arXiv:2302.10052v1 [math.RA] 20 Feb 2023

交换与非交换不变理论

Vesselin Stoyanov Drensky [*], [**]

摘要

本文旨在向广大数学读者（也包括非代数领域的读者）介绍不变量理论中的若干主题，涵盖经典的交换情形和新近发展的非交换情形。我们仅选取了经典不变量理论中的几个主题：不变量代数的有限生成（有限性定理）和有限表示（基定理）、其希尔伯特级数的 Molien 公式，以及关于由伪反射生成的有限群之不变量的 Shephard-Todd-Chevalley 定理。随后，我们给出这些结果在自由和相对自由结合代数及李代数中的对应结论。最后，我们讨论一般矩阵代数及与之相关的不变量理论。

引言

本文是应邀在保加利亚数学家联盟年会上所作报告的扩展版。我们的目的是向广大数学读者（也包括非代数领域的读者）介绍不变量理论中的若干主题，涵盖经典的交换情形和新近发展的非交换情形。本文并非旨在全面综述这一主题，而是仅选取了若干专题。关于经典不变量理论的背景知识，我们推荐读者参阅 Springer [87]或 Dieudonn´e 和 Carrell[17]所著的书籍。我们还想提及 Formanek [36] 关于非交换不变量理论的优秀综述；正是这篇综述使我们对这一主题产生兴趣，并启发了本文的写作。

本文的组织如下。第1节介绍交换的不变量理论中的一些经典结果，这些结果被视为该理论的基石。第2节讨论有限线性群作用于自由结合代数时这些结果的类似情形；第3节则将讨论扩展到相对自由代数。第4节专门讨论有限线性群作用于相对自由李代数的情形。

[*], 部分经保加利亚科学与教育部 MM404/94 号资助。

[**] 以 V. S. Drensky, 《交换与非交换不变理论》, 《数学与数学教育》, 保加利亚数学家联盟第 24 届春季会议论文集, 斯维什托夫, 1995年4月4日至7日, 第 14–50 页出版。

最后，第5节讨论射影特殊线性群 PSL_k 通过共轭同时作用于若干个 $k \times k$ 矩阵时的不变量。

1. 经典不变量理论

设 G 是作用在集合 V上的群，即存在一个映射

$$G \times V \longrightarrow V, \text{ which we denote by } (g, v) \longrightarrow g(v),$$

使得

(i) 对任意 g、$h \in G$ 和 $v \in V$，$(gh)(v) = g(h(v))$；

(ii) 对任意 $v \in V$，$1(v) = v$，其中 1 是 G的单位元。

若对任意 $g \in G$都有 $g(v) = v$，则称元素 $v \in V$是 G 的不变量。我们用 V^G表示 G 的所有不变量构成的集合。

如果群 G 作用在集合 V 和 W 上，我们便在集合$\mathcal{F}(V, W)$上定义 G 的作用；该集合由所有从 V到 W的函数构成，作用方式为

$$(g(f))(v) = f(g^{-1}(v)),\ f \in \mathcal{F}(V, W),\ g \in G, v \in V.$$

函数 f 称为 G 的伴随量，如果它在 G 对 $\mathcal{F}(V, W)$ 的作用下是不变量。等价地，如果对于所有 $g \in G$,$v \in V$，$g(f(v)) = f(g(v))$，则 $f \in \mathcal{F}(V, W)$ 是伴随量。

本文中的所有讨论都基于一个固定的特征零代数闭域 K 。设 V_m为一个以 $v_1, \ldots, v_m$为基的向量空间。我们假设一般线性群 $GL_m = GL(V_m) = GL_m(K)$ 在 V_m 上按典范方式作用，并将其视为由可逆矩阵组成的群。若群 G 作用于 V_m，自然要求这一作用是线性的。它诱导出一个同态 $\rho : G \longrightarrow GL_m$； ρ 称为 G 在 V_m 中的表示，而 V_m 是一个 G-模。由 $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}_{V_m}(\rho(g))$， $g \in G$ 定义的函数 $\chi_\rho : G \longrightarrow K$ 称为 ρ 的特征标。若 V_m 是最小 G-不变子空间的直和，则表示 ρ称为完全可约。若群 G 是有限群，马施克定理指出， G 在 V_m 中的每个表示都是完全可约的。为达到我们的目的，不失一般性，可假设 G是 GL_m 的一个子群，并将 G 的元素视为可逆 $m \times m$ 矩阵。设 ψ : $G \longrightarrow GL_p$ 是 G 的另一个表示。若矩阵 $\psi(g)$ 的元素 $\psi_{pq}(g)$ 是矩阵 $g \in G$ 的元素 g_{ij} 的有理函数（分别为多项式函数），则表示 ψ 称为有理表示（分别为多项式表示）。

设 $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$，并令 span($X_m$) 为以 x_1，…，x_m 为基的向量空间。由 m 个交换变量 x_1，…，x_m 构成的多项式代数 $K[X_m] = K[x_1, \ldots, x_m]$，可视为定义在 V_m 上的多项式函数代数。其生成元 x_i 定义如下：

$$x_i(\xi_1 v_1 + \ldots + \xi_m v_m) = \xi_i,\ \xi_j \in K,\ i, j = 1, \ldots, m.$$

给 K 赋予 G 的平凡作用后，上述论证表明，GL_m对 V_m 的作用会在 $K[x_1, \ldots, x_m]$ 上诱导出如下作用：

$$(gf(x_1, \ldots, x_m))(v) = f(x_1, \ldots, x_m)(g^{-1}(v)),$$

其中 $g \in GL_m$, $f(x_1, \ldots, x_m) \in K[x_1, \ldots, x_m]$和 $v \in V_m$。由此，span(X_m) 同构于 V_m 的对偶空间，而 GL_m 嵌入到多项式代数的自同构群中。本文后续部分将 V_m 替换为其对偶空间，并假设 GL_m 典范地作用于 span(X_m)（而非 V_m）。若 $g = (g_{ij}) \in GL_m$, 则 $g(x_j) = \sum_{i=1}^{m} g_{ij} x_i$, $j = 1, \ldots, m$。

定义 1.1. 设 G是 GL_m的一个子群。函数 $f(x_1, \ldots, x_m) \in K[x_1, \ldots, x_m]$ 称为 G 的一个（多项式）不变量，若 f是 G的伴随量，即

$$gf(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots, x_m) \text{ for every } g \in G.$$

G 的不变量代数是 $K[x_1, \ldots, x_m]$的子代数

$$K[x_1, \ldots, x_m]^G = \{f \in K[x_1, \ldots, x_m] \mid f \text{ is invariant of } G\}.$$

不变量理论起源于 18 世纪。其主要问题之一是：对于给定的群 G，描述 G的不变量代数。19 世纪，人们发展出最初的方法来解决这一问题。现代研究方法始于 Hilbert [47, 48] 和埃米·诺特 [71]的研究成果。尤其是，Hilbert 和诺特证明了以下著名定理。

定理 1.2。（有限性定理 [71]）设 G 是 GL_m的有限子群。那么，不变量代数 $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ 是有限生成的。它有一组生成元f_1、.....、 f_p，其中每个 f_i 都是次数不超过群 G的阶 $|G|$的齐次多项式。

