arXiv:2302.10038v1 [math.AT] 20 Feb 2023

实矩角复形的 G-指标、 G-余指标和 G-权

AKATSUKI KIZU

Abstract. 实矩角复形是一个由单纯复形的组合信息定义的CW复形，并具有二维环面的标准作用。对于二维环面的每个子环面 G，我们从组合角度描述与此作用相关的不变量，即 G-指标、 G-余指标和 G-权。

1. Introduction and the main theorems

设 K 是顶点集 $[m]=\{1,\dots,m\}$上的单纯复形。若 $I\in K$，则称子集 $I\subset[m]$ 为 K 的一个面。否则，称其为K的一个非面。若子集 $I\subset[m]$ 是 K 的一个非面，且 I 的每个真子集都是 K的一个面，则称 $I\subset[m]$ 是 K 的一个极小非面。 I 的维数定义为其阶减1。若单点子集 $\{i\}\subset[m]$ 是 K的一个非面，则称其为 K的一个幽灵顶点。在本文中，我们假设每个单纯复形都没有幽灵顶点。

与 K 相关联的实矩角复形定义为$(D^1)^m$的一个子复形

$$\mathbb{R}Z_K:=\bigcup_{\sigma\in K}(D^1,S^0)^\sigma,$$

其中$(D^1,S^0)^\sigma:=\{(x_1,\dots,x_m)\in(D^1)^m\mid x_i\in S^0\text{ 当 }i\notin\sigma\}$时。正如 Davis 和 Januszkiewicz 的论文 [6]所示， $\mathbb{R}Z_K$ 是托里克拓扑中的关键对象之一，并已得到深入研究。由于 $\mathbb{R}Z_K$ 是利用 K 的组合学信息构造的，因此自然会期待 $\mathbb{R}Z_K$ 的同伦不变量能够用 K的组合学来描述。例如，Davis 和 Januszkiewicz 的论文 [6]研究了等变上同调。 [2] 研究了 $\mathbb{R}Z_K$ 为拓扑流形时的上同调环。 [11] 研究了 K 为旗时的同伦型，即 K 的每个极小非面都由两个顶点组成。 [14], 表明，通过一种称为胖楔过滤的结构， $\mathbb{R}Z_K$ 对于理解多面体积的同伦型具有重要作用；多面体积是实矩角复形的一种广义对象。

根据构造，$(\mathbb{Z}/2)^m$ 在 $\mathbb{R}Z_K$上有一个二维环面的标准作用。具体而言，对于 $g=(g_1,\dots,g_m)\in(\mathbb{Z}/2)^m$和 $x=(x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}Z_K$，我们定义

$$g\cdot x:=(g_1x_1,\dots,g_mx_m),$$

其中我们将 $\mathbb{Z}/2=\{1,-1\}$ 和 $D^1=[-1,1]$视为.....。由于 K 没有幽灵顶点，很容易看出，这个作用总不是自由作用。不过，$(\mathbb{Z}/2)^m$ 的一些子环面可能自由地作用于 $\mathbb{R}Z_K$ 上。由子环面的自由作用得到的 $\mathbb{R}Z_K$ 的商空间，称为[1], 中的部分商，已在许多背景下得到研究 [8, 9, 12]。特别是，[6] 中引入的小覆盖是部分商的一个经典例子，并且已得到深入研究 [3, 15]。

设 G 是一个非平凡离散群， X 是一个自由的 G-空间。我们将拓扑不变量 G-指标定义为

$$\operatorname{ind}_G(X):=\min\{n\geq 0\mid\text{there is a }G\text{-map }X\to E_nG\},$$

其中， E_nG 是 G 的 $(n+1)$ 重连接，并带有对角 G-作用。我们还考虑类似的概念 G-余指标。设 X 是一个 G-空间。定义

$$\operatorname{coind}_G(X):=\min\{n\geq 0\mid\text{there is a }G\text{-map }E_nG\to X\}.$$

这些不变量最早由 Conner 和 Floyd 在论文中引入 [4]。请注意，他们所称的 G- 指标，正是我们在 [4], 中所称的 G-余指标，反之亦然。后文将会看到，不等式 $\operatorname{coind}_G(X)\leq\operatorname{ind}_G(X)$ 成立，这是 Borsuk–Ulam 定理的推广。 G-指标与

Lusternik–Schnirelmann 类别有密切关系；参见 [16, 第 5 节.3]。一般而言， G-指标和 G-余指标很难计算。我们还引入了上同调不变量 G-权重。回想一下，对于 G-空间 X，存在一个纤维化 $EG \times_G X \to BG$。定义

$$\mathrm{wgt}_G(X) := \max\{n \geq 0 \mid H^k(BG) \to H^k(EG \times_G X) \text{ is injective for all } k \leq n \}.$$

这一不变量本质上与 Fadell 和 Husseini[7]论文中的理想值指标相同。稍后将会看到，当 G 是一个 p-环面时，有如下不等式：余指标$_G(X)$ $\leq$ 权重$_G(X)$ $\leq$ 指标$_G(X)$。因此， G-权重有助于评估 G-指标和 G-余指标。然而，G-权重仍然难以计算，不过没有 G-指标和 G-余指标那么难。我们可以看到，G-权重在 [13, 18, 19]中有所应用。我们将在第 2 节讨论这些不变量的一些性质。

本文的目标是，对于给定的子群 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$，用 K 的组合学来描述 $\mathbb{R}Z_K$ 的 G-指标、 G-余指标和 G-权重。我们先引入单纯复形 K 的组合概念 δ-数 $\delta(K)$，其定义为 K的非面的维数的最小值，即，

$$\delta(K) := \min\{|I| - 1 \mid I \text{ is a non-face of } K\}.$$

若 K 是满单纯形，则我们定义 $\delta(K) = \infty$。

现在我们可以陈述主要定理。对于非空子集 $I \subset [m]$，我们将 K 在 I 上的全子复形定义为

$$K_I := \{\sigma \subset I \mid \sigma \in K\}.$$

对于每个 $g = (g_1, \ldots, g_m) \in G$，我们将 g 的支撑定义为 $[m]$的子集

$$\mathrm{supp}(g) := \{i \in [m] \mid g_i = -1\},$$

并定义 $\mathrm{supp}(G) := \bigcup_{g \in G} \mathrm{supp}(g)$。

定理 1.1. 设 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 是一个秩一子群。

(i) 若 G 在 $\mathbb{R}Z_K$ 上的作用是自由的，则有等式

$$\mathrm{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K_{\mathrm{supp}(G)}).$$

