arXiv:2302.10018v1 [math.MG] 20 Feb 2023

索об列夫、有界变差与周长延拓在度量测度空间中的研究

EMANUELE CAPUTO、JESSE KOIVU 和 TAPIO RAJALA

摘要。我们研究一般度量测度空间中集合与函数的延拓。我们证明，一个开集具有强 BV 延拓性质，当且仅当它对有限周长集具有强延拓性质。我们还证明了强 BV 延拓性质与两种不同且不等价版本的索об列夫 $W^{1,1}$ 空间的可扩张性之间的若干蕴含关系，并通过例子说明其余蕴含关系均不成立。

目录

1. 引言 12. 预备知识与记号 42.1. 度量测度空间中的有界变差函数与有限周长集 52.2. 度量测度空间中的索об列夫函数 72.3. 延拓性质 93. 有界变差函数与有限周长集的延拓性质之间的关系 104. 索博列夫延拓域与 BV 延拓域之间的关系 174.1. 平滑化论证 174.2. 主要命题 214.3. 例子 25参考文献 31

1. 引言

本文研究了一般度量测度空间中的 BV-函数、 $W^{1,1}$-函数以及有限周长集的可扩张性之间的联系。这里，度量测度空间为 (X, d m)，其中度量空间 (X, d) 假设为完备且可分，参考测度 m 为在有界集上有限的非负博雷尔测度。更确切地说，我们针对不同的（子）函数空间和（半）范数，研究以下问题的各种变体：给定开集 Ω ⊂ X，是否存在常数 $C > 0$，使得对于每个 $u \in BV($Ω)，都有 $Eu \in BV$(X)

日期：2023年2月21日。2020 数学主题分类。主要分类 30L99。次要分类 46E36、26B30。关键词和短语。索博列夫延拓、有界变差延拓、有限周长集。作者感谢芬兰科学院资助编号 314789 的支持。第一作者还感谢芬兰科学院资助编号 321896 的支持。

其中 $Eu|_\Omega = u$ 和 $\|Eu\| \le C\|u\|$? 近年来，人们越来越多地在一般度量测度空间的背景下研究 Sobolev 空间。一般性将迫使我们为证明寻找新的思路。为了突出这一点，接下来我们将把我们的结果和证明与度量测度空间分析中更为传统的情形进行对比。

在一系列奠基性工作之后（特别是 [10, 5, 7]），对于要求度量测度空间具有更多结构的问题，通常的起始假设是局部庞加莱不等式成立，并且测度具有倍增性质。满足这两个假设的空间称为 PI 空间。当处理 W^{1}、1-函数或有界变差函数时，相关的庞加莱不等式是 (1，1)-庞加莱不等式，它允许我们用函数的 L^1-范数来控制其梯度的 L^1-范数。PI 假设发挥作用的一种方式是，可以通过单位分解修改函数，使其成为局部利普希茨函数，从而使有界变差范数或索оболев范数的增加不超过一个常数。我们将在引言末尾回到这一点。PI 假设的另一种用途，是在 L^1 拓扑下获得 BV 空间中有界集的紧性；一般而言，这种紧性可能会失效，见注 2.9 和例 3.3。紧性失效的一个后果是，尽管 Baldi 和 Montefalcone 已观察到 Burago 和 Maz'ya 的结果的以下重述 [4]（另见 [13, 第 9 节。3]）在 PI 空间上成立，[3, 定理 3。3], 但它一般并不成立，见例 3.3。

定理 1.1 (Burago 和 Maz'ya)。区域 Ω $\subset \mathbb{R}^n$ 是一个 BV-延拓域，当且仅当 Ω具有有限周长集合的延拓性质。

的定义 。

BV-延拓和周长延拓的定义见第 2.3 节。这些定义只考虑函数的变差（或集合的周长），而不考虑函数的 L^1-范数（也不考虑集合的测度）。在欧几里得情形下，对于有界域，采用全范数（全变差与 L^1-范数之和）进行延拓，与仅采用全变差部分进行延拓 [12]是等价的。不过请注意，在欧几里得空间中，若去掉连通性假设（也就是说，考虑开集而非区域），这两种可扩张性的定义便不再一致。一个简单的例子是平面上两个不相交圆盘的并集。它具有全范数下的延拓性质，却不具有仅就全变差部分而言的延拓性质。在没有 PI 假设的度量测度空间中，即使对于区域，也会出现上述可扩张性差异。由于在我们的情形下，采用区域而非开集不会造成区别，因此我们将针对开集陈述结果。在一般的度量测度空间中，我们能够证明以下版本的定理 1.1。

定理 1.2。开子集 Ω $\subset$ X 是一个$(BV \cap L^\infty, \|\cdot\|_{BV})$延拓集，当且仅当它具有有限周长集合的延拓性质。

定理 1.2 之所以需要限定为 L^∞-函数，是因为在没有 PI假设的情况下，即使在局部范围内，我们也无法控制延拓函数的 L^1-全范数。对 L^1-全范数施加充分控制的一种方法，是相对于全范数来定义延拓：

定理 1.3。开子集Ω $\subset$ X 是一个 BV-延拓集，当且仅当它具有带全范数的有限周长集的延拓性质。

,1-延拓与有界变差延拓之间的联系由 García-Bravo 和第三位署名作者在 [6]中进行了研究。其中， BV-延拓和周长延拓的强版本发挥了关键作用。在这些版本中，要求延拓 Eu 在 Ω 的边界上给出零变差测度。关于精确定义，请再次参见第 2.3 节。我们将在此推广的 [6] 中的论述如下。

定理 1.4 (García-Bravo 和 Rajala [6, 定理 1.3])。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界域。则以下条件等价：

(1) Ω 是一个 $W^{1,1}$-延拓域。(2) Ω 是一个强 BV-延拓域。(3) Ω 具有有限周长集的强延拓性质。

与定理 1.1类似，定理 1.4 在一般度量测度空间中也不成立。原因相同：缺少适当的紧性，反例也相同，即例 3.3。因此，我们将在此以全范数表述结果，与定理 1.3类似。然而，在一般度量测度空间的情形下还会出现另外两个问题。首先，索博列夫延拓域的边界一般并非零测度。回想一下，在 PI 空间中，延拓域具有测度密度；通过密度点论证可知，这意味着边界为零测度 [9, 8]。其次，度量测度空间中 $W^{1,1}$ 有多种定义。其中一些定义并不等价 [1]，而对另一些定义而言，等价性仍未解决。

我们将针对 $W^{1,1}$ 给出两种定义。一种定义通过 ∞-测试计划给出，见定义 2.14。我们将由此定义得到的索об列夫函数空间简记为 $W^{1,1}$(X)。我们考虑的第二种定义是 $W^{1}_{,w}{}^{1}$(X)，它由满足 $|Du| \ll \mathfrak{m}$ 的 $u \in BV$(X) 构成。第三种也是研究最多的定义是牛顿索博列夫空间 $N^{1,1}$(X)。据我们所知，目前有一项进行中的工作将证明 $N^{1,1}$(X) 与 $W^{1,1}$(X) 等价，因此我们不单独讨论相对于 $N^{1,1}$(X) 的延拓；但要指出的是，一旦证明了这种等价，我们的结果中便可以用 $N^{1,1}$(X) 替换 $W^{1,1}$(X)，并用 $N^{1,1}$(Ω) 替换 $W^{1,1}$(Ω)。

对于开集 Ω ⊂X，考虑以下断言：
(s-Per) Ω 具有带全范数的有限周长集强延拓性质。(s-BV) Ω 具有强 BV-延拓性质。($W^{1,1}$) Ω 具有 $W^{1,1}$-延拓性质。($W^{1}_{,w}{}^{1}$) Ω 具有 $W^{1}_{,w}{}^{1}$-延拓性质。

在开集的边界具有测度零这一假设下，上述性质彼此完全等价。

定理 1.5。设 $\Omega \subset X$ 为有界开集，且满足 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) = 0$。则

$$(s\text{-}Per) \Longleftrightarrow (s\text{-}BV) \Longleftrightarrow (W^{1,1}) \Longleftrightarrow (W^{1,1}_{w}).$$

如果开集的边界具有正测度，那么可能会出现这样的情况：该开集具有$W^{1,}{}_{w}{}^{1}$延拓性质，但不具有 $W^{1,}{}_{1}$延拓性质（也不具有强 BV 延拓性质），见例子 4.8。此外，一个开集可能具有 $W^{1,}{}_{1}$延拓性质，却不具有强 BV延拓性质，见例子 4.9 和例子 4.10。上述例子排除的其余蕴含关系确实成立：

定理 1.6。 设Ω ⊂X 是开且有界的。则

$$(s\text{-}Per) \iff (s\text{-}BV) \implies (W^{1,1}) \implies (W^{1,1}_w).$$

在定理 1.5 和定理 1.6 的证明中，我们需要将一个 BV 函数转化为索об列夫函数，同时保持该函数的边界值不变，并且不显著增大其范数。在文献 [6] 中定理 1.4 的证明采用了平滑算子来实现这一点，该算子是借助惠特尼分解和单位分解构造的。我们的证明中，这种方法行不通，因为直接使用单位分解需要用到庞加莱不等式。相反，我们针对每个函数分别进行修改，利用有界变差空间定义中给出的收敛利普希茨函数，见命题 4.1。

2. 预备知识与记号

在全文中，我们假设 (X, d $\mathfrak{m}$) 是一个度量测度空间，因此 (X, d) 是完备且可分的度量空间，并且 $\mathfrak{m}$in 是一个在有界集上有限的非负博雷尔测度。

给定中心点 $x \in$ X 和半径 $r > 0$，我们将开球记为 $B(x, r) := \{y \in \mathrm{X} : \mathsf{d}(x, y) < r\}$。我们用 $\mathscr{B}$(X) 表示 X 的博雷尔子集族，用 χ_A 表示集合 A 的示性函数，并用 $\mathcal{L}^d$ 表示 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度。给定集合 $A \subset$X 和 $r > 0$，我们将 A 的开r-邻域记为 $B(A, r) := \bigcup_{x\in A} B(x, r)$。回顾函数 f: X $\to \mathbb{R}$ 的 斜率 lip$f$: X $\to \mathbb{R}^+$的定义：

$$\mathrm{lip} f(x) := \overline{\lim_{y\to x}} \frac{|f(y) - f(x)|}{\mathsf{d}(x, y)}$$

按照约定，若 $x \in$ X 是一个孤立点，则 lip$f$(x) $= 0$ 。

我们用 $\mathcal{L}^0$($\mathfrak{m}$) 表示 $\mathfrak{m}$-可测函数空间。给定 $p \in [1, +\infty)$，令 $\mathcal{L}^p$($\mathfrak{m}$) :={$f \in \mathcal{L}^0$($\mathfrak{m}$) : $\int |f|^p \, d\mathfrak{m} < \infty$}，且 $\mathcal{L}^\infty$($\mathfrak{m}$) := {$f \in \mathcal{L}^\infty$($\mathfrak{m}$) : $\mathfrak{m}$-本质上确界 $f < \infty$}。对于 $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$，我们将 L^p($\mathfrak{m}$) :=$\mathcal{L}^p$($\mathfrak{m}$)/$\sim$记作 $\sim$，其中 $\sim$是由 $\mathfrak{m}$-几乎处处相等定义的等价关系。对于 $p \in [1, \infty]$, L^ploc(X), 我们记 = {$f \in L^0$($\mathfrak{m}$) : $\forall x \in$X 上存在开集 $U \ni x$，使得 $f \in L^p(\mathfrak{m}|_U)$}。类似地，给定 f_n,$f \in L^p$ loc(X)，若对每个 $x \in$ X，都存在开集 $U \ni x$ 使得 $f_n \to f \in L^p(\mathfrak{m}|_U)$，则称 $f_n \to f \in L^p$ loc(X)。

给定一个开集 $U \subset X$，我们定义

$$\Gamma(U) := C([0, 1], U) = \{\gamma\colon [0, 1] \to U, \ \gamma \text{ is continuous}\}$$

赋予上确界距离后，这是一个可分度量空间。当 $U =$X 时，空间 Γ(X) 也是完备的。对于 $p \in [1, \infty]$，我们定义 p-绝对连续曲线的集合，$AC^p([0, 1], U) \subset \Gamma(U)$，其由所有满足存在 $0 \le g \in L^p([0, 1])$ 使得以下条件成立的 $\gamma \in \Gamma(U)$ 构成

$$\mathsf{d}(\gamma_t, \gamma_s) \le \int_t^s g(r) \, \mathrm{d}r \qquad \text{for every } 0 \le t \le s \le 1.$$

在这种情况下，

$$|\gamma'_t| := \lim_{h\to 0} \frac{\mathsf{d}(\gamma_{t+h}, \gamma_t)}{|h|} \qquad \text{exists for a.e. } t \in [0, 1]$$

以及 $|\gamma_t'| \in L^p([0,1])$。
我们回顾求值映射 $\mathrm{e}_t\colon\ \Gamma(U) \to U$的定义，即 $\mathrm{e}_t(\gamma) := \gamma_t$，并注意到它是连续的。我们将曲线 $\gamma \in AC^\infty([0,1],U)$ 的全局利普希茨常数记为 $\mathrm{Lip}(\gamma)$

$$\mathrm{Lip}(\gamma) = \sup_{t\neq s} \frac{\mathrm{d}(\gamma(t),\gamma(s))}{|t-s|}.$$

给定一个度量空间 Y，我们用 $\mathscr{P}(\mathrm{Y})$ 表示 Y 上博雷尔概率测度的集合。我们回顾 ∞-测试计划的定义（见[1]）。

定义 2.1（U上的测试计划）。若测度 $\boldsymbol{\pi} \in \mathscr{P}(\Gamma(U))$ 满足以下条件，则称其为 ∞-测试计划：

i) $\boldsymbol{\pi}$ 集中在 $AC^\infty([0,1],U)$ 上，并且 $(\gamma \mapsto \mathrm{Lip}(\gamma)) \in L^\infty(\boldsymbol{\pi})$ ；
ii) 存在 $\mathsf{C} = \mathsf{C}(\boldsymbol{\pi})$，使得对于每个 $t \in [0,1]$ 都有 $\mathrm{e}_{t*}\boldsymbol{\pi} \leq \mathsf{C}\mathfrak{m}$。

我们将 C 称为 $\boldsymbol{\pi}$ 的压缩常数，并定义 $\mathrm{Lip}(\boldsymbol{\pi}) := \|\mathrm{Lip}(\gamma)\|_{L^\infty(\boldsymbol{\pi})}$。给定一个开集$U \subset \mathrm{X}$，对于任意 s、$t \in [0,1]$，满足 $s<t$，我们将限制映射 $\mathrm{restr}_{s,t}$ 定义为：$C([0,1],U) \to C([0,1],U)$，其形式为 $\mathrm{restr}_{s,t}(\gamma)_r := \gamma_{(1-r)s+rt}$ for $r \in [0,1]$。注意，$\mathrm{restr}_{s,t}$ 是连续的。如果集合 $\Gamma \subset \Gamma(\mathrm{X})$ 满足：对于每个 ∞-测试计划 $\boldsymbol{\pi}$，都有 $\boldsymbol{\pi}(\Gamma) = 0$，则称其为 1-可忽略集。如果某个性质不成立的集合是 1-可忽略的，则称该性质在 1-几乎处处成立。

2.1. **度量测度空间中的有界变差函数和有限周长集**。我们定义有界变差函数的空间。

定义 2.2（全变差）。设 $(\mathrm{X},\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为度量测度空间。考虑 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$。给定一个开集 $A \subset \mathrm{X}$，我们定义

$$|Df|(A) := \inf\left\{ \varliminf_n \int_A \mathrm{lip} f_n \,\mathrm{d}\mathfrak{m} :\ f_n \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(A),\ f_n \to f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|A}) \right\}.$$