定理 1.3.（基定理 [47]）每个由有限组生成元 S 、.....、 f_p 生成的交换代数，都可以由有限个关系系定义；也就是说，存在有限组多项式

$$r_1(y_1, \ldots, y_p), \ldots, r_q(y_1, \ldots, y_p) \in K[y_1, \ldots, y_p]$$

使得典范同态的核

$$\nu : K[y_1, \ldots, y_p] \longrightarrow S, \; where \, \nu(y_j) = f_j, \; j = 1, \ldots, p,$$

由 $r_1(y_1, \ldots\ldots, y_p) \ldots\ldots, r_q(y_1, \ldots\ldots, y_p)$ 生成理想。

定理 1.2 也可以推广到某些类的无限群。这里我们给出 Nagata 一个结果的简化版本，该结果推广了 Hilbert 的一条定理。

定理 1.4。（Hilbert-Nagata，参见例如 [17]）设 G 是 GL_m 的一个子群，且 G 的任意有限维有理表示都是完全可约的。那么，不变量代数 $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ 是有限生成的。

定理 1.4 涵盖的群包括有限群、 GL_p、特殊线性群 $SL_p = \{g \in GL_p \mid \det(g) = 1\}$，以及所有半单代数群。Hilbert 在 1900 年于巴黎举行的国际数学家大会上发表著名演讲“Mathematische Probleme”时，提出了问题14：对于 GL_m 的每个子群 G，代数 $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ 是否都是有限生成的？Nagata 给出了否定答案 [70] （另见 [17]）。

传统上，将给出群 $G \subset GL_m$ 的不变量代数的显式生成元的结果称为 G 不变量理论的第一基本定理，而描述生成元之间关系的结果则称为第二基本定理。

例如，若对称群 S_m 通过 $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}, \; \sigma \in S_m, \; i = 1, \ldots, m$ 以典范方式作用于 span(X_m) 的基上，则第一基本定理断言，初等对称函数 $e_i(x_1, \ldots, x_m), \; i = 1, \ldots, m$ 生成 m 变量上的对称多项式代数；第二基本定理则说明它们之间不存在关系，即它们代数独立。满足不变量代数 $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ 同构于多项式代数这一条件的有限群 G 的完整描述由 Shephard 和 Todd [84] 以及 Chevalley [15]给出（另见 [87]）。回顾一下，如果矩阵 $g \in GL_m$ 的特征值中有 $n-1$ 个等于 1，并且此外 span(X_m) 具有由 g的特征向量组成的基，则称其为伪反射。

定理 1.5。（Shephard-Todd-Chevalley [84, 15]）对于 GL_m 的有限子群 G，不变量代数 $K[x_1, \ldots, x_m]^G$ 同构于一个多项式代数，当且仅当 G 由伪反射生成。

若向量空间 W 是其子空间 $W^{(n)}, \; n$ =0, 1, 2, . . . 的直和，则称其为分次的；子空间 $W_{(n)}$ 是 W的 n 次齐次分量。在

我们的讨论中，所有 $W^{(n)}$ 都是有限维的。形式幂级数

$$\mathrm{Hilb}(W,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(\dim_K W^{(n)})t^n$$

称为 W 的 Hilbert（或 Poincar´e）级数。传统上，如果希尔伯特级数收敛，我们便将其与另一个函数 $f(t)$ 视为相同，条件是在 0 的某个邻域内 $\mathrm{Hilb}(W,t)=f(t)$。类似地，如果向量空间 W 是其多重齐次分量的直和 $W^{(n_1,\dots,n_m)}$，则称其为多重分次的；而 W 的希尔伯特级数是关于 m 个变量的形式幂级数

$$\mathrm{Hilb}(W,t_1,\dots,t_m)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\dots\sum_{n_m=0}^{\infty}\dim_K W^{(n_1,\dots,n_m)}t_1^{n_1}\dots t_m^{n_m}.$$

例如，多项式代数 $K[x_1,\dots,x_m]$ 具有典范分次，假定次数为 n 的单项式张成其次数为 n 的齐次分量。类似地，我们可以在 $K[x_1,\dots,x_m]$ 上定义一种多重分次，对每个变量的次数分别计数。显然， $K[x_1,\dots,x_m]$ 的多重齐次分量都是一维的，而且

$$\mathrm{Hilb}(K[x_1,\dots,x_m],t_1,\dots,t_m)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\dots\sum_{n_m=0}^{\infty}t_1^{n_1}\dots t_m^{n_m}=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-t_1}.$$

对于任意群 $G\subseteq GL_m$ ， G 的不变量代数继承了 $K[x_1,\dots,x_m]$ 的分次，而 Molien 公式给出了有限群的不变量代数的希尔伯特级数。

定理 1.6。（Molien 公式 [68]）有限子群 G of GL_m 的不变量代数的希尔伯特级数为

$$\mathrm{Hilb}(K[x_1,\dots,x_m]^G,t)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(1-gt)}.$$

2. 自由结合代数

如上一节，span(X_m), $X_m=\{x_1,\dots,x_m\}$, 是一个 m 维向量空间，其基为 $x_1,\dots,x_m$，并带有 GL_m 的典范作用。由集合 $X_m=\{x_1,\dots,x_m\}$ 自由生成的秩为 m 的自由结合代数 $K\langle X_m\rangle=K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$（或关于 m 个非交换变量的多项式代数）是一个向量空间，其基由所有单项式 $x_{i_1}\dots x_{i_n}$, $i_k=1,\dots,m$, $k=1,\dots,n$, $n=0,1,2,\dots$ 构成，乘法在基上的定义为

$$(x_{i_1}\dots x_{i_p})(x_{j_1}\dots x_{j_q})=x_{i_1}\dots x_{i_p}x_{j_1}\dots x_{j_q}.$$

代数 $K\langle X_m\rangle$ 也由以下泛性质定义，这与所有交换代数范畴中普通多项式代数的泛性质相似： $K\langle X_m\rangle$ 由集合 X_m 生成；对于任意结合代数 R，每个映射 $X_m \longrightarrow R$ 都可以唯一地扩张为一个同态 $K\langle X_m\rangle \longrightarrow R$。容易看出， $K\langle X_m\rangle$ 同构于向量空间 span(X_m) 的张量代数。 GL_m 在 span(X_m) 上的作用可在 $K\langle X_m\rangle$ 上对角地扩张，即

$$g(x_{i_1}\dots x_{i_n}) = g(x_{i_1})\dots g(x_{i_n}),\ g \in GL_m.$$

自由代数 $K\langle X_m\rangle$ 具有自然的多重分次，与多项式代数 $K[X_m]$ 的多重分次类似；相对于 x_i 次数为 n_i 的单项式张成 $K\langle X_m\rangle$ 的多重齐次分量，其多重次数为($n_1, \dots, n_m$)；$K\langle X_m\rangle$的典范分次则按单项式的总次数定义。显然，齐次分量 $K\langle X_m\rangle^{(n)}$ 的基由所有单项式 $x_{i_1}\dots x_{i_n}$, $i_j = 1, \dots, m$,$j = 1, \dots, n$组成，且 dim$K\langle X_m\rangle^{(n)} = m^n$。因此

$$\mathrm{Hilb}(K\langle X_m\rangle, t) = \sum_{n=0}^{\infty} m^n t^n = \frac{1}{1-mt}.$$