(ii) 存在等式

$$\mathrm{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \mathrm{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K_{\mathrm{supp}(G)}),$$

其中 G 对 $\mathbb{R}Z_K$ 的作用不一定是自由的。

定理 1.2. 设 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 是一个非平凡子群。

(i) 如果 G 对 $\mathbb{R}Z_K$ 的作用是自由的，那么存在不等式

$$\max_{g \in G \setminus \{1\}} \delta(K_{\mathrm{supp}(g)}) \leq \mathrm{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \dim K + 1.$$

(ii) 存在不等式

$$\delta(K_{\mathrm{supp}(G)}) \leq \mathrm{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \mathrm{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \min_{g \in G \setminus \{1\}} \delta(K_{\mathrm{supp}(g)}),$$

其中 G 对 $\mathbb{R}Z_K$ 的作用不一定是自由的。

这些定理表明，实矩角复形的 G-指标、 G-余指标和 G-权可以用一个 δ-数来计算；特别是当 G的秩为一时，可以完全计算出来。我们将在第3节给出主要定理的证明。

在第4节中，我们研究 G-指标的上界。如第2节所示，如果 X 是一个自由G-复形，那么它的 G-指标小于或等于其维数，即 $\mathrm{ind}_G(X) \leq \dim X$。因此，如果 G 在 $\mathbb{R}Z_K$ 上自由作用，那么有如下不等式

$$\mathrm{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \dim \mathbb{R}Z_K = \dim K + 1.$$

我们给出使上界变小的一些充分条件。若单形对（σ, τ）属于 K ，且 $\tau \subset \sigma$ 和 σ 是唯一包含 τ 的真单纯形，则称其为一个初等坍缩对。当（σ, τ）是 K的一个初等坍缩对时，从 K 中移除 σ 和 τ 称为一次初等坍缩，记作 $K \searrow_{(\sigma,\tau)} K'$，其中 $K' := K \setminus \{\sigma, \tau\}$。一系列初等坍缩简称为坍缩。

命题 1.3. 设 K 是一个单纯复形，并假设 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 在 $\mathbb{R}Z_K$上自由作用。若 K 坍缩到某个单纯复形 L，使得 $\dim\ L < \dim K$，则有如下不等式

$$\mathrm{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \dim K.$$

命题 1.3 表明，在上述条件下，我们可以将上界降低 1。我们将通过一些例子说明，这种对上界的修正是最优的。

在第 5 节中，我们还研究实矩角复形的 G-余指标和 G-权重等于下界的条件。

推论 1.4. 设 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 是一个非平凡子群。若 $\delta(K_{\mathrm{supp}(G)}) = 1$，则有等式

$$\mathrm{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \mathrm{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = 1.$$

推论 1.5. 设 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 是一个非平凡子群。若 $K_{\mathrm{supp}(G)}$ 的每个极小非面阶数相同，且对于某个 $g_0 \in G$ 有 $\mathrm{supp}(g_0) \notin K$ ，则有等式

$$\mathrm{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \mathrm{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K_{\mathrm{supp}(G)}).$$

2. Properties of the G-index, G-coindex and G-weight

本节中，我们展示 G-指标、 G-余指标和 G-权的一些性质。在本节中，设 G 是一个 p-环面（$\mathbb{Z}/p$）^{m}，其中 p 是素数。我们首先考察典范映射 i_n: $B_nG \to BG$ 的一个上同调性质。

引理 2.1. 当 $* \leq n$ 时，映射 i_n^*: H^*（BG; $\mathbb{Z}/p$）$\to$ $\to H^*$（B_nG; $\mathbb{Z}/p$）是单射；当 $* = n+1$ 时则不是单射。

证明. 存在一个同伦纤维化 $E_nG \to B_nG \xrightarrow{i_n} BG$。由于 E_nG 与 n-球面的楔和同伦等价，因此它是（$n-1$）-连通的。于是，上述同伦纤维化的 Serre 正合列推出第一个结论。另一方面，众所周知，

$$H^*(B\mathbb{Z}/p;\mathbb{Z}/p) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p[x] & (p=2) \\ \Lambda_{\mathbb{Z}/p}(x) \otimes \mathbb{Z}/p[y] & (p \neq 2), \end{cases}$$

其中 $\deg\ x = 1$ 和 $\deg\ y = 2$，这意味着 H^{n+1}（BG; $\mathbb{Z}/p$）$\neq 0$。然而，由于 B_nG 是一个 n 维复形， H^{n+1}（B_nG; $\mathbb{Z}/p$）$= 0$。因此，第二个结论得证。□

设映射 p_1: $EG \times_G E_nG \to BG$ 是第一投影，映射 p_2: $EG \times_G E_nG \to B_nG$是第二投影。

引理 2.2. 映射 p_2: $EG \times_G E_nG \to B_nG$ 是同伦等价，且有一个图 am

$$\begin{array}{ccc} EG \times_G E_nG & \xrightarrow{p_2} & B_nG \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_n} \\ BG & = & BG \end{array}$$

是同伦交换的。

证明. 映射 p_2: $EG \times_G E_nG \to B_nG$ 是同伦等价，因为其纤维 EG 是可缩的。陈述中的同伦交换图是通过对一个由 G-映射构成的图取商得到的

$$\begin{array}{ccc} EG \times E_nG & \longrightarrow & E_nG \\ \downarrow & & \downarrow \\ EG & = & EG \end{array}$$

