2.17 和 2.16 中给出的变分表达式立即证明了这一点对于 D_f 和 D_{BS}成立；例如参见 [46]，其中给出了（荒木）相对熵的类似论证。

3 双模与量子信道的 f-散度

3.1 定义

定义 3.1（双模）。 给定冯·诺依曼代数自然数集、$\mathcal{M}$，一个自然数集 $-\mathcal{M}$ 双模是一个三元组（$\mathscr{H}, \ell_{\mathscr{H}}, r_{\mathscr{H}}$），其中 $\mathscr{H}$ 是一个希尔伯特空间，并且自然数集 $\xrightarrow{\ell_{\mathscr{H}}} B(\mathscr{H}) \xleftarrow{r_{\mathscr{H}}}$

[9]根据 Kadison定理，如果 T 是一个 2-正的，甚至是完全正的正规线性映射，则该性质成立。

$\mathcal{M}$ 分别是一个正规表示和一个正规反表示，且 $\ell_{\mathscr{H}}$（自然数集）与 $r_{\mathscr{H}}$（$\mathcal{M}$）彼此对易。

在上下文清楚时，我们将用底层希尔伯特空间 $\mathscr{H}$表示一个双模。有关双模的更多细节，参见例如 [13, 12]。

注记 3.2。当双模希尔伯特空间是恒等双模L^2(M，Ω)时，我们将使用自然记号 $n\xi m := \ell_{\mathscr{H}}(n)r_{\mathscr{H}}(m)\xi$，$n \in$N $m \in$M $\xi \in \mathscr{H}$，该双模由 M 的标准表示和标准向量 Ω 产生，因此在酉等价意义下是唯一的。作为向量空间，L^2(M，Ω)在酉等价意义下可实现为某个选定的忠实正规态 ω 的 GNS 希尔伯特空间 $\mathscr{H}$，并带有相应的循环且分离的GNS向量 Ω。定义L^2(M，Ω)的 M − M 双模结构的右作用和左作用定义为

$$\ell_{\mathscr{H}}(m)\xi = m\xi, \quad r_{\mathscr{H}}(m)\xi = Jm^*J\xi, \tag{27}$$

其中，$J = J_\Omega$ 是与 Ω 关联的模共轭，它将 M 反酉地映射到 M′。

命题3.3。设 T: 自然数集 $\to\mathcal{M}$ 是一个量子信道，且 φ 是$\mathcal{M}$上的一个正规态。存在一个自然数集 $-\mathcal{M}$ 双模 $\mathscr{H}_T$ 和一个向量 $\xi \in \mathscr{H}_T$，使得

$$\varphi(T(n)m) = \langle \xi, \ell_{\mathscr{H}_T}(n)r_{\mathscr{H}_T}(m)\xi\rangle, \tag{28}$$

并且 ξ是 $\ell_{\mathscr{H}_T}$(自然数集)$\vee\, r_{\mathscr{H}_T}(\mathcal{M})$的循环向量。此外，这样的双模和单位向量在酉变换意义下唯一。

证明。这是命题2.6], ，但我们在此给出证明，因为它为下面的另一项证明作了铺垫。

考虑映射 N $\times$ M$^{op} \to \mathbb{C}$: $n \times m^{op} \mapsto \varphi$(T(n)m*)。它是双线性的，因此对应于一个线性映射 $\tilde{\varphi}$: N $\odot$M$^{op} \to \mathbb{C}$。设 ξ 是 φ 在 L^2_+(M,Ω) 中的向量代表（Ω 是循环分离向量的自然锥），则$\tilde{\varphi} = \varphi_\xi \circ \pi \circ (T\otimes$id), 其中 π是由 M$\odot$M 双模 L^2(M) 给出的 M–M 的表示，见注释（3.2）。定义 $\mathscr{H}_T$ 为由 M$\odot$M^{op}上的正泛函 $\tilde{\varphi}$ 的 GNS 表示给出的 N –M 双模。显然，由 GNS 表示的性质可得（28）及其他断言。

□

下文中，f: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是一个算子单调函数（满足 a，$b < \infty$ 属于其表示式 (9)）。

定义 3.4。考虑一对量子信道 S、T: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$，以及一个冯·诺依曼代数 $\mathcal{A}$。我们将量子信道扩展为 $S\otimes id_{\mathcal{A}}$、$T\otimes id_{\mathcal{A}}$: $\mathcal{N}\odot\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{M}\odot\mathcal{A}^{op}$。令$\pi$ 为 $\mathcal{M}\odot\mathcal{A}^{op}$ 的任意双正规表示。那么对于“在其中的每个向量 $\xi \in \mathscr{H}_\pi$

由 π 给出的 $M-A$ 双模，我们可以考虑态 φ_S、π、$\xi = \varphi_\xi \circ \pi \circ (S \otimes id_{\mathcal{A}})$ 以及 φ_T、π、$\xi = \varphi_\xi \circ \pi \circ (T \otimes id_{\mathcal{A}})$。考虑按照命题 2.17 定义的 $D_f(\varphi_S$、π、$\xi \| \varphi_T$、π、$\xi)$，此时上确界取遍值域为 $N \odot A^{op}$ 的有限值域阶梯函数 x。然后我们定义

$$D_f(S\|T) := \sup_{(\mathcal{A},\pi,\xi)} D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi}), \tag{29}$$

其中，上确界取遍由冯·诺依曼代数 $(\mathcal{A}$ π、$\xi)$ 组成的三元组，双模 π 如上所述，且 $\xi \in \mathscr{H}$ 已归一化。我们对 BS 散度作类似定义。

注 3.5。当 M 有限维时，我们对 D_{BS} 的定义与 [23]的定义一致。这由命题 2.17 以及命题 3.7 中涉及有限维 I 型代数的部分可得。事实上，[23] 还考虑函数 $f(t) = t^\alpha$，$\alpha \in (1, 2]$ 所对应的信道散度。本工作未讨论这种情形，因为该函数不是算子单调的，而是算子凸的，并且尚不清楚命题 2.16 中的变分公式在这种情形下仍有多大适用性。

注 3.6。考虑一个正规同态 $\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{M}$。通过在右侧利用 θ 对恒等双模 $L^2(\mathrm{M})$ 进行扭转，可以构造一个新的双模 $\mathscr{H}_\theta$。更明确地说，$\mathscr{H}_\theta = L^2(\mathrm{M})$ 作为希尔伯特空间，M 的左作用来自 $L^2(\mathrm{M})$ 作为左 M–模的结构，而 A 的右作用定义为 $r_\theta(a)\eta := \eta\theta(a)$ $\eta \in L^2(\mathrm{M})$ $a \in \mathrm{A}$。在这种情况下，该双模记作 $L^2_\theta(\mathrm{M}, \Omega)$.[10]

尽管在下文中我们将继续采用上述定义，但人们可能会问，在信道散度（29）的定义中，考虑所有双模在多大程度上是必要的。

命题 3.7。如果 $\mathcal{M}$ 是正规无限的（I_∞ 型、II_∞ 型或 III 型因子的直和），或者是 I_n 型因子的直和，那么我们有

$$D_f(S\|T) = \sup_{\xi \in L^2(\mathcal{M})_+} D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi}). \tag{30}$$

如果 $\mathcal{M}$ 是无限维且有限的（II_1 型因子的直和），那么

$$D_f(S\|T) = \sup_{\xi \in (L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\ell^2(\mathbb{N})))_+} D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi}).$$

其中，$L^2(\ell^2(\mathbb{N}))$ 表示可分希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上的希尔伯特–施密特算子，而 $L^2(\mathcal{M}) \otimes L^2(\ell^2(\mathbb{N}))$ 表示相应的 $\mathcal{M}$–$\mathcal{M} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$-双模。BS 散度也同样如此。

[10]类似地，可以定义 ${}_\theta L^2(\mathrm{M})$。

证明。根据定义，$D_f(S\|T) \geq \sup D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi})$。为证明反向不等式$\xi\in L^2(\mathcal{M})_+$，为简便起见，可以假设 $\mathrm{N}, \mathrm{M}, \mathrm{A}$ 都是因子；一般情形可通过通常的因子直和分解来处理。

情形 1）M 属于 I_∞、II_∞ 或 III 型。由于可以在必要时取张量积 $\mathrm{A}\otimes B(\mathscr{H})$ 及相应的双模，因此对于正规无限的 A，定义 3.4 中的上确界总能取到。考虑一个 M –A 双模 $\mathscr{H}$。在这种情况下，[13, 推论 2.7] 表明存在正规同态$\theta : \mathrm{A} \to \mathrm{M}$，使得 $\mathscr{H}_\pi$ 同构于 $L^2_\theta(\mathrm{M})$。换言之，存在一个酉算子 $U : \mathscr{H} \to L^2(\mathrm{M})$，它交织 $\mathscr{H}$的右表示与 $L^2_\theta(\mathrm{M})$ 的右表示。对于一个向量 $\xi \in \mathscr{H}$，记 $\eta := U\xi$。那么$D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi\xi}) = D_f(\varphi_{S,\pi_\theta,\eta}\|\varphi_{T,\pi_\theta,\eta})$，其中 π_θ是相对于 $L^2_\theta(\mathrm{M})$ 的双模表示。现在，利用命题 2.16 中的变分公式

$$
\begin{aligned}
&D_f(\varphi_{S,\pi_\theta,\eta}\|\varphi_{T,\pi_\theta,\eta}) \\
=& \sup_{(0,\infty)\xrightarrow{x}\mathcal{N}\odot\mathcal{A}} -\log\Bigg(a\varphi_\eta((S\otimes\theta)(1)) + b\varphi_\eta((T\otimes\theta)(1)) + \\
&\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_\eta((S\otimes\theta)(x_t x_t^*)) + \frac{1}{t}\varphi_\eta((T\otimes\theta)(y_t^* y_t^*))\}d\mu\Bigg) \\
\leq& \sup_{(0,\infty)\xrightarrow{v}\mathcal{N}\odot\mathcal{M}} -\ln\Bigg(a\varphi_\eta((S\otimes \mathrm{id}_\mathcal{M})(1)) + b\varphi_\eta((T\otimes \mathrm{id}_\mathcal{M})(1)) + \\
&\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_\eta((S\otimes \mathrm{id}_\mathcal{M})(v_t v_t^*)) + \frac{1}{t}\varphi_\eta((T\otimes \mathrm{id}_\mathcal{M})(w_t w_t^*))\}d\mu\Bigg),
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中，不等式成立是因为第二个上确界取遍一个更大的集合；令 $v_t := (\mathrm{id}_\mathcal{N}\otimes\theta)(x_t)$ 和 $w_t = 1 - v_t$ 即可容易看出这一点。右侧为 $D_f(\varphi_{S,\pi,\eta}\|\varphi_{T,\pi,\eta})$，这同样由我们的变分公式得到。随后，对自然锥中的单位向量 η 取上确界，即可证明反向不等式 $D_f(S\|T) \leq \sup_{\xi\in L^2(\mathrm{M})_+} D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi})$。至此便完成了证明。

情形 2）M 是 I_n 型，即 $\mathrm{M} = M_n(\mathbb{C})$。设 (ξ, π, A) 是定义 3.4 中的一个近似最优三元组，其对应的双模为 $\mathscr{H}$，容差为 ε。如有必要，可用可能更大的冯·诺依曼代数$\ell_\mathscr{H}(\mathrm{M})'$（它是 I 型）替换 $r_\mathscr{H}(\mathrm{A})$，这样我们可以假设 $r_\mathscr{H}(\mathrm{A}) = B(\mathscr{K})$，并且 $\mathscr{H} = \mathbb{C}^n\otimes\mathscr{K}$。现在令 P 为 $\mathscr{H}$ 上值域为 $\ell_\mathscr{H}(\mathrm{M})\xi$ 的正交投影。于是$P \in \ell_\mathscr{H}(\mathrm{M})'$，因此对于某个 A 上的正交投影 $p \in$，有 $P = r_\mathscr{H}(p)$；根据施密特分解定理，p 的秩为 $\leq n$。逐一考察定义可得，

于是对于 $n \in \mathsf{N}$ $a \in \mathsf{A}$，我们有：

$$\varphi_{S,\pi,\xi}(n \otimes a) = \mathsf{h}\xi, \quad S(n)\xi a\mathsf{i} = \mathsf{h}\xi, \quad S(n)\xi pap\mathsf{i} = \varphi_{S,\pi,\xi}((1_n \otimes p)(n \otimes a)(1_n \otimes p)) \tag{32}$$

令 x 为取值于 $\mathsf{M} \odot \mathsf{A}$ 的阶梯函数，使得命题 2.16 中的下确界在容差 ε内达到。注意到

$$\varphi_{S,\pi,\xi}(x_t x_t^*) = \varphi_{S,\pi,\xi}((1_n \otimes p)x_t x_t^*(1_n \otimes p)) \geq \varphi_{S,\pi,\xi}((1_n \otimes p)x_t(1_n \otimes p)x_t^*(1_n \otimes p)), \tag{33}$$