类似地，我们得到

$$\mathrm{Hilb}(K\langle X_m\rangle^{(n_1,\dots,n_m)}, t_1, \dots, t_m) = \sum_{i_1=1}^{m} \dots \sum_{i_n=1}^{m} t_{i_1}\dots t_{i_n} = (t_1 + \dots + t_m)^n$$

and

$$\mathrm{Hilb}(K\langle X_m\rangle^{(n_1,\dots,n_m)}, t_1, \dots, t_m) = \frac{1}{1-(t_1 + \dots + t_m)}.$$

本节讨论第1节中的结果在有限线性群作用于 $K\langle X_m\rangle$这一情形下的类似结论。

定义2.1. 若群 $G \subset GL_m$ 由数量矩阵构成，则它通过标量乘法作用于 span(X_m)。

显然，如果 G 是有限的，且通过标量乘法作用，那么 G 是循环群；如果 $|G| = d$，那么 $K\langle X_m\rangle^G$ 同构于向量空间 $K\langle X_m\rangle^{(d)}$ 的张量代数，其中 $K\langle X_m\rangle^{(d)}$ 由所有次数为 d 的齐次非交换多项式构成。由于 dim$K\langle X_m\rangle^{(d)} = m^d$ ，代数 $K\langle X_m\rangle^G$ 同构于秩为 m^d 的自由结合代数。事实证明，埃米·诺特定理1.2的类似结论仅在这一非常特殊的情形下对 $K\langle X_m\rangle^G$ 成立。

定理 2.2。（Korjukin、Dicks 和 Formanek [16], Kharchenko [56]）设 G 是 GL_m的有限子群。那么，当且仅当 G 通过标量乘法作用于 span(X_m) 时， $K\langle X_m\rangle^G$ 才是有限生成的。

Shephard-Todd-Chevalley 定理 1.5 的类似结论对于 $K\langle X_m\rangle$ 而言也截然不同。事实证明，代数 $K\langle X_m\rangle^G$ 总是自由的。此外， G 的子群与包含 $K\langle X_m\rangle^G$ 的 $K\langle X_m\rangle$ 的自由子代数之间存在伽罗瓦对应。

定理 2.3。（Lane [60], Kharchenko [55]）对于 GL 中的每个有限子群 G，不变量代数 $K\langle X\rangle^G$ 都是自由的。

定理 2.4。（Kharchenko [55]）映射 $H \longrightarrow K\langle X_m\rangle^H$ 在 G 的子群与包含 $K\langle X_m\rangle^G$ 的 $K\langle X_m\rangle$ 的自由子代数之间给出一一对应。

最后，定理 1.6 中的 Molien 公式具有如下简洁形式。

定理 2.5。（Dicks 和 Formanek [16]）有限子群 G 的不变量代数 $K\langle X_m\rangle^G$ 的希尔伯特级数为

$$\mathrm{Hilb}(K\langle X_m\rangle^G, t) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{1-\mathrm{tr}(g)t}.$$

3. 作用于相对自由代数上的群

若 I 是 $K\langle X_m\rangle$ 的一个 GL_m不变理想，即$GL_m(I) = I$，则每个$g \in GL_m$ 都会诱导出商代数 $K\langle X_m\rangle/I$ 的一个自同构，因此对于 GL_m的任意子群 G ，我们都可以考虑不变量代数（$K\langle X_m\rangle/I$）^{G} 。特别值得关注的是在 $K\langle X_m\rangle/I$的所有自同态作用下均保持不变的理想 I 。这类理想还可以通过与 PI-代数理论相关的另一种方式来描述。

定义 3.1. 设 R 是一个结合代数。

(i) 若多项式 $f(x_1, \ldots, x_m) \in K\langle x, \ldots, x_m\rangle$ 是R的一个多项式恒等式，则称之为R的多项式恒等式；如果对于任意 $r_1, \ldots, r_m \in R$，都有 $f(r_1, \ldots, r_m) = 0$。若 R满足一个非平凡的多项式恒等式 R ，则称 R为 PI-代数。满足给定多项式恒等式系统 $\{f_j(x_1, \ldots, x_{n_j}) \mid j \in J\}$ 的所有代数构成由该系统确定的代数簇。若该代数簇由 R 的所有多项式恒等式确定，则称其为由 R 生成的代数簇，记作 var(R)。

(ii) R 的 m 元多项式恒等式全体构成的集合 $T_m(R)$称为 $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$的 T-理想。商代数 $F_m(\mathrm{var}R) = F_m(R) = K\langle X_m\rangle/T_m(R)$是簇 var($R$)中的秩为 m 的相对自由代数。

PI-代数的典型例子是满足交换子恒等式的交换代数

$$[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1 = 0$$

以及有限维代数。如果 $\dim R < n$，那么 R 满足 n 次标准恒等式

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} (\mathrm{sign}\pi) x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)} = 0.$$

PI-代数的一个非平凡例子是向量空间 V 的 Grassmann（或外）代数 $E(V)$。如果 V具有基 v_1、v_2、.....，那么 $E(V)$ 具有基 $v_{i_1} \ldots v_{i_n}$，其中 $i_1 < \ldots < i_n$、$n = 0$、1、2、.....，且定义关系为 $e_ie_j = -e_je_i$、i、$j = 1$、2、.....。容易看出，对于任意元素 u_1、$u_2 \in E(V)$，交换子 $[u_1, u_2]$ 属于 $E(V)$ 的子空间，该子空间由长度为偶数的词 $v_{i_1} \ldots v_{i_{2n}}$ 张成，并且位于 $E(V)$ 的中心。因此，$E(V)$ 满足多项式恒等式

$$[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] = 0.$$

Krakowski 和 Regev [58] 已证明，如果 $\dim V = \infty$，那么 $E(V)$ 的所有多项式恒等式都由 $[x_1, x_2, x_3] = 0$ 推出，即 $T_\infty(E(V)) \subset K\langle x_1、x_2、\ldots\rangle$ 与包含 $[x_1, x_2, x_3]$ 的最小 T-理想重合。

容易看出，I 的理想 $K\langle X_m\rangle$ 在$K\langle X_m\rangle$ 的所有自同态下保持不变，当且仅当对于某个 PI-代数 R，有 $I = T_m(R)$。具有 $T_m(R) = I$ 的这类代数R 的一个例子是 $R = K\langle X_m\rangle/I$。结构环论中的早期和近期成果表明，PI-代数类具有许多有限维代数和交换代数的优良性质（例如参见 Jacobson [50], 、Rowen [82] 和 Kemer[54]的著作）。对相对自由代数的研究不仅受到不变量理论的推动。关于 PI-代数 R 的多项式恒等式的所有信息，都可以从它的相对自由代数 $F_m(R)$、$m = 1$、2、.....中获得。如果 R是有限维的，那么只需研究 $F_m(R)$，其中 $m = 1$为 2、.....、$\dim R$。