该图根据这样一个事实，在 G-同伦意义下交换：从某个 G-空间到 EG的任意两个 G-映射都是 G-同伦的，如引理 5.1所示。因此证明完成。□

下面介绍 G-指标、 G-余指标和 G-权的基本性质。

命题 2.3. 设 X 为一个 G-空间。

（i）存在一个不等式

$$\mathrm{coind}_G(X) \leq \mathrm{wgt}_G(X).$$

(ii) 若 G 在 X 上自由作用，则有如下不等式

$$\mathrm{wgt}_G(X) \leq \mathrm{ind}_G(X).$$

证明。(i) 设 $n := \mathrm{coind}_G(X)$。则存在一个 G-映射 $\phi\colon E_nG \to X$。由引理 2.2，我们得到一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} B_nG & \xleftarrow[\simeq]{p_2} & EG \times_G E_nG & \xrightarrow{\mathrm{id}\times_G\phi} & EG \times_G X \\ \downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow \\ BG & = & BG & = & BG \end{array}$$

由此诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^k(B_nG;\mathbb{Z}/p) & \longleftarrow & H^k(EG \times_G X;\mathbb{Z}/p) \\ \uparrow{\scriptstyle i_n^*} & & \uparrow \\ H^k(BG;\mathbb{Z}/p) & = & H^k(BG;\mathbb{Z}/p). \end{array}$$

根据引理 2.1 的第一条，映射 $H^k(BG;\mathbb{Z}/p) \to H^k(EG \times_G X;\mathbb{Z}/p)$ 对于 $k \leq n$ 必须是单射。因此我们得到不等式 $\mathrm{wgt}_G(X) \geq n = \mathrm{coind}_G(X)$。

(ii) 设 $m := \mathrm{ind}_G(X)$。则存在一个 G-映射 $\psi\colon X \to E_mG$。由引理 2.2，我们得到一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccccc} EG \times_G X & \xrightarrow{\mathrm{id}\times_G\psi} & EG \times_G E_mG & \xrightarrow[\simeq]{p_2} & B_mG \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_n} \\ BG & = & BG & = & BG \end{array}$$

这诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^k(B_mG;\mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & H^k(EG \times_G X;\mathbb{Z}/p) \\ \uparrow{\scriptstyle i_n^*} & & \uparrow \\ H^k(BG;\mathbb{Z}/p) & = & H^k(BG;\mathbb{Z}/p). \end{array}$$

根据引理 2.1 的第二个陈述，对于 $k = m+1$，映射 $H^k(BG;\mathbb{Z}/p) \to H^k(EG \times_G X;\mathbb{Z}/p)$ 不是单射。因此我们也得到不等式 $\mathrm{wgt}_G(X) \leq m = \mathrm{ind}_G(X)$。□

P命题 2.4。设 X 和 Y 是 G-空间，并假设存在一个 G-映射 $f\colon X \to Y$.

(i) 存在如下不等式

$$\mathrm{coind}_G(X) \leq \mathrm{coind}_G(Y) \quad \textit{and} \quad \mathrm{wgt}_G(X) \leq \mathrm{wgt}_G(Y).$$

(ii) 若 G 自由地作用于 X 和 Y，则存在一个不等式

$$\mathrm{ind}_G(X) \leq \mathrm{ind}_G(Y).$$

证明. (i) 设 $n := \mathrm{coind}_G(X)$，并取一个 G-映射 $\phi\colon E_nG \to X$。那么复合 $f \circ \phi\colon E_nG \to X \to Y$ 也是一个 G-映射。因此我们得到不等式 $\mathrm{coind}_G(Y) \geq n = \mathrm{coind}_G(X)$。令 $l := \mathrm{wgt}_G(X)$。由于映射 $f\colon X \to Y$ 是一个 G-映射，它诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} EG \times_G X & \xrightarrow{\mathrm{id}\times_G f} & EG \times_G Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & = & BG. \end{array}$$

于是我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^k(EG\times_G Y;\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{(\mathrm{id}\times_G f)^*} & H^k(EG\times_G X;\mathbb{Z}/p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^k(BG;\mathbb{Z}/p) & = & H^k(BG;\mathbb{Z}/p). \end{array}$$

由于映射 $H^k(BG;\,\mathbb{Z}/p)\to H^k(EG\times_G X;\,\mathbb{Z}/p)$ 对于 $k\le l$ 是单射，映射 $H^k(BG;\,\mathbb{Z}/p)\to H^k(EG\times_G Y;\mathbb{Z}/p)$ 对于 $k\le l$ 也必须是单射。因此我们得到不等式 $\mathrm{wgt}_G(Y)\ge l=\mathrm{wgt}_G(X)$。

(ii) 设 $m:=\mathrm{ind}_G(Y)$，并取一个 G-映射 $\psi\colon Y\to E_mG$。则复合映射 $\psi\circ f\colon X\to Y\to E_mG$ 也是一个 G-映射。因此我们得到不等式 $\mathrm{ind}_G(X)\le m=\mathrm{ind}_G(Y)$。□

命题 2.5. 设 X 是一个 G-空间，且 $K<G$ 是一个非平凡子群。

(i) 存在以下不等式

$$\mathrm{coind}_G(X)\le\mathrm{coind}_K(X)\quad and\quad \mathrm{wgt}_G(X)\le\mathrm{wgt}_K(X).$$

(ii) 如果 G 自由地作用于 X 和 Y，那么存在一个不等式

$$\mathrm{ind}_K(X)\le\mathrm{ind}_G(X).$$

证明。(i) 令 $n:=\mathrm{coind}_G(X)$，并取一个 G-映射 $\phi\colon E_nG\to X$。那么复合映射 $\phi\circ E_ni\colon E_nK\to E_nG\to X$ 是一个 K-映射，其中映射 $E_ni\colon E_nK\to E_nG$ 是由包含同态 $i\colon K\to G$ 诱导的 K-映射。因此我们得到不等式 $\mathrm{coind}_K(X)\ge n=\mathrm{coind}_G(X)$。令 $l:=\mathrm{wgt}_G(X)$。注意，由于 $G=(\mathbb{Z}/p)^m$ 的任意子群都是一个直和项，因此存在一个收缩 $r\colon G\to K$，它诱导出一个交换图

$$\begin{array}{ccc} EG\times_G X & \xrightarrow{r\times_G\mathrm{id}} & EK\times_K X \\ \downarrow & & \downarrow \\ BG & \xrightarrow{Br} & BK. \end{array}$$