并且我们对 $S \to T$和 $x_t \to y_t = 1 - x_t$也得到类似的关系。因此，令 $\hat{x}_t = (1_n \otimes p)x_t(1_n \otimes p)$，$\hat{y}_t = (1_n \otimes p)y_t(1_n \otimes p)$，可得

$$\begin{aligned} D_f(S\|T) - 2\varepsilon &\leq -\log\left(a + b + \int_{(0,\infty)} (1+t)\{\varphi_{S,\pi,\xi}(x_t x_t^*) + \frac{1}{t}\varphi_{T,\pi,\xi}(y_t y_t^*)\}d\mu\right) \\ &\leq -\log\left(a + b + \int_{(0,\infty)} (1+t)\{\varphi_{S,\pi,\xi}(\hat{x}_t \hat{x}_t^*) + \frac{1}{t}\varphi_{T,\pi,\xi}(\hat{y}_t \hat{y}_t^*)\}d\mu\right) \end{aligned} \tag{34}$$

现在注意到 $1_n \otimes p$ 是 $\mathsf{M} \odot p\mathsf{A}p$ 中的单位元，并且 $\hat{x}_t + \hat{y}_t = 1_n \otimes p$，因此 $\hat{x}_t \in \mathsf{M} \odot p\mathsf{A}p$ 是命题 2.16 的变分原理中的一个可容许阶梯函数。此外，$p\mathsf{A}p$ 自然同构于$M_n(\mathbb{C}^n) = \mathsf{M}$ 的一个子代数（因为 p的秩为 $\leq n$），并且 $P\mathscr{H}$（包含 $\xi = P\xi$）等距于 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ 的一个子空间（因为 $P = r_{\mathscr{H}}(p)$）。因此，(34) 的右侧小于或等于 $D_f(\varphi_{S,\hat{\pi},\hat{\xi}} \| \varphi_{T,\hat{\pi},\hat{\xi}})$，其中 $\hat{\pi}$ 是与标准 M –M-双模 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$相关联的表示 $\hat{}$，且 ξ是该双模中对应于 ξ的单位向量。因此，若 $\mathsf{M} = M_n(\mathbb{C}^n)$，则在变分定义 3.4 中只需考虑 M –M 双模。

情形 3) M 为 II_1 型。考虑一个 M–A-双模 $\mathscr{H}$。那么 $\mathscr{H} \otimes L^2(\ell^2(\mathbb{N}))$ 自然是一个 $\mathsf{M} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$–$\mathsf{A} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$-双模。两个代数 $\mathsf{M} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$ 和 $\mathsf{A} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$ 都是正规无限的。因此，按照上文 1) 中相同的推理，我们知道极大化双模可以取为 $\mathsf{M} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$ 的标准双模。将这个标准双模限制为一个 $\mathsf{M} - \mathsf{M} \otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$-双模，得到的双模所对应的定义 3.4 中的 f-散度不小于原 $\mathsf{M} - \mathsf{A}$-双模的对应散度。

对于 BS 散度，我们考虑命题 2.17 给出的变分原理，而不是命题 2.16。

□

3.2 量子信道散度的基本性质

现在我们将证明信道散度的一些基本性质。在接下来的引理中，D_f 是与一个非负算子单调

函数 f: $[0,\infty)\ \to [0,\infty)$ 相关联的散度，该函数具有表示式 (9)，满足 $a,\ b<\infty$，并且D_{BS}是 BS 散度（基本上对应于 $f(t)\ =\log\ t$）。在证明下一个定理时，我们不能直接采用 [21, 定理 4.4、命题 4.5] 关于 $D_f(\varphi\|\psi)$ 的证明，因为我们对 $D_f(T\|S)$ 的定义从根本上基于一个变分原理，该原理针对取值于 $\mathrm{M}\odot\mathrm{A}^{op}$ 中的测试函数，而 $\mathrm{M}\odot\mathrm{A}^{op}$ 并非冯·诺依曼代数。幸运的是，众所周知 [45]（另见 [47, 第 5] 章），变分原理可以提供其他证明。

定理 *3.8. 1.*（下半连续性）设 T_n, S_n 为量子信道，使得对于任意 $m\in M,\ T_n(m)\ \to T(m)\ S_n(m)\ \to S(m)$ 弱收敛。那么 $D_f(S\|T)\ \le\liminf_n D_f(S_n\|T_n)$，类似地，$D_{BS}(S\|T)\ \le\liminf_n D_{BS}(S_n\|T_n)$。

2.（数据处理不等式）设 $S_1, S_2 : N\ \to M\ T : R\ \to N$ 为冯·诺依曼代数之间的量子信道。那么 $D_f(S_1\|S_2)\ \ge\ D_f(S_1\circ\ T\|S_2\circ\ T)$。类似地，$D_{BS}(S_1\|S_2)\ge D_{BS}(S_1\circ\ T\|S_2\circ\ T)$。

3.（联合凸性）设 p_i, q_j 为有限集上的概率分布，且$T_i, S_j : \mathcal{N}\ \to\mathcal{M}$ 为量子信道。那么

$$D_f(\sum_i p_iS_i\|\sum_j q_jT_j)\le\sum_{i,j}p_iq_jD_f(S_i\|T_j),\tag{35}$$

对于 D_{BS}，也有类似结论。

4.（膨胀）给定量子信道 S、T: 自然数集 $\to\mathcal{M}$，则 $D_f\ (S\|T)\ =D_f\ (S\otimes id_{B(\ell^2\ (\mathbb{N})\ )}\|T\otimes id_{B(\ell^2\ (\mathbb{N})\ )})$。对于 $D_{BS}\ (S\|T)$，同样成立。

证明。1）考虑一个 M –A 双模 π 和一个单位向量 $\xi\in\mathscr{H}_\pi$，该单位向量在容差 ε 范围内达到变分定义（29）中的上确界。于是

$$\begin{aligned}D_f(S\|T)-2\varepsilon=&D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi})-\varepsilon\\ \le&\liminf_n D_f(\varphi_{S_n,\pi,\xi}\|\varphi_{T_n,\pi,\xi})\\ \le&\liminf_n D_f(S_n\|T_n).\end{aligned}\tag{36}$$

第一个不等式证明如下。考虑命题 2.16 中的可容许阶梯函数$x : (0,\ \infty)\ \to$ $\mathrm{M}\ \odot\ \mathrm{A}$，使得 D_f 在容差 ε范围内达到，我们得到

$$\begin{aligned}&D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi})-\varepsilon\\ =&-\log\left(a+b+\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_{S,\pi,\xi}(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\varphi_{T,\pi,\xi}(y_ty_t^*)\}d\mu(t)\right)\\ =&-\log\left(a+b+\lim_n\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_{S_n,\pi,\xi}(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\varphi_{T_n,\pi,\xi}(y_ty_t^*)\}d\mu(t)\right)\\ \le&\liminf_n D_f(\varphi_{S_n,\pi,\xi}\|\varphi_{T_n,\pi,\xi}),\end{aligned}\tag{37}$$

最后一行再次使用了变分原理。BS 散度的结论同样可由相应的变分公式推出，见引理2.17。

2) 设（ξ，π，A）是关于 $D_f(S_1\circ T\|S_2\circ T)$、容差为 ε 的定义（29）中的近似最优三元组。考虑命题 2.16 中的阶梯函数 $x_t\in$N $\otimes$A^{op}，该函数在关于 $D_f(\varphi_{S_1}\circ_T,\ \pi,\ \xi\|\varphi_{S_2}\circ_T,\ \pi,\ \xi)$ 的变分刻画中以容差 $\varepsilon>0$ 近似最优。显然，$(T\otimes id)(x_t)\in$M $\odot$ A^{op} 是关于 $D_f(\varphi_{S_1},\ \pi,\ \xi\|\varphi_{S_2},\ \pi,\ \xi)$ 的变分刻画中的可容许阶梯函数，因此，根据 Kadison定理 $(T\otimes id)(n^*n)\ \geq (T\otimes id)(n)^*(T\otimes id)(n)$ 以及单位性质 $T(1)=1$,

$$
\begin{aligned}
&D_f(S_1\circ T\|S_2\circ T)-2\varepsilon\leq D_f(\varphi_{S_1\circ T,\pi,\xi}\|\varphi_{S_2\circ T,\pi,\xi})-\varepsilon\\
\leq\ &-\log\left(a+b+\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_{S_1,\pi,\xi}\circ T(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\varphi_{S_2,\pi,\xi}\circ T(y_ty_t^*)\}d\mu(t)\right)\\
\leq\ &-\log\left(a+b+\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_{S_1,\pi,\xi}(T(x_t)T(x_t^*))+\frac{1}{t}\varphi_{S_2,\pi,\xi}(T(y_t)T(y_t^*))\}d\mu(t)\right)\\
\leq\ &-\log\left(a+b+\inf_{(0,\infty)\xrightarrow{x}\mathcal{M}}\int_{(0,\infty)}(1+t)\{\varphi_{S_1,\pi,\xi}(x_tx_t^*)+\frac{1}{t}\varphi_{S_2,\pi,\xi}(y_ty_t^*)\}d\mu(t)\right)\\
=\ &D_f(\varphi_{S_1,\pi,\xi}\|\varphi_{S_2,\pi,\xi})\leq\ D_f(S_1\|S_2),
\end{aligned}
\tag{38}
$$

因此，由于 ε 是任意的，结论得证。BS 散度的证明类似，现在基于命题 2.17。

3) 定义（29）和命题 2.16 中表述的变分原理将 $D_f(S\|T)$ 表示为关于 S, T 的仿射函数的双重上确界。联合凸性随之得证。细节与 2) 类似。

4) 设 $\tilde{\mathscr{H}}$ 是一个 M$\otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))$–A 双模。由于左表示是对代数的右表示，因此这也是一个 M $-B(\ell^2(\mathbb{N}))^{op}\otimes$A 双模，故包含在 $D_f(S\|T)$ 的定义 3.4 中的最大化范围内。因此，我们有 $D_f(S\|T)\ \geq\ D_f(S\otimes id_{B(\ell^2(\mathbb{N}))}\|T\otimes id_{B(\ell^2(\mathbb{N}))})$。另一方面，设 $(\pi$, A $\xi)$ 是 $D_f(S\|T)$ 的定义 3.4 中一个近似最优三元组，其精度达到容差 ε，其中 π 对应于某个 M $-$A 双模 $\mathscr{H}$。那么 $\tilde{\mathscr{H}}=\ell^2(\mathbb{N})\ \otimes\mathscr{H}$ 是一个 M $\otimes B(\ell^2(\mathbb{N}))-$A 双模。取 $\ell^2(\mathbb{N})$ 中任意一个单位向量 η，并令 $\tilde{\xi}=\xi\otimes\tilde{\eta}$，以及 $S\ =\ S\otimes id_{B(\ell^2(\mathbb{N}))}$。如果 x_t 是一个阶梯函数，它在 $D_f(\varphi_{\pi,S,\xi}\|\varphi_{\pi,S,\xi})$ 的变分公式（命题 2.16）中达到上确界，精度达到容差 ε，则可知 $\tilde{x}_t:=x_t\otimes 1_{\ell^2(\mathbb{C})}$ 是 $D_f(\varphi_{\tilde{\pi},\tilde{S},\tilde{\xi}}\|\varphi_{\tilde{\pi},\tilde{S},\tilde{\xi}})$ 的变分定义中的一个有效阶梯函数，并取得相同的值。因此，我们有 $D_f(S\|T)\ -2\varepsilon\leq D_f(S\otimes id_{B(\ell^2(\mathbb{N}))}\|T\otimes id_{B(\ell^2(\mathbb{N}))})$，于是针对 D_f，4) 得证。对于 D_{BS} 的情况，我们改用命题 2.17。 □

为了证明下文中信道散度的某些更深层性质，我们的基本证明策略是将这些命题归约为最近在 [23], 中得到的有限维矩阵代数情形。为此，从现在起我们需要将讨论限制在超有限冯·诺依曼代数上。若希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的冯·诺依曼代数 N 存在一个由有限维子代数构成的序列（“滤过”）$\{\mathrm{N}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{N}$，且该序列递增，即 $\mathrm{N}_n\subset\mathrm{N}_{n+1}$，并满足 $\mathrm{N}=(\bigcup_n\mathrm{N}_n)''$.]，则称其为超有限的。

超有限因子的例子包括所有 I 型因子，即 $B(\mathscr{H})\ M_n(\mathbb{C})$，但也存在 II 型和 III 型的超有限因子。设 N、M 为超有限因子，设 S,T: N $\to$ M 为量子信道，并设 N_n、M_n 分别为 N 和 M 的滤过。按照 [48] ，可以对每个 n 构造一个“广义条件期望” $E_n:\mathrm{M}\to\mathrm{M}_n$ ，如下所示。设 $\omega_n=\omega\restriction\mathrm{M}_n$ 为 M 上忠实正规态 ω 的限制，其 GNS 表示为 π_n，GNS 希尔伯特空间为 $\mathscr{H}_n$，GNS 向量为 Ω_n。设 J_n 为与 Ω_n 相关联的模共轭，并定义偏等距算子 $V_n:\ \mathscr{H}_n\to\mathscr{H}$，使得 $V_n\pi_n(x)\Omega_n:=x\Omega$，其中 $x\in\mathrm{M}_n$。可以验证， $V_n^*\mathrm{M}'V_n\subset\pi_n(\mathrm{M}_n)'$。因此，将 $E_n(m)$ 定义为满足下式的唯一元素 $x_n\in\mathrm{M}_n$ 是合理的

$$\pi_n(x_n)=J_nV_n^*JmJV_nJ_n, \tag{39}$$

其中， J 是与 Ω 和 M 相关联的模共轭。根据构造，每个 E_n 都是一个量子信道。

引理 3.9。（见 *[49]*） $E_n(m)\to m$ 当 $n\to\infty$ 趋于……时强收敛，对所有 $m\in\mathcal{M}$均成立。

