分次 Picent 的一个正合列

ANDREI MARCUS 和 VIRGILIUS-AURELIAN MIN UȚĂ

Abstract. 对于一个强 G 分次代数 A，其单位分量为 B，我们定义群 Picent$^{gr}(A)$，它由 B 在 A 中的中心化子上的可逆 G 分次 (A,A)-双模的同构类构成。我们的主要结果是 Beattie-del Río 正合列的一个 Picent 版本，其中涉及 Dade 群 $G[B]$，它联系了 Picent$^{gr}(A)$、Picent(B) 和群上同调。

arXiv:2302.10027v1 [math.RT] 20 Feb 2023

1. Introduction

本文引入与强 G 分次代数相关联的 G 分次 Picent 群的概念，并建立一个正合列，将该群与单位分量的 Picent 群联系起来。

为了解释我们的结果，先引入一些记号。这里 G 是一个有限群，k 是一个交换环，并且我们假设 k 代数 A 是一个 G 分次交叉积，其单位分量为 B。存在一个记作 $G[B]$ 的惯性群，它由 E. C. Dade 在 [3, (2.9)] 中引入，是满足以下条件的 G 的最大（正规）子群 H：由 G 作用的代数 $\mathcal{C} := \mathsf{C}_A(B)_H$ 也是一个交叉积（见 2.2）。令 $Z = \mathsf{U}(\mathsf{Z}(B))$ 和 $H = G[B]$。

我们在第 3 节定义由 G-分次可逆（A,A）-双模在 $\mathcal{C}$ 上的同构类构成的群 Picent$^{gr}(A)$（见 3.2）。我们在定理 4.1 中证明，存在如下群正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/H, Z) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Picent}(B)^{G/H} \xrightarrow{\Theta} \mathrm{H}^2(G/H, Z).$$

这是 Beattie-del Río 正合列的 Picent 版本，其中 Picard 群取自 k。请注意，在 [1], 中，该正合列的第三个映射不是群同态，而群 H 并不起任何作用。此外，我们在定理 4.2 中证明，这两个正合列之间存在有趣的联系，其中涉及与 G 的正规子群 H 相关联的五项正合列。

我们对定理 4.1 的证明建立在 [6] 中 Beattie-del Rio 正合列证明所采用的思路之上，而该证明基于 Dade 在 [4] 中提出的方法。我们重新探讨这一结果的动机之一，是近期人们对群代数的 Picard 群产生了兴趣，相关例子见 [2] 和 [5]。

本文结构如下。第 2 节回顾交叉积和群上同调的一些事实。第 3 节引入群 Picent$^{gr}(A)$，并证明它的若干性质，这些性质是对通常的 Picent 群一些众所周知性质的推广。我们的主要结果在第 4 节。我们已经提到了其中两个。定理 4.3 指出，定理 4.1 中的正合列仅取决于齐次单位群在 B 上的作用。这与 Sp¨ath 的“蝴蝶定理”密切相关，参见 [12, 定理 2.16], , 以及 [8, 命题 4.1 和定理 4.2], , 分别对应 [9, 命题 3.8 和定理 3.9]。事实上，尝试推广这些结果也是本文的另一个动机。

关于我们的基本假设，本文中的所有环都是含幺结合环，所有模都是左模（除非另有说明）且含幺。关于皮卡群的结果，请参阅 [11]；关于群上同调，请参阅 [10]；关于群分次代数，请参阅 [7]。

2. Preliminaries

2.1. 设 G 为有限群，k 为交换环，A 为 k代数 B 与G的交叉积。我们用 $\mathsf{hU}(A)$ 表示 A的齐次单位群。对于所有 $g \in G$，我们选取 $u_g \in \mathsf{hU}(A) \cap A_g$。

2.2. 考虑 A 中 B的中心化子 $\mathsf{C}_A(B)$。我们知道 $\mathsf{C}_A(B)$ 是一个 G分次的 G代数，并令

$$G[B] := \{g \in G \mid A_g \simeq B \text{ as } (B,B)\text{-bimodules}\}$$

为 B 作为(B,B)-双模的惯性群。众所周知，$G[B]$ 是 G的正规子群，并且

$$\mathcal{C} := \mathrm{C}_A(B)_{G[B]} = \bigoplus_{h \in G[B]} \mathrm{C}_A(B)_h$$

是 $\mathsf{C}_A(B)$ 的一个强 $G[B]$-分次、由 G 作用的子代数。实际上，$G[B]$ 是 G 的最大子群 H，使得 $\mathsf{C}_A(B)_H$ 是强分次的。G 对 $\mathcal{C}$ 的作用定义为

$${}^g c = u_g c u_g^{-1},$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 16W50, 16D90,16S35, 20C20.*Key words and phrases.* 群分次代数、交叉积、中心化子子代数、Morita等价、Picard 群、Picent 群。

对于任意 $c \in \mathcal{C}$ 和 $g \in G$。注意，这与 $u_g \in \mathrm{hU}(A) \cap A_g$ 的选择无关。我们记 $H := G[B]$, $\mathcal{Z} := \mathcal{C}_1 = \mathrm{Z}(B)$ 和 $Z = \mathrm{U}(\mathcal{Z})$。

2.3. 我们回顾 H 的替代定义。考虑群同态 $\varepsilon : \mathrm{hU}(A) \to \mathrm{Aut}_k(B)$,$\varepsilon(u_g)(b) = u_g b u_g^{-1}$，对所有 $b \in B$ 和 $g \in G$。令 $\bar{\varepsilon}\colon G \to \mathrm{Out}_k(B)$ 为由 ε 诱导的群同态。注意，$\bar{\varepsilon}$ 的定义不依赖于 $u_g \in \mathrm{hU}(A) \cap A_g$ 的选择。我们得到如下由群和群同态构成的交换图，其行与列正合，其中 $\pi : \mathrm{Aut}_k(B) \to \mathrm{Out}_k(B)$ 是典范投影：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \mathrm{C}_{\mathrm{hU}(A)}(B) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{U}(B) & \longrightarrow & \mathrm{hU}(A) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varepsilon}} & & \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{Int}(B) & \longrightarrow & \text{自同构}_k(B) & \xrightarrow{\pi} & \text{外延}_k(B) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

我们有

$$H \;=\; \mathrm{Ker}\,\bar{\varepsilon} \;=\; \{g \in G \mid \mathcal{C}_g \mathcal{C}_{g^{-1}} = \mathcal{Z}\},$$

并且得到群同构 $\mathrm{Im}\,\bar{\varepsilon} \simeq G/H$ and

$$H \simeq \mathrm{C}_{\mathrm{hU}(A)}(B)/\mathrm{U}(\mathcal{Z}) \simeq \mathrm{C}_{\mathrm{hU}(A)}(B)\mathrm{U}(B)/\mathrm{U}(B).$$

此外，由于 $G \simeq \mathrm{hU}(A)/\mathrm{U}(B)$，我们还得到

$$G/H \simeq \mathrm{hU}(A)/\mathrm{C}_{\mathrm{hU}(A)}(B)\mathrm{U}(B).$$

注意，H 在 $\mathcal{Z}$ 上平凡作用。事实上，若 $h \in H$ and $z \in \mathcal{Z}$，则 ${}^h z = u_h z u_h^{-1}$，其中我们可以取$u_h \in \mathrm{C}_{\mathrm{hU}(A)}(B)$，因此结论成立。

2.4. 特别地，Z 是一个平凡的 H-模，因此也是一个 G/H-模。回顾一下（例如参见 [10, 命题 1.6.7]），我们有如下五项正合列：

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/H, Z) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^1(G, Z) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^1(H, Z)^{G/H} \xrightarrow{\mathrm{Tg}} \mathrm{H}^2(G/H, Z) \xrightarrow{\mathrm{Inf}} \mathrm{H}^2(G, Z).$$

在我们的情形中，由于 Z 是一个平凡的 H-模，根据 [13, 推论 6.4.6]，我们知道

$$\mathrm{H}^1(H, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(H, Z),$$

而 G 在 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H, Z)$ 上的作用为

$${}^g\beta : H \to Z, \qquad ({}^g\beta)(h) = {}^g(\beta({}^{g^{-1}}h)), \text{ for all } h \in H.$$

很容易看出 对 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H, Z)$ 平凡作用，因此 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H, Z)$ 是 G/H-作用的 d.