$T_m(R)$ 的每个 T-理想都是 $K\langle X_m\rangle$ 的多齐次向量子空间，即 $T_m(R) = \sum^{\oplus}((K\langle X_m\rangle)_{(n_1,\ldots,n_m)} \cap T_m(R))$，而相对自由代数 $F_m(R)$ 继承了 $K\langle X_m\rangle$ 的（多重）分次。类似地，$F_m(R)$ 继承了 GL_m 在 $K\langle X_m\rangle$ 上的作用。事实证明，希尔伯特级数 Hilb($F_m(R)$ $t_1, \ldots, t_m$) 起到了 GL_m 在 $F_m(R)$ 中的表示特征标的作用。

定理 3.2。（Formanek [35, 第 2 节和 3]）设 $F = F_m(R)$ 是相对自由代数，其希尔伯特级数为 Hilb($F_m(R)$ $t_1, \ldots, t_m$)，并设 $g = \xi_1e_{11} + \ldots + \xi_me_{mm} \in GL_m$

是一个对角矩阵，对角线上的元素为 $\xi_1, \ldots, \xi_m$。那么，形式幂级数 Hilb($F_m(R)$ $\xi_1 t, \ldots, \xi_m t$) 等于序列 $\mathrm{tr}_{F^{(n)}}(g), n = 0, 1, 2, \ldots$ 的生成函数，即

$$\chi_{F^{(n)}}(g) = \mathrm{tr}_{F^{(n)}}(g) = \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} \dim F^{(n_1,\ldots,n_m)} \xi_1^{n_1} \ldots \xi_m^{n_m}.$$

在所有已知 $F_m(R)$ 的希尔伯特级数显式形式的 PI-代数情形中，计算 Hilb($F_m(R)$ $t_1, \ldots, t_m$) 都是描述 GL_m- 模 $F_m(R)$ 结构的结果。传统上（参见 Regev 的结果，例如 [81]），人们研究代数R的 S_n-余特征标序列 $\chi_{S_n}(R)$、 $n = 0$、1、2、.....。它被定义为对向量空间 $P_n/(P_n \cap T_n(R))$ 上作用的对称群 S_n 的特征标序列，其中 P_n 是 $K\langle X_n\rangle$ 中关于x_1、.....、 x_n 的所有多线性多项式的集合。众所周知， S_n 的不可约表示与 GL_m 的不可约多项式表示，都可以用分拆和杨图以相同的方式描述。作者 [19] 与 Berele [7] 独立地证明了，对于任意 $n = 0$、1、2、.....， $P_n/(P_n \cap T_n(R))$ 的 S_n-模结构与 $F_m^{(n)}(R)$ 的 GL_m-模结构相同。

将 [58]的结果转化为 GL_m-模的语言，在无限维向量空间的格拉斯曼代数 E 这一特殊情形下，我们得到（例如参见 [14]）

$$\mathrm{Hilb}(F_m(E), t_1, \ldots, t_m) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1+t_i}{1-t_i}.$$

从 T-理想结构理论的角度来看，最重要的 PI-代数是矩阵代数 $M_k(K)$、以格拉斯曼代数 E 中的元素为条目的矩阵代数 $M_k(E)$，以及 $M_k(E)$ 的某些子代数（见 [54]）。特别地，根据 Amitsur 的一个经典结果（见 [82, 推论 2.4.10，第 135]页）， $F_m(M_k(K))$ 是唯一的半素相对自由代数。由 Razmyslov-Kemer-Braun 关于有限生成 PI-代数的根的幂零性的定理 [79, 52, 11] 可知，对于任意 PI-代数 R 以及任意正整数 m ，存在一对整数 k 和 c ，使得 $T_m(M_k(K)) \supseteq T_m(R) \supseteq T_m^c(M_k(K))$。通过这种方式，矩阵代数的多项式恒等式可以用来衡量代数 R 中关于 m 个变量的多项式恒等式有多复杂。对于 R 的所有多项式恒等式进行计数的更精确分类由 Kemer [54]给出；他仿照多项式代数中理想的结构理论，发展了 T-理想的结构理论。从这一点

来看，最简单的 T-理想是非矩阵型的，即不包含于 $T_m(M_2(K))$ 中的那些 T-理想。根据 Latyshev 的一个结果 [61]，如果 R 是一个具有非矩阵型 T-理想的有限生成 PI-代数，那么 R 满足某个 c的多项式恒等式 $[x_1, x_2]\dots[x_{2c-1}, x_{2c}] = 0$。在第5节中，我们将把 $F_m(M_k(K))$ 作为 $k \times k$ 阶矩阵的泛代数来实现。$F_m(M_k(K))$ 的希尔伯特级数的显式表达式，目前仅在 2×2 阶矩阵的情形下已知（对于 $m = 2$ 和任意 m，分别见 [31] 和 [35, 76, 20]）。

现在我们概述第1节主要结果在相对自由代数中的类似结论。事先很难猜测这种情况下不变量代数的表现。组合学和结构环论中的许多结果表明，相对自由代数比起自由结合代数，更接近多项式代数。尽管如此，如果 T-理想 $T_m(R)$“足够大”，自然可以预期 $K[X_m]^G$ 的许多性质都能转移到 $F_m(R)^G$；而如果 $T_m(R)$“较小”，那么 $F_m(R)^G$ 的表现就如同 $K\langle X_m\rangle^G$。我们从有限生成 $F_m(R)^G$ 这一问题开始。对于不同的 PI-代数 R 和不同的有限群 G，答案应当介于定理 1.2 与定理 2.2 之间。事实证明，对于任意群 G，使代数 $F_m(R)^G$ 有限生成的 T-理想 $T_m(R)$，可以用诺特代数、多项式恒等式（也包括 2×2 矩阵的情形）乃至代数与逻辑交界处的判定问题等语言，作出几种不同的刻画。

首先定义　一列 PI-代数 R_k, $k = 1, 2, \dots$。令 $C_k = K[t]/(t^k)$，并令　t

$$R_k = \begin{pmatrix} C_k & tC_k \\ tC_k & C_k \end{pmatrix} \subset M_2(C_k),$$

其中 $M_2(C_k)$ 是以 C_k 中元素为系数的 2×2 矩阵代数。这些代数“几乎”刻画了严格包含 T-理想 $T_m(M_2(K))$ [21] 的 T-理想。若 $T_m(R) \supset T_m(M_2(K))$，$m > 1$，则存在正整数 k 和有限维代数N，使得 N模其 Jacobson 根是一维的，且 $T_m(R) = T_m(R_k \oplus N)$。这些 T-理想的另一种刻画见 [53]。

定理 3.3。设 R 是一个 PI-代数。代数 R满足以下条件，当且仅当这些条件彼此等价。若其中某个条件对某个 $m_0 \geq 2$成立，则所有条件对所有$m \geq 2$都成立：

(i) 代数　$F_m(R)^G$ 对每个 GL_m的有限子群 G 都是有限生成的。

(ii) 代数 $F_m(R)^{\langle g\rangle}$ 是有限生成的，其中 $g \in GL_m$ 是一个具有有限乘法阶的矩阵，且至少有两个乘法阶不同的特征值（或特征根）。