我们得到:

命题 3.10（鞅性质）。我们有 $D_f(S\|T)=\sup_n D_f(S\restriction_{\mathcal{N}_n}\|T\restriction_{\mathcal{N}_n})$。类似地， $D_{BS}(S\|T)=\sup_n D_{BS}(S\restriction_{\mathcal{N}_n}\|T\restriction_{\mathcal{N}_n})$

证明。首先考虑 D_f 的情形。令 (ξ,π,A) 为定义（29）中 $D_f(S\|T)$ 的一个近似最优三元组。我们令 p_n 为 M_n 中的抽象单位元，它们由 M 中递增的投影网构成。由冯诺依曼稠密性定理， $p_n\to1$强收敛。由单调性，也就是说，对包含信道 $\mathrm{M}_n\subset\mathrm{M}$ 应用数据处理不等式，可得 $\limsup_n D_f(S\restriction_{\mathcal{M}_n}\|T\restriction_{\mathcal{M}_n})\le D_f(S\|T)$。

设 $\mathrm{B}:=\bigcup_n\mathrm{M}_n$ 是 M 的一个 $*$-子代数，其弱闭包为 $\mathrm{B}''=\mathrm{M}$。根据冯诺依曼稠密性定理，B 在 M 中强稠密。设 x_t是命题 2.16 中所述的、取值于 $\mathrm{M}\odot\mathrm{A}^{op}$ 的可容许阶梯函数，它以任意选定的容差 ε 逼近 $D_f(\varphi_{S,\ \pi,\ \xi}\|\varphi_{T,\ \pi,\ \xi})$。由于$x_t$ 的值域有限，且 B 在 M 中强稠密，我们可以构造一列阶梯函数 $x_{n,\ t}$ ，它们属于 $\mathrm{M}_n\odot\mathrm{A}$，使得 $x_{n,\ t}$ 在 x_t 为常值的每个区间上都为常值；对于任意满足 $x_t=1$ 的 t ，只要其足够小，就有 $x_{n,\ t}=p_n$ ；此外，$x_{n,\ t}\to x_t$ 在每个这样的区间上强收敛，如

$n \to \infty$。于是 $\varphi_{S,\pi,\xi}(x_{n,t}x_{n,t}^*) \to \varphi_{S,\pi,\xi}(x_t x_t^*)$，并且令 $y_{n,t} = p_n - x_{n,t} \in \mathrm{M}_n$,$\varphi_{T,\pi,\xi}(y_n, {}_t y_{n,t}^*) \to \varphi_{T,\pi,\xi}(y_t y_t^*)$，当 $n \to \infty$ 时，该式关于 t 一致成立。我们将阶梯函数 $x_{n,t}$, $y_{n,t}$ 和单位元 p_n 分别代替 x_t, y_t 和 1，代入命题 2.16 的变分公式右侧。

阶梯函数 $x_{n,t}$,$y_{n,t}$ 和单位元 p_n 的收敛性质意味着右侧收敛到 $D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\mathrm{k}\varphi_{T,\pi,\xi}) - \varepsilon$，当 $n \to \infty$ 时，因此 $\liminf_n D_f(S \restriction_{\mathcal{M}_n} \mathrm{k} T \restriction_{\mathcal{M}_n}) \geq D_f(\varphi_{S,\pi,\xi}\mathrm{k}\varphi_{T,\pi,\xi}) - \varepsilon \geq D_f(S\mathrm{k}T) - 2\varepsilon$。我们可以令 ε 越来越小，从而证明 $\liminf_n D_f(S \restriction_{\mathcal{M}_n} \mathrm{k} T \restriction_{\mathcal{M}_n}) \geq D_f(S\mathrm{k}T)$，这就证明了该命题。

对于 BS 散度，我们现在使用变分原理命题 2.17，以类似的方式进行。

□

结合前面的引理和鞅性质，我们得到：

引理 3.11。我们有 $D_f(S\|T) = \lim_m \sup_n D_f(E_m \circ S \restriction_{\mathcal{N}_n} \| E_m \circ T \restriction_{\mathcal{N}_n})$，*BS* 散度也类似。

证明。考虑量子信道 $E_m \circ S$、$E_m \circ T$：$\mathrm{N} \to \mathrm{M}_m$，以及一个 $\mathrm{M}_m - \mathrm{A}$ 双模 $\mathscr{H}_m$、表示 π_m 和向量 $\xi_m \in \mathscr{H}_m$，如 $D_f(E_m \circ T \mathrm{k} E_m \circ S)$ 的定义中所述，并令上确界（29）达到。根据引理 3.7，不妨设所考虑的双模为标准的 M_m–M_m 双模 $L^2(\mathrm{M}_m)$。由量子信道 E_m：$\mathrm{M} \to \mathrm{M}_m$ 以及泛函 $\mathrm{h}\xi_m, .\, \xi_m\mathrm{i}$，根据命题3.3，我们得到一个诱导 M –M_m 双模。由此立即得到 $D_f(S\mathrm{k}T) \geq D_f(E_m \circ S \mathrm{k} E_m \circ T)$，因为在 $D_f(S\mathrm{k}T)$ 的变分定义（29）中，我们是在所有双模组成的更大集合上取上确界，而$D_f(E_m \circ S\mathrm{k}E_m \circ T)$ 恰好对应于刚才描述的诱导双模 $\mathrm{M} - \mathrm{M}_m$。因此，我们看到 $D_f(S\mathrm{k}T) \geq \limsup_m D_f(E_m \circ S\mathrm{k}E_m \circ T)$；另一方面，由于量子信道散度的下半连续性，$D_f(S\mathrm{k}T) \leq \liminf_m D_f(E_m \circ S\mathrm{k}E_m \circ T)$ 也成立，因为根据引理 3.9，E_m 逐点强收敛——因而也弱收敛。因此，我们看到，简单地说，$D_f(S\mathrm{k}T) = \lim_m D_f(E_m \circ S\mathrm{k}E_m \circ T)$。现在由鞅性质即可得到该结论。关于 BS 散度的证明类似，只是改用命题 2.17。

□

以下性质最初由 [23] 针对矩阵代数观察并证明，对本研究至关重要。

命题 3.12（内部次可加性）。设 S_2、T_2：自然数集 $\to \mathcal{R}$ S_1、T_1：$\mathcal{R} \to \mathcal{M}$是超有限冯·诺依曼代数之间的量子信道。则有

$$D_{BS}(S_2 \circ S_1 \| T_2 \circ T_1) \leq \sum_{i=1,2} D_{BS}(S_i \| T_i). \tag{40}$$

证明。 设 $E_m : \mathrm{R} \to \mathrm{R}_m, F_k : \mathrm{M} \to \mathrm{M}_k$ 是如上所述的一列广义条件期望。

$$
\begin{aligned}
& D_{BS}(S_1 \circ S_2 \| T_1 \circ T_2) \\
\leq & \liminf_m D_{BS}(S_1 \circ E_m \circ S_2 \| T_1 \circ E_m \circ T_2) \\
\leq & \liminf_m \liminf_k D_{BS}(F_k \circ S_1 \circ E_m \circ S_2 \| F_k \circ T_1 \circ E_m \circ T_2) \\
= & \liminf_m \liminf_k \sup_n D_{BS}(F_k \circ S_1 \circ E_m \circ S_2 \upharpoonright \mathcal{N}_n \| F_k \circ T_1 \circ E_m \circ T_2 \upharpoonright \mathcal{N}_n) \\
\leq & \liminf_m \liminf_k \sup_n \Big(D_{BS}(F_k \circ S_1 \upharpoonright \mathcal{R}_n \| F_k \circ T_1 \upharpoonright \mathcal{R}_n) + \\
& \qquad D_{BS}(E_m \circ S_2 \upharpoonright \mathcal{N}_n \| E_m \circ T_2 \upharpoonright \mathcal{N}_n) \Big) \\
= & D_{BS}(S_1 \| T_1) + D_{BS}(S_2 \| T_2)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

前两行中我们使用了下半连续性，第三行中使用了鞅性质，第四行中使用了 [23] 在有限维冯·诺伊曼代数情形下的结果，最后一步中使用了鞅性质和引理 3.11。

□

注 3.13。 命题的一个值得注意的特殊情形是 $\mathrm{M} = \mathbb{C}$，即 S_1，T_1 是态。在这种情况下，次可加性对应于 [23] 的“链式法则”。

考虑量子信道 S_i，$T_i : \mathrm{N}_i \to \mathrm{M}_i$，它们定义在希尔伯特空间 $\mathscr{H}_i$ 上表示的超有限冯·诺依曼代数之间，其中 $i = 1, 2$。我们可以取 $\mathrm{N}_1 \odot \mathrm{N}_2$ 在 $\mathrm{B}(\mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2)$ 中的弱闭包，并将这个（超有限）冯·诺伊曼代数记为 $\mathrm{N}_1 \bar{\otimes} \mathrm{N}_2$，，对 M_i 也进行类似处理。于是可知，$S_1 \otimes S_2 : \mathrm{N}_1 \odot \mathrm{N}_2 \to \mathrm{M}_1 \otimes \mathrm{M}_2$ 可以扩张为一个量子信道 $S_1 \otimes S_2$，其定义域为 $\mathrm{N}_1 \bar{\otimes} \mathrm{N}_2 \to$，值域为 $\mathrm{M}_1 \bar{\otimes} \mathrm{M}_2$,；$T_1 \otimes T_2$ 也同样如此。于是我们有：

命题 3.14 (外部可加性)。 设 S_i，T_i ： $\mathcal{N}_i \to \mathcal{M}_i$ 是超有限冯·诺依曼代数 $\mathcal{N}_i$，$\mathcal{M}_i$之间的量子信道，$i = 1, 2$。则 $D_{BS}(S_1 \otimes S_2 \| T_1 \otimes T_2) = \sum_{i=1,2} D_{BS}(S_i \| T_i)$。

证明。 证明过程与内部次可加性的证明类似，再次使用引理 3.11，以及根据 [23] 的结果，D_{BS} 在有限维情形下关于张量积具有可加性。

□

3.3 Kraus 通道的信道散度

设 M 是作用于希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上、具有循环分离向量 Ω 的标准形冯·诺依曼代数。我们考虑一类量子信道 T，S： $\mathrm{M} \to$

[50] 在一般冯·诺依曼代数背景下研究的所谓“Kraus 型”M。根据定义，它们具有如下形式

$$\begin{aligned} S(m) &= \sum_{i=1}^{N} a_i^* m a_i, \quad \sum_{i=1}^{N} a_i^* a_i = 1, \\ T(m) &= \sum_{i=1}^{M} b_i^* m b_i, \quad \sum_{i=1}^{M} b_i^* b_i = 1, \end{aligned} \tag{42}$$

其中 m， a_i， $b_j \in$ M 和 N， $M \in \mathbb{N}$。我们的目标是用两个 Kraus 通道的“Choi 算子”给出 $D_{BS}(S\mathrm{k}T)$ 的公式；这些算子也是由 [50] 在此背景下引入的。为此，我们分别将这类量子信道的 Choi 算子C_S， $C_T \in B(\mathscr{H})$ 定义为

$$C_S = \sum_{i=1}^{N} a_i |\Omega\rangle\langle\Omega| a_i^*, \quad C_T = \sum_{i=1}^{M} b_i |\Omega\rangle\langle\Omega| b_i^* \tag{43}$$

根据定义， $C_S \in B(\mathscr{H})$ 是一个有限秩非负算子，且 $\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}} C_S = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{k}a_i\Omega\mathrm{k}^2 = 1$， C_T 也类似。

令 C $\subset B(\mathscr{H})$ 为由所有形如 $\sum_{i=1}^{N} c_i|\Omega\mathrm{ih}\Omega|d_i$ 的算子构成的 $*$-子代数，其中 $N \in \mathbb{N}$， c_j， $d_j \in$ M。根据 [50, 定理 4]，，算子 C_S， C_T 的谱投影属于 C，因此该代数在谱演算下封闭。现在假设 σ 是与非负算子单调函数 f: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ 相对应的 Kubo-Ando 连接，其中 a， $b < \infty$ 见式 (9)。由式 (15) 可知，极限中的表达式在

$$C_S \sigma C_T = \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(C_S + \varepsilon(C_S + C_T)\Big) \sigma \Big(C_T + \varepsilon(C_S + C_T)\Big) \tag{44}$$

是 C 中的非负元素。由于均值 σ 的参数随 $\varepsilon \to 0$ 递减并强收敛，该极限不仅根据 Kubo-Ando 连接的性质而存在，而且也属于 $C_S \sigma C_T \in$ C，参见 [50,定理 4] 的证明。因此， $C_S \sigma C_T$ 尤其是 $B(\mathscr{H})$ 中的非负有限秩算子。