于是我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} H^k(EK\times_K X;\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{(r\times_G\mathrm{id})^*} & H^k(EG\times_G X;\mathbb{Z}/p) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^k(BH;\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{(Br)^*} & H^k(BG;\mathbb{Z}/p). \end{array}$$

注意，映射 $(Br)^*\colon H^k(BK;\,\mathbb{Z}/p)\to H^k(BG;\,\mathbb{Z}/p)$ 是单射，因为同态$r\colon G\to K$是一个收缩。由于映射 $H^k(BG;\,\mathbb{Z}/p)\to H^k(EG\times_G X;\,\mathbb{Z}/p)$ 对于$k\le l$是单射，因此映射 $H^k(BH;\mathbb{Z}/p)\to H^k(EK\times_K X;\mathbb{Z}/p)$ 对于 $k\le l$也必定是单射。因此我们得到不等式 $\mathrm{wgt}_K(X)\ge l=\mathrm{wgt}_G(X)$。

(ii) 设 $m:=\mathrm{ind}_G(X)$，并取一个 G-映射 $\psi\colon X\to E_mG$。则复合映射 $E_mr\circ\psi\colon X\to E_mG\to E_mK$ 是一个 K-映射。因此我们得到不等式 $\mathrm{ind}_K(X)\le m=\mathrm{ind}_G(X)$。

□

命题 2.6. 设 X 为一个 G-空间。

(i) 有如下等式

$$\mathrm{coind}_G(E_nG)=\mathrm{ind}_G(E_nG)=n.$$

(ii) 若 X 是 $(n-1)$-连通的，则有如下不等式

$$\mathrm{coind}_G(X)\ge n.$$

(iii) 若 X 是一个自由 G-复形，则有如下不等式

$$\mathrm{ind}_G(X)\le\dim X.$$

证明。该命题可由 [16, 命题 6.2 的证明4]推出。 □

3. Proof of the main theorems

本节将给出主要定理的证明。我们首先考虑 K 是一个满单纯形 Δ^{m-1}的情形。

引理 3.1. 设 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 是一个非平凡子群。那么有以下等式

$$\operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_{\Delta^{m-1}}) = \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_{\Delta^{m-1}}) = \infty.$$

证明. 由于 $\mathbb{R}Z_{\Delta^{m-1}} = (D^1)^m$ 是可缩的，因此有以下不等式

$$n \leq \operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_{\Delta^{m-1}}) \leq \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_{\Delta^{m-1}})$$

对任意 $n \geq 0$，由命题 2.3 和命题 2.6 可得。 □

引理 3.2. 设 K 是顶点集为 $[m]$的单纯复形。如果 K 是 q-邻接的，那么 $\mathbb{R}Z_K$ 是 q-连通的。

证明。由于 K 是 q-邻接的， $\mathbb{R}Z_K$ 的 $(q+1)$-骨架等于 $\mathbb{R}Z_{\Delta^{m-1}} = (D^1)^m$ 的 $(q+1)$-骨架，而后者同伦等价于 $(q+1)$ 个球面的楔和。因此，根据胞腔逼近定理，我们得到

$$\pi_i\left(\mathbb{R}Z_K\right) = \pi_i\left((D^1)^m\right) = 0 \quad \text{for } i \leq q,$$

证明至此完成。 □

推论 3.3. 设 K 是顶点集为 $[m]$ 的单纯复形，且 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 是一个非平凡子群。那么有如下不等式

$$\delta(K) \leq \operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K).$$

证明。设 $q := \delta(K)$。由于 K 是 $(q-1)$-邻接的，根据引理 3.2， $\mathbb{R}Z_K$ 是 $(q-1)$-连通的。因此，由命题 2.6 可完成证明。□

引理 3.4. 设 K 是顶点集为 $[m]$的单纯复形。假设 K 不是满单纯形，且 $G = \mathbb{Z}/2$ 在 $\mathbb{R}Z_K$ 上作对角作用。那么有如下等式

$$\operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = \operatorname{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K).$$

证明。首先注意到， G 对 $\mathbb{R}Z_K$ 的对角作用是自由的，因为 K 不是满单纯形。只需证明以下不等式成立

$$\delta(K) \leq \operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \operatorname{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \delta(K).$$

第一个不等式由推论 3.3 得出。第二个和第三个不等式由命题 2.3 得出。若设 $q := \delta(K)$，则K 有一个极小非面 $I = \{i_1, \ldots, i_{q+1}\} \subset [m]$，由此可得一个 G-映射

$$\mathbb{R}Z_K \to \mathbb{R}Z_{K_I} = \mathbb{R}Z_{\partial\Delta^q} = S^q \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{q+1}}),$$

由此根据命题 2.4 和命题 2.6 得出最后一个不等式。 □

定理 1.1 和定理 1.2 的证明。考虑包含映射 $\mathbb{R}Z_{K_{\operatorname{supp}(G)}} \to \mathbb{R}Z_K$ 和投影 $\mathbb{R}Z_K \to \mathbb{R}Z_{K_{\operatorname{supp}(G)^\circ}}$。由于这些映射是 G-映射，根据命题 2.4， $\mathbb{R}Z_K$ 的 G-指标、 G-余指标和 G-权分别与 $\mathbb{R}Z_{K_{\operatorname{supp}(G)}}$ 的相同。因此，我们可以假设 $K_{\operatorname{supp}(G)} = K$，或者等价地， $\operatorname{supp}(G) = [m]$。

首先，我们考虑秩为 $G = 1$ 的情形。由于 $\operatorname{supp}(G) = [m]$， G 在 $\mathbb{R}Z_K$ 上的作用是对角作用。如果 G 的对角作用不是自由的，那么 K 必定是一个满单纯形 Δ^{m-1}。根据引理 3.1，有以下等式

$$\operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = \infty = \delta(K).$$

如果 G 在 $\mathbb{R}Z_K$ 上的作用是自由的，那么 K 就不是满单纯形。根据引理 3.4，有以下等式 es

$$\operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = \operatorname{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K).$$