我们将 $|Df|$ 扩展到所有博雷尔集，方法如下：给定 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$，我们定义

$$|Df|(B) := \inf\{|Df|(A), B \subset A, A \text{ is an open set}\}.$$

通过这一构造，$|Df|\colon \mathscr{B}(\mathrm{X}) \to [0,\infty)$ 是一个博雷尔测度，称为 f 的全变差测度（[14, 定理 3.4]）。根据全变差的定义可知，给定一个开集 $A \subset \mathrm{X}$

$$f_n \to f \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(A) \qquad \Rightarrow \qquad |Df|(A) \leq \varliminf_{n\to\infty} |Df_n|(A). \tag{1}$$

给定博雷尔集 $B \subset \mathrm{X}$ 和 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(B)$，我们引入记号 $|Du|_B$，表示在度量测度空间 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}, \mathfrak{m}_{|B})$ 中计算的 u 的全变差。

定义 2.3（$BV(B)$ 和 $BV(B)$）。设 $(\mathrm{X}, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为度量测度空间。设 $B \subset \mathrm{X}$ 为博雷尔集。

给定 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|B})$，我们将空间 $BV(B)$ 定义为满足$|Du|_B(B) < \infty$ 的函数 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}_{|B})$ 的集合。我们定义 $BV(B) := \{u \in L^1(\mathfrak{m}_{|B}) :\ |Du|_B(B) < \infty\}$。我们赋予空间 $BV(B)$

赋予范数 $\|u\|_{BV(B)} := \|u\|_{L^1(\mathfrak{m})} + |Du|_B(B)$。类似地，我们在空间 $BV(B)$ 上赋予半范数 $\|u\|_{\mathring{BV}(B)} := |Du|_B(B)$。

◦**注 2.4.** 注意，在 B 为开集的情况下，上述 $BV(B)$ 的定义等价于：给定 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m}|_B)$，$|D\tilde{f}|(B) < \infty$，其中 $\tilde{f} \in L^1(\mathfrak{m})$ 由零延拓给出，且 $|D\tilde{f}|(B) = |Df|_B(B)$。类似地，若最后一个性质成立且 $f \in L^1(\mathfrak{m}|_B)$，则 $f \in BV(B)$。

注 2.5。 我们指出，在 $f \in L^1(\mathfrak{m})$ 的情形下，可以通过相对于 L^1-拓扑的松弛，对开集 $A \subset \mathrm{X}$ 定义 $|Df|(A)$，即

$$|Df|(A) := \inf\left\{ \varliminf_n \int_A \mathrm{lip} f_n \, \mathrm{d}\mathfrak{m} : \ f_n \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(A),\ f_n \to f \in L^1(\mathfrak{m}|_A) \right\}.$$

由全变差的下半连续性可直接验证，给定开集 $\Omega \subset \mathrm{X}$，$(BV(\Omega)\|\cdot\|_{BV(\Omega)})$ 是一个巴拿赫空间。

◦**注 2.6**。 设 $f \in BV(\mathrm{X})$，且 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是 L-利普希茨的。那么，根据全◦变差的定义，我们有 $\varphi \circ f \in BV(\mathrm{X})$，并且

$$|D(\varphi \circ f)|(\mathrm{X}) \le L|Df|(\mathrm{X}).$$

特别地，根据定义可知，若 U 是开且有界的，且 f 是利普希茨的，则 $f \in BV(U)$，其中

$$|Df|(U) \le \int_U \mathrm{lip} f \, \mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{2}$$

定义 2.7（有限周长集）。 我们称 $E \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ 为有限周长集，如果◦$\chi_E \in BV(\mathrm{X})$，并记 $P(E, B) := |D\chi_E|(B)$，其中 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$；这称为在 E中的周长。

特别地，我们称 $P(E, \mathrm{X}) =: P(E)$ 为 E的周长。这里列出周长的一些有用性质。i）、iii）、iv）的成立由周长的定义得到，ii）则由对角线论证得到（见 [14,命题 3。6]）。

命题 2.8（周长的性质）。 设 $(\mathrm{X},\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 为一个度量测度空间。考虑两个有限周长集 E 和 F。设 $U \subset \mathrm{X}$ 为开集， $B \subset \mathrm{X}$ 为博雷尔集。则：

i）局部性。若 $\mathfrak{m}((E\Delta F) \cap B) = 0$，则

$$P(E, B) = P(F, B);$$

ii）下半连续性。对于每个开集 $U \subset X$，函数 $E \mapsto P(E, U)$ 关于 $L^1_{loc}(\mathfrak{m})$-拓扑下半连续，即若 $\chi_{E_n} \to \chi_E$ *in* $L^1_{loc}(\mathfrak{m})$，则 $P(E, U) \le \varliminf_n P(E_n, U)$；*iii*）次模性。成立 $P(E \cup F, B) + P(E \cap F, B) \le P(E, B) + P(F, B)$；*iv*）补集。成立 $P(E, B) = P(X \setminus E, B)$；

注记 2.9。 我们指出，如果没有庞加莱不等式，那么对于有限周长集，我们并不总能获得这样的紧性：任意一列有限周长集 $\{E_n\}_n$ 满足 $\sup_n P(E_n) < \infty$，都应存在一个子列在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathfrak{m})$ 中收敛到一个 E_∞ 有限周长的极限集。在 PI 空间中该结论成立，参见 [14, 定理 3.7]。

我们回顾抽象度量测度空间中有界变差函数的余面积公式，该公式在 [14] 中针对 PI 空间得到了证明。正如例如在 [1], 中所指出的，同一公式在抽象度量测度空间的情形下也成立。

命题 2.10（余面积公式）。设（X，d m）为一个度量测度空间，并考虑 $f \in L^1_{loc}$（m）。那么，对于每个博雷尔集 E，映射 $t \mapsto P$（$\{f > t\}$， E）是博雷尔可测的，并且

$$|Df|(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\{f > t\}, E)\,\mathrm{d}t.$$

。特别地，如果 $f \in BV$（X），那么 $\{f > t\}$ 对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 $t \in \mathbb{R}$具有有限周长；另一方面，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty} P$（$\{f > t\}$， E）$\mathrm{d}t < \infty$，那么 $f \in \overset{\circ}{BV}$（X）。

我们定义博雷尔子集 $B \subset$X 上有限周长集的概念。

定义 2.11（Borel子集 B 上的有限周长集）。设 (X, d m) 是一个度量测度空间，且 $B \subset$ X。我们称 $E \in \mathscr{B}(B)$ 在 B 上具有有限周长，当且仅当 $P_B(E) < \infty$，其中$P_B(E) := |D\chi_E|_B(B)$（其中，全变差是在度量测度空间 $(X, \mathrm{d}^{\mathfrak{m}}|_B)$ 中计算的）。此外，对于每个博雷尔集 F，我们定义 $P_B(E, F) := |D\chi_E|_B(B \cap F)$。

注 2.12。同样，对于 BV 函数的情形，我们注意到，如果 B 是一个开集，则 $E \in$ $\mathscr{B}$(X)在 B中具有有限周长，当且仅当 $P(E, B) < \infty$，其中 E是满足$\tilde{}$ $\tilde{}(E \cap \Omega)\Delta E = \emptyset$的任意博雷尔集。在这种情况下， $P(E, B) = P_B(E)$。

。**注 2.13**。关于 B 上 $BV(B)$的定义和有限周长集，我们有，mms (X, $\mathrm{d}^{\mathfrak{m}}|_B$)中的余面积公式如下。考虑$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\ \mathfrak{m}|_B)$。那么，对于每个博雷尔集 E，映射 $t \mapsto P_B(\{f > t\}, E)$是博雷尔的，并且

$$|Df|_B(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_B(\{f > t\}, E)\,\mathrm{d}t.$$

。特别地，如果 $f \in BV(B)$，那么 $\{f > t\}$ 对于 $\mathcal{L}^1$-几乎处处的 t在 B 上具有有限周长；另一方面，如果$\int_{-\infty}^{+\infty} P_B(\{f > t\}, \mathrm{X})\mathrm{d}t < \infty$，那么 $f \in \overset{\circ}{BV}(B)$。

2.2. **度量测度空间中的索об列夫函数**。我们回顾一下，在任意度量测度空间中， $W^{1,1}$ 有几种可能的定义，参见例如 [1]。考虑开集 Ω $\subset$ X。在定义了 $BV(\Omega)$ 之后，最简单的定义是空间 $W^{1,}{}_w{}^1$ (Ω) $\subset BV(\Omega)$，它由所有满足 $|Du| \ll \mathfrak{m}|_\Omega$ 的 $u \in BV(\Omega)$ 构成，并赋予其作为 BV 空间子集的范数，即：

$$\|u\|_{W^{1,1}_w(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \left\| \frac{\mathrm{d}|Du|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \right\|_{L^1(\Omega)}, \qquad \text{for } u \in W^{1,1}_w(\Omega).$$

本文中我们不考虑 Sobolev 空间 [11, 15] 的牛顿定义。原因之一是，在我们的证明中使用这种定义并非最方便。因此，本文中我们采用的指数为 $p = 1$ 的 Sobolev 空间的主要定义如下。

定义 2.14（空间 $W^{1,\,1}(\mathrm{X})$）。给定 $f \in L^1(\mathfrak{m})$，我们称 $f \in W^{1,\,1}(\mathrm{X})$，如果存在$G \in L^1(\mathfrak{m})$，使得对于每个 ∞-测试计划 $\boldsymbol{\pi}$

$$|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \le \int_0^1 G(\gamma_t)|\dot\gamma_t|\,\mathrm{d}t \qquad \text{for } \boldsymbol{\pi}\text{-a.e. } \gamma.$$

在这种情况下，我们称 G 为 f 的 1-弱上梯度。

我们可以通过以下标准论证在时间上进行局部化（参见 [2, 命题 5.7]）。给定一个 ∞-测试计划 $\boldsymbol{\pi}$，以及概率测度 $\boldsymbol{\pi}_{q_1,\,q_2} := \mathrm{restr}_{q_1,\,q_2 *}\boldsymbol{\pi}$ 对于 $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ 是一个 ∞-测试计划，写出在 $\boldsymbol{\pi}_{q_1,\,q_2}$ 上检验的 $W^{1,\,1}(\mathrm{X})$ 的定义，并利用以下事实：对于 $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处的 $\gamma, f\circ\gamma \in W^{1,\,1}(0,1)$，我们得到如下结果。

命题 2.15。给定 $f \in L^1(\mathfrak{m})$，以下各项等价：

i) G 是 f 的 1-弱上梯度；ii) 对于每个 ∞-测试计划 $\boldsymbol{\pi}$，对于 $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处的 γ, $f\circ\gamma \in W^{1,\,1}(0,\ 1)$，以及

$$|(f\circ\gamma)'_t| \le G(\gamma_t)|\dot\gamma_t| \qquad \textit{for a.e. } t.$$

由上一个命题可知，定义

$$A(f) := \{G \in L^1(\mathfrak{m}) : G \text{ is a 1-weak upper gradient of } f\},$$

$(A(f)\ \le)$ 是一个凸的、闭的（在 $L^1(\mathfrak{m})$ 中）格。因此存在一个 1-弱上梯度，它在 $\mathfrak{m}$-几乎处处意义下是最小的，我们称之为最小 1-弱上梯度，并记为$|Df|_{1,\mathrm{X}}$。类似地，给定开集 $\Omega \subset \mathrm{X}$，只考虑 Ω 上的测试计划，可以自然地定义 $W^{1,1}(\Omega)$。在这种情况下，我们将 1-最小弱上梯度记为$|Du|_{1,\Omega}$。显然可验证，$W^{1,1}(\mathrm{X}) \subset W^{1,1}(\Omega)$（其中的包含关系由自然限制给出），并且

$$|Du|_{1,\Omega} \le |Du|_{1,\mathrm{X}} \quad \mathfrak{m}\text{-a.e. on } \Omega \quad \text{for every } u \in W^{1,1}(\mathrm{X}). \tag{3}$$

按惯例 ，若不会造成混淆，我们省略下标 1 和 Ω .

注意，以下包含关系成立

$$W^{1,1}(\mathrm{X}) \subset W^{1,1}_w(\mathrm{X}),$$

见 [1, 第 8] 节。另请注意，由于 $BV(\mathrm{X})$ 空间的定义等价（见 [1, 定理 1.1], ），松弛定义等价于另一种使用 ∞-测试计划概念的定义（参见其中 $w - BV(\mathrm{X}, \mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 的定义）。

定理 2.16（ $BV(\mathrm{X})$ [1, 定理 1.1]的等价定义）。设 $f \in L^1$（$\mathfrak{m}$）。则 $f \in BV(\mathrm{X})$当且仅当对于几乎处处的曲线（相对于 1），有 $f\circ\gamma \in BV(0,1)$ 且 $|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \le |D(f\circ\gamma)|(0,1)$，并且对于每个 ∞-测试计划 $\boldsymbol{\pi}$

$$\int \gamma_*|D(f\circ\gamma)|(B)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(\gamma) \le \mathsf{C}(\boldsymbol{\pi})\,\|\mathrm{Lip}(\gamma)\|_{L^\infty(\boldsymbol{\pi})}\,\mu(B). \tag{4}$$

对每个 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$。在这种情况下，$|Df|$ 是使 μ 满足(4) 的最小测度。

2.3. 延拓性质。我们介绍博雷尔集 $U \subset \mathrm{X}$ 的一些延拓性质。通常假定集合 U 是开的。我们定义 ($\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{S}}$)-延拓集，其中 $\mathscr{A}(U) \subset L^0(\mathfrak{m}|_U)$ 是一个赋予半范数 $\|\cdot\|_{\mathscr{S}(U)}$ 的向量空间。就本文而言，我们将上述定义专门应用于以下情形之一：($\mathscr{A}(U)\|\cdot\|_{\mathscr{S}(U)}$) 是以下之一：($W^1$,1$(U)\|\cdot\|_{W^1}$,1$(U)$), ($W^1$,$_w$ $^1(U)\|\cdot\|_{W^1}$,$_w$ $^1(U)$), ($BV(U)\|\cdot\|_{BV(U)}$), ($BV(U)\cap L^\infty(U)\|\cdot\|_{BV(U)}$),

$\|\cdot\|^{\circ}_{BV(U)}$), 或 ($BV(U)^{\|\cdot\|^{\circ}_{BV(U)}}$)。

定义 2.17。 设 Ω $\subset$ X 是一个博雷尔集， $\mathscr{A}(\Omega) \subset L^0(\mathfrak{m}|_\Omega)$，且 $\|\cdot\|_{\mathscr{S}(\Omega)}$ 是 $\mathscr{A}(\Omega)$ 上的半范数。则称 Ω 为一个 ($\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{S}}$)-延拓集，若存在 $C > 0$ 和 $E\colon \mathscr{A}(\Omega) \to \mathscr{A}(\mathrm{X})$，使得

i) $\|Eu\|_{\mathscr{S}(\mathrm{X})} \le C\|u\|_{\mathscr{S}(\Omega)}$ 对于每个 $u \in \mathscr{A}(\Omega)$ 均成立； ii) $Eu|_\Omega = u$ 对于每个 $u \in \mathscr{A}(\Omega)$ 均成立。

当 $\|\cdot\|_{\mathscr{S}(\Omega)}$ 是 $\mathscr{A}(\Omega)$ 上的自然半范数时，我们将 Ω 称为 $\mathscr{A}$-延拓集，而不称为 ($\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{S}}$)-延拓集。

若 Ω 是一个 ($\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{S}}$)-延拓集，且 E 是延拓算子，我们定义：

$$\|E\|_{\mathscr{S}} := \sup_{u\in\mathscr{A}(\Omega)} \frac{\|Eu\|_{\mathscr{S}(\mathrm{X})}}{\|u\|_{\mathscr{S}(\Omega)}} < \infty$$