对于定义在 $(0,\infty)$ 上的算子单调函数 $f(t) = \log t$，类似的论证表明，算子 $[C_S + \varepsilon(C_S + C_T)]\sigma[C_T + \varepsilon(C_S + C_T)]$ 对 $\varepsilon > 0$ 仍属于 C。这个递减序列的极限 $\varepsilon \to 0$ 存在，但可能仅在无界二次型的意义下存在。事实上，只要 $\varepsilon > 0$，例如可以从 (15) 看出，$\mathrm{k}C_S\mathrm{k}, \mathrm{k}C_T\mathrm{k} \le 1$，再结合压缩算子$V$、正 $A \in B(\mathscr{H})_+$ 以及算子单调函数 $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ 的 $V^* f(A) V \le f(V^* A V)$（例如参见 [46]），可得

$$\begin{aligned} &[C_S + \varepsilon(C_S + C_T)]\sigma[C_T + \varepsilon(C_S + C_T)] \\ \le &\max\{1, (1+\varepsilon)\|C_S\| + \varepsilon\|C_T\|\} \log[C_T + \varepsilon(C_S + C_T)] \\ \le &(1+2\varepsilon)\log(1+2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0. \end{aligned} \tag{45}$$

因此，对于 $f(t) = \log t$，相应的 Kubo-Ando 均值 $C_S\sigma C_T$ 定义了一个负的、可能无界的二次型，该二次型由 C 中一个有限秩算子在其定义域上给出。假设 $C_S\sigma C_T$ 有界，因而属于 C。那么，正的有限秩算子 $-C_S\sigma C_T$ 可写成其特征投影的线性组合，即 $\sum_{j=1}^{K} c_j|\Omega\mathrm{ih}\Omega|c_j^*$，其中某个 $c_j \in \mathrm{M}$ $K \in \mathbb{N}_0$，由此可得，对于 $m' \in \mathrm{M}'$

$$\langle \Omega_{S,T}, m'^* m' \Omega_{S,T} \rangle = \sum_{j=1}^{K} \langle \Omega, m'^* c_j c_j^* m' \Omega \rangle \leq \left(\sum_{j=1}^{K} \|c_j\|^2 \right) \langle \Omega, m'^* m' \Omega \rangle. \tag{46}$$

定义 3.15。 令 σ 为针对 $f(t) = \log t$ 的 ***Kubo-Ando*** 均值，并假设 $C_S\sigma C_T$ 有界（因此属于 $\mathcal{C}$）。于是，对于与 $f(t) = \log t$相关联的算子均值，我们将 $\Omega_{S,T} \in L^2(\mathcal{M},\Omega)_+$ 定义为 $\mathcal{M}'$ 上与非负有限秩算子 $-C_S\sigma C_T$ 相关联的正正规泛函的唯一表示元，

$$\langle \Omega_{S,T}, m' \Omega_{S,T} \rangle = -\mathrm{Tr}_{\mathscr{H}} \Big[m' (C_S\sigma C_T) \Big], \quad m' \in \mathcal{M}'. \tag{47}$$

注 3.16。 根据康尼斯-拉东-尼科迪姆定理和 (46)，必存在$m \in \mathrm{M}$，使得 $\Omega_{S,T} = m\Omega \in \mathrm{M}\Omega$。因此，根据该空间的著名刻画，有 $\Omega_{S,T} \in L^\infty(\mathrm{M},\Omega) \cong \mathrm{M}\Omega$。

命题 3.17。 对于定义在有限维或正规无限超有限冯·诺依曼代数$\mathcal{M}$ 上的两个 ***Kraus*** 通道 S, T，若该代数在$L^2(\mathcal{M},\Omega)$ 上以标准方式表示，则有

$$D_{BS}(S\|T) = \left\| \Omega_{S,T} \right\|^2_{L^\infty(\mathcal{M},\Omega)} \tag{48}$$

约定当 $C_S\sigma C_T$ 无界时，右侧为 $+\infty$ 。

证明。 首先假设 $C_S\sigma C_T$ 有界，因此根据前面的注释，$\Omega_{S,T} \in L^\infty(\mathrm{M}, \Omega) \cong \mathrm{M}\Omega$。由命题 3.7，在信道散度的变分定义（29）中，我们可以只考虑标准双模 $\mathscr{H} = L^2(\mathrm{M}, \Omega)$。此外，由于 Ω 是标准的，M′Ω 在 $\mathscr{H}$ 中强稠密，因此在变分定义中，只需考虑形如 $\xi = x'\Omega$ $x' \in \mathrm{M}'$ 的向量 $\xi \in \mathscr{H}$。根据定义和记号 $m' = Jm^{op*}J \in \mathrm{M}'$，可得

$x' = Jx^{op*}J$ 和 $X := \pi(1 \otimes x^{op})$,

$$\begin{aligned}\varphi_{S,\pi,\xi}(m \otimes m^{op}) &= \langle \xi, \pi(S(m) \otimes m^{op})\xi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle \xi, \ell_{\mathscr{H}}(a_i^* m a_i) r_{\mathscr{H}}(m^{op})\xi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle x'\Omega, a_i^* m a_i m' x'\Omega \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{N} \langle x' a_i \Omega, m m' x' a_i \Omega \rangle \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}\Big[X C_S X^* \pi(m \otimes m^{op}) \Big]\end{aligned} \tag{49}$$

将 S 替换为 T、将 a_j 替换为 b_j，我们也有类似的公式。因此，最大 BS-散度的变分原理（命题 2.17）给出

$$\begin{aligned}&D_{BS}(\varphi_{S,\pi,\xi} \| \varphi_{T,\pi,\xi}) \\ &= \sup\sup \left(\log n - \int_{1/n}^{\infty} \{ \varphi_{S,\pi,\xi}(v_t v_t^*) + t^{-1} \varphi_{T,\pi,\xi}(w_t w_t^*) \} \frac{dt}{t} \right) \\ &= \sup\sup \left(\log n - \int_{1/n}^{\infty} \{ \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}(V_t^* X C_S X^* V_t) + t^{-1} \mathrm{Tr}_{\mathscr{H}}(W_t^* X C_T X^* W_t) \} \frac{dt}{t} \right)\end{aligned} \tag{50}$$

由（49）可知，其中第一个上确界取遍 $n \in \mathbb{N}$，第二个上确界取遍有限值域阶梯函数 $(1/n, \infty) \xrightarrow{v} \mathbf{M} \odot \mathbf{M}^{op}$，当 t 足够大时满足 $v_t = 0$；这里我们使用了缩写 $V_t = \pi(v_t)$ $w_t = 1 - v_t$, $W_t = \pi(v_t)$。由于 $\pi(\mathbf{M} \odot \mathbf{M}^{op})$ 的强闭包在 $B(\mathscr{H})$ 中强稠密，因此阶梯函数 V_t 可用于在强拓扑下逼近任意给定的有限值域阶梯函数 $(0, \infty) \to B(\mathscr{H})$，该函数在 t 足够大时为零，并在 t 足够小时为 1。令 P 为投影到 $\mathscr{H}$ 的某个有限维子空间上的正交投影，该子空间包含 XC_SX^* 和 XC_TX^* 的（有限维）值域。由此可知，我们还可以将 V_t 替换为 PV_tP，将 W_t 替换为 PW_tP，而变分公式 [36, 注记 9.2]（或命题 2.17）因此告诉我们

我们

$$\begin{aligned} D_{BS}(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi}) =& -\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\Big[(XC_SX^*)\sigma(XC_TX^*)P\Big] \\ =& -\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\Big[(XC_SX^*)\sigma(XC_TX^*)\Big] \\ =& -\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\Big[X(C_S\sigma C_T)X^*\Big] \\ =& -\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\Big[\pi(1\otimes x^{op})(C_S\sigma C_T)\pi(1\otimes x^{op})^*\Big] \\ =& -\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}\Big[x'^*x'(C_S\sigma C_T)\Big] \\ =& \Big\|x'\Omega_{S,T}\Big\|^2, \end{aligned} \tag{51}$$

其中，在推导第三行时，我们利用了 P 是任意的，只要其值域覆盖 XC_SX^* 和 XC_TX^* 的值域；在推导第四行时，我们利用了变换器等式（参见例如 [21, 引理 D.3]）。假设 x'，从而 X，可逆，则最后一步是成立的；我们暂时作此假设。由于我们知道 $\Omega_{S,T}\in L^\infty(\mathsf{M},\Omega)$，存在 $m\in\mathsf{M}$，使得 $\Omega_{S,T}=m\Omega$，因此

$$D_{BS}(\varphi_{S,\pi,\xi}\|\varphi_{T,\pi,\xi}) = \Big\|x'm\Omega\Big\|^2 = \Big\|m\xi\Big\|^2. \tag{52}$$

如果我们能够证明，对于 $\mathscr{H}$ 中的所有 $\xi\in\mathscr{H}$，当 $x'\in\mathsf{M}'$ 遍历可逆元时，$x'\Omega$ 是稠密的，那么该公式就对所有 $\xi\in\mathscr{H}$ 成立。事实上，这由超有限性质推出，因为在有限维冯·诺伊曼代数中，可逆元在范数下稠密，而 M 是超有限代数的强闭包。因此，对于任意 $x\in\mathsf{M}$，我们得到一个强收敛序列 $x_n\to x$，其中 x_n 可逆。将此应用于 $x:=Jx'J$ 并取 $x'_n=Jx_nJ$，即可得到该结论。现在对我们这组强稠密的单位范数向量 ξ 取上确界，由于 $\|m\|=\|\Omega_{S,T}\|_{L^\infty(\mathcal{M},\Omega)}$，便得到该命题的结论。

现在假设 $C_S\sigma C_T$ 无界。完全正映射$T_\varepsilon:=T+\varepsilon(S+T)$ $S_\varepsilon:=S+\varepsilon(S+T)$对于 $\varepsilon>0$不存在这个问题，并且是 Kraus 通道的（未归一化）递增（作为 $\varepsilon\to0$）序列。根据算子均值 σ的单调性，$C_{S_\varepsilon}\sigma C_{T_\varepsilon}$ 是 C 中的自伴算子递增序列，其值域始终包含在 H 的一个固定有限维子空间中。因此，它在范数意义下收敛到无界算子 $C_S\sigma C_T$，由此可见，必定存在 $x'\in\mathsf{M}$，使得 $-\operatorname{Tr}_{\mathscr{H}}[x'^*x'(C_{S_\varepsilon}\sigma C_{T_\varepsilon})]$ 发散到 $+\infty$，根据（51），$D_{BS}(S_\varepsilon\|T_\varepsilon)$也如此。然而，由于 T_ε，S_ε 是递减的量子信道序列，根据单调性，$D_{BS}(S\|T)\geq D_{BS}(S_\varepsilon\|T_\varepsilon)\to\infty$。 □

3.4 示例

作为 Kraus 通道的一个简单特例，我们考虑 (42) 中形如 S， T 的情形

$$\sum_{i=1}^{N} a_i a_i^* = 1, \quad a_i^* a_j = \delta_{i,j} 1, \quad \sum_{i=1}^{M} b_i b_i^* = 1, \quad b_i^* b_j = \delta_{i,j} 1 \tag{53}$$

其中 $\{a_j\}$ 和 $\{b_j\}$ 分别生成与作用在 N 个等距算子上、作用在 M 个等距算子上的 Cuntz 代数同构的代数。

推论 3.18。 设$\mathcal{M}$ 是有限维或正规无限冯·诺依曼代数，且 S、T是 *Kraus* 通道，使得对某些 N、 $M \in \mathbb{N}$，(53) 成立。那么，要么 $N = M$ 且 $T = S$；要么有 $D_{BS}(S\|T) = \infty$；要么 $N < M$ 且$D_{BS}(S\|T) = 0$。

注 3.19。 特别地，注意，若 $T(m) = umu^*$，其中 $u \in \mathbf{M}$ 为酉算子且$S = id$，则除非 $u = \lambda 1$，我们有 $D_{BS}(id\|T) = D_{BS}(T\|id) = \infty$。

证明。 由 Cuntz 代数关系可知，相应的 Choi 算子 $C_T = Q$ 和 $C_S = P$ 分别是 $\mathscr{H}$上的秩为 N 和 M 的正交投影。记 $P \wedge Q$ 为 P 和 Q的值域交上的正交投影。考虑算子单调函数 $f_n(t) := \log(t + \frac{1}{n})$ $t \geq 0$，它们的积分表示为 $f_n(t) = -\log n + \int_{1/n}^{\infty} \frac{s}{t+s} \frac{dt}{t}$，并令 σ_n 为相应的算子均值。由定理 3.7], 的证明可得$(tP) : Q = t(t+1)^{-1}(P \wedge Q)$。因此，由该均值的积分表示 (10)，我们得到

$$\begin{aligned} P\sigma_n Q =& P \log \tfrac{1}{n} + \int_{1/n}^{\infty} [(tP) : Q] \frac{dt}{t^2} \\ =& P \log \tfrac{1}{n} + (P \wedge Q) \int_{1/n}^{\infty} \frac{dt}{t(t+1)} \\ =& [(P \wedge Q) - P] \log n - (P \wedge Q) \Big[\log n - (\log t - \log(1+t))_{1/n}^{\infty} \Big] \\ =& [(P \wedge Q) - P] \log n + (P \wedge Q) \log(1 + \tfrac{1}{n}) \end{aligned} \tag{54}$$