(iii) 代数 $F_m(R)$ 是弱诺特的，即满足关于双边理想的升链条件。

(iv) 设 S 是一个满足 R 的所有多项式恒等式的代数（即 $S \in \mathrm{var}(R)$），并由 m 个元素 s_1、.....、s_m 生成。那么， S 是 $F_m(R)$ 的同态像，且为有限呈示代数；也就是说，由 $x_i \longrightarrow s_i$、 $i = 1$、.....、m 定义的典范同态 $F_m(R) \longrightarrow S$ 的核是 $F_m(R)$ 的有限生成理想。

(v) 若 S 是来自 var(R) 的有限生成代数，那么 S 是残余有限的；也就是说，对于每个元素 $s \in S$，都存在一个有限维代数 D 和一个同态 $\phi: S \longrightarrow D$，使得 $\phi(s) \neq 0$。

(vi) 若 S 是来自 var(R) 的有限生成代数，那么 S 是矩阵可表示的；也就是说，存在基域 K 的一个扩张 L 和一个整数 k，使得 S 同构于由所有元素取自 L 的 $k \times k$ 矩阵构成的 K- 代数 $M_k(L)$ 的一个子代数。

(vii) 如果基域 K 可数，那么 $F_m(R)$ 的任意一组两两不同构的同态像都是可数的。

(viii) 代数 R 满足如下形式的多项式恒等式

$$x_2 x_1^{n-2} x_2 + \sum_{i+j>0} \alpha_{ij} x_1^i x_2 x_1^{n-i-j-2} x_2 x_1^j = 0,\ \alpha_{ij} \in K.$$

(ix) 代数 R 满足多项式恒等式

$$[x_1, x_2, \ldots, x_2] x_3^n [x_4, x_5, \ldots, x_5] = 0$$

对于足够长的交换子，且 n 足够大。

(x) 如果代数 R 是有限生成的，那么它满足多项式恒等式

$$[x_1, \ldots, x_n] x_{n+1} \ldots x_{2n} [x_{2n+1}, \ldots, x_{3n}] = 0$$

其中某个正整数 n。

(xi) 代数 R 满足一个不能由这些多项式恒等式推出的多项式恒等式

$$[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0,$$

$$[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0,$$

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

(xii) T-理想 $T_m(R)$ 不包含在上文定义的 T-理想 $T_m(R_3)$ 中。

Kharchenko [56], 证明了 (i) 与 (iii) 等价；L'vov [65], 证明了 (iii) 与 (viii) 等价；Anan'in [3], 证明了 (iii)、(v)、(vi)、(ix) 和 (x) 等价；Tonov[92], 证明了 (viii) 与 (xi) 等价；作者 [23] 证明了 (ii)、(viii) 与 (xii) 等价，而 (iii)、(iv) 和 (vii) 等价显而易见。我们应当回顾 Malcev [66]的论文，它是许多关于可表示代数的结果的出发点。条件 (ii) 是 Fisher 和 Susan Montgomery [30] 一项结果的推广，该结果指出：若 $T_m(R) \subseteq T_m(M_2(K))$,$g \in GL_m$, $g^n = 1$ 和 g 至少有两个乘法阶不同的特征根，则不变量代数 $F_m(R)^{\langle g \rangle}$ 不是有限生成的。我们认为，(ii) 可用作检验定理 3.3 中等价条件的一个简单判据。只需选取 $m = 2$ 和

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果 $F_2(R)^{\langle g \rangle}$ 是有限生成的，那么对于任意 $m > 1$，所有断言 (i) - (xii) 对 $F_m(R)$ 和 $T_m(R)$ 都成立。

如上所述，最值得研究的相对自由代数是$F_m(M_k(K))$。我们给出 Formanek 和 Schofield [42]以及 Fisher 和 Susan Montgomery [30]的两个结果。

定理 3.4. (i) (Formanek 和 Schofield [42]) 设 G 是群 SL_2 中由所有行列式为 1 的 2×2 矩阵组成的有限子群。那么，不变量代数$F_2(M_2(K))^G$ 是有限生成的。

(ii) (Fisher 和 Susan Montgomery [30]) 设 G 是 GL_m 的一个有限循环子群，它在 span(X_m) 上的作用不是标量乘法。那么存在一个整数 k，使得不变量代数 $F_m(M_k(K))^G$ 不是有限生成的。

根据定理 3.3 (ii)，研究代数 $F_m(R)^{\langle g \rangle}$ 时， $g \in GL_m$ 的特征值是否具有不同的乘法阶至关重要。对于具有非矩阵型 T-理想的代数，最简单的情形下有如下结果。

定理 3.5. [23]设 R 是一个满足非矩阵多项式恒等式的 PI-代数（即对于某个 n， $T_n(R)$ 不包含于 $T_n(M_2(K))$）。如果 $g \in GL_m$ 是一个所有特征值的阶都相同的矩阵，那么不变量代数 $F_m(R)^{\langle g \rangle}$ 是有限生成的。

我们不讨论 $F_m(R)^G$ 的有限生成问题（参见定理 1.3 的希尔伯特基定理）。根据 Markov 的一项结果，只有极少数 T-理想 $T_m(R)$ 能作为 $K\langle X_m \rangle$ 的理想有限生成。

定理 3.6。（Markov [67]）T-理想 $T_m(R)$, $m > 1$, 作为理想有限生成，当且仅当代数 R 满足 Engel 恒等式 $x_2(\mathrm{ad}x_1)^n = 0$ ，其中 n。

Here $x_2(\mathrm{ad}x_1) = [x_2, x_1]$ 是 $K\langle X_m$的李乘法算子 $\rangle$.

Kemer [54] 的一项结果非常重要：它证明 T-理想可作为 T-理想有限生成，并对著名的 Specht 问题 [86]给出了肯定的回答。

定理 3.7。（Kemer [54]）无限秩自由结合代数$K\langle X_\infty\rangle = K\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$ 的每个 T-理想 $T(R)$都可作为 T-理想有限生成；也就是说， $K\langle X_\infty\rangle$ 的 T-理想（因此 $K\langle X_m\rangle$中的 T-理想）满足升链条件。

事实证明，Chevalley-Shephard-Todd 定理 1.5 的类似结论极少适用于相对自由代数。设 G 是 GL_m的有限非平凡子群。由包含关系 $T_m(M_k(K)) \supseteq T_m(R) \supseteq T_m^c(M_k(K))$（其中某些 k 和 c ）可知， $T_m(M_k(K))/T_m(R)$是 $F_m(R) \cong K\langle X_m\rangle/T_m(R)$的 Jacobson 根，并且不变量代数 $F_m(R)^G$ 是相对自由代数，当且仅当代数 $F_m(M_k(K))^G$是相对自由代数。Guralnick [43] 已证明，对于任意 $k > 1$ 和 $m > 1$， $F_m(M_k(K))^G$ 都不是相对自由代数。因此，若代数 R 满足 $F_m(R)^G$ 为相对自由代数，则它们应满足一个非矩阵多项式恒等式。Domokos [18]最近给出了完整答案。

定理 3.8。（Guralnick [43], Domokos [18]）对于 G 的有限非平凡子群GL_m、$m > 1$以及 PI-代数 R，不变量代数 $F_m(R)^G$ 是相对自由的，当且仅当 G 由伪反射生成，且 R 满足多项式恒等式$[x_2, x_1, x_1] = 0$。