至此，秩为 $G = 1$ 的情形的证明完成。

接下来，令 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 为一个秩不一定为 1 的子群。对于每个非平凡元素 $g \in G$，有不等式

$$\delta(K) \leq \operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \operatorname{wgt}_{\langle g\rangle}(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K_{\operatorname{supp}(g)})$$

根据命题 2.5 和推论 3.3。如果 G 在 $\mathbb{R}Z_K$ 上的作用是自由的，则有不等式

$$\delta(K_{\mathrm{supp}(g)}) = \mathrm{ind}_{\langle g\rangle}(\mathbb{R}Z_K) \le \mathrm{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \le \dim \mathbb{R}Z_K = \dim K + 1.$$

由命题 2.5 和引理 2.6 得出。证明完成。 □

4. Upper bound of the G-index

In 本节中，我们通过构造一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-子复形 X of $\mathbb{R}Z_K$ 来证明命题 1.3, h is a $(\mathbb{Z}/2)^m$-等变变形收缩。若 $\dim X \le \dim K$，则有不等式

$$\mathrm{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \le \mathrm{ind}_G(X) \le \dim X \le \dim K$$

由命题 2.6 得出，从而证明命题 1.3。

设 $I = [0,1]$ 是一个单位区间。由于一对 $(I^q, I^{q-1}\times\{0\}\cup\partial I^{q-1}\times I)$ 是 NDR 对，我们可以为每个 $q = 1,\dots,m$ 选取一个变形收缩 $\rho\colon I^q \to I^{q-1}\times\{0\}\cup\partial I^{q-1}\times I$。令 $\rho_j(x)$ 表示 $\rho(x)$ 的第 j 个元素。对于每个 $j = 1,\dots,q$，我们定义映射 $r_j\colon (D^1)^q \to D^1$ 如下:

$$r_j(x_1,\dots,x_q) = \begin{cases} \rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) & (x_j \ge 0)\\ -\rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) & (x_j \le 0), \end{cases}$$

当 $|x_j| = 0$ 时， $\rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) = |x_j| = 0$，因此该定义良好。定义映射 $r\colon (D^1)^q \to (D^1)^q$ 如下

$$r(x) := (r_1(x),\dots,r_q(x)),$$

根据构造，该映射是 $(\mathbb{Z}/2)^m$-等变的。

引理 4.1。映射 r 的像是一个空间

$$Z := \left(\bigcup_{j=1}^{q}(D^1)^{j-1}\times\{0\}\times(D^1)^{q-j}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q-1}(D^1)^{j-1}\times S^0\times(D^1)^{q-j}\right),$$

且映射 $(D^1)^q \to Z$ $(x \mapsto r(x))$ 是一个变形收缩。

pro的。令 $x = (x_1,\dots,x_q)$ 为 $(D^1)^q$ 的任意元素。我们首先注意到，映射 ρ 的像 is

$$I^{q-1}\times\{0\}\cup\partial I^{q-1}\times I = \left(\bigcup_{j=1}^{q} I^{j-1}\times\{0\}\times I^{q-j}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q-1} I^{j-1}\times\{1\}\times I^{q-j}\right).$$

若 $\rho(|x_1|,\dots,|x_q|) \in \bigcup_{j=1}^{q} I^{j-1}\times\{0\}\times I^{q-j}$，则对某些 $j = 1,\dots,q$，有 $r_j(x) = 0$，因为对某些 $j = 1,\dots,q$， $\rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) = 0$，这意味着

$$r(x) \in \bigcup_{j=1}^{q}(D^1)^{j-1}\times\{0\}\times(D^1)^{q-j}.$$

如果 $\rho(|x_1|,\dots,|x_q|) \in \bigcup_{j=1}^{q-1} I^{j-1}\times\{1\}\times I^{q-j}$，那么对于某些 $j = 1,\dots,q-1$，有 $r_j(x) = 1$，因为对于某些 $j = 1,\dots,q-1$，有 $\rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) = 1$，这意味着

$$r(x) \in \bigcup_{j=1}^{q-1}(D^1)^{j-1}\times S^0\times(D^1)^{q-j}.$$

由此证明了 $r(x) \in Z$。反过来，如果 $x = (x_1,\dots,x_q) \in Z$，那么 $(|x_1|,\dots,|x_q|) \in I^{q-1}\times\{0\}\cup\partial I^{q-1}\times I$，这意味着 $\rho(|x_1|,\dots,|x_q|) = (|x_1|,\dots,|x_q|)$，因为映射 $\rho\colon I^q \to I^{q-1}\times\{0\}\cup\partial I^{q-1}\times I$ 是一个收缩。因此，对于每个 $j = 1,\dots,q$,

$$r_j(x) = \begin{cases} \rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) = |x_j| = x_j & (x_j \ge 0)\\ -\rho_j(|x_1|,\dots,|x_q|) = -|x_j| = x_j & (x_j \le 0), \end{cases}$$

使得 $r(x) = x$。因此，映射 r 的像为 Z，且映射 r 在 Z上恒等。设映射 $H\colon I^q\times I \to I^q$ 是变形收缩 ρ 的一个同伦，并将 $H(x,t)$ 的第 j 个分量记为 $H_j(x,t)$。于是我们定义同伦 $\tilde{H}\colon (D^1)^q\times I \to (D^1)^q$ 如下

$$\tilde{H}(x,t) := (\tilde{H}_1(x,t),\dots,\tilde{H}_q(x,t)),$$

其中，映射 $\tilde{H}_j\colon (D^1)^q \times I \to D^1$ 定义为

$$\tilde{H}_j(x,t) = \begin{cases} H_j(|x_1|,\dots,|x_q|,t) & (x_j \geq 0) \\ -H_j(|x_1|,\dots,|x_q|,t) & (x_j \leq 0) \end{cases}$$

对每个 $j = 1,\dots,q$。根据构造，同伦 $\tilde{H}$ 表明映射 $(D^1)^q \to Z(x \mapsto r(x))$ 是一个变形收缩。□