当 $n \to \infty$ 时，算子均值 $P\sigma_n Q$ 递减（因此收敛）至可能无界的二次型 $P\sigma Q = [(P \wedge Q) - P]\infty$，其中 σ 对应于算子单调函数 $f(t) = \log t$。因此，若 $P\sigma Q$ 有界，则必须有 $(P \wedge Q) - P = 0$，所以 P 必须是 Q 的子投影，否则，根据命题 3.17， $D_{BS}(S\|T) = \infty$。若 $P = Q$，则 $N = M$，并且存在 $R_{ij} \in \mathbb{C}$ 使得 $a_i\Omega = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} b_j \Omega$；由于 Ω 是分离的，必有 $a_i = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} b_j$。接着，Cuntz 代数关系表明 (R_{ij}) 是一个酉矩阵，因此显然 $S = T$。若 $P < Q$，则显然 $N < M$，由此可得 $P\sigma_n Q$ 递减（因此收敛）至 0，且 $D_{BS}(S\|T) = 0$。 □

另一个非常简单但在概念上相关的例子是:

命题 3.20。 设 $\mathcal{M}$ 是有限维或正规无限的超有限冯·诺依曼代数，并设 $e_j \in \mathcal{M}$ 是 N 互相正交投影，满足 $\sum_i e_i = 1, 0 < e_i < 1$。我们考虑 *Kraus* 通道

$$M(m) = e_1 m e_1 + \cdots + e_N m e_N \tag{55}$$

对应于一个 N 元测量。于是

$$D_{BS}(id \| M) = \log N \tag{56}$$

证明。 与 M 相关联的 Choi 算子为 $C_M = \sum e_i |\Omega\rangle\langle\Omega| e_i$ ，而恒等信道 id 对应的 Choi 算子为 $C_{id} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$。我们先利用变分定义（11）求出平行和 $\langle\xi, [(tC_{id}) : C_M]\xi\rangle$。该定义中的极小化元 ζ_0 必须满足

$$t\langle\Omega, \zeta_0\rangle\Omega - \sum_i \langle e_i\Omega, \xi - \zeta_0\rangle e_i\Omega = 0. \tag{57}$$

向量 $e_i\Omega$ 非零且线性无关，因为 Ω 是分离的，并且 e_i 彼此正交且非平凡。因此我们看到

$$t\langle\Omega, \zeta_0\rangle = \langle e_i\Omega, \xi - \zeta_0\rangle \tag{58}$$

对所有 $i = 1, \ldots, N$，任意解 ζ_0 都是变分问题（11）的极小化元。为求得一个解，我们考虑试探形式 $\zeta_0 = \sum_i a_i \Delta^{\frac{1}{2}} e_i \Omega \Delta^{-\frac{1}{2}} e_i \Omega$，从而得到一个关于未知复系数 a_i 的线性方程组。一个解为

$$a_i = \langle e_i\Omega, \xi\rangle - \frac{t}{1+Nt}\langle\Omega, \xi\rangle。 \tag{59}$$

将相应的 ζ_0 代入变分定义（11），得到

$$\langle\xi, [(tC_{id}) : C_M]\xi\rangle = \frac{t}{Nt+1}|\langle\xi, \Omega\rangle|^2, \tag{60}$$

注意到对 e_i 的依赖已经消去了。换言之， $[(tC_{id}) : C_M] = \frac{t}{Nt+1}|\Omega\rangle\langle\Omega|$。接下来，我们使用与函数 $f_n(t) = \log(\frac{1}{n} + t)$ 相关的 Kubo-Ando 均值的积分表示 (10)σ_n。相应的测度 $d\mu_n$ 可从积分表示 $f_n(t) = -\log n + \int_{1/n}^{\infty} \frac{s}{t+s}\frac{dt}{t}$ 中直接读出。这就得到了与 $f(t) = \log\ t$ 相关的 Kubo-Ando 均值 $C_{id}\sigma C_M$，正如所要求的那样

对于 BS 散度,

$$\begin{aligned}
-C_{id}\sigma C_M =& \lim_n -C_{id}\sigma_n C_M \\
=& \lim_n \left((\log n) C_{id} - \int_{(1/n,\infty)} [(tC_{id}) : C_M] \frac{dt}{t^2} \right) \\
=& \lim_n \lim_K \left((\log n) |\Omega\rangle\langle\Omega| - \int_{(1/n,K)} \left(\frac{t}{Nt+1} |\Omega\rangle\langle\Omega| \right) \frac{dt}{t^2} \right) \\
=& \lim_n \lim_K \left(\log n - \int_{(1/n,K)} \frac{dt}{t(Nt+1)} \right) |\Omega\rangle\langle\Omega| \\
=& \lim_n \lim_K \left(\log n - \log(t) \Big|_{1/n}^{K} + \log(Nt+1) \Big|_{1/n}^{K} \right) |\Omega\rangle\langle\Omega| \\
=& (\log N) |\Omega\rangle\langle\Omega|.
\end{aligned} \tag{61}$$

接下来我们对 $S = id$, $T = M$ 使用定义（47），得到

$$\Omega_{id,M} = (\log N)^{1/2} \Omega. \tag{62}$$

由命题3.17，我们因此得到 $D_{BS}(id\|M) = \log N$，正如我们所要证明的。 □

我们的最后一个例子涉及冯·诺依曼因子的有限指标包含。

命题3.21。 设 $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ 是冯·诺依曼因子的有限指标包含，并具有相应的极小条件期望 $E : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$。则 $D_{BS}(id\|E) = \log[\mathcal{M} : \mathcal{N}]$。

证明。a) 令 $d^2 = [\mathrm{M} : \mathrm{N}]$，我们首先使用信道散度在 BS 散度情形下的变分定义（29），证明 $D_{BS}(id\|E) \geq \log d^2$。令 e 为该包含对应的琼斯投影，即 M 由 N 与 e生成。于是 $E(e) = d^{-2}1$。令 π 为来自标准双模 $L^2(\mathrm{M})$ 的 $\mathrm{M} \odot \mathrm{M}^{op}$ 表示，其底层希尔伯特空间为 $\mathscr{H}$。回忆对于 $\xi \in \mathscr{H}$，根据定义，我们有 $\varphi_{\xi,E,\pi}(m \otimes m^{op}) = \langle \xi, E(m) J(m^{op})^* J\xi \rangle$，这是定义（29）中信道 $E : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ 的相应量。我们在命题 2.17 的变分刻画中使用这一双模，其中涉及对$n \in \mathbb{N}$ 和可容许阶梯函数 $(1/n, \infty) \xrightarrow{x} \mathrm{M} \odot \mathrm{M}^{op}$ （以及 $y_t := 1 - x_t$）取上确界。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们构造一个特定的阶梯函数 x_n，从而得到一个下界，并证明命题 2.17 中变分表达式的极限 $n \to \infty$ 趋于一个至少为 $\log d^2$ 的量。

为此，我们为 M 选取一个标准向量 $\Omega \in \mathscr{H}$，并令 $\xi := e\Omega / \|e\Omega\|$。我们还令

$$x_t := \begin{cases} 1 - \frac{t}{t+d^{-2}} e \otimes 1 & 1/n \leq t \leq n, \\ 0 & t > n \end{cases} \tag{63}$$

并令 $y_t = 1 - x_t$。由于 $e\xi = \xi$ 和 $E(e) = d^{-2}1$，我们得到

$$\varphi_{\xi,E,\pi}(y_t^* y_t) = \frac{t^2 d^{-2}}{(t+d^{-2})^2}, \quad \varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) = \frac{d^{-4}}{(t+d^{-2})^2} \tag{64}$$

在范围 $t \le n$ 内。这给出

$$\begin{aligned} &\int_{1/n}^{\infty} \{\varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,E,\pi}(y_t^* y_t)\}\frac{dt}{t} \\ &= \int_{1/n}^{n} \left(\frac{d^{-4}}{(t+d^{-2})^2} + \frac{d^{-2}t}{(t+d^{-2})^2} \right)\frac{dt}{t} + \frac{1}{n} \\ &\le \frac{1}{n} + d^{-2}\int_{1/n}^{\infty} \frac{dt}{t(t+d^{-2})} \\ &= \log n + \log(n^{-1} + d^{-2}) + \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{65}$$

于是，由 BS 散度的变分刻画（命题 2.17）可得

$$\begin{aligned} &D_{BS}(\varphi_{\xi,id,\pi} \| \varphi_{\xi,E,\pi}) \\ &\ge \sup_n \left(\log n - \int_{1/n}^{\infty} \{\varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,E,\pi}(y_t^* y_t)\}\frac{dt}{t} \right) \\ &\ge \lim_n \left(\log n - \int_{1/n}^{\infty} \{\varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,E,\pi}(y_t^* y_t)\}\frac{dt}{t} \right) \\ &\ge \lim_n \left(\log n - (\log n + \log(n^{-1} + d^{-2}) + \frac{1}{n}) \right) = \log d^2. \end{aligned} \tag{66}$$

因此，根据将信道散度刻画为 $D_{BS}(\varphi_{\xi,\ id,\ \pi} \| \varphi_{\xi,\ E,\ \pi})$ 在三元组 $(\mathrm{A}\ \pi,\ \xi)$ 上的上确界的变分刻画，我们有 $D_{BS}(id \| E) \ge \log\ d^2$。

b) 条件期望满足 Pimsner-Popa 界 $E \ge d^{-2} id$[31, 51]。令 $\varepsilon > 0$。那么我们可以选择一个三元组 $(\pi,\ \mathrm{A}\ \xi)$（由一个冯·诺依曼代数 A、$\mathrm{M} \odot \mathrm{A}^{op}$上的双正规表示 π on $\mathscr{H}$以及单位向量ξ in $\mathscr{H}$组成）、一个 $n \in \mathbb{N}$和一个可容许阶梯函数 $(1/n,\ \infty) \xrightarrow{x} \mathrm{M} \odot \mathrm{A}^{op}$，使得变分定义（29）中的上确界在容差$\varepsilon$内达到：

$$\begin{aligned} &D_{BS}(id \| E) - \varepsilon \\ &\le \log n - \int_{1/n}^{\infty} \{\varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,E,\pi}(y_t^* y_t))\}\frac{dt}{t} \\ &\le \log n - \int_{1/n}^{\infty} \{\varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) + \frac{1}{td^2}\varphi_{\xi,id,\pi}(y_t^* y_t)\}\frac{dt}{t} \\ &= \log d^2 + \log(nd^{-2}) - \int_{1/(nd^{-2})}^{\infty} \{\varphi_{\xi,id,\pi}(x_t^* x_t) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,id,\pi}(y_t^* y_t)\}\frac{dt}{t} \end{aligned} \tag{67}$$

再次利用变分定义，右侧为 $\leq \log\ d^2 + D_{BS}(id\|id) = \log\ d^2$。由于 $\varepsilon > 0$ 可以任意小，我们已证明 $D_{BS}(id\|E) \leq \log d^2$。我们已在 a) 中证明 $D_{BS}(id\|E) \geq \log d^2$，因此证明完成。 □

4 量子场论的应用

4.1 代数量子场论

公理： 参见 [52]，作为一般性参考。在前面的章节中，我们在冯·诺依曼代数的一般框架下描述了信道散度 D_{BS} 的性质。在局域量子场论中，时空局域化带来了额外的结构，而事实证明，这种结构与信道散度的概念十分契合。我们将讨论范围限定在闵可夫斯基时空（$\mathbb{R}^n$，η）的情形，其中 $n \geq 2$。

因果菱形 O 是柯西曲面上一个具有紧致闭包的开、单连通子集 U 的因果完备化，其因果结构由闵可夫斯基度规诱导。代数框架下的量子场论，是将单连通因果菱形指派给冯·诺依曼因子 $O \mapsto \mathsf{A}(O)$，并将其表示在同一个希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上，同时满足以下条件：

a1)（各向同性）若 $O_1 \subset O_2$，则 $\mathsf{A}(O_1) \subset \mathsf{A}(O_2)$。我们~~用 $\mathsf{A} = \cup_O \mathsf{A}(O)$~~ 表示在算子范数下取完备化。

a2)（因果性）若 O_1 与 O_2 具有类空关系，则 $[\mathsf{A}(O_1), \mathsf{A}(O_2)] = \{0\}$。

~~a3)（相对论协变性）对于每个 $g \in \mathsf{P}$ 覆盖[11] 一个庞加莱变换（Λ，a）$\in \mathsf{P} = \mathsf{SO}_+(n-1,1) \ltimes \mathbb{R}^n$，都存在 A 上的一个自同构 α_g，使得$\alpha_g \mathsf{A}(O) = \mathsf{A}(\Lambda O + a)$ 对所有因果菱形 O 成立，并且 $\alpha_g \alpha_{g'} = \alpha_{gg'}$和 $\alpha_{(1,0)} = id$ 是恒等映射。~~

a4)（真空）存在一个强连续正能量表示 $g \mapsto U(g)$，作用于 $\mathscr{H}$，实现 $\alpha_g(a) = U(g) a U(g)^*$，对所有 $a \in \mathsf{A}$ 均成立。存在一个向量 Ω（真空），它是 A 的循环向量，并且对于~~所有 $g \in \mathsf{P}$，$U(g)\Omega = \Omega$。正能量是指，若 $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathsf{P}$ 是由 x 平移得到的，则我们可以写成

$$U(x) = \exp(-i\eta(P, x)), \tag{68}$$

且向量生成元 $P = (P^0, P^1, \ldots\ldots, P^{n-1})$ 的谱值 p 位于~~未来光锥 $p \in V^+ = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \eta(p, p) \geq 0,\ p^0 > 0\}$。