根据 [58] ，多项式恒等式 $[x_1, x_2, x_3] = 0$ 生成了无限维向量空间的格拉斯曼代数 E 的 T-理想，而且很容易看出，多项式恒等式 $[x_1, x_2, x_3] = 0$ 与 $[x_2, x_1, x_1] = 0$ 是等价的。因此，定理 1.5 的类似结论仅在两个极端情形下成立——代数 R 要么非常接近交换代数，要么不满足任何多项式恒等式（见定理 2.2）。

最后，Formanek 的以下结果 [36] 是定理 1.6 中 Molien 公式对于相对自由代数的一个类比。

定理 3.9。 [36,定理 7] 设 R 是一个 PI-代数，设 G 是GL_m 的一个有限子群，并设 $\xi_1(g) \ldots, \xi_m(g)$ 是 $g \in G$的特征值。那么， G 作用于相对自由代数 $F_m(R)$ 所得的不变量代数的希尔伯特级数为

$$\mathrm{Hilb}(F_m(R)^G, t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Hilb}(F_m(R), \xi_1(g)t, \ldots, \xi_m(g)t).$$

在交换代数的特殊情形下，当 $F_m(R) = F[x_1, \ldots, x_m]$ 时，我们得到

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1-\xi_i(g)t} = \frac{1}{\det(1-gt)}$$

这立即给出定理 1.6 中的 Molien 公式。在另一个极端情形 $F_m(R) = K\langle X_m\rangle$ 下，也就是说，当 $T_m(R) = \{0\}$ 时，我们得到

$$\mathrm{Hilb}(K\langle X_m\rangle, \xi_1(g)t, \ldots, \xi_m(g)t) = \frac{1}{1-(\xi_1(g)+\ldots+\xi_m(g))t} = \frac{1}{1-\mathrm{tr}(g)t}$$

由此得到定理 2.5。考察定理 3.9 的证明，很容易看出，对于不变量代数 $(K\langle X_m\rangle/I)^G$，只要理想 I of $K\langle X_m\rangle$ 在 $K\langle X_m\rangle$ 上的 GL_m-作用下保持不变，该结果在更一般的设定下仍然成立。

4. 群在自由李代数上的作用

回顾一下，若（非结合）代数 R 满足雅可比恒等式，则称其为李代数

$$(x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2 = 0$$

以及反交换恒等式

$$x_1^2 = 0 \,(\text{or equivalently } x_1x_2 = -x_2x_1).$$

李代数的一个典型例子是与结合代数 R 相关联的代数 $R^{(-)}$，其乘法改为 $[r_1, r_2] = r_1r_2 - r_2r_1$, $r_1, r_2 \in R$。著名的 Poincar´e-Birkhoff-Witt 定理指出，任何李代数都同构于某个结合代数 R 的子代数 $R^{(-)}$。特别地，根据 Witt 定理，秩为 m 的自由李代数 $L_m = L(X_m)$ 同构于自由结合代数 $K\langle X_m\rangle$ 中由 $x_1, \ldots, x_m$ 生成的李子代数。为便于讨论，我们将 $L(X_m)$ 视为 $K\langle X_m\rangle$ 的李子代数，并用方括号表示李代数中的乘法。作为向量空间，$L(X_m)$ 继承了 $K\langle X_m\rangle$ 的（多重）分次，其希尔伯特级数由 Witt 公式给出

$$\mathrm{Hilb}(L_m, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \mu(d) m^{n/d} \frac{t^n}{n},$$

其中 $\mu(d)$ 是 Möbius 函数。根据 Shirshov 定理，自由李代数的任何子代数也是自由的。

逐字重复结合代数中的论证，可以为李代数引入多项式恒等式、相对自由代数、不变量等概念。关于李代数的多项式恒等式背景，我们参考 [5]。结合代数与李 PI-代数之间的主要区别在于，多项式恒等式的存在对结合代数是一个非常强的限制，而对李代数的结构和组合性质影响不大。从这个角度看，李 PI-代数更接近满足恒等关系的群。因此，成熟的组合群论方法首先被移植到李代数中，随后又被应用于结合代数。本节总结有限线性群作用于自由李代数和相对自由李代数时不变量的一些结果。由于（相对）自由李代数处于（相对）自由结合代数与（相对）自由群之间的中间位置，因此可以预期，李情形中不变量的性质也介于结合情形中的不变量与有限自同构群作用下（相对）自由群的不动点子群之间。

根据恩格尔定理，如果 R 是满足恩格尔条件的有限维李代数，那么 R 是幂零的，也就是说，存在正整数 c，使得 $[x_1, \ldots, x_c] = 0$是 R的一个多项式恒等式。根据 Kostrikin 的结果，满足恩格尔多项式恒等式 $x_2(\mathrm{ad}x_1)^n = 0$ （其中某个 n ）的有限生成李代数也都是幂零的。最近，Zel'manov 证明了恩格尔恒等式蕴含李代数的幂零性，而不受有限生成的限制。容易看出，如果 $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$是李代数 R的一个多项式恒等式，并且$f(x_1, \ldots, x_m) \in L(X_m)$不属于 L_m的导出列的第二项 $L''_m = [[L_m, L_m], [L_m, L_m]]$，那么 $f(x_1, \ldots, x_m) = 0$蕴含恩格尔恒等式。因此，对于 L_m 的一个 T-理想 $T_m(R)$，要么 $T_m(R) \subseteq L''_m$ ，要么相对自由李代数 $F_m(R)$是幂零的（因而是有限维的）。如果 $T_m(R_1) \subseteq T_m(R_2)$是 L_m中的两个 T-理想，则存在一个典范同态

$$\pi : F_m(R_1) \cong L_m/T_m(R_1) \longrightarrow L_m/T_m(R_2) \cong F_m(R_2).$$

如果 G 是 GL_m 的有限子群，那么 $\pi(F_m(R_1)^G) \subseteq F_m(R_2)^G$。由马施克定理可以很容易地推出， $F_m(R_2)$的每个不变量都可以提升为 $F_m(R_1)$的不变量，即 $\pi(F_m(R_1)^G) = F_m(R_2)^G$。因此，如果李代数 R 不是幂零的，并且 G 是作用于 L_m上的有限线性群，那么 G 在 $F_m(R)$ 中的不变量性质应当与自由李代数 L_m 和自由后代李

代数 L_m/L''_m中的相应性质相似。 L_m/L''_m 的结构是众所周知的。它有一个由所有交换子组成的基

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}],\ m \geq i_1 > i_2 \leq \ldots \leq i_n \leq m,\ n = 1, 2, \ldots .$$

计算 L_m/L''_m 的希尔伯特级数很容易（例如参见 [24]）

$$\mathrm{Hilb}(L_m/L''_m, t_1, \ldots, t_m) = 1 + (t_1 + \ldots + t_m) + (t_1 + \ldots + t_m - 1)\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - t_i}.$$