我们还将引理 4.1 中的映射 $(D^1)^q \to Z$ 记为 r。

引理 4.2。设 K 是一个单纯复形， $K \searrow_{(\sigma,\tau)} K'$ 是一次初等坍缩。那么存在一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-等变变形收缩

$$\tilde{r}\colon \mathbb{R}Z_K \to Y \cup \mathbb{R}Z_{K'}$$

其中 Y 是 $\mathbb{R}Z_K$ 的一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-子复形，且 $\dim Y = \dim \sigma$。

证明。我们可以假设 $\sigma = \{1,\dots,q\}$ 和 $\tau = \{1,\dots,q-1\}$，并考虑映射 $r \times \mathrm{id} : (D^1)^q \times (S^0)^{m-q} \to Z \times (S^0)^{m-q}$。目标空间 $Z \times (S^0)^{m-q}$ 等于

$$\begin{aligned} & \left(\bigcup_{j=1}^{q} (D^1)^{j-1} \times \{0\} \times (D^1)^{q-j} \times (S^0)^{m-q}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{q-1} (D^1)^{j-1} \times S^0 \times (D^1)^{q-j} \times (S^0)^{m-q}\right) \\ = \quad & \left(\bigcup_{j=1}^{q} (D^1)^{j-1} \times \{0\} \times (D^1)^{q-j} \times (S^0)^{m-q}\right) \cup \bigcup_{\sigma' < \sigma,\ \sigma' \neq \tau} (D^1, S^0)^{\sigma'}. \end{aligned}$$

注意，由于 $K' = K \setminus \{\sigma,\tau\}$，对于除 τ 之外的任意面 $\sigma' < \sigma$，空间 $(D^1,S^0)^{\sigma'}$ 是 $\mathbb{R}Z_{K'}$ 的子空间。因此，若设 $Y := \bigcup_{j=1}^{q} (D^1)^{j-1} \times \{0\} \times (D^1)^{q-j} \times (S^0)^{m-q}$，则 Y 是 $\mathbb{R}Z_K$ 的一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-复形，且 $\dim Y = q-1 = \dim \sigma$，从而得到一个定义良好的映射

$$(D^1,S^0)^{\sigma} \xrightarrow{r\times \mathrm{id}} Y \cup \bigcup_{\sigma' < \sigma,\ \sigma' \neq \tau} (D^1,S^0)^{\sigma'} \xrightarrow{\text{inclusion}} Y \cup \mathbb{R}Z_{K'},$$

由于映射 r 在 Z 上恒等，因此该映射在 $\mathbb{R}Z_{K'} \cap (D^1,S^0)^{\sigma} = \bigcup_{\sigma' < \sigma,\ \sigma' \neq \tau} (D^1,S^0)^{\sigma'} \subset Z$ 上恒等。于是我们得到一个映射

$$\tilde{r}\colon \mathbb{R}Z_K = \mathbb{R}Z_{K'} \cup (D^1,S^0)^{\sigma} \to Y \cup \mathbb{R}Z_{K'},$$

whic按构造，h 是一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-等变变形收缩。因此，引理得证 d.
□

命题 1.3 的证明。根据假设，存在一列初等坍缩$K = K_0 \searrow_{(\sigma_1,\tau_1)} K_1 \searrow_{(\sigma_2,\tau_2)} \cdots \searrow_{(\sigma_l,\tau_l)} K_l = L$。对于每个 $i = 1,\dots,l$，由引理 4.2，存在一个变形收缩

$$\tilde{r}_i\colon \mathbb{R}Z_{K_{i-1}} \to Y_i \cup \mathbb{R}Z_{K_i}$$

其中， Y_i 是 $\mathbb{R}Z_{K_{i-1}}$的一个（$\mathbb{Z}/2$）^{m}-子复形。考虑一个映射

$$\mathbb{R}Z_{K_{i-1}} \xrightarrow{\tilde{r}_i} Y_i \cup \mathbb{R}Z_{K_i} \xrightarrow{\text{inclusion}} \bigcup_{p=1}^{i-1} Y_p \cup Y_i \cup \mathbb{R}Z_{K_i} = \bigcup_{p=1}^{i} Y_p \cup \mathbb{R}Z_{K_i}.$$

我们证明该复合在空间 $\bigcup_{p=1}^{i-1} Y_p \cap \mathbb{R}Z_{K_{i-1}}$ 上是恒等映射。只需证明空间 $\bigcup_{p=1}^{i-1} Y_p \cap \mathbb{R}Z_{K_{i-1}}$ 是空间 $Y_i \cup \mathbb{R}Z_{K_i}$ 的子集，因为映射 $\tilde{r}_i$ 在 $Y_i \cup \mathbb{R}Z_{K_i}$ 上是恒等映射。设 x 是 $\bigcup_{p=1}^{i-1} Y_p \cap \mathbb{R}Z_{K_{i-1}}$ 中任意一个元素。那么对于某个 $p = 1,\ \dots,\ i-1$，有 $x \in Y_p$，这意味着 x 的第 j 个分量对于某个 $j \in \sigma_p$ 为零。因此，若 $x \in \mathbb{R}Z_{K_{i-1}} \setminus \mathbb{R}Z_{K_i}$，则必有 $x \in (D^1,S^0)^{\sigma_i}$，从而得到 $x \in Y_i$，因为 $j \in \sigma_p \cap \sigma_i$。因此，上述论证表明 x 属于 $Y_i \cup \mathbb{R}Z_{K_i}$。于是我们得到一个良定义映射

$$\bigcup_{p=1}^{i-1} Y_p \cup \mathbb{R}Z_{K_{i-1}} \to \bigcup_{p=1}^{i} Y_p \cup \mathbb{R}Z_{K_i},$$

根据构造，这是一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-等变变形收缩。接下来，映射的复合

$$\mathbb{R}Z_K \to Y_1 \cup \mathbb{R}Z_{K_1} \to \cdots \to \bigcup_{p=1}^{l} Y_p \cup \mathbb{R}Z_{K_l}$$