[11] 描述非整数自旋需要用到覆盖群。

a5)（可加性）设 O_i 是一族因果菱形，满足 $O = \cup_i O_i$。则 $(\cup_i \mathsf{A}(O_i))'' = \mathsf{A}(O)$。

出于技术上的考虑，我们还要求满足“核性条件”。该条件的主要目的是确保理论具有某种正则性，而人们也提出了若干与之密切相关的条件版本。据我们所知，其中许多版本对我们的目的而言大致同样适用。为明确起见，我们采用 [53]:

a6)（BW核性）设 A 是柯西曲面上的一个半径为 r 的球，并令 O_r 为相应的因果菱形。考虑映射

$$\Theta_{\beta,r} : \mathcal{A}(O_r) \to \mathscr{H} \ , \quad a \mapsto e^{-\beta H} a\Omega \ , \tag{69}$$

其中 $\beta > 0$，且 $H = P^0$ 是哈密顿算符，即 a4) 项中的 P 的时间分量。要求存在正的常数 $s > 0$ 和$c = c\,(r) > 0$，使得对于 $r > 0,\ \beta > 0$，我们有 $\|\Theta_{\beta,\, r}\|_1 \leq e^{(c/\beta)^s}$ 。。这里我们使用核1-范数，详见例如 [54]。

现在我们说明这些结果对本分析的两个众所周知的重要推论，更多细节和参考文献见 [52] 。首先，根据 Reeh-Schlieder 定理，Ω 对每个 $\mathsf{A}(O)$ 都是循环且分离的，因此真空自动为每个局部冯·诺依曼代数提供一种标准形。其次，每个 $\mathsf{A}(O)$ 都是一个 III_1 [55] 型超有限因子，根据 [56]，它在冯·诺依曼同构意义下是唯一的。因此，我们可以将关于信道散度 D_{BS} 的所有结果应用于局部代数 $\mathsf{A}(O)$。

需要强调的是，先验而言，$\mathsf{A}(O)$仅针对与柯西曲面上单连通子集相关的因果菱形定义。若 K 是 $\mathbb{R}^n$中的任意开且因果完备的子集，我们可以定义以下任一对象

$$\mathcal{A}(K) = (\vee_{O \subset K} \mathcal{A}(O))'', \quad \text{or} \quad \mathcal{B}(K) = (\vee_{O' \subset K'} \mathcal{A}(O'))'. \tag{70}$$

无论哪种情况，区域 O 或 K 上的撇号都表示因果补。对于闭包紧致的拓扑平凡因果菱形 O，有结果表明 $\mathsf{A}(O') = \mathsf{A}(O')$（Haag对偶性），因此根据 a5), 对于拓扑平凡的因果菱形，$\mathsf{A}(O) = \mathsf{B}(O)$。A 或 B 都能按上述含义构成一个网，但 B 可能不满足条件 a5)。对于拓扑非平凡区域 K，一般而言，$\mathsf{B}(K)$ 严格大于 $\mathsf{A}(K)$。

DHR表示： 参见 [57, 28, 29, 52]。希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 可视为网的定义性（真空）表示，但从物理角度而言，也有必要考虑其他表示。我们将考虑 A 在希尔伯特空间 $\mathscr{H}_\pi$ 上的表示 π，该表示限制在任意 $\mathsf{A}(O)$ 上时均超弱连续，并满足:

- （DHR选择准则）[28, 29] $\pi|_{\mathcal{A}(O)'\cap\mathcal{A}}$ 对某个 O 与真空表示幺正等价。

- (BF选择准则) [57] a3) 中的自同构 α_g 在 π中由酉算子实现，即存在一个强连续的正能量表示 $U_\pi(g)$，使得 $\pi(\alpha_g(a)) = U_\pi(g)\pi(a)U_\pi(g)^*$，并且平移 $U_\pi(x)$ 的生成元 $P_\pi = \exp(-i\eta(P_\pi, x))$ 在 $\mathscr{H}_\pi$ 上的谱中具有一个孤立的质量壳，即 $spec(P_\pi) \subset \{p\colon \eta(p,p) = M^2, p^0 > 0\} \cup \{p\colon \eta(p,p) \geq m^2, p^0 > 0\}$，其中 $m^2 > M^2 > 0$为某个值。

如果令 V为实现第一项中酉等价的酉算子，那么 $\rho(a) := V^*\pi(a)V$是 A 的一个端同态，使得

$$\rho|_{\mathcal{A}(O)'\cap\mathcal{A}} = id. \tag{71}$$

因此，我们称 ρ 为局域化端同态（在 O中）。此外，ρ 还具有如下意义上的可传输性。设 $O_1 := O$, $\rho_1 := \rho$，并设 O_2 为另一个因果菱形。那么存在一个酉算子 $u_{21} \in \mathrm{A}(O_1) \vee \mathrm{A}(O_2)$，使得 $Adu_{21} \circ \rho_1 =: \rho_2$ 是一个满足 DHR 和 BF 选择准则、且在 O_2中局域化的端同态。我们将由上述选择准则得到的端同态称为局域化的、可传输端同态。

设 ρ 是一个局域化于某个 O中的可传输不可约端同态。众所周知，选择准则蕴含了与 ρ相关的大量进一步的代数结构。首先，我们有一个所谓的共轭可传输端同态 $\bar{\rho}$，以及满足交织关系的解 r, $\bar{r} \in \mathrm{A}(O)$和 $d_\rho \geq 1$

$$\rho\bar{\rho}(a)\bar{r} = \bar{r}a, \quad \bar{\rho}\rho(a)r = ra \quad (a \in \mathcal{A}) \tag{72}$$

以及共轭关系

$$r^*r = d_\rho 1, \quad \bar{r}^*\bar{r} = d_\rho 1, \quad r^*\bar{\rho}(\bar{r}) = 1 = \bar{r}^*\rho(r). \tag{73}$$

ρ 的左逆定义为 $\Psi_\rho(a)\colon = d_\rho^{-1}r^*\bar{\rho}(a)r$。将 $\rho(\mathrm{A}(O))$ 扩张为 $\mathrm{A}(O)$ 时，其琼斯投影为 $e_\rho = d_\rho^{-1}\bar{r}\bar{r}^*$，而最小条件期望 $E_\rho\colon \mathrm{A}(O) \to \rho(\mathrm{A}(O))$ 定义为 $E_\rho = \rho \circ \Psi_\rho$。 d_ρ 称为 ρ的“统计维数”。根据指标-统计定理[27], $d_\rho = [\mathrm{A}(O)\colon \rho(\mathrm{A}(O))]^{1/2} < \infty$。类似的构造也适用于可约端同态/表示。

关于这一理论在 $n = 2$ 时空维度的共形场论中的一个变体，参见 [58, 27]。

4.2 代数化量子场论中量子信道的复杂度

设 T 是准局域代数 A 的一个完全正映射，[12] 并且对于某个足够大的因果菱形 O，其限制是 A(O) 上的一个量子信道。根据[13, 定理 2，10],我们可以写成

$$T(a) = v^*\theta(a)v, \quad a \in \mathcal{A}(O) \tag{74}$$

其中，v 是 A(O) 的一个等距算子，θ 是 A(O) 的一个端同态。这引出了以下定义。

定义 4.1。若量子信道 $T:\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 具有(74) 的形式，其中 θ 是某个局域化于某个因果菱形 O中的可传输端同态，且 $v \in$ 是一个等距算子$\mathcal{A}(O)$，则称该量子信道为局域且可传输。

注 4.2。1）注意，根据定义，$T|_{\mathcal{A}(O)'\cap\mathcal{A}} = id$，即 T 在 O 的因果补中是恒等映射。

2）容易看出，局域且可传输的量子信道集合在复合运算下封闭，即复合后的量子信道仍具有 (74) 的形式。该集合对凸组合也封闭：设 T_i 是具有 (74) 形式的局域且可传输量子信道，其中 v_i, θ_i，且 p_i 是定义在某个有限集上的概率分布。由于 A(O) 是 III 型代数 [17], ，A(O) 中存在满足 Cuntz 代数关系 (53) 的等距算子 a_i。于是令 $v = \sum \sqrt{p_i}a_i v_i$ 和 $\theta(m) = \sum a_i\theta_i(m)a_i^*, m \in$ A(O)。由此可知，θ 是 A 的局域且可传输端同态，v 是 A(O) 的一个等距算子，而 $\sum p_i T_i$ 具有 (74) 的形式。

3) 可以将定义推广为两个网 A、B 之间的量子信道。

令 $x \in \mathbb{R}^n$，令 $O + x$ 为 O 的平移，并令 $\alpha_x(a) = U(x)^*aU(x)$ 为元素 $a \in$ A(O) 按照 a3) 中的方式平移到 A($O + x$) 后所得的元素。我们将 $T_x = \alpha_x \circ T \circ \alpha_{-x}$ 视为 A($O + x$) 的一个量子信道。于是

$$T_x(a) = \alpha_x(v)^*U(x)\theta(\alpha_{-x}(a))U(x)^*\alpha_x(v) \tag{75}$$

由于根据假设，θ 是满足 DHR 和 BF 选择准则的端同态，因此在扇区 θ 中，平移由强连续酉群 $U_\theta(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$ 实现，所以我们有 $\theta(\alpha_{-x}(a)) = U_\theta(x)^*\theta(a)U_\theta(x)$。此外，$u(x) = U(x)U_\theta(x)^*$ 是 A(O) $\vee$ A($O + x$) 中的一个元素，它将 θ 变换为局域化在 $O + x$ 中的端同态 $\theta_x = Ad_{u(x)} \circ \theta$，并且，当$v_x = \alpha_x(v) \in$ A($O + x$)时，我们有，

$$T_x(a) = v_x^*\theta_x(a)v_x, a \in \mathcal{A}(O + x), \tag{76}$$

[12]注意，A 是一个 C^*，而不是冯·诺依曼代数，但完全正映射的概念仍然有定义。

也就是说，它与式 (74) 具有相同的形式，但此时 θ_x， v_x 局域化在 $O+x$ 中。

现在，我们为代数量子场论中的量子信道复杂度提出一种定义。

定义 4.3。 局域化且可输运通道 T 的复杂度定义为

$$c(T) = D_{BS}(id|_{\mathcal{A}(O)} \| T|_{\mathcal{A}(O)}), \tag{77}$$

其中， O 是任意充分大的因果菱形，使得 $T|_{\mathcal{A}(O)'\cap\mathcal{A}} = id$。

严谨地说，我们应证明：

引理 4.4。 $c(T)$ 的定义不依赖于在 (77) 中选取的充分大的因果菱形 O 。

证明。 设 O_1, O_2 为满足 $T|_{\mathcal{A}(O_i)'\cap\mathcal{A}} = id$ 的因果菱形，并设 O 为 $O_1 \cup O_2$的因果完备化。令 $\mathsf{A}(O_1)^c := \mathsf{A}(O_1)' \cap \mathsf{A}(O)$，令 M_n^c 为穷尽 $\mathsf{A}(O_1)^c$的有限维 I 型代数网，并令 M_n 为穷尽 $\mathsf{A}(O_1)$ 的有限维 I 型代数网；根据要求 a6)，这些网确实存在，见 [17]。于是 $(\cup_n \mathsf{M}_n^c \vee \mathsf{M}_n)'' = \mathsf{A}(O)$，根据 D_{BS} 的鞅性质，我们有

$$\begin{aligned} D_{BS}(id|_{\mathcal{A}(O)} \| T|_{\mathcal{A}(O)}) &= \lim_n D_{BS}(id|_{\mathcal{M}_n^c \vee \mathcal{M}_n} \| T|_{\mathcal{M}_n^c \vee \mathcal{M}_n}) \\ &= \lim_n D_{BS}(id|_{\mathcal{M}_n} \otimes id|_{\mathcal{M}_n^c} \| T|_{\mathcal{M}_n} \otimes id|_{\mathcal{M}_n^c}) \\ &= \lim_n D_{BS}(id|_{\mathcal{M}_n} \| T|_{\mathcal{M}_n}) \\ &= D_{BS}(id|_{\mathcal{A}(O_1)} \| T|_{\mathcal{A}(O_1)}). \end{aligned} \tag{78}$$

在第二个等式中，我们利用了 $\mathsf{M}_n \vee \mathsf{M}_n^c \cong \mathsf{M}_n \otimes \mathsf{M}_n^c$ 作为冯·诺依曼代数，因为 M_n 和 M^c 是有限维的；还利用了根据局域性， T 在 M_n^c 上平凡作用。在第三步中，我们利用了 D_{BS}的外部可加性。在最后一步中，我们再次利用了鞅性质。对于$O_1 \to O_2$也可以进行同样的证明。因此， $c(T)$的定义与在（77）中取 O_1 还是 O_2无关。 □