约定 $0/0 = 0$ 和 $t/0 = \infty$ 对于 $t > 0$。注意，这种情况可能发生，因为在一般情况下， $\|\cdot\|_{\mathscr{S}(\Omega)}$只是一个半范数。

定义 2.18 （强有界变差延拓集）。 设 Ω $\subset$X 为开集。若 Ω 是一个 ($BV, \|\cdot\|_{BV}$)-延拓集，延拓算子为 E ，且

$$|DEu|(\partial\Omega) = 0. \tag{5}$$

在上述所有定义中，当 Ω 也是连通的时，我们称 Ω 为一个 ($\mathscr{A}, \|\cdot\|_{\mathscr{S}}$)-延拓域；对于最后一个定义，则以 s-$BV$-延拓域取代延拓集。对于有限周长集，也可以给出类似的可扩张性定义。为使其完整并明确术语，下面将这些定义明确写出。

定义 2.19 （有限周长集合的延拓性质）。 设 Ω $\subset$X 为一个博雷尔集。若存在 $C_{\mathrm{Per}} > 0$ ，使得˜对于 Ω 上任意有限周长的 $E \subset$，都存在 E ，满足以下条件

i) $P(\tilde{E}, \mathrm{X}) \le C_{\mathrm{Per}} P_\Omega(E)$;
ii) $\mathfrak{m}(E\Delta(\tilde{E} \cap \Omega)) = 0$;

定义 2.20 （有限周长集合的全范数延拓性质）。 设 Ω $\subset$X 是一个博雷尔集。若存在 $C'_{\mathrm{Per}} > 0$ ，使得对于 Ω 中每个具有有限周长的 $E \subset$Ω，都存在 $E \subset \mathrm{X}$ 满足以下条件，则称 Ω 具有有限周长集合的全范数延拓性质

i) $\mathfrak{m}(\tilde{E}) + P(\tilde{E}, \mathrm{X}) \le C'_{\mathrm{Per}}(\mathfrak{m}(E) + P_\Omega(E))$;

˜ii) $\mathfrak{m}(E\Delta(E\cap\Omega)) = 0$;

定义 2.21（有限周长集合的强延拓性质）。 设 Ω ⊂X 为开集。若存在 Ω，使得对于每个 $C'_{\mathrm{Per}} > 0$ ˜，我们都说 E ⊂Ω 中有限周长的 Ω 都存在 E，使得定义 2.20 中的 i）和 ii）成立，并且

iii) $P(\tilde{E}, \partial\Omega) = 0$.

3. 有界变差函数的延拓性质与有限周长集的延拓性质之间的关系

本节将证明定理 1.2 和定理 1.3，以联系 BV-函数与有限周长集的可扩张性。不同于欧几里得情形，在欧几里得情形中，有界域是 BV-延拓

。集当且仅当它是 BV-延拓集， [12, 引理 2。1], 一般而言，在不支持庞加莱不等式的度量测度空间中，这未必成立。正如引言中所提到的，一个简单的例子是考虑欧几里得空间中两个不相交的球的并集。该集合是一个 BV-延拓集：我们可以分别考虑从这两个球上的延拓，并使用划分

单位分解以构造一个全局延拓算子。然而，该集合并不是一个 。

BV-延拓集：考虑一个函数，它在一个球内为零，在另一个球内为一。此时，延拓函数几乎处处的梯度都应为零，这与庞加莱不等式矛盾。尽管两个球的并集不是一个区域，但通过在欧几里得空间上选取一个权，使得在包含这两个球的某个区域 Ω 内，这两个球之间的容量为零，而在整个空间中容量非零，我们

得到度量测度空间中的一个区域 Ω，它是一个 BV-延拓集，但不是一个 。

BV-延拓集。由于在一般情形下，将区域而非开集作为研究对象并不会带来更多分析限制，以下我们不假设 Ω 是一个区域。此外，我们将在命题3.1 和命题 3.4 中给出定理 1.2和定理 1.3 的稍一般版本，其中集合Ω 仅假设为博雷尔集。

我们还将给出例子 3.3 说明，作为一个 。

BV-延拓集并不等同于具有有限周长集合的延拓性质。这是由于 $BV(\mathrm{X})$ 在全变差意义下缺乏紧性。本节末尾，我们将证明命题 3.6 ，从而证明定理 1.5 和定理 1.6中的第一个等价关系。还要指出，我们也可以证明命题 1.2 与命题 3.6 之间的中间版本，说明以下两者等价：

。强 $BV\cap L^\infty$-可扩张性与有限周长集的强可扩张性。证明只需做简单的变动，留给感兴趣的读者。

我们先证明定理 1.2 的一个稍一般的版本。

。**命题 3.1**。 若 *Borel*子集 Ω ⊂ X 是一个 $(BV \cap L^\infty, \|\cdot\|_{BV})$-延拓集，当且仅当它具有有限周长集合的延拓性质。

。证明。 我们首先假设博雷尔集 Ω ⊂ X 是一个 $(BV \cap L^\infty, \|\cdot\|_{BV})$-延拓集，并证明 Ω 具有有限周长集合的延拓性质。考虑一个博雷尔集 S，使得

。$P_\Omega(S) < \infty$。那么 $\chi_S \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，并且根据假设，存在 E： $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \to$

。$BV(\mathrm{X}) \cap L^{\infty}(\mathrm{X})$ 如定义 2.17所示。记 $u: = E\chi_S$，不失一般性，我们可以假设

。该 $0 \le u \le 1$，通过用 $\varphi \circ E$替代 E，其中 $\varphi(t) =$最大值{最小值$\{t, 1\}$， $0\}$；根据备注 BV 2.6 （由于 φ是 1-利普希茨的），这仍然是一个 $\|\varphi \circ E\|_{\overset{\circ}{BV}} \le \|E\|_{\overset{\circ}{BV}}$-延拓算子。应用余面积公式可得

$$|Du|(\mathrm{X}) = \int_0^1 P(\{u > t\}, \mathrm{X})\, \mathrm{d}t.$$

此外，存在 $t_0 \in [0, 1]$ 使得 $P(\{u > t_0\}, \mathrm{X}) \le \int_0^1 P(\{u > t\}, \mathrm{X})\, \mathrm{d}t$。我们选取这样的 t_0。结合上述两个事实，可得

$$P(\{u > t_0\}, \mathrm{X}) \le \|E\|_{\overset{\circ}{BV}} P_{\Omega}(S).$$

˜因此，集合 $S: = \{u > t_0\}$ 满足定义 2.19 中的 i）和 ii），常数为 $C_{\mathrm{Per}} = \|E\|_{\overset{\circ}{BV}}$。

接下来证明反向蕴含，并假设 Ω 对有限周长集合具有延拓性质

。，且常数为 $C\mathrm{Per} > 0$。考虑 $u \in BV(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$。首先注意到，我们可以不失一般性地假设 $-1 \le u \le 1$。事实上，若在这种情况下构造延拓算子 $\sim E$，则在一般情况下可以考虑 $Eu:= \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} E(u/\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)})$，并注意到 $\|E\|_{\overset{\circ}{BV}} \le \|E\|_{\overset{\circ}{BV}}$。我们还可以假设 $0 \le u \le 1$。事实上，给定满足此性质的函数 E，对于前一种情况，考虑 $\tilde{E}u := Eu^+ - Eu^-$，并注意到 $\|\tilde{E}\|_{\overset{\circ}{BV}} \le \|E\|_{\overset{\circ}{BV}}$。如注 2.13 中那样应用余面积公式可知，存在 $N \subset [0, 1]$，使得 $\mathscr{L}^1(N) = 0$，因此

$$P_{\Omega}(\{u > t\}, \mathrm{X}) < \infty \qquad \text{for all } t \in [0, 1] \setminus N.$$

˜ ˜对于每个 $t \in [0, 1] \setminus N$，我们将集合 $E_t := \{u > t\}$ 扩展为一个博雷尔集 E_t，使得 $P(E_t, \mathrm{X}) \le C_{\mathrm{Per}} P_{\Omega}(E_t)$。我们的目标是找到 $v_n \in BV(\mathrm{X})$，使得

$$|Dv_n|(\mathrm{X}) \le (1 + 1/n) C_{\mathrm{Per}} |Du|_{\Omega}(\Omega)$$

对每个 n，使得 $v_n \to v$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$ 且 $v = u$ 在 Ω 上成立，由应用（1）即可得到结论。我们对某个 $t_j \in [(j-1)2^{-n}$定义 $u_n = \sum_{j=1}^{2^n} 2^{-n} \chi_{\tilde{E}_{t_j}}$，其中 $j2^{-n}]$将在稍后选取。固定 n 并定义 $\delta_n := 2^n(1 + 1/n)$。存在一个博雷尔集 I，满足 $\mathscr{L}^1(I) > \delta_n^{-1}$，使得$I \subset [(j-1)2^{-n}, \ j2^{-n}] =: I_{j,\,n}$ 使得，对于每个 $t \in I$， $P_{\Omega}(E_t) \le \delta_n \int_{I_{j,\,n}} P_{\Omega}(E_r)\, \mathrm{d}r$。对于每个 j，选取 t_j 于上述定义的集合 I 中。因此，我们计算

$$\begin{aligned} |Du_m|(\mathrm{X}) &\le \sum_{j=1}^{2^n} 2^{-n} P(\tilde{E}_{t_j}, \mathrm{X}) \le C_{\mathrm{Per}} \sum_{j=1}^{2^n} 2^{-n} P_{\Omega}(E_{t_j}) \\ &\le \delta_n C_{\mathrm{Per}} 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n} \int_{I_{j,n}} P_{\Omega}(E_r)\, \mathrm{d}r = C_{\mathrm{Per}} \delta_n 2^{-n} |Du|_{\Omega}(\Omega). \end{aligned} \tag{6}$$

我们有 $u_n \to u$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。事实上，注意到，给定 $x \in E_{t_j} \setminus E_{t_{j+1}}$，我们有 $u_n(x) = (j-1)2^{-n}$，因此 $|u(x) - u_n(x)| \le 2^{-n}$；因此，对于每个 $x \in \Omega$ 和 $r > 0$，我们有 $\|u_n - u\|_{L^1(B(x,r) \cap \Omega)} \to 0$

如 $n \to \infty$。我们将测度 $\tilde{\mathfrak{m}} \in \mathscr{P}(X)$ 定义为

$$\tilde{\mathfrak{m}} := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{m}|_{B(x_0,i)\setminus B(x_0,i-1)}}{\mathfrak{m}(B(x_0,i)\setminus B(x_0,i-1))2^i},$$

特别地，有 $\mathfrak{m} \ll \tilde{\mathfrak{m}} \ll \mathfrak{m}$。由于对于每个 n，$0 \le u_n \le 1 \in L^2(X,\tilde{\mathfrak{m}})$，因此我们有

$$\sup_n \|u_n\|_{L^2(X,\tilde{\mathfrak{m}})} < \infty.$$

因此存在一个子列 $u_{n_k} \rightharpoonup v$ 在 $L^2(X,\tilde{\mathfrak{m}})$中。我们对该子列应用马祖尔引理，得到一个序列 $v_m = \sum_{i=m}^{N_m} \lambda_i u_{n_{k_i}}$ 使得 $v_m \to v$ 在 $L^2(X,\tilde{\mathfrak{m}})$ 当 $m \to \infty$时。我们定义$Eu := v$。全变差的次可加性以及（6）给出

$$|Dv_m|(X) \le (1+1/m)C_{\mathrm{Per}}|Du|_\Omega(\Omega).$$

因此，我们只需证明在 Ω 上几乎处处有 $v = u$ $\mathfrak{m}$。只需证明 $v_m \to v$ 当 $m \to \infty$ 时在$L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ 中。事实上，考虑 $B := B(x_0,R)$，其中 $R > 0$ 和 $x_0 \in X$；我们估计

$$\|v - v_m\|_{L^1(B)} \le \sqrt{\mathfrak{m}(B)}\,\|v - v_m\|_{L^2(B)} \le C\|v - v_m\|_{L^2(X,\tilde{\mathfrak{m}})} \to 0.$$

这里最后一个不等式成立，是因为我们可以在一个有界集上比较 $\mathfrak{m}$ 和 $\tilde{\mathfrak{m}}$，因为该集合包含于 ∘ ∘环域 $B(x_0,i) \setminus B(x_0,i-1)$ 的有限并。这表明 Ω 是一个 $(BV \cap L^\infty, BV)$-延拓集，且 $\|E\|_{\overset{\circ}{BV}} \le C_{\mathrm{Per}}$。□

∘ ∘**注 3.2**。我们指出，BV-延拓集 Ω 总是一个 $BV \cap L^\infty$-延拓集。这可由以下方式看出

∘ ∘先将 $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ 延拓为函数 $Eu \in BV(\Omega)$，然后用 u 在Ω 中的本质下确界和上确界对其进行上下截断。由定理 1.2，我们由此得出Ω 也具有有限周长集的延拓性质。

例 3.3。我们考虑一个度量测度空间中的区域示例，该区域具有延拓 ∘有限周长集的性质，但它不是一个 BV-延拓域。我们来考察 $\mathbb{R}^2$ 中的以下集合序列。对于 $k \in \mathbb{N}$，定义集合

$$T_k := (1-2^{-k}, 1-2^{-(k+1)}) \times (1-2^{-k}, \mathbb{R}) \cup (1-2^{-k}, \mathbb{R}) \times (1-2^{-k}, 1-2^{-(k+1)}).$$

我们将顶点为 (0, 0)、(0, 1) 和 (1, 0) 的开三角形记为 Ω。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们定义辅助集 $S_k := \partial T_k \cup (\partial\Omega \cap T_k)$。定义函数 $\rho \in L^1(\mathcal{L}^2)$：当 $k = 2n$ 且满足 $n \in \mathbb{N}$ 和 $\rho = (2^{k+2}\mathrm{d}(\cdot, S_k)) \wedge 1$ 时，$\rho = 1$在 T_k 上；当 $k = 2n+1$ 且满足 $n \in \mathbb{N}$ 时亦然。此外，我们将 ρ 在其他地方延拓为 0。考虑度量测度空间 $(\mathbb{R}^2, |\cdot|, \rho\mathcal{L}^2)$。该构造的主要对象如图 1 所示。

我们声称 Ω 具有有限周长集的延拓性质。为此，先在欧几里得情形中讨论，并考虑如上定义的集合 T_0，以及 $\Omega_0 := T_0 \cap \Omega$。我们有 Ω_0 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个 Lipschitz区域，因此是关于.....的 BV-延拓域

∘勒贝格测度。因此，Ω_0 也是一个 BV-延拓域，依据 [12, 引理 2。1] 相对于勒贝格测度，因此它也具有有限周长集合的延拓性质，依据

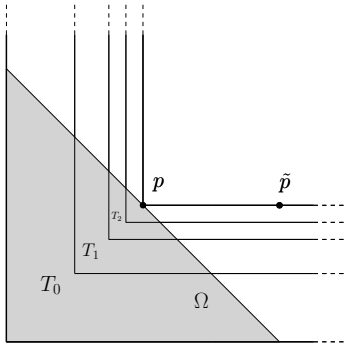

图 1。 区域 Ω 的例 3.3 对有限周长集具有延拓性质，

。但对 BV不具有该性质。参考测度的构造使得，Ω 中的一个函数在趋近点 p时可能趋于无穷，但其全变差仍为零。我们证明，存在这样的函数，使得任何全变差为零的延拓在点 $\tilde{p}$处都不是局部可积的。

定理1.1。称 $H\colon \{\,\Omega \text{ 中的有限周长集}\Omega_0\,\} \to \{\text{中的有限周长集 } \mathbb{R}^2\,\}$ 为延拓算子。特别地，该算子

$$F\colon \{\,\text{sets of finite perimeter in } \Omega_0\,\} \to \{\,\text{sets of finite perimeter in } T_0\,\}$$