3. Graded Picent

3.1. 我们将 $\mathrm{Pic}_k(B)$ 记为 $[P]$ 上的可逆 (B, B)-双模 P的同构类 $[P]$ 所组成的集合。结合运算

$$[P] \cdot [Q] = [P \otimes_B Q],$$

$\mathrm{Pic}_k(B)$ 构成一个群，称为相对于 k 的 B 的皮卡群（例如参见 [11, Definition 37.5 (i)]）。[P] 的逆元 $[P]^{-1}$ 是 P 的 B-对偶 $[\mathrm{Hom}_B(P, B)]$。

回忆一下（参见 [11, Definition 37.5 (ii)]），$\mathrm{Picent}(B)$ 是满足以下条件的可逆 (B, B)-双模 P 的同构类 $[P]$ 的集合：对所有 $p \in P$ 和 $z \in \mathcal{Z}$ 都成立（我们称 P 为 $\mathcal{Z}$ 上的双模）。于是，$\mathrm{Picent}(B)$ 是 $\mathrm{Pic}_k(B)$ 的一个子群。

3.2. 我们以类似的方式定义群 $\mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$ 和 $\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$。令 $\mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$ 为 G-分次可逆 (A, A)-双模 $\tilde{P}$ 在 k 上的同构类 $[\tilde{P}]$ 所构成的群；令 $\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$ 为 $\mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$ 的子群 ˜ ˜，它由满足以下条件的 G-分次 (A, A)-双模 P 的同构类 $[P]$ 构成：

˜ ˜ ˜ ˜ ˜(1) $P \otimes_A P^* \simeq A$和 $P^* \otimes_A P \simeq A$作为 G-分次（A, A）-双模，其中 P^*是 P的 A-对偶。˜(2) $\tilde{p}_g c = {}^g c \tilde{p}_g$ 对所有 $g \in G$, $c \in \mathcal{C}$, $\tilde{p}_g \in P_g$均成立。

回顾 [9, 注 2.6]，条件 (2) 等价于

˜(2’) $pc = cp$ 对所有 $c \in C$ 和 $p \in P_1$均成立。

这类双模在 [9, 定义 2.5] G中称为A分次的（A, A）-双模，$\mathcal{C}$ 上的这类双模构成一个范畴，记作 A-Gr/$\mathcal{C}$-A。

3.3. 我们回顾 [9, 第 2] 节中的一些其他概念和结果。记

$$\Delta^{\mathcal{C}} = \Delta(A \otimes_{\mathcal{C}} A^{\mathrm{op}}) = \bigoplus_{g\in G} A_g \otimes_{\mathcal{C}} A_g^{\mathrm{op}}.$$

于是，由命题 2.10 和 2.11], , 函子:

$$(A \otimes_{\mathcal{C}} A^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta^{\mathcal{C}}} -,\ A \otimes_B -,\ - \otimes_B A : \Delta^{\mathcal{C}}\text{-mod} \to A\text{-Gr}/\mathcal{C}\text{-}A,$$

是自然同构的范畴等价，其逆函子取单位分量，$(-)_1$, 并且与张量积相容。

3.4. 我们记

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A) = \{\alpha \in \mathrm{Aut}_k(A) \mid \alpha(A_g) = A_g \text{ for all } g \in G, \text{ and } \alpha(c) = c \text{ for all } c \in \mathcal{C}\}.$$

设 $\tilde{P}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个 G-分次 (A, A)-双模。对于 $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A)$，我们定义一个新的 G-分次 (A, A)-双模 $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$, 它定义在 $\mathcal{C}$ 上，其中 ${}_\alpha P_\beta = P$ 作为 k-模，乘法定义为

$$a \cdot \tilde{p} \cdot a' = \alpha(a)\tilde{p}\beta(a').$$

对于 $u \in \mathrm{U}(A)$，记 $\iota_u : A \to A$, $\iota_u(a) = uau^{-1}$。记

$$\mathrm{Int}_1(A) = \{\iota_u \mid u \in \mathrm{U}(B)\}.$$

下一个结果将 [11] 中的定理 (37.14) 和 (37.16) 加以推广。

命题 3.5. 使用上述记号，我们有:

1) 存在一个群正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Int}_1(A) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A),$$

其中 $\tilde{\ }$ $\varphi(\alpha) = [{}_1A_\alpha]$。

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$2) 如果 $[P], [Q] \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$，那么 $P \simeq Q$ 作为 G-分次的 $(A, \mathcal{C})$-双模，在 $\mathcal{C}$ 上当且仅当存在 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A)$ 使得 $\tilde{Q} \simeq {}_1\tilde{P}_\alpha$ 作为 G-分次的 (A, A)-双模，在 $\mathcal{C}$ 上成立。特别地,

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{[\tilde{P}] \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A) \mid \tilde{P} \simeq A \text{ as } G\text{-graded } (A, \mathcal{C})\text{-bimodules over } \mathcal{C}\}.$$

证明。1) 显然， φ 是良定义的群同态（参见 [11, 定理 37.14] 的证明）。如果 $\alpha = \iota_u \in \mathrm{Int}_1(A)$，那么映射 f: $A \to {}_1A_\alpha$, $f(a) = au^{-1}$ 是 G-分次的 (A, A)-双模同构，因此 $\alpha \in \mathrm{Ker}\,\varphi$。反之，设 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A)$ 使得 f: $A \to {}_1A_\alpha$ 是 G-分次的 (A, A)-双模同构，即

$$f(axa') = af(x)\alpha(a'),$$

对所有 $a, a', x \in A$。令 $u := f(1)$，于是 $u \in B$，因为 $1 \in B$。由此可得 $u \in \mathrm{U}(B)$ 且 $f(a) = au$，对所有 $a \in A$。此外，我们得到 $\alpha = \iota_{u^{-1}} \in \mathrm{Int}_1(A)$。

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$2) 若 $Q \simeq {}_1P_\alpha$ 是 $\mathcal{C}$ 上某个 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A)$ 所对应的 G-分次 (A, A)-双模，则显然， $Q \simeq P$ 是 $\mathcal{C}$ 上的 G-分次 $(A, \mathcal{C})$-双模。

反过来, G-分次 $(A, \mathcal{C})$-双模的一个同构。考虑 k-代数同构

$$f^* : \mathrm{Hom}_A({}_A\tilde{P}, {}_A\tilde{P}) \to \mathrm{Hom}_A({}_A\tilde{Q}, {}_A\tilde{Q}), \qquad f^*(\rho) = f \circ \rho \circ f^{-1}.$$

$\tilde{\ }$由于 P 是一个可逆的 (A, A)-双模，$\mathrm{Hom}_A(P, P)$ 中的任意元素都可以唯一地写成

$$\rho_{\tilde{P},a} : \tilde{P} \to \tilde{P}, \qquad \rho_{\tilde{P},a}(x) = xa,$$

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$对所有 $x \in P$，其中 $a \in A$。类似地，$\mathrm{Hom}_A(Q, Q)$ 中的任意元素都可唯一表示为

$$\rho_{\tilde{Q},a} : \tilde{Q} \to \tilde{Q}, \qquad \rho_{\tilde{Q},a}(y) = ya,$$

$\tilde{\ }$对所有 $y \in Q$，其中 $a \in A$。令 $a \in A$，并令 $a' \in A$ 满足 $f^*(\rho_{\tilde{P},a}) = \rho_{\tilde{Q},a'}$。我们定义 e

$$\alpha : A \to A, \qquad \alpha(a) = a',$$

因此 α 是与 f^* 对应的 k-代数自同构。这意味着 $(f \circ \rho_{\tilde{P},a} \circ f^{-1})(y) = \rho_{\tilde{Q},\alpha(a)}(y)$,$\tilde{\ }$对所有 $y \in Q$，也就是说

$$(*) \qquad f(xa) = f(x)\alpha(a),$$

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$对所有 $x \in P$。在 $(*)$ 中，令 $x \in P_h$ 和 $a \in A_g$，其中 $h, g \in G$。那么 $f(x) \in Q_h$ 且 $f(xa) \in Q_{hg}$，所以必有 $\alpha(a) \in A_g$，因此 α 是保分次的。根据 $(*)$ 以及关于 f 的假设，对于任意 $c \in \mathcal{C}$，我们有

$$f(x)c = f(xc) = f(x)\alpha(c),$$

对所有 $x \in \tilde{P}$，因此对所有 $y \in \tilde{Q}$， $yc = y\alpha(c)$。由此可得，对所有 $c \in \mathcal{C}$， $\alpha(c) = c$，因此 $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(A)$。