定理4.5。 复杂度 c 具有以下性质（T，局域化且可传输的量子信道）：

1. （恒等性） $c\left(id\right) = 0$。
2. （内部次可加性） $c\left(T_1 \circ T_2\right) \leq c\left(T_1\right) + c\left(T_2\right)$ 。
3. （凸性）设$\{p_i\}$ 是定义在一个有限集上的概率分布。则$c(\sum p_i T_i) \leq \sum p_i c(T_i)$。

4.（局域性）设 T_1 和 T_2 是局域化在类空相关因果菱形区域中的量子信道，且它们之间的距离严格为正。则 $c(T_1 \circ T_2) = c(T_1) + c(T_2)$。

5.（N元局域测量）令 $M(a) = \sum_i e_i a e_i$ 为描述与 N 两两正交的非平凡投影 $e_i \in \mathcal{A}(O)$，$\sum e_i = 1$相关的 N元局域测量的量子信道。则 M 是局域化且可传输的，并且 $c(M) = \log N$。

6.（网扩张）令 $\mathcal{B}$ 为扩张网 $\mathcal{A}$ *[59]*，其对应的条件期望为 E。则

$$c(E) = \log[\mathcal{B}(O) : \mathcal{A}(O)]. \tag{79}$$

7.（局域可传递端同态 *I*）令 ρ 为一个可传输的局域可传递端同态，其条件期望为 E_ρ，统计维数为 d_ρ。则 E_ρ 是一个局域可传递量子信道，并且

$$c(E_\rho) = \log d_\rho^2. \tag{80}$$

8.（平移）若 T_x 如(76)所示，是将 T 平移 $x \in \mathbb{R}^n$ 所得，则 $c(T_x) = c(T)$。

9.（局域可传输端同态 *II*）若 $\rho \neq id$ 是 $\mathcal{A}(O)$的局域可传输端同态，则 $c(\rho) = \infty$。

10.（局域酉算子）设 $u \in \mathcal{A}(O)$ 是一个酉算子，且 $U(a) = u^* a u$ 是其在 $\mathcal{A}(O)$上的相应量子信道。那么如果 $U \neq id$，则有 $c(U) = \infty$。

证明。1)-3)、6)、10)取自第 3 节。

4) 设 T_i 局域化于 O_i中，其中 O_1 和 O_2 在类空关系下且距离严格为正。由局域性，$T_1 \circ T_2(a_1 a_2) = T_1(a_1) T_2(a_2)$ $a_i \in \mathsf{A}(O_i)$。于是，BW-核性假设 a6)蕴含了代数 $\mathsf{A}(O_1)$ 与 $\mathsf{A}(O_2)$的分裂性质，参见 [17] 或 [52, 第五章 V.5。2] 作为一般参考。因此存在一个酉算子 W：$\mathscr{H} \to \mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$，使得 $W^*(a_1 \otimes a_2) W = a_1 a_2$，从而$T_1 \circ T_2|_{\mathcal{A}(O_1) \vee \mathsf{A}(O_2)} = Ad_W \circ (T_1 \otimes T_2) \circ Ad_{W^*}$，其中 $T_1 \otimes T_2$ 是 $\mathsf{A}(O_1) \otimes \mathsf{A}(O_2)$上的张量积通道，并且 $Ad_W X = W^* X W$。特别地，映射 $T_1 \circ T_2$在 $\mathsf{A}(O_1) \vee \mathsf{A}(O_2)$上是正规的。然后，通过两次应用内部次可加性

$$D_{BS}(id \| T_1 \circ T_2) \geq D_{BS}(Ad_W \| Ad_W \circ (T_1 \otimes T_2)) \geq D_{BS}(id \| T_1 \otimes T_2) \tag{81}$$

由于 W 是酉算子，按照相反方向的同样论证可得反向不等式，因此根据外部可加性，$c(T_1 \circ T_2) = c(T_1 \otimes T_2) = c(T_1) + c(T_2)$。

5) 这由第 3 节可得；我们只需证明 H 是局域且可传输的。由于 $\mathsf{A}(O)$ 是正规无限的，因此存在等距算子 a_i，$i = 1$，....., N

属于 A(O) 且满足 Cuntz 代数关系 (53)。然后我们令 $v^* = \sum_i e_i a_i^*$ 和 $\theta(m) := \sum_j a_j m a_j^*$，$m \in$A($O$)。由此可得 $v^* v = 1$，θ 是一个局域且可传输的端同态，并且 $M(m) = v^* \theta(m) v$，如所要求。

7) 公式 $E_\rho(a) = d_\rho^{-1} \rho(r)^* \rho\bar{\rho}(a)\rho(r)$ 和 $r^* r = d_\rho 1$ 表明 E_ρ 是局域且可传输的（其中 $\theta = \rho\bar{\rho}$, $v = d_\rho^{-1/2}\rho(r)$）。该公式由命题3.21推出，因为根据指标-统计定理 [27]，$d_\rho = [\text{A}(O) : \rho\text{A}(O)]^{1/2}$。

8) 我们只需证明 $c(T_x) = c(T)$。将内部次可加性应用两次，可得 $D_{BS}(id \| \alpha_x \circ T \circ \alpha_{-x}) \geq D_{BS}(\alpha_{-x} \| T \circ \alpha_{-x}) \geq D_{BS}(id \| T)$。反向进行这一论证也可得到反向不等式，从而证明该断言。

9) 我们将 E_ρ, Ψ_ρ, ρ 视为某个 A(O) 上的映射，其中 ρ 在 O 内局域化。利用次可加性以及公式 $\Psi_\rho \circ \rho = id$，两次可得：

$$D_{BS}(id\|\rho) \geq D_{BS}(\Psi_\rho\|\Psi_\rho\circ\rho) = D_{BS}(\Psi_\rho\|id) \geq D_{BS}(\Psi_\rho\circ\rho\|\rho) = D_{BS}(id\|\rho). \quad (82)$$

因此，每一步都必须取等号。

a) 我们先假设 $d_\rho > 1$。为了得到 $D_{BS}(\Psi_\rho \| id)$ 的下界（实际上是 $+\infty$），我们按照命题3.21 a) 部分的证明进行，注意到琼斯投影为 $e_\rho = d_\rho^{-1} \bar{r} r^*$，且 $\Psi_\rho(a) = d_\rho^{-1} r^* \bar{\rho}(a) r$，其中 r，$\bar{r}$，$\bar{\rho}$ 与共轭关系 (73) 中的一样。接下来，众所周知，根据共轭关系，$\Psi_\rho(e_\rho) = d_\rho^{-2} 1$。现在，我们选择以下试验函数

$$x_t := \begin{cases} \frac{t^{-1}}{t^{-1}+d_\rho^{-2}} e_\rho \otimes 1 & 1/n \leq t \leq n, \\ 0 & t > n \end{cases} \quad (83)$$

并令 $y_t = 1 - x_t$。其余部分与命题3.21 a) 部分的证明类似：我们看到，采用这个试验函数

$$\varphi_{\xi,\Psi,\pi}(x_t x_t^*) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,id,\pi}(y_t y_t^*) = \begin{cases} \frac{1}{d_\rho^2+t}, & \text{for } 1/n \leq t \leq n, \\ \frac{1}{t^2} & t > n \end{cases} \quad (84)$$

因此：

$$\begin{aligned} D_{BS}(id\|\rho) =& D_{BS}(\Psi_\rho\|id) \\ =& \sup_n \sup_{x,\xi} \left(\log n - \int_{1/n}^{\infty} \{\varphi_{\xi,\Psi,\pi}(x_t x_t^*) + \frac{1}{t}\varphi_{\xi,id,\pi}(y_t y_t^*)\} \frac{dt}{t} \right) \\ \geq& \sup_n \left(\log n - \int_{1/n}^{n} \frac{1}{d_\rho^2 + t} \frac{dt}{t} - \int_n^\infty \frac{dt}{t^2} \right) \\ =& \sup_n \frac{1}{d_\rho^2} \left((d_\rho^2 - 1)\log n - \log d_\rho^2 + \log(1 + \frac{d_\rho^2}{n}) - \log(1 + \frac{1}{d_\rho^2 n}) - \frac{d_\rho^2}{n} \right) \\ =& \infty \end{aligned} \quad (85)$$

因为 $d_\rho > 1$。

b) 如果 $d_\rho = 1$，那么 $\rho(\mathrm{A}(O)) = \mathrm{A}(O)$，且 ρ 是一个自同构。将其视为 A 的自同构，我们有 $\rho(b) = b$，对于任意 $b \in \mathrm{A}(K)$，只要因果菱形 K 包含于 O'中即可。定义 $\mathrm{A}(O)$ 上的态 $\psi = \omega \circ \rho^{-1}$，其中 ω是真空态，并令 Ψ 为 ψ 在 Ω 的自然锥中的代表元。那么，$Ua\Omega := \rho(a)\Psi$ 定义了一个酉算子 U；若 $b \in \mathrm{A}(K)$，显然有 $bUa\Omega = b\rho(a)\Psi = \rho(ba)\Psi = Uba\Omega$。由 Haag对偶性可得，$U \in (\cup_{K \subset O'} \mathrm{A}(K))' = \mathrm{A}(O')' = \mathrm{A}(O)$。因此，$\rho$ 限制在 $\mathrm{A}(O)$ 上时是内的，故 $c(\rho) = \infty$，除非 $\rho = id$ （参见第 10 项）。 □

注记 4.6. 量子场论的特定局部结构以间接方式出现在定理4.5中，因为它意味着局部代数 $\mathrm{A}(O)$ 是超有限的，满足分裂性质，是正规无限的（事实上是 III_1 型），并且具有一个循环分离向量——根据 Reeh-Schlieder定理，该向量就是真空。在这些性质的证明中，这些特点以不同组合得到了运用。尽管如此，公理的这些特定形式或许并非完全必要；尤其是，闵可夫斯基时空的具体性质似乎不太可能是关键。定理4.5所缺少的是一种将量子信道的复杂度与能量传递／代价的概念联系起来的性质。

例4.7. 定理4.5中第6)项所述网包含最简单的情形，是 $\mathrm{A} = \mathrm{B}^G$ 为某个有限“内部规范”群 G 下的不动点网；为明确起见，设 $\mathbb{Z}_N$。$\mathbb{Z}_N$通过作用在两个网共用的希尔伯特空间 $\mathscr{H}$ 上的酉算子 $U(g)$ $g \in Z_N$ 实现，并且每个 $U(g)$ 都与实现时空对称性的酉算子对易。条件期望就是群平均 $E(b) = N^{-1}\sum_g U(g)bU(g)^*$。设 χ_k 是 $\mathbb{Z}_N$ 上的一个特征标。那么 $P_k = \sum_g \chi_k(g)U(g)$ 是一个投影，并且 $\mathscr{H}_k = P_k\mathscr{H}$ 对每个 $\mathrm{A}(O)$ 都是不变子空间，可将其视为 $\mathscr{H}$ 的一个不可约表示 π_k。

例4.8. 定理4.5 中第 6) 点的一类更复杂的例子出现在 $n = 2$ 共形共形场论中。以圆 S^1上的共形网 V_c 为起点，例如具有某个中心荷 $c < 1$的 Virasoro 网。共形网 A 是通过将 $\mathbb{R}^2$ 上的因果菱形与区间的笛卡尔积相对应，从 $\mathrm{V}_c \otimes \mathrm{V}_c^{op}$得到的。然后，可以从最高权表示 V_c的集合构造 A 的扩张（这些表示在实线上 Virasoro 网给出可传输不可约端同态 μ，ν，.....）：从 $\mathrm{V}_c \otimes \mathrm{V}_c^{op}$的表示$\sum_{\mu,\nu} Z_{\mu,\nu}\mu \otimes \nu^{op}$出发，其中$Z_{\mu,\nu}$是环面配分函数中的重数。若 B 是相应的扩张网，则指标为 $[\mathrm{B} : \mathrm{A}] = \sum_\mu d_\mu^2$。详情参见 [60]。

例 4.9。 在基于紧致局域规范群的 $n = 4$ 维杨-米尔斯型局域规范理论中，会出现与前一个例子类似的情形

群 G：令 K 为柯西曲面中一个实心环面的因果完备化。那么，如同式 (70) 中那样，我们有 A(K)，B(K)。正如 [61], 中所论证的，我们应有 [B(K) : A(K)] = 维度Z(G)，其中 Z(G) 是规范群的中心（例如，在 $G = SU(N)$ 的情形下为 $\mathbb{Z}_N$）。由此，我们将规范群的一个性质与条件期望 E : B(K) $\to$ A(K) 的复杂度联系起来。关于E 在 't Hooft 环和 Wilson环方面作用的直观解释见 [61]。