定义为 $F := \mathrm{restr} \circ H$，其中 restr 是作用于 T_0中有限周长集的限制算子，满足

$$\mathrm{Per}(F(E), T_0) \le C_{\Omega_0}\,\mathrm{Per}(E, \Omega_0). \tag{7}$$

对于某个 $C_{\Omega_0} > 0$。记 i_k为: $T_0 \to T_k$ 自然的位似缩放。给定 $E \subset \Omega$，使得 ˜Per$(E, \Omega) < \infty$，我们定义如下延拓。令集合 $F(E)$ 定义为:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(E) \cap T_k &= i_k(F(i_k^{-1}(E \cap T_k))) \quad \text{if } k = 2n \text{ for } n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{F}(E) \cap T_k &= E \cap T_k \qquad\qquad\qquad\quad \text{if } k = 2n+1 \text{ for } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

˜现在我们证明， F 是有限周长集的延拓算子。根据˜ ˜的定义 F，可知 $F(E) \cap \Omega = E$；此外，

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}(\tilde{F}(E)) &= \sum_{k \text{ even}} \mathrm{Per}(\tilde{F}(E), T_k) = \sum_{k \text{ even}} \mathrm{Per}(i_k(F(i_k^{-1}(E \cap T_k))), i_k(T)) \\ &= \sum_{k \text{ even}} 2^{-k}\,\mathrm{Per}(F(i_k^{-1}(E \cap T_k)), T) \overset{(7)}{\le} C_{\Omega_0} \sum_{k \text{ even}} 2^{-k}\,\mathrm{Per}(i_k^{-1}(E \cap T_k), i_k^{-1}(\Omega \cap T_k)) \\ &= C_{\Omega_0} \sum_{k \text{ even}} \mathrm{Per}(E \cap T_k, \Omega \cap T_k) \le C_{\Omega_0}\mathrm{Per}(E, \Omega), \end{aligned}$$

。由此得证。现在我们证明 Ω 不是一个 BV-延拓域。为此，我们定义函数

$$u := \begin{cases} 2^k & \text{on } T_k \cap \Omega \text{ for } k = 2n \qquad \text{with } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{on } T_k \cap \Omega \text{ for } k = 2n+1 \quad \text{with } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

我们验证 $u \in L^1(\Omega\ \rho\mathcal{L}^2)$。为此，只需验证：给定充分小的 $r > 0$，对于 $p = (1,1)$，有 $u \in L^1(B_r(p))$。为此，我们计算

$$\|u\|_{L^1(B_r(p))} \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |T_k \cap \Omega| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k 2^{-2k} |T_0| < |T_0| < \infty.$$

。 。假设存在一个延拓算子 $\bar{F}\colon BV(\Omega) \to BV(\mathbb{R}^2, |\cdot|, \rho\mathcal{L}^2)$，并记 $\tilde{u} := \bar{F}u$。那么我们将有 $|D\tilde{u}|(\mathbb{R}^2) \le C|Du|(\Omega) = 0$，由此可得，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，都有 $|D\tilde{u}|(T_k) = 0$。因此，我们可以将 $\tilde{u}$刻画为

$$\tilde{u} = \begin{cases} 2^k & \text{on } T_k \text{ for } k = 2n \qquad \text{with } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{on } T_k \text{ for } k = 2n+1 \quad \text{with } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

矛盾在于 $\tilde{u} \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\rho\mathcal{L}^2)$。事实上，考虑点 $\tilde{p} = (2, 1)$，并取一个以 $\tilde{p}$为中心、边长为 r 的立方体，记作 $Q_r(\tilde{p})$。我们有

$$\|\tilde{u}\|_{L^1(Q_r(\tilde{p}))} \ge \sum_{k \ge \bar{k}(r)} 2^k \mathcal{L}^2(T_k \cap Q_r(\tilde{p})) \ge C \sum_{k \ge \bar{k}(r)} 2^k\, 2^{-k} > \infty.$$

从而得出矛盾。

接下来我们将证明定理 1.3 的一个略为更一般的版本。

命题 3.4。 一个 *Borel*子集$\Omega \subset \mathrm{X}$ 是一个 BV-延拓集，当且仅当它具有带全范数的有限周长集的延拓性质。

证明。我们证明充分性。于是，假设 Ω 是一个 BV-延拓集。设 $S \subset \Omega$ 满足$\mathfrak{m}(S) + P_\Omega(S) < \infty$，并考虑 $u := \chi_S \in BV(\Omega)$。然后，考虑由假设给出的 E 延拓算子，我们有 $Eu \in BV(\mathrm{X})$。此外，按照命题 3.1 证明中充分性部分的论证，我们可以假设 Eu 取值于 $[0,1]$（进一步假设其中定义的 φ 满足 $|\varphi(t)| \le |t|$，对于 $t \in \mathbb{R}$），并且

$$\int_0^1 \mathfrak{m}(\{Eu > t\}) + P(\{Eu > t\}, \mathrm{X})\, \mathrm{d}t = \|Eu\|_{BV(\mathrm{X})} \le \|E\|_{BV} (\mathfrak{m}(S) + P_\Omega(S))$$

其中我们首先应用余面积公式与卡瓦列里公式，然后应用定义 2.17 中的 i）项。我们选择 $t_0 \in I$ 使得

$$\mathfrak{m}(\{Eu > s\}) + P(\{Eu > s\}, \mathrm{X}) \le \int_0^1 \mathfrak{m}(\{Eu > t\}) + P(\{Eu > t\}, \mathrm{X})\, \mathrm{d}t$$

˜并且我们有： $S := \{Eu > t_0\}$ 在选取常数 $C'_{\mathrm{Per}} = \|E\|_{BV}$ 后，就是所需的延拓。

接下来我们证明充分性。因此，假设 Ω 对全范数具有有限周长集合的延拓性质。

步骤 1。首先，我们证明 Ω 是一个 $(BV\cap L^\infty, \|\cdot\|_{BV})$-延拓集。我们沿用定理 1.2 中充分性部分的证明，并着重说明主要区别。考虑 $u\in BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，并且通过与前面类似的论证，不失一般性地假设 $0\le u\le 1$ $\mathfrak{m}$-几乎处处成立。应用余面积公式和卡瓦列里恒等式，并定义 $E_t := \{u>t\}$，可得:

$$\int |u|\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + |Du|_\Omega(\Omega) = \int_0^1 (\mathfrak{m}(E_t)+P_\Omega(E_t))\,\mathrm{d}t.$$

特别地，对于 $t\in[0,1]\setminus N$，$\mathfrak{m}(E_t)+P_\Omega(E_t)<\infty$，其中 $\mathcal{L}^1(N)=0$。对于这类 t，根据我们关于有限周长集可扩张性的˜假设，我们定义一个博雷尔集 E_t，使得在 Ω 上几乎处处有 $E_t\cap\Omega = E_t$，并且

$$\mathfrak{m}(\tilde{E}_t)+P(\tilde{E}_t,\mathrm{X})\le C'_{\mathrm{Per}}(\mathfrak{m}(E_t)+P_\Omega(E_t)). \tag{8}$$

我们像之前一样定义 $I_{j,\ n}$ 和 δ_n，并固定 n。给定 j，我们知道存在一个博雷尔集 $I\subset I_{j,\ n}$，满足 $|I|>\delta_n^{-1}$，使得对于每个 $t\in I$ $\mathfrak{m}(E_t)+P_\Omega(E_t)\le \delta_n\int_{I_{j,\ n}}\mathfrak{m}(E_r)+P_\Omega(E_r)\,\mathrm{d}r$。我们选取 $t_j\in I\cap([0,1]\setminus N)$，并定义 $u_n=\sum_{j=1}^{2^n}2^{-n}\chi_{\tilde{E}_{t_j}}$。我们计算

$$\|u_n\|_{L^1(\mathfrak{m})}=2^{-n}\sum_{j=1}^{2^n}\mathfrak{m}(\tilde{E}_{t_j}),\qquad |Du_n|(\mathrm{X})\le 2^{-n}\sum_{j=1}^{2^n}P(\tilde{E}_{t_j},\mathrm{X}).$$

结合前两个不等式和 (8)，得到

$$\begin{aligned}\|u_n\|_{L^1(\mathrm{X})}+|Du_n|(\mathrm{X}) &\le C'_{\mathrm{Per}}2^{-n}\sum_{j=1}^{2^n}(\mathfrak{m}(E_{t_j})+P_\Omega(E_{t_j}))\le C'_{\mathrm{Per}}(1+\frac{1}{n})\int_0^1\mathfrak{m}(E_t)+P_\Omega(E_t)\,\mathrm{d}t\\ &= C'_{\mathrm{Per}}(1+\frac{1}{n})(\|u\|_{L^1(\Omega)}+|Du|_\Omega(\Omega)).\end{aligned}$$

因此我们得到 $\|u_n\|_{BV(\mathrm{X})}\le C'_{\mathrm{Per}}(1+1/n)\|u\|_{BV(\Omega)}$。如前所述，借助马祖尔引理，我们可以找到 $v_n\in BV(\mathrm{X})$，使得 $\|v_n\|_{BV(\mathrm{X})}\le\|u_n\|_{BV(\mathrm{X})}$，$\|v_n\|_{L^\infty(\mathrm{X})}\le 1$，$v_n\to v$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$，且 $v_n\to u$ 属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。因此，在 Ω 上几乎处处有 $v=u$ $\mathfrak{m}$，并且利用映射 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})\ni f\mapsto\|f\|_{L^1(\mathrm{X})}+|Df|(\mathrm{X})$ 的下半连续性，我们得到 $\|v\|_{BV(\mathrm{X})}\le C'_{\mathrm{Per}}\|u\|_{BV(\Omega)}$。

步骤 2。 最后，我们证明，若 Ω 是一个 $(BV\cap L^\infty,\|\cdot\|_{BV})$-延拓集，则它也是一个$BV$-延拓集。事实上，设 $u\in BV(\Omega)$。对每个 i，定义 $\varphi_i\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下

$$\varphi_i(t)=\begin{cases}-1, & \text{if } t<-i-1,\\ t+i, & \text{if } -i-1\le t\le -i,\\ 0, & \text{if } -i<t<i,\\ t-i, & \text{if } i\le t\le i+1,\\ 1, & \text{if } i+1<t.\end{cases}$$

显然可验证，$\sum_{i=0}^\infty\varphi_i=1$ 在 $\mathbb{R}$上成立。此外，定义 $u_i=\varphi_i\circ u$，我们有$u=\sum_{i=0}^\infty u_i$；并且利用卡瓦列里公式和余面积公式，可得 $\|u\|_{BV(\Omega)}=\sum_{i=0}^\infty\|u_i\|_{BV(\Omega)}$。固定 i；由于 $u_i\in BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$，根据假设，我们知道存在 $v_i\in$

$BV(\mathrm{X})$，使得$\|v_i\|_{BV(\mathrm{X})} \le C'_{\mathrm{Per}}\|u_i\|_{BV(\Omega)}$。我们定义 $v := \sum_{i=0}^{\infty} v_i$，并注意到 $v = u\mathfrak{m}$-几乎处处在Ω上，且

$$\|v\|_{BV(\mathrm{X})} \le \sum_{i=0}^{\infty} \|v_i\|_{BV(\mathrm{X})} \le C'_{\mathrm{Per}} \sum_{i=0}^{\infty} \|u_i\|_{BV(\Omega)} = C'_{\mathrm{Per}}\|u\|_{BV(\Omega)},$$

从而完成证明。 □

现在我们转而讨论强延拓性质的等价性。我们仅对开集 Ω陈述这些结果。在这种情况下，充分性部分需要修改论证，其思路源自近期的工作 [6]。证明中，我们将使用以下已知命题。

引理 3.5。 设 $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个逐点收敛于 $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$的可测函数递增（或递减）序列。对每个 $\varepsilon > 0$，存在一个紧集 $K \subset [0,1]$，使得$\mathcal{L}^1([0,1] \setminus K) \le \varepsilon$，且 $g_n \to g$ 在 K上一致收敛。

命题 3.6。 设 Ω 是一个开集。那么，Ω 是一个强 BV-延拓集，当且仅当它对有限周长集具有关于全范数的强延拓性质。

证明。 我们首先证明“仅当”部分。我们重复命题 3.4 的证明过程，其中$Eu \in BV(\mathrm{X})$ 由假设定义。由（5）及余面积公式

$$0 = |Du|(\partial\Omega) = \int_0^1 P(\{u > t\}, \partial\Omega)\,\mathrm{d}t,$$

因此 $P(\{u > t\},\ \partial\Omega) = 0$ 对几乎处处的 t 成立。选取 t_0 使其也不属于该例外集，我们得到$\sim S := \{u > t_0\}$ 满足定义 2.21 的 i）—iii）项。

接下来证明“如果”部分。

步骤 1。首先，我们证明 Ω 是一个 $(BV \cap L^\infty, \|\cdot\|_{BV})$-延拓集，并且给定 E 延拓算子，有 $|D(Eu)|(\partial\Omega) = 0$。我们再次重复命题 3.1 证明中 if 部分的论证，并指出其中的差异。不失一般性，我们假设 $0 \le u \le 1$并定义 $E_t := \{u > t\}$。根据余面积公式，我们知道 E_t 在 Ω 中具有有限周长，因此我们

$\sim$ $\sim$定义满足定义 2.21 假设的 E_t，并在可忽略集中定义 $E_t := E_{t\circ}$。我们应用引理 3.5，其中 $g_k(t) := P(\tilde{E}_t, B(\partial\Omega\ 2^{-k}))$ 以及 $g(t) := 0$，并将 K_m 定义为引理针对 $\varepsilon = 2^{-m}$给出的集合$\sim$。我们像之前一样定义 $I_{j,n}$, δ_n，并固定 $n_\circ$ 我们按照命题 3.1 证明中 if 部分的方式选择 $I_i^n \subset I_i^n{}_\circ$。对于每个 i，若 $I_i^n \cap K_m \ne \emptyset$，我们选择 $t_i^n \in I_i^n \cap K_m$，否则选择 $t_i^n \in I_i^n{}_\circ$。我们定义 $u_n := \sum_{i=1}^{2^n} 2^{-n}\chi_{\tilde{E}_{t_i^n}\circ}$。由于 $t \mapsto P(E_t, B(\partial\Omega\ 2^{-k}))$ 在K_m上一致收敛于 0，我们知道对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 $\bar{k} = \bar{k}(\varepsilon)$，使得对于 $k \ge \bar{k}$，有 $P(E_t, B(\partial\Omega\ 2^{-k})) \le \varepsilon$。$\sim$我们定义 $S := \{i : I_i^n \cap K_m = \emptyset\} \subset \{1, \dots, 2^n\}$ 并且

$$w(\delta) := \sup\left\{ \int_A \mathfrak{m}(E_s) + P(E_s, \Omega)\,\mathrm{d}s :\ A \subset [0,1],\ \mathcal{L}^1(A) = \delta \right\}.$$