$\tilde{\ }$ $\tilde{\ }$于是，等式（$*$）意味着 f: $P \to Q_\alpha$ 是一个在 $\mathcal{C}$ 上的 G-分次（A, A）-双模同构。□

˜ ˜ ˜3.6. 假设 P是一个左 B-模。记 $P:=A\otimes_B P$，于是 P是一个 G-分次（A, $\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$）-双模。我们˜由 [8, 引理 3.1], 可知，存在一个 k-代数映射，从 $\mathcal{C}\to$ 到 $\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$。通过标量限制，我们可以将 $P:=P_H=A_H\otimes_B P$视为一个 H-分次（$\mathcal{C}$,$\mathcal{C}$）-双模，其单位分量为 P。

因此，我们可以引入由满足条件 $cp=pc$（对所有 $c\in\mathcal{C}$、 $p\in P$）的可逆（B， B）-双模 P 的同构类构成的群 $\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}}(B)$。

注意，在 $A_H\otimes_B P$ 上还存在其他 H-分次的（A_H， $\mathcal{C}$）-双模结构，这将在定理 4.2 的证明中使用。

如果我们从 $\mathcal{Z}$ 上的一个（B， B）-双模出发，就得到以下同构；这些同构分别与 [8,命题 4.1] 和 [9, 命题 3.8] 相关。

命题 3.7. 存在 G/H-等变同构

$$\mathrm{Picent}(B)\simeq\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}}(B)\simeq\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A_H).$$

证明。设 $[P]\in$Picent(B)，则 P 是 $\mathcal{Z}$ 上的一个（B， B）-双模。按照 3.6，我们将 ˆ$P:=A_H\otimes_B P$ 视为一个 H-分次的 ˆ（A_H， $\mathcal{C}$）-双模。于是，在 P 上存在唯一的 H-分次（A_H， A_H）-双模结构，该结构定义如下：设 g、 $h\in H$、 $a_g\in A_g$、 $a_h\in A_h$ 和 $p\in P$。由于 $\mathcal{C}$ 是一个交叉积，我们可以写成 $a_h=c_hb$，其中 $c_h\in\mathcal{C}_h\cap$U($\mathcal{C}$) 且 $b\in B$。我们定义

$$(a_g\otimes_B p)\cdot a_h=(a_g\otimes_B p)\cdot c_hb:=a_gc_h\otimes_B pb.$$

这是良定义的。事实上，若 $a_h=c'_hb'$，其中 $c'_h\in\mathcal{C}_h\cap$U($\mathcal{C}$) 且 $b'\in B$，则存在 $z\in Z$ 使得 $c'_h=c_hz$。由 $a_h=c'_hb'=c_hb$，我们得到 $zb'=b$。现在，我们有

$$\begin{aligned}a_gc'_h\otimes_B pb' &= a_gc_hz\otimes_B pb'\\ &= a_gc_h\otimes_B zpb'\\ &= a_gc_h\otimes_B pzb' \qquad (\text{since } P \text{ is over } \mathcal{Z})\\ &= a_gc_h\otimes_B pb.\end{aligned}$$

事实上，ˆP 是 $\mathcal{C}$ 上的一个 H-分次 (A_H,A_H)-双模。事实上，设 g、 $h\in H$、 $a_g\in A_g$、 $c_h\in\mathcal{C}_h$ 和 $p\in P$。由于$\mathcal{C}$ 是交叉积，我们可以写成 $c_h=u_hb$，其中 $u_h\in\mathcal{C}_h\cap$U($\mathcal{C}$) 且 $b\in B$。注意，由于 $c_h\in\mathcal{C}_h$ 且 $u_h\in\mathcal{C}_h\cap$U($\mathcal{C}$)，显然有 $b\in\mathcal{Z}$。我们有

$$\begin{aligned}(a_g\otimes_B p)c_h &= (a_g\otimes_B p)u_hb\\ &= a_gu_h\otimes_B pb\\ &= a_gu_h\otimes_B bp \qquad (\text{since } P \text{ is over } \mathcal{Z})\\ &= a_gu_hb\otimes_B p\\ &= a_gc_h\otimes_B p\\ &= {}^gc_ha_g\otimes_B p \qquad (\text{since } A \text{ is over } \mathcal{C})\\ &= {}^gc_h(a_g\otimes_B p).\end{aligned}$$

由于 P 在 $\mathcal{Z}$ 上诱导了 B 的一个Morita自等价，根据定理 3.3], ，我们有 ˆP 在 $\mathcal{C}$ 上诱导了 A_H 的一个 H-分次 Morita自等价。注意，根据 P 的构造，对于所有 $p\in P$ 和 $c\in\mathcal{C}$，我们得到 $pc=cp$。这给出了同构 Picent(B) $\simeq$ Pic$_{\mathcal{C}}$(B)。

ˆ若 $f\colon P\to Q$ 是 (B,B)-双模的同构，则 $f:=A_H\otimes_B f\colon A_H\otimes_B P\to A_H\otimes_B Q$ 是 H-分次 (A_H,B)-双模的同构，并且容易看出，它实际上是 H-分次 (A_H,A_H)-双模的同构。由此可得，映射

$$\mathrm{Pic}_{\mathcal{C}}(B)\to\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A_H),\qquad [P]\mapsto[\hat{P}]$$

是良定义的，并且 它是一个双射，其逆映射为 $[\,\hat{}P]\mapsto[\,\hat{}P_1]$。由 [9, 命题 2.11 (1)]，我们可得 at 这个映射是一个群同 构。

群 G通过定义 ${}^g[P]=[A_g\otimes_B P\otimes_B A_{g^{-1}}]$作用于 Pic$_k$($B$)、Picent($B$) 和 Pic$_{\mathcal{C}}$($B$)。上述论证表明， H 在 Pic$_{\mathcal{C}}$(B) 上平凡作用，因此 G/H 作用于 Pic$_{\mathcal{C}}$(B)。类似地， G/H 通过定义作用于 Picent^{gr}(A_H)

$${}^{gH}[\hat{P}]:=[A_{gH}\otimes_{A_H}\hat{P}\otimes_{A_H}A_{g^{-1}H}].$$

但是， $A_{gH}\otimes_{A_H}\hat{}P\otimes_{A_H}A_{g^{-1}H}\simeq A_H\otimes_B(A_g\otimes_B P\otimes_B A_{g^{-1}})$ 是 H-分次的（A_H,A_H）-双模，因此陈述中的同构是 G/H-等变的。□

3.8. 我们将 Aut$^{\mathrm{gr}}_{kG}(\mathcal{C})$ 记为所有保持分次且同时为G-代数映射的 k-线性自同构组成的集合。

命题 3.9. 存在一个群正合列:

$$1\longrightarrow\mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)\longrightarrow\mathrm{Pic}^{\mathrm{gr}}_k(A)\xrightarrow{\tilde{\sigma}}\mathrm{Aut}^{\mathrm{gr}}_{kG}(\mathcal{C}),$$

˜其中， $\tilde{\sigma}([P])=\tilde{\sigma}_{\hat{P}}\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$是 H-分次 G-作用代数的一个自同构，由 $\tilde{\sigma}_{\hat{P}}(c)p=pc$对˜所有 $p\in P:=P_1$ 和 $c\in\mathcal{C}$确定。

证明。设 $[\tilde{P}] \in \mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$。我们定义一个映射 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 如下。我们知道 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_H$，因此令 $h \in H$ 和 $c \in \mathcal{C}_h$。回忆一下，G-分次 A-模 M 的 h-悬挂定义为 G-分次 A-模 $M(h) = \bigoplus_{g\in G} M(h)_g$，其中 $M(h)_g = M_{gh}$。左乘 $\lambda_c\colon P \to P_h$ 是 B-线性的，因此

$$A \otimes_B \lambda_c : \tilde{P} \simeq A \otimes_B P \to \tilde{P}(h) \simeq A \otimes_B \tilde{P}_h$$

是一个保分次的 A-线性映射。由于 P 是一个可逆的 (A, A)-双模，因此存在唯一的 $a \in A$，使得 $A \otimes_B \lambda_c = \tilde{\rho}_a$，其中 $\tilde{\rho}_a\colon P \to P$ 表示由 a 右乘。由于 $A \otimes_B \lambda_c\colon P \to P(h)$ 是保分次的，因此可得 $a \in A_h$。注意，等式 $A \otimes_B \lambda_c = \tilde{\rho}_a$ 等价于 $cp = pa$，对所有 $p \in P$ 均成立。现在，对所有 $b \in B$，

$$p(ab) = (pa)b = (cp)b = c(pb) = (pb)a = p(ba).$$

这意味着 $\tilde{\rho}_{ab} = \tilde{\rho}_{ba}$，因此对所有 $b \in B$，都有 $ab = ba$，也就是说 $a \in \mathcal{C}_h$。