Bryant [12] 已证明，对于 GL_m 的任意非平凡有限子群 G，不变量代数 L_m^G 都不是有限生成的。Belov [6] 也证明了 G 为循环群时的部分情形。我们应将这一结果与 Dyar 和 Scott [29] 的定理进行比较：该定理指出，对于自由群 F_m 的任意有限自同构群 G，不动点群 $F_m^G = \{f \in F_m \mid g(f) = f, g \in G\}$ 是有限生成的。在同一篇论文 [12] 中，Bryant 还为由有限个齐次元素生成的 L_m 子代数给出了 Witt 公式的一个类比。Bryant 的方法不依赖特征，他的结果适用于主理想整环上的自由李代数 K。作者 [24] 处理了另一极端情形（L_m/L''_m）^{G}，由此得到了 $F_m(R)^G$ 在 $F_m(R)$ 非幂零时的情形；进一步推广参见 [24] 。

定理 4.1。 [12, 24] 设 G 是 GL_m的一个非平凡有限子群， $m \geq 2$，且令R 为一个李代数。不变量代数 $F_m(R)^G$ 是有限生成的，当且仅当R 是幂零的。

关于作用于自由后代数的群的另一个结果归于 Bryant [13]，并且可能对非交换不变量理论有用。设 G 为一个有限群。若 G-模W 是 G的子模 W_i、 $i \in I$的直和，并且每个 W_i 都同构于作为左 G-模考虑的群代数 KG，则它是自由的。这意味着，对于每个 $i \in I$，存在一个元素 $w_i \in W_i$，使得作为向量空间， W_i 具有基 $\{g(w_i) \mid g \in G\}$。

定理 4.2. [13] 设 G 是 GL_m 的一个有限子群， c是 G 中以标量乘法作用于自由后亚贝尔李代数$M \cong L_m/L''_m$的元素个数。记 W_n, $n = 1, 2, \ldots$ 为 G-模 M^n/M^{n+c}的一个极大自由子模，其中 M^n 是 M的 n次幂，即由所有长度为 $\geq n$的交换子张成的向量空间。那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim W_n}{\dim(M^n/M^{n+c})} = 1,$$

也就是说，当 n 很大时， G-模 M^n/M^{n+c} 非常接近一个自由模。

5. 一般矩阵代数

本节从构造相对自由代数 $F_m(M_k(K)) = K\langle X_m\rangle/T_m(M_k(K))$ 开始，其中 $M_k(K)$ 是一个以基域 K 中的元素为矩阵元的 $k\times k$ 矩阵代数。Procesi [2]提出的这一构造，在环的结构理论、不变量理论、除法代数理论等领域有重要应用（例如参见 [50]和 [82]）。在本节余下部分，我们固定正整数 k 作为矩阵的阶数，固定正整数 m 作为生成元的个数。令

$$\Omega = K[x_{pq}^{(i)} \mid p,q = 1,\dots,k,\ i = 1,\dots,m]$$

为由 k^2m 个交换变量构成的多项式代数。

定义 5.1. 矩阵

$$x_i = (x_{pq}^{(i)}) = \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} x_{pq}^{(i)} e_{pq} \in M_k(\Omega),\ i = 1,\dots,m,$$

其中 e_{pq} 为矩阵单位，称为一般矩阵，并生成一般矩阵代数 R_{km}。我们用 C_{km} 表示由 R_{km} 中所有元素的迹生成的 Ω 的子代数。泛迹代数 T_{km} 是由 R_{km} 和 C_{km} 生成的 M_k(Ω) 的子代数（其中我们将迹视为数量矩阵）。

代数 T_{km} 以一种自然的方式进行多重分次，按单项式 $x_{i_1}\dots x_{i_n}$ 及其迹 tr($x_{i_1}\dots x_{i_n}$) 中 x_i 的出现次数计数。例如

$$\mathrm{tr}(x_2x_1x_3x_2)\mathrm{tr}(x_1)x_2x_1x_2$$

具有多重次数 (3, 4, 1, 0, . . ., 0)。

命题 5.2. 典范满同态的核

$$\pi : K\langle X_m\rangle \longrightarrow R_{km}$$

由 $\pi(x_i) = (x_{pq}^{(i)}) \in R_{km}$, $i = 1,\dots,m$ 定义，等于 $T_m(M_k(K))$；也就是说，泛矩阵代数 R_{km} 与相对自由代数 $F_m(M_k(K))$ 同构。

群 GL_k 在一般矩阵 $x_i \in R_{km}$ 上的伴随作用定义为共轭作用

$$g * x_i = gx_ig^{-1} = (f_{pq}^{(i)}),$$

$g \in GL_k$, $f_{pq}^{(i)} \in \Omega$, $p, q = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, m$. 由于 GL_k 的中心在 x_i 上作用平凡，因此我们得到射影特殊线性群 PSL_k 在

$$\mathrm{span}\{x_{pq}^{(i)} \mid p, q = 1, \ldots, k,\ i = 1, \ldots, m\}$$

定义为

$$g : x_{pq}^{(i)} \longrightarrow f_{pq}^{(i)},\ g \in PSL_k, p, q = 1, \ldots, k,\ i = 1, \ldots, m,$$

因此也定义了 PSL_k 在多项式代数 Ω 上的作用。本节的主要目的是概述不变量代数 Ω^{PSL_k} 的一些性质，该代数称为 m 一般 $k \times k$ 矩阵的（同时）不变量代数。关于 1986 年之前研究成果的更详细阐述，请参阅 Formanek [39] 的综述（另见他的著作 [40]）。关于从交换代数、代数几何和代数表示论的角度来看颇有意义的矩阵不变量代数的其他性质，也可参阅 Van den Bergh [93]的论文。

由于

$$\mathrm{tr}(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) = \mathrm{tr}(g x_{i_1} g^{-1} \ldots g x_{i_n} g^{-1})$$

对于任意单项式 $x_{i_1} \ldots x_{i_n} \in R_{km}$ 和任意 $g \in GL_k$，我们得到

$$\mathrm{tr}(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) \in \Omega^{PSL_k},$$

即 $C_{km} \subseteq \Omega^{PSL_k}$。矩阵不变量第一基本定理指出，这两个代数相同。

定理 5.3。（矩阵不变量第一基本定理，[44, 定理 16.2], [74, 定理 1.3], [85, 定理 1]）m 一般 $k \times k$ 矩阵的同时不变量代数 Ω^{PSL_k} 由一般迹环 T_{km} 中所有单项式的迹 tr($x_{i_1} \ldots x_{i_n}$)生成，即 $C_{km} = \Omega^{PSL_k}$。

回顾一下，如果 G 是一个群，且 V 和 W 是 G-模，那么 G 在张量积 $V \otimes W$ 上按对角方式作用，即

$$g(v \otimes w) = g(v) \otimes g(w),\ g \in G, v \in V, w \in W.$$

特别地，如果 G 作用于代数 R 和 $k \times k$ 矩阵代数 $M_k(K)$，我们将矩阵代数 $M_k(R) \cong R \otimes_K M_k(K)$ 上、元素来自 R 的对角作用定义为

$$g(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} r_{ij} e_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} g(r_{ij}) g(e_{ij}),\ g \in G, r_{ij} \in R.$$