我们计算

$$
\begin{aligned}
|Du_n|(B(\partial\Omega, 2^{-\bar{k}})) &\le \sum_{i=1}^{2^n} 2^{-n} P(\tilde{E}_{t_i^n}, B(\partial\Omega, 2^{-\bar{k}})) \\
&= \sum_{i\in S^c} 2^{-n} P(\tilde{E}_{t_i^n}, B(\partial\Omega, 2^{-\bar{k}})) + \sum_{i\in S} 2^{-n} P(\tilde{E}_{t_i^n}, B(\partial\Omega, 2^{-\bar{k}})) \\
&\le \sum_{i\in S^c} 2^{-n} P(\tilde{E}_{t_i^n}, B(\partial\Omega, 2^{-\bar{k}})) + \sum_{i\in S} 2^{-n} P(\tilde{E}_{t_i^n}, \mathrm{X}) \\
&\le \varepsilon + (1+1/n)\, C'_{\mathrm{Per}} \sum_{i\in S} \int_{\tilde{I}_i^n} \mathfrak{m}(E_t) + P(E_t, \Omega)\, \mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon + (1+1/n)\, C'_{\mathrm{Per}} \int_{\cup_{i\in S} \tilde{I}_i^n} \mathfrak{m}(E_t) + P(E_t, \Omega)\, \mathrm{d}t \\
&\le \varepsilon + (1+1/n)\, C'_{\mathrm{Per}} \int_{K_m^c} \mathfrak{m}(E_t) + P(E_t, \Omega)\, \mathrm{d}t \le \varepsilon + (1+1/n)\, C'_{\mathrm{Per}} w(2^{-m}),
\end{aligned}
$$

˜其中包含关系 $\bigcup_{i\in S} I_i^n \subset K_m^c$ 由 S 的定义可知。我们取 $\varepsilon = 2^{-m}$。再次像命题 3.4 的证明中那样应用马祖尔引理，我们可以找到 $v_n \in BV(\mathrm{X})$，使得$\|v_n\|_{BV(\mathrm{X})} \le \|u_n\|_{BV(\Omega)}$，$\|v_n\|_{L^\infty(\mathrm{X})} \le 1$，$v_n \to v$属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X})$，$v_n \to u$属于 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$。因此，在 Ω 上几乎处处有 $v = u$ m，且$\|v\|_{BV(\mathrm{X})}$ $\le C'_{\mathrm{Per}}\|u\|_{BV(\Omega)}$。此外，有 $|Dv_n|(B(\partial\Omega\ 2^{-\bar{k}})) \le |Du_n|(B(\partial\Omega\ 2^{-\bar{k}}))$。因此，我们得到

$$
|Dv|(\partial\Omega) \le |Dv|(B(\partial\Omega, 2^{-\bar{k}})) \le 2^{-m} + 2C'_{\mathrm{Per}} w(2^{-m}),
$$

其中，在最后一个不等式中，我们对开集 1 应用了（ $B(\partial\Omega\ 2^{-k})$。令$k \to +\infty$ 趋于极限，得到 $|Dv|(\partial\Omega) = 0$，从而完成证明。

步骤 2。 我们考虑 $u \in BV(\Omega)$；可以仿照命题 3.4证明中的步骤 2 进行论证，并注意，对于函数 u_i，我们可以应用本命题步骤 1 的结论，并仿照 v_i 称其为延拓；相应地定义 v。按照命题 3.4 证明中的论证，并结合不等式 $|Dv|(\partial\Omega) \le \sum_{i=0}^{\infty} |Dv_i|(\partial\Omega) = 0$，即可得出结论。□

注 3.7。 我们指出，在命题 3.1、命题 3.4和命题 3.6 的陈述证明中，延拓所用的常数与相应假设给出的常数相同。这正是这些命题的证明中选择 δ_n 的依据。

4. 关　索博列夫延拓域与有界变差延拓域之间的关系 S

本节分为两部分。在第 4.1 节中，我们介绍一种平滑化论证，这是证明第 4.2 节主要定理的核心思路，这些定理建立了 $W^{1,1}$ 以及强 BV 延拓集之间的联系。最后一部分给出一些例子，尤其展示假设 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) > 0$ 在命题 4.3中的尖锐性。所有推论和例子汇总于图 2。

4.1. **平滑化论证**。 这里我们证明一个平滑化论证，这是我们用来联系以下概念的主要工具： $W^{1,1}$ 以及强 BV 延拓集。在欧几里得情形下， [6, 定理 31] 介绍了另一种使用惠特尼分解的平滑化论证。这种方法

得到了一个线性平滑算子，但需要使用庞加莱不等式。这里的算子不是线性的，但无需使用庞加莱不等式。

命题 4.1（平滑算子）。设 Ω ⊂X 为开集。存在常数 C，使得以下结论成立：对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 T_ε: BV（Ω）$\to$局部斜率$_{loc}$（Ω），使得

$$\|T_\varepsilon u\|_{L^1(\Omega)} \le \varepsilon + \|u\|_{L^1(\Omega)}, \quad \int_\Omega \operatorname{lip} T_\varepsilon u \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \le C(|Du|(\Omega) + \varepsilon), \tag{9}$$

$T_\varepsilon u - u \in BV$（X）（在 X \ Ω 中定义为 0 时）并且

$$|D(T_\varepsilon u - u)|(\partial\Omega) = 0. \tag{10}$$

在开始证明之前，我们先概述主要思路。给定 $\epsilon > 0$ 和 $u \in BV$（Ω），我们按如下方式定义平滑化 $T_\epsilon u$ 。首先，我们考虑一个从属于条带的单位分解，这些条带在靠近 ∂Ω边界处更窄；然后，固定一个条带，并考虑该条带上全变差的一个逼近序列，再选取序列中指标充分大的一个函数。最后，利用单位分解将选出的函数求和。接着，（10）可由在各条带的逼近中取更大的指标，并构造一个局部利普希茨函数序列 $(\psi_k)_k$，使其在 L^1（Ω）中收敛到 $u - T_\epsilon u$，当 $k \to \infty$时得到。最后，通过考虑 $T_\epsilon u$ 的局部利普希茨逼近辅助序列（针对其在u 中的全变差）Ω，可以逐点估计其一阶控制。这便得到（9）。

证明。我们考虑 $\Omega_0 := \{\mathsf{d}(\cdot, \Omega^c) > 2^{-1}\}$ 和 $\Omega_i := \{2^{-(i+1)} < \mathsf{d}(\cdot, \Omega^c) < 2^{-(i-1)}\}$，其中 $i \in \mathbb{N}$，并注意到 Ω $= \bigcup_{i=0}^\infty \Omega_i$。注意，根据集合 $\{\Omega_i\}_i$ 的定义，尤其是 $\Omega_i \cap \Omega_{i=2} = \emptyset$ 对每个 $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 都成立这一事实，我们有：

$$\sum_{i=0}^\infty |Du|(\Omega_i) = \sum_{i=0, i \text{ even}}^\infty |Du|(\Omega_i) + \sum_{i=0, i \text{ odd}}^\infty |Du|(\Omega_i) \le 2|Du|(\Omega). \tag{11}$$

我们将 $\{\varphi_i\}_{i\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ 视为从属于覆盖 $\{\Omega_i\}_{i\in\{0\}\cup\mathbb{N}}$ 的利普希茨单位分解，并具有以下性质

$$\varphi_i = 0 \text{ on } \Omega_i^c, \ \operatorname{lip}\varphi_i \le 2^{i+1}\chi_{\Omega_i} \text{ for every } i \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^\infty \varphi_i = 1.$$

事实上，这样一个族 可以如下轻易构造。我们在 $(0,\infty)$ 上定义函数族 s

$$r_0(t) := \begin{cases} 0, & \text{if } t < 2^{-1}, \\ 2(t - 1/2), & \text{if } 2^{-1} \le t \le 1, \\ 1, & \text{if } t > 1. \end{cases} \qquad r_i(t) := \begin{cases} 2^{i+1}(t - 2^{-(i+1)}), & \text{if if } 2^{-(i+1)} \le t \le 2^{-i}, \\ 2^i(2^{-(i-1)} - t), & \text{if } 2^{-i} \le t \le 2^{-(i-1)}, \\ 0, & \text{if } t \le 2^{-(i+1)} \text{ or } t \ge 2^{-(i-1)} \end{cases}$$

对每个 $i \ge 1$ 都成立，并注意到 $\sum_{i=0}^\infty r_i = 1$ 在 $(0,\infty)$ 上成立。然后，我们定义 $\varphi_i := r_i(\mathsf{d}(\cdot, \Omega^c))$，并且有局部斜率 $\varphi_i \le$(局部斜率 r_i)$(\mathsf{d}(\cdot, \Omega^c)) \le 2^{i+1}\chi_{\Omega_i}$；第一个不等式用到了 $\mathsf{d}(\cdot, \Omega^c)$ 是 1-利普希茨函数。其余性质都可以直接验证。

考虑 $u \in BV(\Omega)$，因此其限制属于每个 i 对应的 $BV(\Omega_i)$。根据定义，存在一个 $u_n^i \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega_i)$ 序列，使得 $u_n^i \to u$ 在 $L^1(\Omega_i)$ 中，且 $\int_{\Omega_i}$ 局部斜率 $u_n^i \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \to |Du|(\Omega_i)$。我们考虑

n_i 使得对于每个 $j \geq n_i$，我们都有 $\|u_j^i - u\|_{L^1(\Omega_i)} \leq \varepsilon 2^{-2i}$ 并且

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{lip} u_j^i \, \mathrm{d}\mathfrak{m} \leq \begin{cases} 2|Du|(\Omega_i) & \text{whenever } |Du|(\Omega_i) > 0, \\ \varepsilon \, 2^{-i} & \text{whenever } |Du|(\Omega_i) = 0. \end{cases}$$

特别地，对于每个 i，我们都有显然的界

$$\int_{\Omega_i} \operatorname{lip} u_j^i \leq 2|Du|(\Omega_i) + \varepsilon \, 2^{-i} \text{ for every } j \geq n_i. \tag{12}$$

我们对每个 i 定义 $u_i := u_{n_i}^i$。此外，对于每个 i，存在 $m_{i,k} \in \mathbb{N}$，使得对于每个$j \geq m_{i,k}$, $\|u_j^i - u\|_{L^1(\Omega_i)} \leq \varepsilon 2^{-2i-k}$。我们将函数 $\tilde{u} := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i u_i$ 定义为 $T_\varepsilon u$。于是，$\tilde{u} \in L^1(\Omega) \cap$局部斜率$_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 且

$$\|\tilde{u}\|_{L^1(\mathfrak{m})} \leq \|\tilde{u} - u\|_{L^1(\mathfrak{m})} + \|u\|_{L^1(\mathfrak{m})} = \|\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i (u_i - u)\|_{L^1(\mathfrak{m})} + \|u\|_{L^1(\mathfrak{m})} = \varepsilon + \|u\|_{L^1(\mathfrak{m})}.$$

我们定义 $\psi_k := \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i u^i_{\max\{n_i, m_{i,k}\}} - \sum_{i=0}^{k-1} \varphi_i u_i$，其中 $\tilde{\varphi}_k := \sum_{i \geq k} \varphi_i$，而 $u, \tilde{u}$ 和 φ 均指在 Ω 外作零延拓。我们验证 $\psi_k \to u - \tilde{u}$ 属于 $L^1(\mathfrak{m})$。我们计算

$$\psi_k - (u - \tilde{u}) = \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_i (u^i_{\max\{n_i, m_{i,k}\}} - u) + \sum_{i=k}^{\infty} \varphi_i (u_i - u).$$

对两边的 L^1-范数进行估计，并回顾 φ_i 支撑于 Ω_i，可得：

$$\begin{aligned} \|\psi_k - (u - \tilde{u})\|_{L^1(\Omega)} &\leq \sum_{i=1}^{k-1} \|u^i_{\max\{n_i, m_{i,k}\}} - u\|_{L^1(\Omega_i)} + \sum_{i=k}^{\infty} \|u_i - u\|_{L^1(\Omega_i)} \\ &\leq \varepsilon 2^{-k} \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-2i} + \varepsilon \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-2i} \leq \varepsilon 2^{-(k-1)}. \end{aligned}$$

我们证明（10）。固定 $\delta > 0$。考虑 $\bar{k} = \bar{k}(\delta)$ 使得 $\delta \in [2^{-(\bar{k}+1)}, 2^{-\bar{k}}]$；特别地，我们有$\bar{}$满足 $k \to \infty$ 当 $\delta \to 0$。由于 $\psi_k \to u - \tilde{u}$ 在 $B(\partial\Omega\ \delta)$，根据 $|D(u - \tilde{u})|$ 在开

集上，我们有：

$$\begin{aligned}
|D(u-\tilde{u})|(B(\partial\Omega,\delta)) &\le \varliminf_{k\to\infty}\int_{B(\partial\Omega,\delta)} \operatorname{lip}\psi_k \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\
&\le \varliminf_{k\to\infty}\sum_{i=\bar{k}}^{k}\int \operatorname{lip}\varphi_i\left(|u^i_{\max\{n_i,m_{i,k}\}}-u|-|u_i-u|\right)+\varphi_i\left(\operatorname{lip}u^i_{\max\{n_i,m_{i,k}\}}+\operatorname{lip}u_i\right)\mathrm{d}\mathfrak{m}\\
&\overset{(12)}{\le} \varliminf_{k\to\infty}\sum_{i=\bar{k}}^{\infty}\left(2^i(\|u^i_{\max\{n_i,m_{i,k}\}}-u\|_{L^1(\Omega_i)}+\|u_i-u\|_{L^1(\Omega_i)})+4|Du|(\Omega_i)+2\varepsilon 2^{-i}\right)\\
&\overset{(11)}{\le} \varliminf_{k\to\infty}\sum_{i=\bar{k}}^{k}2^i2^{-2i-k}+\sum_{i=\bar{k}}^{\infty}2^i2^{-2i}+8|Du|(B(\partial\Omega,\delta)\cap\Omega)+4\varepsilon\delta\\
&\le 4\delta+8|Du|(B(\partial\Omega,\delta)\cap\Omega)+4\varepsilon\delta.
\end{aligned}$$

我们指出，在最后两行中，我们利用了由 $\bar{k}$、 $2^{-\bar{k}}\le 2\delta$ 的选取可知的事实。令 $\delta\to 0$ 趋于极限，得出 $|D(u-\tilde{u})|(\partial\Omega)=0$。此外，由于我们知道，只要 U 是开集且 $U\subset X\setminus\Omega$ 或 $U\subset\Omega$，就有 $u-\tilde{u}\in BV(U)$，因此得到 $u-\tilde{u}\in BV(\Omega)$。还需证明 (9) 中的第二个不等式，即验证存在 $C>0$ 使得 $\int_\Omega$ 局部斜率 $\tilde{u}\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\le C(|D\tilde{u}|(\Omega)+\varepsilon)$；特别是，这个不等式保证局部斜率$\tilde{u}$ 是 u 的 1-弱上梯度，因此 $\tilde{u}\in W^{1,1}(\Omega)$。为此，只需证明存在 $C>0$，使得对每个 m， $\int_{\cup_{i=0}^m\Omega_i}$局部斜率 $u\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\le C(|Du|(\Omega)+\varepsilon)$。我们来证明这一点。考虑一个序列 $\tilde{u}_m$，满足$\|u-\tilde{u}_m\|_{L^1(\Omega)}\le\varepsilon 2^{-2m}$ 且$\int_\Omega$ 局部斜率 $\tilde{u}_m\mathrm{d}\mathfrak{m}\le 2|Du|(\Omega)$。因此我们可以改写为

$$\tilde{u}=\sum_{i=0}^{m}\varphi_i u_i=\sum_{i=0}^{m}\varphi_i(u_i-\tilde{u}_m)+\tilde{u}_m \qquad \text{on } \bigcup_{i=0}^{m}\Omega_i.$$

我们估计了 $\tilde{u}$的斜率

$$\operatorname{lip}\tilde{u}=\sum_{i=0}^{m}\left[\operatorname{lip}\varphi_i\,|u_i-\tilde{u}_m|+\varphi_i\left(\operatorname{lip}u_i+\operatorname{lip}\tilde{u}_m\right)\right]+\operatorname{lip}\tilde{u}_m \qquad \text{on } \bigcup_{i=0}^{m}\Omega_i$$