通过类似的论证，元素 $c \in \mathcal{C}$ 确定了唯一的元素 $a \in A$，使得 $\rho_c \otimes_B A = \lambda_a$，其中 $\lambda_a\colon P \to P$ 表示由 a 左乘。因此，我们得到一个保分次双射 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，并选择记号使得对所有 $p \in P$ 和 $c \in \mathcal{C}$，均有 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}(c)p = pc$。

令 $f\colon P \to P'$ 是 G-分次 (A, A)-双模的同构，且 $c \in \mathcal{C}$。令 $a \in A$ 为唯一满足 $ap = pc$ 的元素，对所有 $p \in P$ 成立；并令 $a' \in A$ 为唯一满足 $a'p' = p'c$ 的元素，对所有 $p' \in P' := P_1'$ 成立。我们得到 $f(ap) = f(pc)$，因此 $af(p) = f(p)c$，对所有 $p \in P$ 成立。由于 f 是保分次且满射的，我们得到 $ap' = p'c$，对所有 $p' \in P'$ 成立。但 $a' \in A'$ 是满足此性质的唯一元素，因此 $a = a'$。这意味着 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}$ 仅取决于类 $[P]$，而与 $\tilde{P}$ 无关。我们还有 $\tilde{\sigma}_A$ 是 $\mathcal{C}$ 的恒等映射。

根据构造，显然有 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个 k-代数映射。此外，取上述的 p、c 和 a，对于所有 $g \in G$，我们有

$$\begin{aligned} u_g c u_g^{-1} p &= u_g c u_g^{-1} p u_g u_g^{-1} \\ &= u_g u_g^{-1} p u_g a u_g^{-1} \\ &= p u_g a u_g^{-1}. \end{aligned}$$

这表明 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}({}^g c) = {}^g\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}(c)$，因此 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}$ 是一个 G-代数映射。

为证明 $\tilde{\sigma}\colon \mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A) \to \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$ 是一个群同态，取 $[\tilde{P}]$、$[\tilde{Q}] \in \mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A)$。我们知道映射

$$P \otimes_B Q \to (\tilde{P} \otimes_A \tilde{Q})_1, \qquad p \otimes_B q \mapsto p \otimes_A q$$

是 $\Delta(A \otimes_k A^{\mathrm{op}})$-模的一个同构（见 [7, 引理 1.6.6 a)]）。于是，对于任意 $p \in P := P_1$、$q \in Q := Q_1$ 以及 $c \in \mathcal{C}$，我们有：

$$\begin{aligned} (p \otimes_A q)c &= p \otimes_A qc \\ &= p \otimes_A \tilde{\sigma}_{\tilde{Q}}(c)q \\ &= p\tilde{\sigma}_{\tilde{Q}}(c) \otimes_A q \\ &= \tilde{\sigma}_{\tilde{P}}(\tilde{\sigma}_{\tilde{Q}}(c))p \otimes_A q \\ &= (\tilde{\sigma}_{\tilde{P}} \circ \tilde{\sigma}_{\tilde{Q}})(c)(p \otimes_A q), \end{aligned}$$

因此 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}\otimes_A \tilde{Q}} = \tilde{\sigma}_{\tilde{P}} \circ \tilde{\sigma}_{\tilde{Q}}$。

最后，我们看到 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，也就是说，对于所有 $c \in \mathcal{C}$ 和 $p \in P$，$cp = pc$，这意味着 $P \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$。□

注 3.10。特别地，在命题 3.9 中取 $G = 1$，可得 $\mathrm{Pic}_k(B)$ 通过 $\sigma_P(z)p = pz$ 作用于 $\mathcal{Z}$，对所有 $p \in P$ 和 $z \in \mathcal{Z}$ 均成立。由于映射 $G \to \mathrm{Pic}_k(B)$，$g \mapsto [A_g]$ 是群同态，因此可得 G 作用于 $\mathcal{Z}$，且 ${}^g z$ 对所有 $z \in \mathcal{Z}$、$g \in G$ 和 $a_g \in A_g$ 都由 $a_g z = {}^g z a_g$ 定义。

此外，我们还可以由命题 3.9 推导出 2.2 中给出的 G 对 $\mathcal{C}$ 的作用如下。由于对于所有 g、$h \in G$，$A_g \simeq A_h$ 是左 B-模，因此我们得到 A_g 是 G-不变的投射生成元，在 B-mod 中；于是 $A \otimes_B A_g \simeq A(g)$ 是 G-分次投射生成元，在 A-mod 中。因此，映射

$$G \to \mathrm{Pic}_k^{\mathrm{gr}}(A), \qquad g \mapsto [A(g)]$$

是一个群同态。由命题 3.9 可知，G 作用于 $\mathcal{C}$，使得对所有 $c \in \mathcal{C}$、$g \in G$ 和 $a_g \in A_g$，${}^g c$ 由 $a_g c = {}^g c a_g$ 定义。

注 3.11. 若 $[P] \in \mathrm{Picent}(B)^{G/H}$，也就是说，$A_g \otimes_B P \otimes_B A_{g^{-1}} \simeq B$ 作为 (B, B)-双模，则我们还可以定义 G 对 $\mathcal{Z}$ 的另一种作用；但实际上，该作用不依赖于 P，并且与 3.10 中提到的作用一致。

该作用定义如下。将 P 视为一个 Δ_1-模，并考虑 G-分次自同态代数 $E := \mathrm{End}_\Delta(\Delta \otimes_{\Delta_1} P)^{\mathrm{op}}$. P 的 G-不变性意味着，E 是 $E_1 \simeq \mathcal{Z}$ 与 G 的交叉积，其中 $z \in \mathcal{Z}$ 与右乘 $\rho_z\colon P \to P$ 相对应。对于任意 $g \in G$，取一个同构

$$f_g : P \to A_g \otimes_B P \otimes_B A_{g^{-1}}$$

(B, B)-双模，因此 f_g 可以视为 $\mathrm{U}(E) \cap E_g$ 的一个元素。这给出了 G 通过 $(g, \rho_z) \mapsto f_g \circ \rho_z \circ f_{g^{-1}}$ 对 E_1 的作用。不难证明 $f_g \circ \rho_z \circ f_{g^{-1}} = \rho_{{}^g z}\colon P \to P$，因此这两个作用一致。

4. The exact sequence

现在我们可以陈述本文的主要结果。我们的第一个定理是 Beattie-del R´ıo 正合列 [1] 的 Picent 版本。我们在此改编了 [6] 中的证明。

定理 4.1. 存在一个群正合列:

$$1 \longrightarrow \mathrm{H}^1(G/H, Z) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A) \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Picent}(B)^{G/H} \xrightarrow{\Theta} \mathrm{H}^2(G/H, Z).$$

证明。第一步。群同态 Ψ: Picent$^{\mathrm{gr}}(A) \to$Picent$(B)^{G/H}$。令 $[\tilde{P}] \in$Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$, 则 $\tilde{P}$是 ˜(A, A) 上的双模。根据 [9, 定理 3.3], , P的单位分量 P是 G-不变的 (B, B) 上的双模, 因此 $[P] \in$Picent$(B)^{G/H}$, 于是我们定义 $\Psi([\tilde{P}]) = [P]$。显然这是一个良定义映射。若 $[\tilde{P}], [\tilde{Q}] \in$ ˜Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$, 则根据 [9, 命题 2.11], , 有 $(P \otimes_A Q)_1 \simeq P \otimes_B Q$, 因此 Ψ 是一个群同态。

步骤 2. 群同态 $\Phi : \mathrm{H}^1(G/H, Z) \to$ Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$。考虑典范的 Δ-模 $P = B$, 其中 $\Delta = \Delta(A \otimes_k A^{\mathrm{op}})$, 并令 $E :=$ End$_\Delta(\Delta \otimes_{\Delta_1} P)^{\mathrm{op}}$。根据 Dade 定理（参见 [4, 第 2] 节或 [7, 定理 3.1.1]） , Δ-模结构的同构类与 hU(E) 的 Z-共轭类的分裂之间存在双射。与 P 对应的分裂 μ: $G \to$ hU(E) 是由乘法映射 μ_g: $A_{g^{-1}} \otimes_B P \otimes_B A_g \to P$, $g \in G$ 诱导的。此外, P 是 G-分次的 (A, A)-双模 。 ˙$P := A$ 的单位分量, 因此 $[P]$ 是 Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$ 的单位元。