是一个 $(\mathbb{Z}/2)^m$-等变变形收缩。因此，若设 $X := \bigcup_{p=1}^{l} Y_p \cup \mathbb{R}Z_{K_l}$，则有不等式

$$\dim X = \max_{1\le p\le l} \{\dim \mathbb{R}Z_{K_l}, \dim Y_p\} \le \dim K$$

因为对于所有 $p = 1, \dots, l$，都有不等式 $\dim K_l = \dim L < \dim K$ 和 $\dim Y_p = \dim \sigma_p \le \dim K$。因此我们得到不等式

$$\operatorname{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) \le \operatorname{ind}_G(X) \le \dim X \le \dim K$$

根据命题 2.4，证明完成。 □

例 4.3. 设 K 是一个 $(m-2)$-单纯形 Δ^{m-2} 边界的锥，且 $G = \mathbb{Z}/2$ 是一个在 $\mathbb{R}Z_K$ 上对角作用的群。则 $\dim K = m-1$，并且 K 可以坍缩为一点。然而，定理 1.1 表明

$$\operatorname{ind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \delta(K) = m - 1 = \dim K.$$

因此，该例表明命题 1.3 中的上界是最佳可能的。

5. Lower bound of the G-coindex and the flag number

本节讨论 G 余指标的一个下界。目标是证明推论 1.4 和 1.5。

引理 5.1. 设 g, h 是 $G < (\mathbb{Z}/2)^m$ 的非平凡元素，并取元素 $i \in \operatorname{supp}(g)$ 和 $j \in \operatorname{supp}(h)$。若 $j \notin \operatorname{supp}(g)$ 且 $i \notin \operatorname{supp}(h)$，则 $i, j \in \operatorname{supp}(gh)$。

证明. 根据假设， g 的第 i 个和第 j 个分量分别为 -1 和 1，而 h 的第 i 个和第 j 个分量分别为 1 和 -1。因此， gh 的第 i 个和第 j 个分量均为 -1，故 $i, j \in \operatorname{supp}(gh)$。□

推论 1.4 的证明. 假设 $\delta(K_{\operatorname{supp}(G)}) = 1$。那么存在两个元素 $i, j \in \operatorname{supp}(G)$，使得 $\{i, j\} \notin K_{\operatorname{supp}(G)}$。若能证明对某个 $g_0 \in G \setminus \{1\}$ 有 $\{i, j\} \in \operatorname{supp}(g_0)$，则 $\{i, j\} \notin K_{\operatorname{supp}(g_0)}$ 因为 $\{i, j\} \notin K_{\operatorname{supp}(G)}$ 和 $K_{\operatorname{supp}(g_0)} \subset K_{\operatorname{supp}(G)}$，即 $\delta(K_{\operatorname{supp}(g_0)}) = 1$。根据定理 1.2，有如下不等式

$$\begin{aligned} 1 = \delta(K_{\operatorname{supp}(G)}) &\le \operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) \le \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) \\ &\le \min_{g\in G\setminus\{1\}} \delta(K_{\operatorname{supp}(g)}) \le \delta(K_{\operatorname{supp}(g_0)}) = 1, \end{aligned}$$

因此我们得到等式 $\operatorname{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \operatorname{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) = 1$。因此，只需证明存在某个元素 $g_0 \in G$，使得 $i, j \in \operatorname{supp}(g_0)$。由于 $\operatorname{supp}(G) = \bigcup_{g\in G} \operatorname{supp}(g)$，我们可以选取元素 $g_i, g_j \in G \setminus \{1\}$，使得 $i \in \operatorname{supp}(g_i)$ $j \in \operatorname{supp}(g_j)$。若 $j \in \operatorname{supp}(g_i)$ 或 $i \in \operatorname{supp}(g_j)$，则分别有 $i, j \in \operatorname{supp}(g_i)$ 或 $i, j \in \operatorname{supp}(g_j)$。若 $j \notin \operatorname{supp}(g_i)$ 且 $i \notin \operatorname{supp}(g_j)$，则由引理 5.1 可得 $i, j \in \operatorname{supp}(g_i g_j)$。至此，证明完成。□

为证明推论 1.5，我们定义单纯复形 K 的组合概念旗数 $\operatorname{flag}(K)$，即 K 的极小非面的维数的最大值，也就是说，

$$\operatorname{flag}(K) := \max\{|I| - 1 \mid I \text{ is a minimal non-face of } K\}$$

如果 K 是满单纯形，则我们令 $\operatorname{flag}(K) = \infty$。容易看出，单纯复形 K 是旗复形，当且仅当 K 是满单纯形，或者其旗数等于 1。

引理 5.2。设 K 是顶点集 $[m]$ 上的一个单纯复形，且 $I \subset [m]$ 是 K 的一个非面。那么存在不等式

$$\delta(K) \le \delta(K_I) \quad \textit{and} \quad \operatorname{flag}(K_I) \le \operatorname{flag}(K).$$

证明。首先注意到，根据假设， K_I 不是一个满单纯形。令 $q := \delta(K_I)$。那么存在 K_I 的一个非面 J，使得 $|J| = q + 1$。根据满子复形的定义， J 也是 K 的一个非面。因此存在不等式

$$\delta(K) \leq q = \delta(K_I).$$

设 $q' :=$ 旗（K），并取 K_I 的任意一个极小非面 J'。那么 J' 也是 K 的一个极小非面，因此根据旗数的定义， $|J'| - 1 \leq q'$。于是有不等式

$$\mathrm{flag}(K_I) \leq q' = \mathrm{flag}(K).$$

证明完成。 □

推论 5.3。设 K 是一个单纯复形。那么有不等式

$$\delta(K) \leq \mathrm{flag}(K).$$

证明。若 K 是一个满单纯形，则此推论显然成立，因为 δ（K）和 flag（K）均为 ∞。若 K 不是满单纯形，则 K 有一个极小非面 I。那么 K_I 是一个满单纯形的边界。根据定义，一个满单纯形的边界的 δ 数与旗数相同，因此有不等式

$$\delta(K) \leq \delta(K_I) = \mathrm{flag}(K_I) \leq \mathrm{flag}(K)$$

由引理 5.2，证明完成。 □

命题 5.4. 设 K 是一个单纯复形。则以下条件等价。

(i) $\delta(K) =$ 是旗(K)。(ii) K 的每个极小非面阶数相同。

证明. 若 K 是一个满单纯形，则此命题显然成立，因此不妨设 K 不是一个满单纯形。假设 $\delta(K) =$ 是旗$(K) = q$，并取 K的任意一个极小非面 I。由于 $\delta(K) = q$， K 的每个非面的阶数都大于或等于 $q + 1$，因此有如下不等式