并积分

$$\begin{aligned}
\int_{\cup_{i=0}^m\Omega_i}\operatorname{lip}\tilde{u}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} &\le \sum_{i=0}^{m}\int_{\Omega_i}\left[\operatorname{lip}\varphi_i\,|u_i-\tilde{u}_m|+\varphi_i\left(\operatorname{lip}u_i+\operatorname{lip}\tilde{u}_m\right)\right]\mathrm{d}\mathfrak{m}+\int_\Omega\operatorname{lip}\tilde{u}_m\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\
&\le \sum_{i=0}^{m}\left[\varepsilon 2^i(2^{-2i}+2^{-2m})+2|Du|(\Omega_i)\right]+\int_{\cup_{i=0}^m\Omega_i}\sum_{i=0}^{m}\varphi_i\operatorname{lip}\tilde{u}_m\,\mathrm{d}\mathfrak{m}\\
&\quad+2|Du|(\Omega)\\
&\overset{(11)}{\le} 4\varepsilon+8|Du|(\Omega).
\end{aligned}$$

□

4.2. **主要命题。** 本节将通过证明以下各项之间的推论，完成定理 1.5 和定理 1.6 的证明： $W^{1,1}$-、W^{1,w^1}-以及强 BV-延拓。强周长延拓与强 BV-延拓之间的联系已在命题 3.6中给出。

平滑化论证是证明以下蕴含链的关键工具。

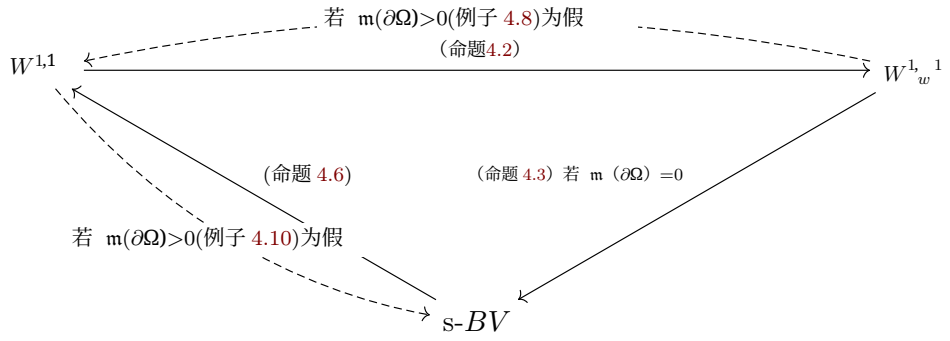

图 2. 本节主要命题与例子的概要。

命题 4.2. 设 $\Omega \subset \mathrm{X}$ 是一个开集。若 Ω 是一个 $W^{1,1}$-延拓集，则 Ω 是一个 W^{1,w^1}-延拓集。

证明。 将假设给出的延拓算子记为 $E\colon W^{1,1}(\Omega) \to W^{1,1}(\mathrm{X})$。设 $u \in W^{1,w^1}(\Omega)$。由于 $W^{1,w^1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$，我们可以应用平滑算子 $T_\varepsilon\colon BV(\Omega) \to W^{1,1}(\Omega)$（引自命题 4.1 ）作用于 u，定义

$$\widetilde{E}u := \begin{cases} u & \text{in } \Omega, \\ ET_\varepsilon u & \text{in } \mathrm{X}\setminus\Omega. \end{cases}$$

由命题 4.1 可得 $|D(u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega|(\partial\Omega) = 0$。因此，对于每个开集 $U \subset \mathrm{X}$，都有

$$\begin{aligned} |D((u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega)|(U) &= |D(u-T_\varepsilon u)|(\Omega\cap U) + |D(u-T_\varepsilon u)|(\partial\Omega\cap U) \\ &\quad + |D((u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega)|((\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega})\cap U) = |D(u-T_\varepsilon u)|(\Omega\cap U) \\ &\le |Du|(\Omega\cap U) + |DT_\varepsilon u|(\Omega\cap U) \le \int_{\Omega\cap U} \frac{\mathrm{d}|Du|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} + \operatorname{lip} T_\varepsilon u \,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \end{aligned}$$

这表明，对于每个 $F \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$，

$$|D((u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega)|(F) \le \int_{\Omega\cap F} \frac{\mathrm{d}|Du|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} + \operatorname{lip} T_\varepsilon u \,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{13}$$

因此，如果 $\mathfrak{m}(F) = 0$，那么 $|D((u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega)|(F) = 0$。于是 $((u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega) \in W^{1,w^1}(\mathrm{X})$。此外，根据 E 的定义，$ET_\varepsilon u \in W^{1,1}(\mathrm{X}) \subset W^{1,w^1}(\mathrm{X})$；因此 $\widetilde{E}u = (u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega + ET_\varepsilon u \in W^{1,w^1}(\mathrm{X})$。注意，根据全变差的定义可知

$$|DT_\varepsilon u|(\Omega) \le \int_\Omega \operatorname{lip} T_\varepsilon u \,\mathrm{d}\mathfrak{m}. \tag{14}$$

我们估计

$$\|\widetilde{E}u\|_{L^1(\mathrm{X})} \le \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|ET_\varepsilon u\|_{L^1(\mathrm{X})} \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}|D\widetilde{E}u|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^1(\mathrm{X})} &= |D\widetilde{E}u|(\mathrm{X}) \le |D((u-T_\varepsilon u)\chi_\Omega)|(\mathrm{X}) + |DET_\varepsilon u|(\mathrm{X}) \\ &\overset{(13)}{\le} \left\|\frac{\mathrm{d}|Du|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^1(\Omega)} + \|\operatorname{lip} T_\varepsilon u\|_{L^1(\Omega)} + |DET_\varepsilon u|(\mathrm{X}).\end{aligned} \tag{16}$$

因此，将（15）和（16）相加，得到

$$\begin{aligned}\|\widetilde{E}u\|_{W^{1,1}_w(\mathrm{X})} &\le \|u\|_{W^{1,1}_w(\Omega)} + \|\operatorname{lip} T_\varepsilon u\|_{L^1(\Omega)} + \|E\|_{W^{1,1}} \|T_\varepsilon u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\overset{(9)}{\le} \|u\|_{W^{1,1}_w(\Omega)} + C(|Du|(\Omega)+\varepsilon) + \|T_\varepsilon u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \overset{(9),(14)}{\le} C(\|u\|_{W^{1,1}_w(\Omega)} + \varepsilon),\end{aligned}$$

其中 $C = C(\|E\|_{W^{1,1}})$，因此在选择 $\varepsilon := \|u\|_{W^{1,w}{}^1(\Omega)}$ 时即可得出结论。 □

命题 4.3。 设 Ω 是一个开集，使得 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) = 0$。如果 Ω 是一个 $W^{1}_{,w}{}^{1}$-延拓集，那么 Ω也是一个强 BV-延拓集。

证明。 我们将假设给出的延拓算子记为 $E\colon W^{1}_{,w}{}^{1}(\Omega) \to W^{1}_{,w}{}^{1}(\mathrm{X})$。令 $u \in BV(\Omega)$。现在可以对 u 应用平滑化 $T_\varepsilon\colon BV(\Omega) \to W^{1,1}(\Omega)$，定义

$$\widetilde{E}u := \begin{cases} u & \text{in } \Omega, \\ ET_\varepsilon u & \text{in } \mathrm{X}\setminus\Omega. \end{cases}$$

~ ~我们验证 $Eu \in BV(\mathrm{X})$；将 Eu 改写如下

$$\widetilde{E}u = (u - T_\varepsilon u)\chi_\Omega + ET_\varepsilon u.$$

~根据命题4.1，$(u - T_\varepsilon u)\,\chi_\Omega \in BV(\mathrm{X})$ 和 $|D((u - T_\varepsilon u)\,\chi_\Omega)|(\partial\Omega) = 0$；此外，$ET_\varepsilon u \in W^{1,}{}_{w}{}^{1}(\mathrm{X}) \subset BV(\mathrm{X})$，因此 $\widetilde{E}u \in BV(\mathrm{X})$ 也成立。我们检验 $|D\widetilde{E}u|(\partial\Omega) = 0$。事实上，利用 $|D((u - T_\varepsilon u)\,\chi_\Omega)|(\partial\Omega) = 0$，

$$|D\widetilde{E}u|(\partial\Omega) \le |DET_\varepsilon u|(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathrm{d}|DET_\varepsilon u|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = 0,$$

~其中，最后一个等号是由 $\partial\Omega$ 是 $\mathfrak{m}$-零测集这一事实得出的。我们有 $\|Eu\|_{L^1(\mathrm{X})} = \|ET_\varepsilon u\|_{L^1(\mathrm{X}\setminus\bar{}\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)}$ 并且

$$\begin{aligned}|D\widetilde{E}u|(X) &\le |D(u - T_\varepsilon u)\chi_\Omega|(\mathrm{X}) + |D(E(T_\varepsilon u))|(\mathrm{X}) \\ &= |D(u - T_\varepsilon u)\chi_\Omega|(\Omega) + |D(u - T_\varepsilon u)\chi_\Omega|(\partial\Omega) \\ &\quad + |D(u - T_\varepsilon u)\chi_\Omega|(\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega}) + |D(E(T_\varepsilon u))|(\mathrm{X}) \\ &\le |Du|(\Omega) + |DT_\varepsilon u|(\Omega) + |D(E(T_\varepsilon u))|(X).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\|\widetilde{E}u\|_{BV(\mathrm{X})} &\le \|u\|_{BV(\Omega)} + |DT_\varepsilon u|(\Omega) + \|E(T_\varepsilon u)\|_{BV(\mathrm{X})}\\ &\le \|u\|_{BV(\Omega)} + |DT_\varepsilon u|(\Omega) + \|E\|_{W^{1,1}_w}\|T_\varepsilon u\|_{W^{1,1}_w(\Omega)}\\ &\overset{(2)}{\le} C\left(\|u\|_{BV(\Omega)} + \|T_\varepsilon u\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega \mathrm{lip} T_\varepsilon u \,\mathrm{d}\mathfrak{m}\right) \le C(\|u\|_{BV(\Omega)} + \varepsilon),\end{aligned}$$

其中 $C = C(\|E\|_{W^{1,1}_w})$，取 $\varepsilon := \|u\|_{BV(\Omega)}$，即可完成证明。 □

以下引理用于证明强 BV-延拓集是 $W^{1,1}$-延拓集。

引理 4.4。设 $f \in BV(\mathrm{X})$ 满足：$f = u$ 属于 Ω，且 $u \in W^{1,1}(\Omega)$；$f = v$ 在 $\mathrm{X} \setminus \bar{\Omega}$ 上满足 $v \in W^{1,1}(\mathrm{X} \setminus \bar{\Omega})$。此外，假设 $|Df|(\partial\Omega) = 0$。则 $f \in W^{1,1}(\mathrm{X})$ 且

$$|Df|_{1,\mathrm{X}} \le \chi_\Omega |Du|_{1,\Omega} + \chi_{\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega}}|Dv|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega}} \quad \mathfrak{m}\text{-}a.e. \tag{17}$$

证明。固定一个 ∞-测试计划 $\boldsymbol{\pi}$。由于 $\chi_\Omega|Du| + \chi_{\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega}}|Dv| \in L^1(\mathfrak{m})$，只需证明对于 $\boldsymbol{\pi}$-几乎处处的 γ，

$$|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \le \int_0^1 (\chi_\Omega|Du|_{1,\Omega} + \chi_{\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega}}|Dv|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar{\Omega}})(\gamma_t)|\dot{\gamma}_t|\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

根据定理 2.16，对于每个 $\gamma \in \Gamma(\mathrm{X}) \setminus N_0$，其中 $\boldsymbol{\pi}(N_0) = 0$，$f \circ \gamma \in BV(0,1)$，$|f(\gamma_1) - f(\gamma_0)| \le |D(f\circ\gamma)|(0,1)$，且 $|D(f\circ\gamma)|(\gamma^{-1}(\partial\Omega)) = 0$，可得。
我们考虑以下集合：$A_1 := \Omega$，$A_2 := \mathrm{X} \setminus \bar{\Omega}$.
给定 $t, s \in [0,1]$ 和 $A \subset \mathrm{X}$，我们定义 $C^A_{t,s} := \{\gamma : \gamma([t,s]) \subset A\}$。注意，若 A 是开集，则 $C^A_{t,s} = \cup_k C^{B_k}_{t,s}$，其中 B_k 是一个递增的闭集序列，满足 $A = \cup_k B_k$。由于 $C^{B_k}_{t,s} \subset \Gamma(\mathrm{X})$ 是闭集，因此 $C^A_{t,s}$ 是博雷尔集。对于每个 $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$，$i \in \{1,2\}$，我们将考虑 $C^{A_i}_{q_1,q_2} =: C^i_{q_1,q_2}$，它们都是博雷尔集。因此，若 $\boldsymbol{\pi}(C^i_{q_1,q_2}) > 0$，我们考虑

$$\boldsymbol{\pi}^i_{q_1,q_2} := \boldsymbol{\pi}(C^i_{q_1,q_2})^{-1}\,\boldsymbol{\pi}|_{C^i_{q_1,q_2}} \text{ and } \tilde{\boldsymbol{\pi}}^i_{q_1,q_2} := (\mathrm{restr}_{q_1,q_2})_*\boldsymbol{\pi}^i_{q_1,q_2}.$$

不难验证，$\tilde{\boldsymbol{\pi}}^i_{q_1,q_2}$ 是 A_i上的测试计划。
我们考虑情形 $i = 1$。可以找到一个 $\tilde{\boldsymbol{\pi}}^i_{q_1,q_2}$-可忽略集 $\tilde{N}^1_{q_1,q_2}$，使得对每个 $\gamma \in \Gamma(\mathrm{X}) \setminus \tilde{N}^1_{q_1,q_2}$

$$|u(\gamma_1) - u(\gamma_0)| \le \int_\gamma |Du|_{1,\Omega}.$$

我们定义 $N^1_{q_1,q_2} := \text{限制}^{-1}_{q_1,q_2}(\tilde{N}^1_{q_1,q_2})$ 其为 $\boldsymbol{\pi}^1_{q_1,q_2}$- 可忽略的，因此它是 $\boldsymbol{\pi}$-可忽略的，我们可以不失一般性地假设 $N^1_{q_1,q_2} \subset C^1_{q_1,q_2}$ 并且对于每个 $\gamma \in C^1_{q_1,q_2} \setminus N^1_{q_1,q_2}$

$$|u(\gamma_{q_2}) - u(\gamma_{q_1})| \le \int_{q_1}^{q_2} |Du|_{1,\Omega}(\gamma_t)|\dot{\gamma}_t|\,\mathrm{d}t.$$

对于情形 $i=2$，我们可以类似地论证，定义 $\boldsymbol{\pi}$-可忽略集 $N^2_{q_1,q_2}\subset C^2_{q_1,q_2}$ 使得对于每个 $\gamma\in C^2_{q_1,q_2}\setminus N^2_{q_1,q_2}$

$$|v(\gamma_{q_2})-v(\gamma_{q_1})|\le\int_{q_1}^{q_2}|Dv|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}(\gamma_t)|\dot\gamma_t|\,\mathrm{d}t.$$

我们定义集合 $N=N_0\cup\cup_{q_1,\,q_2}(N^1_{q_1,\,q_2}\cup N^3_{q_1,\,q_2})$，它是 $\boldsymbol{\pi}$-零测集，并且我们声称，对于每个$\gamma\in\Gamma(\mathrm{X})\setminus N$(18) 都成立。记 $U_n:=B_{2^{-n}}(\partial\Omega)$，则对于每个 $\gamma\in\Gamma(\mathrm{X})\setminus N$，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|D(f\circ\gamma)|(\gamma^{-1}(U_n))=0. \tag{19}$$

我们固定 n 并考虑 $A_3:=U_n$。我们考虑集合

$$\mathscr{I}:=\{I=(a,b)\cap[0,1]:\,a,b\in\mathbb{Q},\quad\gamma([a,b])\subset A_i\quad\text{for some } i\}.$$