众所周知 H$^1(G, Z)$ 与 Z-共轭类之间存在一个双射, 该共轭类由 hU(E 的分裂构成), 由 $[\gamma] \mapsto \bar{\gamma}$ 给出: $G \to$ hU(E), 其中 $\bar{\gamma}(g) = \gamma(g)\mu(g)$, 对所有 $g \in G$ 以及所有 $\gamma \in$ Z$^1(G, Z)$ 均成立。

我们还可如下得到 H$^1(G, Z)$ 与 Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$ 之间的一个单射。记 P^γ 为扩张 P 的 Δ-模˜, 其对应于 $[\gamma]$。于是, $P^\gamma = (A \otimes_k A^{\mathrm{op}}) \otimes_\Delta P^\gamma$ 表示 Pic$_k^{\mathrm{gr}}(A)$ 中的一个类。显然, $\tilde{P}^\gamma$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个 G-分次 (A, A)-双模, 当且仅当 $\tilde{P}^\gamma_H = A_H$。这当且仅当对所有 $h \in H$, $\tilde{\gamma}(h) = \mu(h)$, 或者等价地, γ 限制到 H 后是平凡的。根据 2.4, 我们可以将 $[\gamma] \in$ 视为 H$^1(G/H, Z)$, 并且在˜这种情况下, $[P^\gamma] \in$ Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$。

由于 $P^\gamma \otimes_B P^\delta \simeq P^{\gamma\delta}$是 Δ-模, 对于所有 $\gamma, \delta \in$Z$^1(G/H, Z)$, 我们得出 Φ: $[\gamma] \mapsto [\tilde{P}^\gamma]$ 是良定义的单射群同态。

步骤 3. 在 Picent˜$^{\mathrm{gr}}(A)$ 处的正合性。由 Φ 和 Ψ 的定义可知, 类 [˜, 当且仅当 P的单位分量 P与 B作为 (B, B)-双模同构; 这又当且仅当 $[P]$属于 Ker Ψ。

步骤 4. 群同态 Θ: Picent$(B)^{G/H} \to$H$^2(G/H, Z)$。设 $[P] \in$Picent$(B)^{G/H}$, 则 P是 G-不变的 $\mathcal{Z}$上的 (B, B)-双模。令 $\Delta = \Delta($ $A \otimes_k A^{\mathrm{op}})$。根据命题 3.7, P可扩张为一个 Δ_H-模, 且此 Δ_H-模也是 G/H-不变的。我们将 Δ视为一个 G/H-分次代数, 其单位分量为 Δ_H。

˙考虑 G/H-分次自同态代数 $E = \mathrm{End}_\Delta(\Delta \otimes_{\Delta_H} P)^{\mathrm{op}}$, 其单位分量为 $E_1 \simeq \mathcal{Z}$。由 P 的 ˙G/H-不变性可知, E 实际上是 $\mathcal{Z}$ 与 G/H 的交叉积。令 $\Theta([P])$ 为与下列扩张相关联的 H$^2(G/H, Z)$ 中的元素:

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \mathrm{hU}(E) \longrightarrow G/H \longrightarrow 1.$$

显然, Θ 是良定义映射。为证明 Θ 是群同态, 取 $[P], [Q] \in$Picent$(B)^{G/H}$。我们将 P 和 Q 视为 G/H-不变的 Δ_H-模, 并令

$$\alpha_{gH} : P \to \Delta_{gH} \otimes_{\Delta_H} P, \qquad \beta_{gH} : Q \to \Delta_{gH} \otimes_{\Delta_H} Q$$

为同构 , 对所有 $gH \in G/H$, 它们都是 Δ_H-模的同构。注意, $P \otimes_B Q$ 也是一个 Δ_H-模, 并且

$$\Delta_{gH} \otimes_{\Delta_H} (P \otimes_B Q) \simeq (\Delta_{gH} \otimes_{\Delta_H} P) \otimes_B (\Delta_{gH} \otimes_{\Delta_H} Q),$$

作为 Δ_H-模。于是我们有以下 Δ_H-同构

$$\gamma_{gH} := \alpha_{gH} \otimes_B \beta_{gH} : P \otimes_B Q \to \Delta_{gH} \otimes_{\Delta_H} (P \otimes_B Q).$$

其中有 $\Theta([P]) = [\alpha]$ 和 $\Theta([Q]) = [\beta]$, 其中

$$\alpha(gH, g'H) = \alpha_{gH}\alpha_{g'H}\alpha^{-1}_{gg'H} \qquad \text{and} \qquad \beta(gH, g'H) = \beta_{gH}\beta_{g'H}\beta^{-1}_{gg'H}.$$

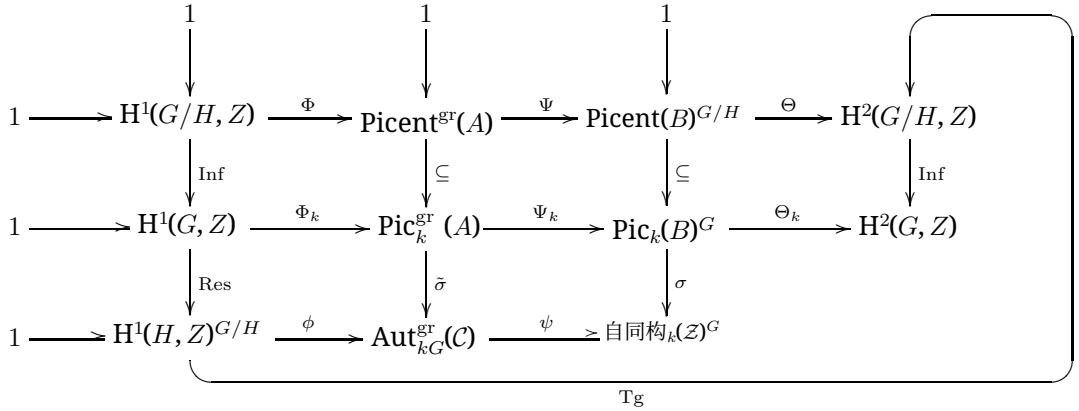
我们得到

$$\begin{aligned}
(p \otimes q)\gamma(gH, g'H) &= (p \otimes q)\gamma_{gH}\gamma_{g'H}\gamma^{-1}_{gg'H} \\
&= (p \otimes q)(\alpha_{gH} \otimes \beta_{gH})(\alpha_{g'H} \otimes \beta_{g'H})(\alpha^{-1}_{gg'H} \otimes \beta^{-1}_{gg'H}) \\
&= (p)\alpha_{gH}\alpha_{g'H}\alpha^{-1}_{gg'H} \otimes (q)\beta_{gH}\beta_{g'H}\beta^{-1}_{gg'H} \\
&= p \cdot \alpha(gH, g'H) \otimes q \cdot \beta(gH, g'H) \\
&= p \otimes q \cdot \alpha(gH, g'H)\beta(gH, g'H),
\end{aligned}$$

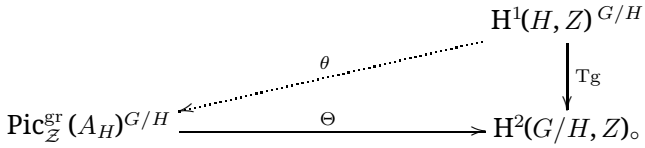
对于所有 gH、 $g'H \in G/H$。由此可得 $\Theta([P] \cdot [Q]) = \Theta([P]) \cdot \Theta([Q])$。

步骤 5. Picent$(B)^{G/H}$ 处的正合性。设 $[P] \in$Picent$(B)^{G/H}$。根据 Dade 定理 [4, 定理 2.8], 当且仅当 P 可扩张为一个 Δ- 模时, $\Theta([P])$ 是平凡的; 在我们的情形下, 这一条件成立。根据 [9, 定理 3.3], , 这等价于存在一个类 $[P] \in$Picent$^{\mathrm{gr}}(A)$, 使得 $[P] = \Psi([P])$。□

定理 4.2. 1）下图中具有正合行与列的方块均为交换图：



2) 存在一个群同态 $\theta\colon \mathrm{H}^1(H,Z)^{G/H} \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{gr}}(A_H)^{G/H}$，使得下图交换。