例4.10。 自由场论中，满足定理4.5中7)条件的局域化端同态的一个例子如下 [62, 第4节7]。考虑一个实的 N分量自由复克莱因-戈登量子场 $\phi_I(x)$ $I = 1, \ldots, N$，定义在 $n = 4$维空间中。我们得到一个网 A，其中包含所有在显然的 $SU(N)$ 对称作用下保持不变的可观测量。考虑一个张量 $T^{I_1 \ldots I_k}, I_j = 1, \ldots, N$，其在指标置换下的对称性质由某个杨表 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$刻画，其中 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s$，且 λ_i 是第 i行中的方格数。接下来，取支集位于某个因果菱形 O内的测试函数 f_I。定义

$$\Psi = C \sum_{I_1, \ldots, I_k = 1}^{N} T^{I_1 \ldots I_k} \phi_{I_1}(f_1) \ldots \phi_{I_k}(f_k) \Omega \ , \tag{86}$$

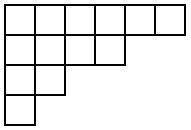
其中 $\phi_I(f) = \int \phi_I(x) f(x) d^4x$是涂抹KG量子场，Ω是真空向量，且 C 是一个因子，使得 kΨk $= 1$。令 dim(λ) 表示具有杨表对称性 λ的张量空间的维度。根据 DHR理论 [28, 29],，存在一个局域化于 O内、可传输的网端同态 ρ，使得

$$\langle \Omega, \rho(a)\Omega \rangle = \langle \Psi, a\Psi \rangle \quad \text{for } a \in \mathcal{A} \tag{87}$$

而这个 ρ 的统计维数 d_ρ 等于杨表维数 dim(λ)。它由一个关于杨表形状的标准公式给出，参见例如 [63], 。因此，在此例中，我们由定理4.5中的7)得到,

$$c(E_\rho) = \log \dim(\lambda)^2 = 2 \log \frac{\prod_i (\lambda_i + N - i) \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j - i + j)}{(N-1)!} \ , \tag{88}$$

在下面的示意图 λ中：



其中 $k = 13$ 和 $N = 10$,

右侧为 2 log 135。

致谢： SH 感谢 Nima Lashkari 和 Mark Wilde 的讨论，并感谢马克斯·普朗克学会资助 MPI-MiS 与莱比锡大学之间的合作，资助项目编号为 M.FE.A.MATN0003。AR 还感谢

Hideki Kosaki 的讨论。本研究部分工作是在他访问 ITP、莱比锡大学期间完成的。他感谢所获的经费支持和热情接待。AR 得到了意大利大学与研究部资助的 MatMod@TOV 卓越系的部分支持。

声明：本文不适用数据共享，因为本研究未生成或分析任何数据集。作者认为，他们不存在与本文相关的利益冲突。

参考文献

[1] E. Bernstein 和 U. Vazirani，《量子复杂性理论》，载于计算理论第二十五届年度 *ACM* 研讨会论文集，第 11–20 页，1993年。[2] M. A. Nielsen，《量子电路下界的几何方法》，*arXiv* 预印本 *quant-ph/0502070*，2005年。[3] M. A. Nielsen、M. R. Dowling、M. Gu 和 A. C. Doherty，《作为几何的量子计算》，《科学》，第 311 卷，第 5764 期，第 1133–1135 页，2006年。[4] J. Haferkamp、P. Faist、N. B. Kothakonda、J. Eisert 和 N. Yunger Halpern，《量子电路复杂度的线性增长》，《自然·物理》，第 18 卷，第 5 期，第 528–532 页，2022年。[5] Z. Li，《量子电路复杂度线性增长的简短证明》，2022年5月。[6] A. R. Brown 和 L. Susskind，《量子复杂性的第二定律》，《物理评论*D*》，第 97 卷，第 8 期，第 086015 页，2018年。[7] D. Stanford 和 L. Susskind，《复杂度与激波几何》，《物理评论*D*》，第 90 卷，第 12 期，第 126007 页，2014年。[8] A. R. Brown、D. A. Roberts、L. Susskind、B. Swingle 和 Y. Zhao，《复杂度等于作用量》，*arXiv* 预印本 *arXiv:1509.07876*，2015年。[9] S. Chapman、M. P. Heller、H. Marrochio 和 F. Pastawski，《迈向量子场论态复杂度的定义》，《物理评论快报》，第 120 卷，第 12 期，第 121602 页，2018年。[10] R.A. Jefferson 和 R. C. Myers，《量子场论中的电路复杂性》，《高能物理学杂志》，第 2017 卷，第 10 期，第 1–81 页，2017年。[11] M. M. Wilde，《量子信息论》。剑桥大学出版社，2017年。

[12] J.-L. Sauvageot, 《希尔伯特空间的相对张量积》, 算子理论期刊, 第 237–252 页, 1983年。[13] R. Longo, 《关于兰道尔原理及其对无限系统的界》, 《数学物理通讯》, 第 363 卷, 第 2 期, 第 531–560 页, 2018年。[14] L. Li、K. Bu、D. E. Koh、A. Jaffe 和 S. Lloyd, 《量子电路的 Wasserstein 复杂度》, 2022年8月。[15] G. De Palma、M. Marvian、D. Trevisan 和 S. Lloyd, 《一阶量子 Wasserstein 距离》, *IEEE*信息论汇刊, 第 67 卷, 第 10 期, 第 6627–6643 页, 2021年。[16] F. Otto 和 C. Villani, 《Talagrand 不等式的推广及其与对数Sobolev不等式的联系》, 泛函分析杂志, 第 173 卷, 第 2 期, 第 361–400 页, 2000年。[17] D. Buchholz、C. D'Antoni 和 K. Fredenhagen, 《局域代数的普适结构》, 《数学物理通讯》, 第 111 卷, 第 1 期, 第 123–135 页, 1987年。[18] V. P. Belavkin 和 P. Staszewski, 《相对熵与熵的c^*-代数推广》, 载于*IHP*理论物理年刊, 第 37 卷, 第 51–58 页, 1982年。[19] K. Furuya、N. Lashkari 和 S. Ouseph, 《单调多态量子f-散度》, *arXiv* 预印本 *arXiv:2103.09893*, 2021年。[20] M. M. Wilde、M. Berta、C. Hirche 和 E. Kaur, 《用于渐近量子信道判别的摊销信道散度》, 《数学物理通讯快报》, 第 110 卷, 第 8 期, 第 2277–2336 页, 2020年。[21] F. Hiai, 《冯·诺依曼代数中的量子F散度：量子操作的可逆性》。施普林格·自然, 2021年。[22]F. Hiai, 《冯·诺依曼代数中的量子 f-散度。II. 最大 f-散度》, 《数学物理杂志》, 第 60 卷, 第 1 期, 第 012203 页, 30, 2019年。[23]K. Fang 和 H. Fawzi, 《几何Rényi散度及其在量子信道容量中的应用》, 《数学物理通讯》, 第 1–63 页, 2021年。[24] K. Fang、O. Fawzi、R. Renner 和 D. Sutter, 《量子相对熵的链式法则》, 《物理评论快报》, 第 124 卷, 第 10 期, 第 100501 页, 2020年。

[25] H. Araki, 《冯·诺依曼代数中态的相对熵》, 《数学科学研究所出版物》, 第 11 卷, 第 3 期, 页 809– 833, 1976 年。[26] V. F. Jones, 《子因子的指标》, 《数学创刊》, 第 72 卷, 第 1 期, 页 1–25, 1983年。[27] R. Longo, 《子因子的指标与量子场统计。i》, 《数学物理通讯》, 第 126 卷, 第 2 期, 页 217–247, 1989 年。[28] S. Doplicher、R. Haag 和 J. E. Roberts, 《局域可观测量与粒子统计 i》, 《数学物理通讯》, 第 23 卷, 页 199–230, 1971 年。[29] S. Doplicher、R. Haag 和 J. E. Roberts, 《场、可观测量与规范变换 ii》, 《数学物理通讯》, 第 15 卷, 第 3 期, 页 173–200, 1969 年。[30] J. Dixmier, 冯·诺依曼代数, 第 27 卷。Elsevier, 2011 年。[31] F. Hiai, 《将条件期望投影到子因子上的指标最小化》, 《数学科学研究所出版物》, 第 24 卷, 第 4 期, 页 673–678, 1988 年。[32] H. Kosaki, 《将 Jones指标理论推广至任意因子》, 泛函分析杂志, 第 66 卷, 第 1 期, 页 123–140, 1986 年。[33] H. Araki 和 T. Masuda, 《冯·诺依曼代数的正锥与 lp空间》, 《数学科学研究所出版物》, 第 18 卷, 第 2 期, 页 759–831, 1982年。[34]R. Bhatia, 矩阵分析, 《数学研究生教材》第 169 卷。Springer-Verlag, 纽约, 1997 年。[35] F. Hiai, 《矩阵分析：矩阵单调函数、矩阵均值与主序》, 《跨学科信息科学》, 第 16 卷, 第 2 期, 页 139– 248, 2010 年。[36] F. Hiai、Y. Ueda 和 S. Wada, 《Pusz–Woronowicz泛函演算与扩展的算子凸透视函数》, *Integral Equations and Operator Theory*, 第 94 卷, 第 1 期, 页 1, 2022年。[37] F. Kubo 和 T. Ando, 《正线性算子的均值》, 《数学年刊》, 第 246 卷, 第 3 期, 页 205–224, 1980 年。

[38] D. Petz 和 M. B. Ruskai，《随机映射作用于矩阵时广义相对熵的收缩》，*Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*，第 1 卷，第 01 期，页 83–89，1998 年。[39] K. Matsumoto，《量子版 f-散度的新定义》，载于代数量子理论中的实在性与测量：*NWW 2015*，日本名古屋，*3*月*9*日至*13*日，页 229–273，施普林格，2018年。[40] F. Hiai 和 M. Mosonyi，《不同的量子 f-散度与量子操作的可逆性》，*Reviews in Mathematical Physics*，第 29 卷，第 07 期，页 1750023，2017 年。[41] H. Kosaki，《无界正算子的平行和》，*Kyushu J. Math.*，第 71 卷，第 2 期，页 387–405，2017 年。[42] H. Kosaki，《无界正算子定义域的交集》，*Kyushu J. Math.*，第 60 卷，第 1 期，页 3–25，2006 年。[43] F. Hiai 和 H. Kosaki，《无界算子的联系及相关主题：冯·诺依曼代数情形》，*Internat. J. Math.*，第 32 卷，第 5 期，论文编号 2150024，88 页，2021年。[44] A. Connes，《III 型因子的分类》，*Ann. Sci. École Norm.Sup. (4)*，第 6 卷，页 133–252，1973 年。[45] H. Kosaki，《态的相对熵：一个变分表达式》，*J. OperatorTheory*，第 16 卷，第 2 期，页 335–348，1986 年。[46] M. Ohya 和 D. Petz，*Quantum Entropy and Its Use*。《理论与数学物理》，Springer Berlin Heidelberg，1993 年。[47] M. Ohya 和 D. Petz，*Quantum entropy and its use*。Springer Science & Business Media，2004 年。[48] L. Accardi 和 C. Cecchini，《冯·诺依曼代数中的条件期望与竹崎定理》，1982 年。[49] F. Hiai 和 M. Tsukada，《冯·诺依曼代数上广义条件期望的强鞅收敛》，*Transactions of the americanmathematical society*，第 282 卷，第 2 期，页 791–798，1984 年。[50] E. Størmer，《冯·诺依曼代数上一类线性映射的 Choi 矩阵类比》，*International Journal of Mathematics*，第 26 卷，第 02 期，页 1550018，2015 年。

[51] M. Pimsner 和 S. Popa，《子因子的熵与指标》，载于高等师范学校科学年刊，第 19 卷，第 57–106 页，1986年。[52] R. Haag，《局域量子物理学：场、粒子、代数》。Springer Science & Business Media，2012 年。[53] D. Buchholz 和 E. H. Wichmann，《局域量子场论中的因果独立性与态的能级密度》，《数学物理通讯》，第 106 卷，第 321–344 页，1986 年。[54] A. Pietsch，《核局部凸空间》，载于核局部凸空间，De Gruyter，2022年。[55] D. Buchholz、C. D'Antoni 和 K. Fredenhagen，《局部代数的普适结构》，1987年。[56] U. Haagerup，《Connes 双中心化子问题与 III_1 型内射因子的唯一性》，1987年。[57] D. Buchholz 和 K. Fredenhagen，《局域性与粒子态的结构》，《数学物理通讯》，第 84 卷，第 1–54 页，1982年。[58] K. Fredenhagen、K.-H. Rehren 和 B. Schroer，《具有辫群统计和交换代数的超选择扇区：I. 一般理论》，《数学物理通讯》，第 125 卷，第 201–226 页，1989 年。[59] R. Longo 和 K.-H. Rehren，《子因子网》，Reviews in Mathematical Physics，第 7 卷，第 04 期，第 567–597 页，1995 年。[60] K.-H. Rehren，《典范张量积子因子》，《数学物理通讯》，第 211 卷，第 395–406 页，2000年。[61] H. Casini、M. Huerta、J. M. Magán 和 D. Pontello，《纠缠熵与超选择扇区。第一部分：整体对称性》，《高能物理学杂志》，第 2020 卷，第 2 期，第 1–95 页，2020年。[62] S. Hollands 和 K. Sanders，《量子场论中的纠缠度量及其性质》，第 34 卷。施普林格，2018年。[63] M. Fischler，《经典群表示的克罗内克积的杨图方法》，数学物理学杂志，第 22 卷，第 4 期，第 637–648 页，1981 年。