注意，$\mathscr{I}$ 是由 $[0,1]$ 的诱导拓扑中的开集组成的可数覆盖，覆盖 $[0,1]$；因此，存在有限子覆盖 $[0,b_0)$、$(a_i,b_i)_{i=1}^N$、$(a_{N+1},1)$。对于每个 $1\le i\le N$，选取 $c_i\in\mathbb{Q}$ 使得 $a_i<c_i<b_{i-1}$，并定义 $c_0=0$, $c_{N+1}=1$；因此，我们估计

$$\begin{aligned}
|f(\gamma_1)-f(\gamma_0)|&\le\sum_{i=0}^{N}|f(\gamma_{c_{i+1}})-f(\gamma_{c_i})|\le\sum_{j=1}^{3}\sum_{i:\gamma([c_i,c_{i+1}])\subset A_j}|f(\gamma_{c_{i+1}})-f(\gamma_{c_i})|\\
&\le\int_{\gamma\cap\Omega}|Du|_{1,\Omega}+\int_{\gamma\cap(\mathrm{X}\setminus\bar\Omega)}|Dv|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}+\sum_{i:\gamma([c_i,c_{i+1}])\subset A_3}|f(\gamma_{c_{i+1}})-f(\gamma_{c_i})|\\
&\le\int_{\gamma\cap\Omega}|Du|_{1,\Omega}+\int_{\gamma\cap(\mathrm{X}\setminus\bar\Omega)}|Dv|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}+\sum_{i:\gamma([c_i,c_{i+1}])\subset A_3}|D(f\circ\gamma)|(c_i,c_{i+1})\\
&\le\int_{\gamma\cap\Omega}|Du|_{1,\Omega}+\int_{\gamma\cap(\mathrm{X}\setminus\bar\Omega)}|Dv|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}+|D(f\circ\gamma)|(\gamma^{-1}(U_n)).
\end{aligned}$$

取极限 当 $n\to\overline{\infty}$时，利用（19），我们得到（18），从而证明了该断言并完成证明。□

注4.5。我们指出，在引理4.4 的假设及其中的记号下，有

$$|Df|_{1,\mathrm{X}}=|Df|_{1,\Omega}\quad\mathfrak{m}\text{-a.e. on }\Omega. \tag{20}$$

事实上，不等式 $\ge$ 由（3）推出，而反向不等式则由（17）推出。

命题4.6。设$\Omega\subset\mathrm{X}$ 为开集。若Ω 是一个强 BV延拓集，则它是一个 $W^{1,1}$-延拓集。

证明。考虑 $u\in W^{1,1}(\Omega)$ 及其最小 1-弱上梯度$|Du|_{1,\Omega}$。由于 $W^{1,1}(\Omega)\subset BV(\Omega)$，根据假设，存在一个强 BV-延拓算子 $F\colon BV(\Omega)\to BV(\mathrm{X})$。于是我们定义

$$\tilde Fu:=\begin{cases}Fu & \text{on }\bar\Omega,\\ T_\varepsilon(Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}) & \text{on }\mathrm{X}\setminus\bar\Omega,\end{cases}$$

其中，$T_\varepsilon\colon BV(\mathrm{X}\setminus\Omega)\to \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{X}\setminus\Omega)$ 是命题 4.1 中的平滑算子，将其应用于开集 $\mathrm{X}\setminus\Omega$，其中 ε 将在稍后选定。我们将函数 $Fu = Fu + (T_\varepsilon(Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}) - Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega})\chi_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega} \in BV(\mathrm{X})$ 重写为 X 上 BV 个函数之和。此外，根据命题 4.1 以及 F 是一个强 BV-延拓算子这一事实

$$|D\tilde{F}u|(\partial\Omega) = 0. \tag{21}$$

根据定义，在 Ω 上几乎处处成立。我们验证 $\tilde{F}u \in W^{1,1}(\mathrm{X})$。事实上，由于 $u \in W^{1,1}(\Omega)$，$T_\varepsilon(Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}) \in W^{1,1}(\mathrm{X}\setminus\bar\Omega)$，且 (21) 成立，我们可以应用引理 4.4，从而得到 $\tilde{F}u \in W^{1,1}(\mathrm{X})$，并且

$$|D\tilde{F}u|_{1,\mathrm{X}} \le |Du|_{1,\Omega}\,\chi_\Omega + |D(T_\varepsilon(Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}))|_{1,\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}\,\chi_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega} \le |Du|_{1,\Omega}\,\chi_\Omega + \mathrm{lip}(T_\varepsilon(Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}))\chi_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega}.$$

因此，积分后可得

$$\begin{aligned} \||D\tilde{F}u|\|_{L^1(\mathfrak{m})} &\le \||Du|\|_{L^1(\Omega)} + \|\mathrm{lip}(T_\varepsilon(Fu|_{\mathrm{X}\setminus\bar\Omega})\|_{L^1(\mathrm{X}\setminus\bar\Omega)} \\ &\overset{(9)}{\le} \||Du|\|_{L^1(\Omega)} + C(|DFu|(\mathrm{X}\setminus\bar\Omega) + \varepsilon) \\ &\le \||Du|\|_{L^1(\Omega)} + C(|DFu|(\mathrm{X}) + \varepsilon) \le \||Du|\|_{L^1(\Omega)} + C(\|u\|_{BV(\Omega)} + \varepsilon). \end{aligned} \tag{22}$$

最后，我们计算

$$|Du|(\Omega) = |D\tilde{F}u|(\Omega) \le \||D\tilde{F}u|_{1,\mathrm{X}}\|_{L^1(\Omega)} \overset{(20)}{=} \||Du|_{1,\Omega}\|_{L^1(\Omega)}, \tag{23}$$

因此，我们可以继续估计 (22)，得到 $\||DFu|\|_{L^1(\mathfrak{m})} \le C(\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} + \varepsilon)$。接着

$$\|\tilde{F}u\|_{L^1(\mathrm{X})} = \|Fu\|_{L^1(\bar{\mathrm{X}})} + \varepsilon \le C(\|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega) + \varepsilon) \le C(\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} + \varepsilon)$$

其中，第一个不等式由 Fu 的定义以及 (9) 得出，第二个不等式是因为 F 是一个 BV-延拓算子，最后一个不等式则由 (23) 得出。取 $\varepsilon = \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}$，即可得出结论。□

4.3. **例子**。 在本小节的最后，我们给出几个度量测度空间 $(\mathrm{X},\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$，其具有 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) > 0$ 以及开集 $\Omega \subset \mathrm{X}$，这些空间具备某些延拓性质，但不具备另一些性质。我们从一个基本例子开始，见 [1, 例 7.4] 它表明 $W^{1,1}(\mathrm{X})$ 与 $W^{1,w}{}^1(\mathrm{X})$ 并不相同。

例 4.7。 设空间 X 为 $\mathbb{R}^2$，配备欧几里得距离和测度 $\mathfrak{m} = \mathcal{L}^2 + \mathcal{H}^1|_{\partial B(0,1)}$，则区域 $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ 不具有强 BV、$W^{1,1}$，也不具有 $W^{1,w}{}^1$ 延拓性质。

下面给出一个例子：它是 $W^{1,w}{}^1$-延拓域，但不是 $W^{1,1}$-延拓域。

例 4.8。 我们考虑度量测度空间 $(\mathrm{X},\mathrm{d}\ \mathfrak{m}) = (\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_e, \mathfrak{m})$，其中 d_e 是 2-欧几里得距离，且 $\mathfrak{m} := \mathcal{L}^2 + \mathscr{H}^1|_S$ 和 $S := [0,1]\times\{0\}$。我们考虑开集 $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus S$。特别地，我们注意到 $\mathfrak{m}(\partial\Omega) = \mathscr{H}^1(S) > 0$。我们断言，$\Omega$ 是一个 $W^{1,w}{}^1$-延拓域，但它不是一个 $W^{1,1}$-延拓域。

我们考虑一个函数 u，使得 $u = 1$ 在 $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\times[0,\frac{1}{3}]$ 上，支撑于 $[0,1]\times\mathbb{R}$，且为利普希茨函数

在其支撑上。于是，根据 $W^{1,1}(\Omega)$ 的定义可知 $u \in W^{1,1}(\Omega)$。反设 Ω 是一个 $W^{1,1}$-延拓域，并考虑延拓，记作 $v \in W^{1,1}(X)$。我们考虑 $\mu := \mathcal{L}^2(B(z,1/6))^{-1}\,\mathcal{L}^2|_{B(z,1/6)}$，其中 $z := (\frac{1}{2},\frac{1}{6})$，并定义映射 $F(x,t) := x - \frac{t}{3}e_2$，其中 $t \in [0,1]$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$。我们用 $G\colon X \to \Gamma(X)$ 表示映射 $(G(x))_t := F(x,t)$。我们定义 $\pi := G_*\mu$，容易验证它是一个 ∞-测试计划。对于 π-几乎处处的 γ，$v\circ\gamma$ 都不属于 $W^{1,1}(0,1)$，因此无论如何选取 $G \in L^1(\mathfrak{m})$，都与命题 2.15 的 ii) 项矛盾。因此，$v \notin W^{1,1}(X)$。现在我们证明 Ω 是一个 $W^{1,1}_{(w)}$-延拓域。我们分别用 $W^{1,1}_{(e)}(\Omega)$ 和 $BV_e(\Omega)$ 表示 $\mathsf{mms}\,(\mathbb{R}^2, |\cdot|, \mathcal{L}^2)$ 中 Ω 上的 $W^{1,1}$ 空间和 BV 空间；此外，我们用 ∇u 表示 u 的分布梯度。由于 $\mathfrak{m}_{|\Omega} = \mathcal{L}^2_{|\Omega}$，我们有 $W^{1,1}_{(w)}(\Omega) = W^{1,1}_{(e)}(\Omega)$，且

$$\left\| \frac{\mathrm{d}|Dv|}{\mathrm{d}\mathfrak{m}} \right\|_{L^1(\Omega)} = \| |\nabla v| \|_{L^1(\Omega,\mathfrak{m})}.$$

本文的目标是构造 $W^{1,1}_{(w)}$延拓算子。我们考虑 $u \in W^{1,1}_{(w)}(\Omega)$。定义 $\Omega^+ := \{y > 0\}$ 以及 $\Omega^- := \{y < 0\}$。根据迹理论，由于 $u \in W^{1,1}_{(e)}(\Omega^+)$，存在$u^+ \in L^1(\partial\Omega^+)$，使得对于每个 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\Omega^+} \varphi\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 + \int_{\Omega^+} u\,\mathrm{div}\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 = \int_{\partial\Omega^+} \varphi\cdot\nu\,u^+\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1. \tag{24}$$

在 Ω^- 上同样成立，并且很容易验证 $u^+ = u^-$ 在 $\{y=0\}\setminus S$上成立。因此，将（24）与 Ω^-对应的相同项相加，我们得到，对于每个 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$$\int \varphi\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 + \int u\,\mathrm{div}\varphi\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 = \int_S \varphi\cdot e_2\,(u^+ - u^-)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1.$$

因此，$u \in BV_e(\mathbb{R}^2)$ 和 $Du = \nabla u\,\mathcal{L}^2 + (u^+ - u^-)e_2\,\mathscr{H}^1|_{S^\circ}$ 定义 $\tilde{u} \in L^1(\mathfrak{m})$ 等于 $u\mathcal{L}^2$-几乎处处在 Ω 上，并且 0 $\mathscr{H}^1$-几乎处处在 S 上。我们声称 $\tilde{u} \in BV(\mathbb{R}^2, \mathsf{d}_e, \mathfrak{m})$，并且

$$|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}} \le |\nabla u|\mathcal{L}^2|_{\mathbb{R}^2\setminus S} + (|u^+| + |u^-| - |u^+ - u^-|)\mathscr{H}^1|_S =: \nu.$$

由于 $u \in W^{1,1}_{(e)}(\Omega)$，我们知道存在 $u_k \in W^{1,1}_{(e)}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$，使得 $u_k \to u$ 属于 $W^{1,1}(\Omega)$。不妨取一个强收敛子列，于是可以假设存在 $H \in L^1(\Omega,\mathfrak{m})$，使得对每个 k，在 Ω 上 $|\nabla u_k| \le H$ $\mathfrak{m}$-几乎处处成立。此外，对每个 k，我们定义

$$\varphi_k := (k\,\mathsf{d}(B(S,\frac{1}{k}),\cdot)) \wedge 1$$

注意，在 S 上几乎处处有 $\varphi_k u_k = 0$ $\mathscr{H}^1$，并且局部斜率 $\varphi_k = k\chi_{B(S,\frac{2}{k})\setminus B(S,\frac{1}{k})}\,\mathfrak{m}$ 几乎处处。此外，$\varphi_k u_k \to \tilde{u}$ 属于 $L^1(\Omega)$；因此，$\varphi_k u_k$ 是开集上 $|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}}$ 定义中的一个可容许竞争函数。我们考虑一个开立方体 $Q \subset \mathbb{R}^2$。若 $Q\cap S = \emptyset$，则有 $|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}}(Q) = \nu(Q)$。若 $Q\cap S \neq \emptyset$，则按如下步骤进行。由局部斜率的莱布尼茨公式以及 $u_k \in C^\infty(\Omega)$ 这一事实，我们得到

$$\int_Q \mathrm{lip}(\varphi_k u_k)\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \int_Q \varphi_k\,|\nabla u_k|\,\mathrm{d}\mathfrak{m} + k\int_{Q\cap B(S,\frac{2}{k})\setminus B(S,\frac{1}{k})} u_k\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = (A_k) + (B_k)$$

首先，我们估计项 (A_k):

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_Q \varphi_k\,|\nabla u_k|\,\mathrm{d}\mathfrak{m} \le \lim_{k\to\infty}\int_Q |\nabla u_k|\,\mathrm{d}\mathfrak{m} = \||\nabla u|\|_{L^1(Q)}.$$

其次，我们估计（B_k）：

$$(B_k) \le \int_{S\cap Q}\fint_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}|u_k|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{S\cap Q}\fint_{-\frac{2}{k}}^{-\frac{1}{k}}|u_k|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + o(1).$$

我们对上一个等式中的第一项作如下估计:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{S\cap Q}\fint_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}|u_k|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\le \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{S\cap Q}\fint_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}|u_k(x,y)|-|u_k(x,0)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{S\cap Q}|u_k(x,0)|\,\mathrm{d}x\\ &\le \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{S\cap Q}\fint_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}|u_k(x,y)|-|u_k(x,0)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{S\cap Q}|u^+(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们使用了迹算子从 $W^{1,e}{}^1(\Omega)$ 到 $L^1(\partial\Omega)$ 的连续性。继续估计最后一行中的第一项，可得

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{S\cap Q}\fint_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}|u_k(x,y)|-|u_k(x,0)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &\le \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{S\cap Q}\fint_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}\int_0^y \partial_z|u_k(x,z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\ \le \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{[0,1]\times[0,\frac{2}{k}]}|\nabla u_k|\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 &\le \overline{\lim_{k\to\infty}}\int_{[0,1]\times[0,\frac{2}{k}]} H\,\mathrm{d}\mathcal{L}^2 = 0,\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由控制收敛定理的应用得到。第二项同样成立。令 $k\to\infty$ 趋于极限，我们证明了 $|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}}(Q) \le \nu(Q)$。应用单调类定理，我们得到对于每个博雷尔集 B，均有 $|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}}(B) \le \nu(B)$，从而证明了该断言。因此，我们得到 $\tilde{u}\in BV(\mathbb{R}^2,\mathrm{d}_e,\mathfrak{m})$，$|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}} \ll \mathfrak{m}$，于是 $\tilde{u}\in W^{1,w}{}^1(\mathbb{R}^2,\mathrm{d}_e,\mathfrak{m})$。要完成证明，只需估计其范数