证明。1) 根据定理 4.1，图中的第一行成立；第二行是 Beattie 和 del R´ıo 在 [1] 中得到的结果（ [6] 处给出了直接证明）。我们考虑第三行。

步骤 1：映射 $\phi\colon \mathrm{H}^1(H,Z)^{G/H} \to \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$。由 2.4 可知，$\mathrm{H}^1(H,Z) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H,Z)$。考虑$\beta \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H,Z)^{G/H}$。我们定义

$$f_\beta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \qquad f_\beta(c_h) = \beta(h)c_h,$$

对所有 $h \in H$, $c_h \in \mathcal{C}_h$。此映射是良定义的。事实上，对所有 $b \in B$，我们有：

$$\beta(h)c_h b = \beta(h)bc_h = b\beta(h)c_h,$$

因此我们有 $\beta(h)c_h \in \mathsf{C}_A(B)$。显然，$\beta(h)c_h \in \mathsf{C}_A(B)_h$，因此，也由于 $h \in H$，我们得到$\beta(h)c_h \in \mathcal{C}_h$。注意，$f_\beta$ 是 k-线性的、保分次的，并且 f_β 的逆映射是映射 $c_h \mapsto (\beta(h))^{-1}c_h$。此外，对所有 $h_1, h_2 \in H$, $c_{h_1} \in \mathcal{C}_{h_1}$, $c_{h_2} \in \mathcal{C}_{h_2}$，我们有：

$$\begin{aligned} f_\beta(c_{h_1}c_{h_2}) &= \beta(h_1h_2)c_{h_1}c_{h_2} \\ &= \beta(h_1)\beta(h_2)c_{h_1}c_{h_2} \\ &= \beta(h_1)c_{h_1}\beta(h_2)c_{h_2}, \\ &= f_\beta(c_{h_1})f_\beta(c_{h_2}), \end{aligned}$$

因此 $f_\beta \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$。

由于 $\beta \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H,Z)^{G/H}$，我们有 β是 G/H-不变的，即对于所有 $g \in G$，${}^g\beta = \beta$，这意味着对于所有 $g \in G, h \in H$，$({}^g\beta)(h) = \beta(h)$，也就是说，对于所有 $g \in G, h \in H$，${}^g(\beta({}^{g^{-1}}h)) = \beta(h)$。我们有：

$$\begin{aligned} {}^g(f_\beta(c_h)) &= u_g f_\beta(c_h)u_g^{-1} \\ &= u_g\beta(h)c_h u_g^{-1} \\ &= u_g\beta(g^{-1}ghg^{-1}g)u_g^{-1}u_g c_h u_g^{-1} \\ &= {}^g(\beta({}^{g^{-1}}(ghg^{-1})))u_g^{-1}u_g c_h u_g^{-1} \\ &= \beta(ghg^{-1})u_g c_h u_g^{-1} \\ &= f_\beta(u_g c_h u_g^{-1}) \\ &= f_\beta({}^g c_h), \end{aligned}$$

对所有 $g \in G, h \in H, c_h \in \mathcal{C}_h$ 均成立。因此得出 $f_\beta \in \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$。

如上所述，我们定义 $\phi\colon \mathrm{H}^1(H,Z)^{G/H} \to \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$，使得 $\phi(\beta) = f_\beta$。我们证明 ϕ 是群同态。事实上，若 $\beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H,Z)^{G/H}$, $h \in H$和 $c_h \in \mathcal{C}_h$，则有：

$$\begin{aligned} \phi(\beta_1\beta_2)(c_h) &= f_{\beta_1\beta_2}(c_h) \\ &= (\beta_1\beta_2)(h)c_h \\ &= \beta_1(h)\beta_2(h)c_h \\ &= \beta_1(h)f_{\beta_2}(c_h) \\ &= f_{\beta_1}(f_{\beta_2}(c_h)) \\ &= (f_{\beta_1} \circ f_{\beta_2})(c_h) \\ &= (\phi(\beta_1) \circ \phi(\beta_2))(c_h). \end{aligned}$$

也很容易看出， ϕ 是单射。

步骤 2：映射 $\psi : \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})^G$。显然，对于 $f \in \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$， $f_1 \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})$。我们证明 $f_1 \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})^G$。首先，回顾一下，因为 G 作用于 $\mathcal{Z}$，所以 G 通过 $({}^g\alpha)(z) = {}^g(\alpha({}^{g^{-1}}z))$ 作用于 $\mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})$，对所有 $z \in \mathcal{Z}$, $g \in G$, $\alpha \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})$ 均成立。其次，因为 $f \in \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$，所以对于所有 $g \in G$, $c \in \mathcal{C}$，有$f({}^gc) = {}^g(f(c))$。这意味着，对于所有 $g \in G$, $z \in \mathcal{Z}$，有 $f({}^gz) = {}^g(f(z))$；而由于 G作用于 $\mathcal{Z}$，我们得到对于所有 $g \in G$, $z \in \mathcal{Z}$，有 $f_1({}^gz) = {}^g(f_1(z))$，进而对于所有 $g \in G$, $z \in \mathcal{Z}$，有 $f_1({}^{g^{-1}}z) = {}^{g^{-1}}(f_1(z))$。通过与 g 共轭，我们得到对于所有 $g \in G$, $z \in \mathcal{Z}$，有 $({}^gf_1)(z) = f_1(z)$。由此可得 $f_1 \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})^G$。

因此，我们定义 $\psi : \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})^G$, $\psi = (-)_1$。由于这一构造是函子性的，显然ψ 是一个群同态。

步骤 3：$\mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$ 处的正合性。我们要证明 $\mathrm{Im}\ \phi = \mathrm{Ker}\ \psi$。对于 $\mathrm{Im}\ \phi \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$，考虑 $\beta \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H, Z)^{G/H}$。由于 $Z = \mathrm{U}(\mathcal{Z})$，显然有 $\beta(1_G) = 1_A$，因此对所有 $z \in \mathcal{Z} = \mathcal{C}_1$，都有 $f_\beta(z) = z$，这意味着 $f_\beta \in \mathrm{Ker}\,\psi$。

反过来，考虑满足 $f(z) = z$（对所有 $z \in \mathcal{Z}$）的 $f \in \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C})$。我们定义 $\beta\colon H \to Z$, $\beta(h) = u_h^{-1}f(u_h)$，其中 $u_h \in \mathcal{C}_h \cap \mathrm{hU}(A)$，对所有 $h \in H$均成立。由于 f 保持分次和可逆性， β 是良定义的。我们证明 β 不依赖于可逆齐次元 $u_h \in \mathcal{C}_h \cap \mathrm{hU}(A)$、 $h \in H$ 的选取。事实上，若$v_h \in \mathcal{C}_h \cap \mathrm{hU}(A)$，则存在 $b \in Z = \mathrm{U}(\mathcal{Z})$ 使得 $v_h = bu_h$。我们有

$$v_h^{-1}f(v_h) \;=\; u_h^{-1}b^{-1}f(bu_h) \;=\; u_h^{-1}b^{-1}f(b)f(u_h),$$

但 $f(b) = b$，所以该断言得证。此外， β是群同态。事实上，对于 $h_1, h_2 \in H$ 和 $u_{h_1}, u_{h_2} \in \mathcal{C}_h \cap \mathrm{hU}(A)$，我们有：

$$\beta(h_1h_2) \;=\; (u_{h_1}u_{h_2})^{-1}f(u_{h_1}u_{h_2}) \;=\; u_{h_2}^{-1}u_{h_1}^{-1}f(u_{h_1})f(u_{h_2}),$$

因此 $u_{h_1}^{-1}f(u_{h_1}) \in B$，又因为 $u_{h_2}^{-1} \in \mathcal{C}_h \cap \mathrm{hU}(A)$，我们得到：

$$\beta(h_1h_2) \;=\; u_{h_1}^{-1}f(u_{h_1})u_{h_2}^{-1}f(u_{h_2}) \;=\; \beta(h_1)\beta(h_2).$$