$$|I| \geq q + 1.$$

由于 $\mathrm{flag}(K) = q$， K 的每个极小非面的阶数都小于或等于 $q + 1$，因此也有如下等式

$$|I| \leq q + 1.$$

因此， K 的每个极小非面的阶数都相同，均为 $q + 1$。反过来，假设 K 的每个极小非面的阶数都相同，均为 $q + 1$。由于 K 中不存在阶数小于 $q + 1$的非面，因此有如下不等式

$$\delta(K) \geq q.$$

另一方面，由于 I K 的每个极小非面都满足不等式 $|I| - 1 \leq q$，因此还有一个不等式

$$\mathrm{flag}(K) \leq q.$$

由推论 5.3，我们得到不等式

$$q \leq \delta(K) \leq \mathrm{flag}(K) \leq q.$$

因此，等式 $\delta(K) =$ 旗(K)成立，证明完成。 □

推论 1.5 的证明。由于存在某个元素 $g_0 \in G \setminus \{1\}$，使得 $\mathrm{supp}(g_0) \notin K$，因此 $K_{\mathrm{supp}(G)}$ 不能是满单纯形。根据假设，有一个等式

$$\delta(K_{\mathrm{supp}(G)}) = \mathrm{flag}(K_{\mathrm{supp}(G)})$$

由命题 5.4。由于 $K_{\mathrm{supp}(g_0)}$ 不是满单纯形，因此有不等式

$$\delta(K_{\mathrm{supp}(G)}) \leq \delta(K_{\mathrm{supp}(g_0)}) \leq \mathrm{flag}(K_{\mathrm{supp}(g_0)}) \leq \mathrm{flag}(K_{\mathrm{supp}(G)})$$

由命题 5.3 和引理 5.2。因此我们得到一个等式

$$\delta(K_{\mathrm{supp}(G)}) = \delta(K_{\mathrm{supp}(g_0)}).$$

最后，我们来考虑不等式

$$\delta(K_{\mathrm{supp}(G)}) \leq \mathrm{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \mathrm{wgt}_G(\mathbb{R}Z_K) \leq \min_{g \in G \setminus \{1\}} \delta(K_{\mathrm{supp}(g)}) \leq \delta(K_{\mathrm{supp}(g_0)})$$

定理 1.2 中的情形。由于左右两边相等，我们得到等式

$$\mathrm{coind}_G(\mathbb{R}Z_K) = \mathrm{wgt}_G = \delta(K_{\mathrm{supp}(G)}),$$

完成证明。 □

Acknowledgement

作者谨向 Daisuke Kishimoto 致以诚挚谢意，感谢他提供了许多有益且宝贵的建议。

References

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov，《环面作用及其在拓扑学与组合学中的应用》，大学讲义丛书第 24 卷，美国数学会（2002）[2] L. Cai，实矩角流形上的乘积，J. Math. Soc. Japan 69（2017），503–528；doi: 10 2969 06920503 。/jmsj/ S. Choi, M. Masuda, and D. Y. Suh，单纯形乘积上的拟托里克流形，Osaka [3] Journal of Mathematics, 47（2010），1–21。[4] P. E. Conner, E. E. Floyd，无不动点对合与等变映射，Bull. Amer. Math. Soc. 66（1960）416–441。[5] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea and D. Tanr´e，Lusternik–Schnirelmann 范畴，数学调查与专著第 103 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003。[6] M. W. Davis, T. Januszkiewicz，凸多胞体、Coxeter 轨形与环面作用，Duke Math. J. 62（ 1991 417 451 ）- E. Fadell and S. Husseini，理想值上同调指标理论 [7] 及其在 Borsuk–Ulam 定理和 Bourgin–Yang 定理中的应用，Ergodic Theory Dynam. Systems, 8（1988），73–85。[8] M. Franz，光滑托里克簇及矩角复形商的上同调环，Geom. Topol. 25（2021），2109–2144。[9] X. Fu，某种情形下部分商的同伦型，预印本（2019），见 arXiv:math/1912.03574。[10] D. H. Gottlieb，纤维丛映射理论的应用，Transactions of the American Mathematical Society，第 171 卷。（1972），第 23–50 页。[11] J. Grbi´c, T. Panov, S. Theriault, J. Wu，旗复形的矩角复形的同伦型。Trans. Amer. Math. Soc. 368（2016），第 9 期，6663–6682。[12] S. Hasui, D. Kishimoto, A. Kizu，矩角流形的 Stiefel–Whitney 类是平凡的，https://arxiv.org/abs/ 2110 06358 。S. Hasui, D. Kishimoto, M. Takeda, and M. Tsutaya，胞腔复形的 [13] Tverberg 定理，https://arxiv.org/abs/2101.10596。[14] K. Iriye and D. Kishimoto，胖楔过滤与多面体积的分解，Kyoto J. Math. 59（2019），第 1 期，1–51。[15] Z. L¨u and L. Yu，三维小覆盖的拓扑类型，Forum Math.23（2011），第 2 期，245–284。[16] J. Matou˘sek，《运用 Borsuk–Ulam 定理：组合学与几何中的拓扑方法讲义》。与 Anders Bj¨ orner 和 G¨unter M. Ziegler 合作撰写。柏林：Springer，2008。 [17] 38 1999 1, 37 55 Y.B. Rudyak，范畴权 [18] 59 及其应用，Topology（），第 - 期，- A.Y. Volovikov，Tverberg 定理的拓扑推广，Mat. Zametki（1996），第 3 期，454–456，（英文译本）Math. Notes 59 1996 3 4, 324 325 （），第 - 期，- - [19] A.Y. Volovikov，van Kampen–Flores 定理，Math. Notes 59（1996），第 5 期，477–481。

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan
Email address: kizu.akatsuki.85e@st.kyoto-u.ac.jp