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathrm{d}|D\tilde{u}|_{\mathfrak{m}}}{\mathrm{d}\mathfrak{m}}\right\|_{L^1(\mathfrak{m})} &\le \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} + \int_S (|u^+|+|u^-|-|u^+-u^-|)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1\\ &\le \||\nabla u|\|_{L^1(\Omega)} + 2\int_S (|u^+|+|u^-|)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^1 \le C\|u\|_{W^{1,1}_w(\Omega)},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们应用了迹算子的连续性。对于 L^1-范数，根据 $\tilde{u}$ 的定义可知，$\|\tilde{u}\|_{L^1(\mathfrak{m})} = \|u\|_{L^1(\Omega)}$。因此，$\|\tilde{u}\|_{W^{1,w}{}^1(\mathrm{X})} \le C\|u\|_{W^{1,w}{}^1(\Omega)}$。

最后，我们通过一些例子来说明，某些集合由于不同的原因具有 $W^{1,1}$-延拓性质，但不具有强 BV-延拓性质。

例 4.9。考虑一个有界区域 $\Omega = (-2,2)\times(0,1)\cup(-2,-1)\times(-1,0]\cup(1,2)\times(-1,0]\subset\mathbb{R}^2$ 在 $(\mathbb{R}^2,\mathrm{d}\ \mathfrak{m})$ 中，采用三种不同的距离和参考测度:

(1) $\mathfrak{m} = \mathcal{H}^1|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 和 $\mathrm{d} = \mathrm{d}_{\mathrm{Euc}}$。(2) $\mathfrak{m} = \mathcal{H}^1|_{\mathbb{R}\times\{0\}} + \mathcal{L}^2$ 和 $\mathrm{d}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1-x_2| + \sqrt{|y_1-y_2|}$。(3) $\mathfrak{m} = \mathcal{H}^1|_{\mathbb{R}\times\{0\}} + \sum_i 2^{-i}\delta_{q_i}$，其中 $\{q_i:\ i\in\mathbb{N}\} = \mathbb{Q}^2$ 和 $\mathrm{d} = \mathrm{d}_{\mathrm{Euc}}$。

继续之前，我们注意到，如果取 $\mathfrak{m} = \mathcal{H}^1|_{\mathbb{R}\times\{0\}} + \mathcal{L}^2$ 和 $\mathsf{d} = \mathsf{d}_{\mathrm{Euc}}$，那么与例 4.7 类似，$\Omega$ 将不具有 $W^{1,1}$-延拓性质。

在所有这些版本中，强 BV-延拓性质都不成立，因为 $[-1,1]\times\{0\} \subset \partial\Omega$，而任何将函数 $u \in BV(\Omega)$ 延拓为 Eu、且在 $(-2,-1)$ 上取值为 0、在 $(1,2)$ 上取值为 1 的函数 $\times\{0\} \times\{0\}$ 都必须满足$|DEu|([-1,1]\times\{0\}) \geq 1$。

我们简要说明为什么这三种情形中的区域都具有 $W^{1,1}$-延拓性质。在 (1) 中，分析可简化为 $\mathbb{R}$，因为测度仅支撑在 $\mathbb{R}\times\{0\}$ 上。由于 $(-2,-1) \cup (1,2)$ 在欧几里得直线上具有 $W^{1,1}$-延拓性质，我们得出 Ω 在$\mathbb{R}^2$中也具有 $W^{1,1}$-延拓性质。构造的版本 (1) 或许不尽如人意，因为测度仅支撑在线上，导致空间的其余部分都成了多余部分。版本 (2) 和 (3) 则通过强制测度的支撑为整个空间来解决这一问题。

在（2）中，不同的水平直线之间不存在可求长曲线将它们连接起来，因此分析再次归结为 $\mathbb{R}$，与（1）中一样。在（3）中，任意两点都可以由可求长曲线连接，但一维豪斯多夫测度支撑所在直线以外的参考测度，不支撑任何非平凡的索博列夫结构。因此，分析同样归结为 $\mathbb{R}$，与（1）中一样。

例 4.9 的最后两种构造（2）和（3）或许也不太令人满意，因为其中相关的索博列夫结构仅限于水平方向。

在最后一个例子中，我们构造了一个具有 $W^{1,1}$-延拓性质、但不具有强 BV-延拓性质的开集；其索博列夫结构更为丰富，但因此延拓性质的构造和验证也稍微复杂一些。

例 4.10. 我们将构造一个开有界集 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 和一个密度 $\rho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$，使得 Ω 在 $(\mathbb{R}^2, \mathsf{d}_{\mathrm{Euc}}, \rho\mathcal{L}^2)$ 中具有 $W^{1,1}$-延拓性质，但不具有强 BV-延拓性质。

开集 Ω 和密度 ρ 通过球列 $B_i = B(x_i, r_i)$ 以及支撑在 $2B_i$ 中的密度列 ρ_i 构造。我们从枚举 $\{q_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap [-2,2]\times[-1,1]$开始，并为所有 x定义 $r_1 = r_2 = 1$、$x_1 = (-2,0)$、$x_2 = (2,0)$ 和 $w_1(x) = w_2(x) = 1$。其余的 x_i、r_i 和 w_i 将通过归纳法如下定义。假设 $(x_i, r_i, w_i)_{i=1}^k$ 已定义。令 $j \in \mathbb{N}$ 为满足 $q_j \notin \bigcup_{i=1}^k \overline{B_i}$的最小整数。定义

$$x_{k+1} = q_j, \qquad r_{k+1} = \min\left(2^{-(k+1)}, \frac{1}{2}\,\mathsf{d}(q_j, \bigcup_{i=1}^{k} B_i)\right),$$

and

$$\rho_{k+1}(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{k+1} r_i^2, & \text{if } x \in B(x_{k+1}, 2r_{k+1}) \setminus B(x_{k+1}, r_{k+1}), \\ 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

最后，定义

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \qquad \text{and} \qquad \rho(x) = \inf_i \rho_i(x).$$

Ω 是一个 $W^{1,1}$-延拓集的原因在于，不同环域中的小密度使我们能够在环域内构造截断函数。在论证这一点之前，我们先来看看为什么 Ω 不必具有强

BV-延拓性质。根据 r_i 的定义，我们有

$$\sum_{i=3}^{\infty} 4r_i \leq \sum_{i=3}^{\infty} 2^{2-i} = 1.$$

因此，勒贝格测度

$$A = \left\{ y \in (-1,1) \,:\, ([-2,2] \times \{y\}) \cap \bigcup_{i=3}^{\infty} 2B_i = \emptyset \right\}$$

至少为一。在线段 $[-2,2] \times \{y\}$ 上，其中 $y \in A$，密度 w 恒等于一。因此，若我们考虑在 B_1 上恒等于一、在其他地方为零的函数 $f \in BV(\Omega)$，那么它的任意有界变差延拓 BV-延拓 Ef 都满足

$$|D(Ef)|\,(D) \geq 1,$$

其中

$$D = \bigcup_{y \in A} ([-2,2] \times \{y\}) \setminus (B_1 \cup B_2).$$

注意，Ω 的定义迫使 $[-2,2] \times [-1,1] \subset \Omega$，因此 $D \subset \partial\overline{\Omega}$。所以，$\Omega$ 不具有强 BV-延拓性质。

接下来我们验证 Ω 具有 $W^{1,1}$-延拓性质。首先注意到，存在一个有界延拓算子 $E\colon W^{1,1}(B(0,1)) \to W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$，它是相对于勒贝格测度定义的。我们还取一个截断函数 $\varphi \in C_0^\infty(B(0,2))$，使得 $\varphi = 1$ 在 $B(0,1)$ 上成立。对每个 $i \in \mathbb{N}$，定义 $T_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon z \mapsto r_i z + x_i$。从 $W^{1,1}(\Omega)$ 到 $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ 的延拓算子 E_∞ 将定义为延拓算子的极限

$$E_k\colon W^{1,1}(\Omega_k) \to W^{1,1}(\mathbb{R}^2), \text{ with } \Omega_k = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \text{ and reference measure } \inf_{i \leq k} \mathfrak{m}_k = \rho_i(x)\mathcal{L}^2$$

其定义归纳如下。我们定义

$$E_1 u(x) = E(u \circ T_1|_{B(0,1)})(T_1^{-1}(x)).$$

假设我们已定义 E_k，令

$$E_{k+1}u(x) = E_k u|_{\Omega_k}(x)(1 - \varphi(T_{k+1}^{-1}(x))) + E(u \circ T_{k+1}|_{B(0,1)})(T_{k+1}^{-1}(x))\varphi(T_{k+1}^{-1}(x)).$$

由于对所有 $x \notin \bigcup_{i=k}^{\infty} 2B_i$，$E_k u|_{\Omega_k}(x) = E_{k-1}u|_{\Omega_{k-1}}(x)$，且由于当 $k \to \infty$ 时，$\mathcal{L}^2\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} 2B_i\right) \to 0$，因此将最终延拓算子定义为

$$E_\infty u(x) = \lim_{k \to \infty} E_k u|_{\Omega_k}(x)$$

是适定的。

我们来估计 E_{k+1} 的算子范数。首先，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}(|E_{k+1}u|+|DE_{k+1}u|)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{k+1}\\
&\quad\le\int_{T_{k+1}(\mathbb{R}^2\setminus B(0,2))}+\int_{T_{k+1}(B(0,1))}+\int_{T_{k+1}(B(0,2)\setminus B(0,1))}(|E_{k+1}u|+|DE_{k+1}u|)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{k+1}\\
&\quad\le\|E_k\|\|u\|_{W^{1,1}(\Omega_k)}+\|u\|_{W^{1,1}(B_i)}+\int_{T_{k+1}(B(0,2)\setminus B(0,1))}(|E_{k+1}u|+|DE_{k+1}u|)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{k+1}.
\end{aligned}$$

我们来估计最后一项。根据 E_{k+1} 和 ρ_i 的定义，对于函数的积分，我们得到

$$\int_{T_{k+1}(B(0,2)\setminus B(0,1))}|E_{k+1}u|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{k+1}\le r_{k+1}^2(\|E_k\|\|u\|_{W^{1,1}(\Omega_k)}+\|E\|\|u\|_{W^{1,1}(B_i)}).$$

对于梯度部分，首先利用乘积法则和链式法则，对几乎所有 $x\in T_{k+1}(B(0,2)\setminus B(0,1))$，通过下式估计梯度

$$\begin{aligned}
|DE_{k+1}u(x)|\le{}&|DE_k|_{\Omega_k}u(x)|+\frac{1}{r_{k+1}}|DE(u\circ T_{k+1}|_{B(0,1)})(T_{k+1}^{-1}(x))|\\
&+C\frac{1}{r_{k+1}}\left(|E_ku|_{\Omega_k}(x)|+|E(u\circ T_{k+1}|_{B(0,1)})(T_{k+1}^{-1}(x))|\right).
\end{aligned}$$

因此，

$$\int_{T_{k+1}(B(0,2)\setminus B(0,1))}|DE_{k+1}u|\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{k+1}\le Cr_{k+1}(\|E_k\|\|u\|_{W^{1,1}(\Omega_k)}+\|E\|\|u\|_{W^{1,1}(B_i)}).$$

由此我们得到了估计式

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}(|E_{k+1}u|+|DE_{k+1}u|)\,\mathrm{d}\mathfrak{m}_{k+1}&\le(1+Cr_{k+1})\|E_k\|\|u\|_{W^{1,1}(\Omega_k)}+(1+Cr_k\|E\|)\|u\|_{W^{1,1}(B_i)}\\
&\le(1+C\|E\|r_k)\|E_k\|\|u\|_{W^{1,1}(\Omega_{k+1})}.
\end{aligned}$$

回顾 $r_k\le 2^{-k}$ 对于 $k\ge 3$ 成立，通过反复应用上述结果，对于所有 $k\ge 3$，我们有

$$\begin{aligned}
\|E_{k+1}\|&\le(1+C\|E\|2^{-k-1})\|E_k\|\\
&\le\left(\prod_{i=3}^{k+1}(1+C\|E\|2^{-i})\right)\|E_2\|\le\left(\prod_{i=3}^{\infty}(1+C\|E\|2^{-i})\right)\|E_2\|<\infty.
\end{aligned}$$

由于对于所有 $u\in W^{1,1}(\Omega)$，我们都有

$$\begin{aligned}
\|E_\infty u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}&=\lim_{k\to\infty}\|E_ku|_{\Omega_k}\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}^2)}\le\lim_{k\to\infty}\|E_k\|\|u|_{\Omega_k}\|_{W^{1,1}(\Omega_k)}\\
&\le\left(\prod_{i=3}^{\infty}(1+C\|E\|2^{-i})\right)\|E_2\|\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)},
\end{aligned}$$

因此， E_∞ 有界，证毕。

参考文献

[1] L. Ambrosio 和 S. Di Marino. 度量测度空间中 BV 空间及全变差的等价定义。《函数分析杂志》, 266(7):4150–4188, 2014. [2] L. Ambrosio, N. Gigli 和 G. Savaré. 度量测度空间中的微积分与热流，以及在具有里奇曲率下界的空间中的应用。《数学发明》, 195(2):289–391, 2014. [3] A. Baldi 和 F. Montefalcone. 关于度量测度空间中有界变差函数延拓的一则注记。《数学分析及其应用杂志》, 340(1):197–208, 2008. [4] J. S. Burago 和 V. G. Maz'ya. 不规则边界区域的位势理论与函数论中的若干问题。Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 3:152, 1967. [5] J. Cheeger. 度量测度空间上利普希茨函数的可微性。《几何与泛函分析》, 9 517, 1999 3 428( ): – .[6] M. García-Bravo 和 T. Rajala. 强 BV-延拓域和 W^1,1-延拓域。《函数分析杂志》, 283(10):论文编号 109665, 2022. [7] P. Hajłasz 和 P. Koskela. 满足 Poincaré 不等式的 Sobolev 空间。《美国数学会回忆录》, 145(688):x+101, 2000. [8] P. Hajłasz, P. Koskela 和 H. Tuominen. Sobolev 函数的测度密度与可扩张性。《伊比利亚美洲数学杂志》, 24(2):645–669, 2008. [9] P. Hajłasz, P. Koskela 和 H. Tuominen. Sobolev 嵌入、延拓与测度密度条件。《函数分析杂志》, 254(5):1217–1234, 2008. [10] J. Heinonen 和 P. Koskela. 受控几何度量空间中的拟共形映射。《数学学报》, 181(1):1– 61, 1998.[11] P. Koskela 和 P. MacManus. 拟共形映射与 Sobolev 空间。《数学研究》, 131(1):1–17, 1998. [12] P. Koskela, M. Miranda, Jr. 和 N. Shanmugalingam. 平面 BV-延拓域的几何性质。载于《围绕 Vladimir Maz'ya 的研究》，第 I 卷, Int. Math. Ser. (N. Y.) 第 11 卷，第 255–272 页。Springer，纽约，2010. [13] V. Maz'ya. Sobolev 空间及其在椭圆型偏微分方程中的应用，数学科学基础丛书第 342 卷， /数学科学基本原理/。Springer，海德堡，增补版，2011. [14] M. Miranda, Jr. "良好"度量空间上的有界变差函数。《纯粹与应用数学杂志》 (9 1004, 2003 82 8 975), ( ): – .[15] N. Shanmugalingam. 牛顿空间：将 Sobolev 空间推广至度量测度空间。《伊比利亚美洲数学杂志》, 16(2):243–279, 2000.

于韦斯屈莱大学数学与统计学系，邮政信箱35（MaD），FI-40014 于韦斯屈莱大学，芬兰电子邮箱地址：emanuele.e.caputo@jyu.fi电子邮箱地址：jesse.j.j.koivu@jyu.fi电子邮箱地址：tapio.m.rajala@jyu.fi