最后，对于 $g \in G$, $h \in H$, $u_g \in A_g \cap \mathrm{hU}(A)$ 和 $u_h \in \mathcal{C}_h \cap \mathrm{hU}(A)$，我们有：

$$\begin{aligned}
({}^g\beta)(h) &= {}^g(\beta({}^{g^{-1}}h)) \\
&= u_g\beta(g^{-1}hg)u_g^{-1} \\
&= u_g(u_g^{-1}u_hu_g)^{-1}f(u_g^{-1}u_hu_g)u_g^{-1},\ \text{since } u_g^{-1}u_hu_g \in \mathcal{C}_{g^{-1}hg} \cap \mathrm{hU}(\mathcal{C}) \\
&= u_gu_g^{-1}u_h^{-1}u_gf(u_g^{-1}u_hu_g)u_g^{-1} \\
&= u_h^{-1}u_gf(u_g^{-1}u_hu_g)u_g^{-1} \\
&= u_h^{-1} \cdot {}^g(f(u_g^{-1}u_hu_g)) \\
&= u_h^{-1}f({}^g(u_g^{-1}u_hu_g)),\ \text{since } f \in \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C}) \\
&= u_h^{-1}f(u_g(u_g^{-1}u_hu_g)u_g^{-1}) \\
&= u_h^{-1}f(u_h) \\
&= \beta(h),
\end{aligned}$$

因此 β是 G-不变的。综上，这些结果证明 $\beta \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Grp}}(H, Z)^{G/H}$。对于 $h \in H$和 $c_h \in \mathcal{C}_h$，我们有

$$\begin{aligned}
\phi(\beta)(c_h) &= f_\beta(c_h) \\
&= \beta(h)c_h \\
&= u_h^{-1}f(u_h)c_h \\
&= u_h^{-1}f(u_h)u_hu_h^{-1}c_h \\
&= {}^{h^{-1}}f(u_h)u_h^{-1}c_h \\
&= f({}^{h^{-1}}u_h)u_h^{-1}c_h,\ \text{since } f \in \mathrm{Aut}_{kG}^{\mathrm{gr}}(\mathcal{C}) \\
&= f(u_h^{-1}u_hu_h)u_h^{-1}tc_h \\
&= f(u_h)u_h^{-1}c_h \\
&= f(u_h)f(u_h^{-1}c_h),\ \text{since } u_h^{-1}c_h \in \mathcal{Z} \\
&= f(u_hu_h^{-1}c_h) \\
&= f(c_h),
\end{aligned}$$

因此 $\phi(\beta) = f$，这表明 $f \in \mathrm{Im}\ \phi$。

第一列和最后一列由五项正合列 2.4 给出，第二列由命题 3.9 给出。对于第三列，由 [11, 定理 37.18], 我们得到正合列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Picent}(B) \xrightarrow{\subseteq} \mathrm{Pic}_k(B) \xrightarrow{\bar{\sigma}} \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z}),$$

其中 $\bar{\sigma}([P]) = \sigma_P\colon \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$是 k-代数的一个自同构，由 $\sigma_P(z)p = pz$ 对所有 $p \in P$ 和 $z \in \mathcal{Z}$ 确定。

注意，对于所有 $g \in G$，${}^g\sigma_P = \sigma_{{}^gP}$。事实上，若 $g \in G, u_g \in \mathrm{hU}(A) \cap A_g, p \in P$ 且 $z \in \mathcal{Z}$，则有：

$$\begin{aligned}
({}^g\sigma_P)(z)(u_g \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1}) &= {}^g(\sigma_P({}^{g^{-1}}z))(u_g \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1}) \\
&= u_g\sigma_P(u_g^{-1}zu_g)u_g^{-1}(u_g \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1}) \\
&= u_g\sigma_P(u_g^{-1}zu_g)u_g^{-1}u_g \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1} \\
&= u_g\sigma_P(u_g^{-1}zu_g) \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1} \\
&= u_g \otimes_B \sigma_P(u_g^{-1}zu_g)p \otimes_B u_g^{-1}, \text{ since } \sigma_P(u_g^{-1}zu_g) \in \mathcal{Z} \\
&= u_g \otimes_B p(u_g^{-1}zu_g) \otimes_B u_g^{-1} \\
&= u_g \otimes_B p \otimes_B (u_g^{-1}zu_g)u_g^{-1} \\
&= u_g \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1}z \\
&= (u_g \otimes_B p \otimes_B u_g^{-1})z,
\end{aligned}$$

这就证明了该断言。这意味着，如果 $[P] \in \mathrm{Pic}_k(B)^G$，即对于所有 $g \in G$，都有 $[P] = {}^g[P]$；那么对于所有 $g \in G$，都有 ${}^g\sigma_P = \sigma_P$，因此 $\sigma_P \in \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})^G$。因此，我们定义 $\sigma:\ \mathrm{Pic}_k(B)^G \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{Z})^G$ 为 $\bar{\sigma}$ 在 $\mathrm{Pic}_k(B)^G$ 上的限制。显然，我们有 $\mathrm{Picent}(B)^{G/H} \subseteq \mathrm{Pic}_k(B)^G$，并且显然新序列在 $\mathrm{Pic}_k(B)^G$ 处正合。

根据映射 Φ、Ψ、ψ 和 Θ 的定义，很容易看出，由前两行构成的方块以及右下方的方块是交换的。根据 Φ_k 的定义，对于 1-余循环 $\beta:\ G \to Z$，相应的 G-分次 (A, A)-双模 $\tilde{P}$ 的单位分量为 $\tilde{P}_1 = B^\beta = B$，其中对于所有 $b \in B$、$h \in H$ 和 $c_h \in \mathcal{C}_h$，都有 $bc_h = \beta(h)c_hb$。这意味着 $\tilde{\sigma}_{\tilde{P}}(c_h) = \beta(h)c_h = \phi(\beta)(c_h)$，因此左下方的方块也是交换的。

2）回顾一下，传递映射 $\mathrm{Tg}: \mathrm{H}^1(H, Z)^{G/H} \to \mathrm{H}^2(G/H, Z)$可如下定义。对于任意$x \in G/H$，选取 $s_x \in G$，使得 $\mathrm{can}(s_x) = x$，其中 $\mathrm{can}:\ G \to G/H$ 是典范满射。令$s:\ G/H \times G/H \to H$由 $s_xs_y = s(xy)s_{xy}$定义，对所有 $x, y \in G/H$均成立。令 $\beta \in \mathrm{H}^1(H, Z)^{G/H}$，则$\beta \circ s:\ G/H \times G/H \to Z$是一个 2-余循环，且 $\mathrm{Tg}([\beta]) = [\beta \circ s] \in \mathrm{H}^2(G/H, Z)$。

我们定义群同态 $\theta: \mathrm{H}^1(H, Z)^{G/H} \to \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{gr}}(A_H)^{G/H}$。令 $P = B$；如同在 Φ的定义中，乘法 μ_g: $A_{g^{-1}} \otimes_B B \otimes_B A_g \to B$（$g \in H$），给出 $\mathrm{hU}(E_H)$的一个分裂。令 $\beta \in \mathrm{H}^1(H, Z)^{G/H}$，并用 P^β表示与 β对应的 P的 G/H-不变 Δ_H-模扩张。令 $\hat{}P^\beta = A_H \otimes_B P^\beta$，并定义 $\theta([\beta]) = [\hat{}P^\beta] \in \mathrm{Pic}_{\mathcal{Z}}^{\mathrm{gr}}(A_H)^{G/H}$。

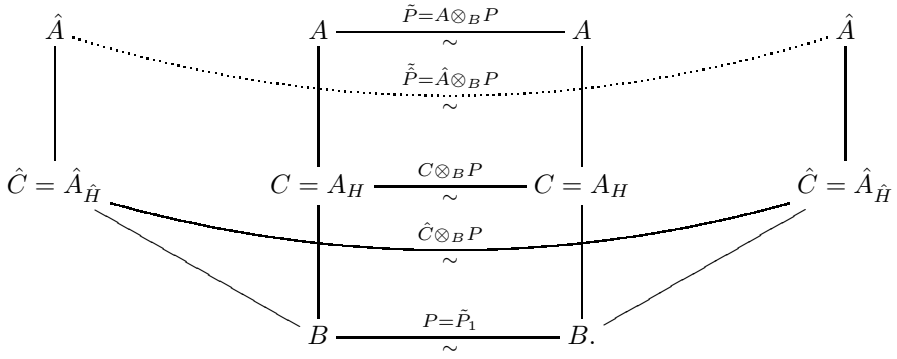
如定理 4.1 的证明中所述，考虑带 G/H分次的自同态代数 $\bar{E}^\beta = \mathrm{End}_\Delta(\Delta \otimes_{\Delta_H} P^\beta)^{\mathrm{op}}$，其单位分量为 $\mathcal{Z}$。由此得到元素 $\Theta([A_H \otimes_B P^\beta]) \in \mathrm{H}^2(G/H, Z)$，并且很容易看出$\Theta([A_H \otimes_B P^\beta]) \in \mathrm{H}^2(G/H, Z) = \mathrm{Tg}([\beta])$
. □

$\hat{}\hat{}\hat{}$ 定理 4.3. 设 G 是另一个有限群，且 A 是一个带 G分次的交叉积，其单位分量为 B。假设由共轭诱导的映射 $\varepsilon: \mathrm{hU}(A) \to \mathrm{Aut}_k(B)$ 和 $\hat{}\varepsilon: \mathrm{hU}(A) \to \mathrm{Aut}_k(B)$ 满足 $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\hat{}\varepsilon$。$\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 记 $H = G[B]$。那么 $G/H \simeq G/H$，并且存在一个同构 $\alpha: \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A) \to \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(G/H, Z) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Picent}(B)^{G/H} & \xrightarrow{\Theta} & \mathrm{H}^2(G/H, Z) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \vdots{\scriptstyle \alpha} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\
1 & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\hat{G}/\hat{H}, Z) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(\hat{A}) & \xrightarrow{\hat{\Psi}} & \mathrm{Picent}(B)^{\hat{G}/\hat{H}} & \xrightarrow{\hat{\Theta}} & \mathrm{H}^2(\hat{G}/\hat{H}, Z).
\end{array}$$

$\bar{}$证明。由 2.3 的交换图以及假设 $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\hat{}\varepsilon$，可得 $\mathrm{Im}\,\bar{\varepsilon} = \mathrm{Im}\,\hat{}\varepsilon$，因此群同构 $G/H \simeq \hat{}G/\hat{}H.$。这导出同构 $\mathrm{H}^i(G/H, Z) \simeq \mathrm{H}^i(\hat{}G/\hat{}H, Z)$，其中$i = 1$，2，我们将把这些群视为相同。

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$设 $[P] \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$，并设 P: $= P_1$，因此 $[P] = \Psi([P]) \in \mathrm{Picent}(B)$，且 $P \simeq A \otimes_B P$。考虑图表



根据命题 3.7，我们得到 $C \otimes_B P \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(C)$，且 $\hat{}\,C \otimes_B P \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(\hat{}_C$).

记作 $\hat{\Delta} = \Delta(\hat{A} \otimes \hat{A}^{\mathrm{op}})$，因此 $\hat{\Delta}_{\hat{H}} = \Delta(\hat{C} \otimes \hat{C}^{\mathrm{op}})$。根据命题 3.7，我们已知 P是一个 $\hat{\Delta}_{\hat{H}}$-$\hat{}\,\hat{}$ 模，并且需要在 P上定义一个 $\Delta(A \otimes A^{\mathrm{op}})$-模结构。设 $\mathcal{T}$为 G中 H 的陪集的完备代表集。同构 $G/H \simeq \hat{G}/\hat{H}$ 给出 $\hat{G}$ 中 $\hat{H}$ 的陪集的完备代表集，其中 $t \in \mathcal{T}$对应于$\hat{t} \in \hat{\mathcal{T}}$。此外，根据 2.3,

$$G/H \simeq \mathrm{hU}(A)/\mathrm{U}(B)\mathrm{C}_{\mathrm{hU}(A)}(B)$$

and

$$\hat{G}/\hat{H} \simeq \mathrm{hU}(\hat{A})/\mathrm{U}(B)\mathrm{C}_{\mathrm{hU}(\hat{A})}(B),$$

因此，我们可以找到可逆齐次元 $u_t \in \mathrm{hU}(A) \cap A_t$ 和 $\hat{u}_{\hat{t}} \in \mathrm{hU}(\hat{A}) \cap \hat{A}_{\hat{t}}$，使得 $\varepsilon(u_t) = \hat{\varepsilon}(\hat{u}_{\hat{t}})$。

由于 $[P] \in \mathrm{Picent}(B)^{G/H}$，我们有，对于所有 $t \in \mathcal{T}$, $u_t \otimes P \otimes u_t^{-1} \simeq P$，作为 Δ_H-模。这意味着存在一个双射 $f_t \colon P \to P$，使得该同构由 $u_t \otimes p \otimes u_t^{-1} \mapsto f_t(p)$ 给出。由于 $\varepsilon(u_t) = \hat{\varepsilon}(\hat{u}_{\hat{t}})$，我们得到映射

$$\hat{u}_{\hat{t}} \otimes P \otimes \hat{u}_{\hat{t}}^{-1} \to P, \qquad \hat{u}_{\hat{t}} \otimes p \otimes \hat{u}_{\hat{t}}^{-1} \mapsto f_t(p)$$

也是 $\hat{\Delta}_{\hat{H}}$-模的同构。因此，$[P] \in \mathrm{Picent}(B)^{\hat{G}/\hat{H}}$，而且，$\Theta([P]) = \hat{\Theta}([P])$。这一论证还表明第三个方块是交换的。

在我们的情形下，$\Theta([P]) = 1$，因此 $\hat{\Theta}([P]) = 1$。由此可知，我们可以假设元素 u_t give_为 $\mathrm{hU}(\bar{E})$ 提供一个分裂，其中 $\bar{E} = \mathrm{End}_{\Delta}(\Delta \otimes_{\Delta_H} P)^{\mathrm{op}}$，而元素 $\hat{u}_{\hat{t}}$ 为 $\mathrm{hU}(\hat{E})$ 提供一个分裂，其中$\bar{\hat{}}\,\hat{}\,\hat{E} = \mathrm{End}_{\hat{\Delta}}(\Delta \otimes_{\hat{\Delta}_{\hat{H}}} P)^{\mathrm{op}}$。根据 Dade 定理 [4, 定理 2.8]，后者在 P 上诱导出一个 Δ-模结构，$\tilde{}\,\tilde{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 因此在 $P := A \otimes_B P$ 上诱导出一个关于 $\mathcal{C}$ 的 G-分次 (A, A)-双模结构。接着，$[P] \in \mathrm{Picent}^{\mathrm{gr}}(A)$，并且我们定义$\tilde{}\quad \hat{\alpha}([P]) = [P]$。

显 l然，hat α 是良定义的群同构，并且第二个方块是交换的。根据 he 的定义，Φ也 可以得出，第一个方块也是交换的。 □

致谢。本研究获得研究、创新与数字化部资助，资助方为 CNCS/CCCDI–UEFISCDI，项目编号 PN-III-P4-ID-PCE-2020-0454，项目属于 PNCDI III。

References

[1] Beattie, M., del R´ıo, A., *The Picard group of the category of graded modules*, 《代数通讯》24（1996），4397–4414。[2] Boltje, R., Kessar, R., Linckelmann, M., *On Picard groups of blocks of finite groups*, 《代数学杂志》558（2020），70–101。[3] Dade, E. C., *Block extensions*, 《伊利诺伊数学杂志》17（1973），198-272。[4] Dade, E. C., *Extending irreducible modules*, 《代数学杂志》72（1981），374–403。[5] Eaton, C. W., Livesey, M., *Some examples of Picard groups of blocks*, 《代数学杂志》558（2020），350–370。[6] Marcus, A., *On Picard groups and graded rings*, 《代数通讯》26（1998），2211–2219。[7] Marcus, A., *Representation Theory of Group Graded Algebras*, Nova Science, 1999。[8] Marcus, A., Minut˘a, V. A., *Group graded endomorphism algebras and Morita equivalences*, 《数学》62（85）（2020），73–80。[9] Marcus, A., Minut˘a, V. A., *Character triples and equivalences over a group graded G-algebra*, 《代数学杂志》565（2021），98–127。[10] Neukirch, J., Schmidt, A., Wingberg, K., *Cohomology of Number Fields*, 第二版，数学科学基础丛书，第323卷，Springer，海德堡，2008；[11] Reiner, I., *Maximal Orders*, 伦敦数学会专著，Clarendon Press，牛津，2003。[12] Sp¨ath, B., *Reduction theorems for some global-local conjectures*, 载于 *Local Representation Theory and Simple Groups*, EMS数学讲义丛书，苏黎世，2018，23–61。[13] Weibel, C. A., *An Introduction to Homological Algebra*, 剑桥高等数学研究丛书，第38卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994。

Babes,-Bolyai University,
Faculty of Mathematics and Computer Science,
Department of Mathematics,1 Kogălniceanu Street,
400084,Cluj-Napoca, Romania

Email address: marcus@math.ubbcluj.ro
Email address: virgilius.minuta@ubbcluj.ro