下一个结果将一般迹环描述为矩阵伴随不变量构成的代数。

定理 5.4。（[74, 第 2], [35, 节定理 10]）令 GL_k 按照上述描述作用于 Ω，并通过 $g(a) = g^{-1}ag$作用于 $M_k(K)$，其中 $a \in M_k(K)$且 $g \in GL_k$。（注意，与由一般矩阵 $x_i = (x_{pq}^{(i)})$上的作用所诱导的 GL_k 在 Ω 上的作用相比，g^{-1} 和g 的作用顺序相反。）这在 $M_k(\Omega) \cong \Omega \otimes_K M_k(K)$ 上诱导出 GL_k 的对角作用，而泛迹代数就是该作用的不变子代数。

最近，Seelinger [83] 推广了定理 5.4，并找到了 GL_k 在 $M_k(\Omega)$ 的张量幂 $M_k(\Omega)^{\otimes n}$ 上的作用所对应的不变量。更多信息请参阅他的论文。

根据定理 1.4，不变量代数 Ω^{PSL_k} 是有限生成的，因此随即出现的问题便是为生成元的次数找到一个界。为此，我们回顾经典的 Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman 定理 [28, 69, 46]，该定理涉及有界指标的幂零代数的幂零性。

定理 5.5. 设 R 是特征为 0 的域 K 上的非含幺结合代数，并且 R 满足多项式恒等式 $x^k = 0$。存在一个整数 $d = d(k)$，它仅依赖于 k，使得 R 的幂零类为 d，即 R 满足多项式恒等式 $x_1 \dots x_d = 0$。

事实证明，C_{km} 的生成元的次数与定理 5.5 中的幂零代数 $d(k)$ 的幂零类之间存在一种简洁的关系。

定理 5.6.（Formanek [38, 定理 6], Procesi [74, 定理 3.3], [75, 定理 4.3], Razmyslov [80, 最后的评述]）对于固定的正整数 k，代数 C_{km} 由迹 $\mathrm{tr}(x_{i_1} \dots x_{i_n})$ 构成的集合生成，其次数 n 不超过指标为 k 的幂零代数的幂零类 $d(k)$。当 m 足够大时，上界 $n \leq d(k)$ 是精确的。

$d(k)$目前已知的最佳界

$$\frac{k(k+1)}{2} \leq d(k) \leq k^2$$

分别归功于 Kuz'min [59]和 Razmyslov [80]。目前已知的 $d(k)$ 精确值仅适用于 $k \leq 3$ [27]:

$$d(1) = 1, d(2) = 3, d(3) = 6.$$

Siberskii[85] 已找到 2×2矩阵不变量的一组极小生成元（见下文定理 5.10）。Silvana Abeasis 和 Marilena Pittaluga [1] 提出了一种算法，用于寻找 C_{km} 的一组极小生成元。通过将计算机与

手工计算相结合，他们成功地将该算法应用于 3×3矩阵的情形。

第二基本定理，或描述 $k \times k$ 矩阵不变量代数定义关系的问题（见定理 1.3），包含两个方面。其中一个方面是处理代数 C_{km} 在固定 m时的情形。另一个方面是考察多线性不变量，因为自由代数中每个可数秩的 T-理想 $T(R)K\langle x_1, x_2, \ldots\rangle$ 都由其多线性元素作为 T-理想生成，而关于 $K[x_{pq}^{(i)} \mid i = 1, 2, \ldots]$的不变量之关系理想也有类似的结论。第二个方面已由 Helling-Razmyslov-Procesi 定理 [45, 80, 74]完全解决。详情请参见 [39], 这里只陈述该结果的一个版本。我们需要先进行一些准备性讨论。对于固定的 n ，我们将排列 $\sigma \in S_n$ 写成不相交循环的乘积

$$\sigma = (i_1 \ldots i_p) \ldots (j_1 \ldots j_q),$$

也包括 1-循环，因此每个整数 $1, \ldots, n$ 都恰好出现一次。我们定义相应的迹函数

$$\mathrm{tr}_\sigma(x_1 \ldots x_n) = \mathrm{tr}(x_{i_1} \ldots x_{i_p}) \ldots \mathrm{tr}(x_{j_1} \ldots x_{j_q}),$$

其中 $x_1, \ldots, x_n$ 是一般的 $k \times k$ 矩阵。我们还假设，对于 $m \leq n$ ，对称群 S_m 作用于 $1, \ldots, m$ ，并保持 $m+1, \ldots, n$不变，即 S_m 被典范地嵌入到 S_n中。

定理 5.7.（矩阵不变量的第二基本定理， [45, 80, 74]）设

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \mathrm{tr}_\sigma(x_1 \ldots x_n),\ \alpha_\sigma \in K,$$

是次数为 n的多重线性迹多项式。那么，对于$k \times k$矩阵代数， $f = 0$ 是迹恒等式，即对所有 $a_1, \ldots, a_n \in M_k(K)$，都有 $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$，当且仅当$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma$ 属于由元素 $\sum_{\sigma \in S_{k+1}} (\mathrm{sign}\sigma)\sigma$生成的群代数 KS_n 的双边理想。

基本迹恒等式

$$\sum_{\sigma \in S_{k+1}} (\mathrm{sign}\sigma)\mathrm{tr}_\sigma(x_1 \ldots x_n) = 0$$

实际上是 Cayley-Hamilton 定理的线性化。我们以 2×2矩阵为例。对于任意矩阵 $x \in M_2(K)$，Cayley-Hamilton 定理指出

$$x^2 - \mathrm{tr}(x)x + \det(x) = 0.$$

由于基域是代数闭的，矩阵 x 与一个上三角矩阵相似

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \eta \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}$$

且 $\mathrm{tr}(x) = \xi_1 + \xi_2$、$\det(x) = \xi_1\xi_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2(x) - \mathrm{tr}(x^2))$，并将凯莱-哈密顿定理改写为

$$c(x) = x^2 - \mathrm{tr}(x)x + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2(x) - \mathrm{tr}(x^2)) = 0.$$

现在我们将恒等式 $c(x) = 0$线性化，即考虑迹恒等式 $c(x_1 + x_2) - c(x_1) - c(x_2) = 0$，并得到

$$h(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2x_1 - \mathrm{tr}(x_1)x_2 - \mathrm{tr}(x_2)x_1 + \mathrm{tr}(x_1)\mathrm{tr}(x_2) - \mathrm{tr}(x_1x_2) = 0.$$

由于迹是 $M_2(K)$ 上的非退化双线性形式，因此多项式 $h(x_1, x_2)$ 在 $M_2(K)$ 上消失，等价于 $\mathrm{tr}(h(x_1, x_2)x_3)$ 在所有 2×2矩阵上消失；也就是说，$\mathrm{tr}(h(x_1, x_2)x_3)$ 在迹环 $T_{2m}, m \geq 3$ 中等于 0。直接计算可得

$$0 = \mathrm{tr}(h(x_1, x_2)x_3) = \mathrm{tr}(x_1x_2x_3) + \mathrm{tr}(x_2x_1x_3) - \mathrm{tr}(x_1)\mathrm{tr}(x_2x_3) -$$

$$-\mathrm{tr}(x_2)\mathrm{tr}(x_1x_3) + \mathrm{tr}(x_1)\mathrm{tr}(x_2)\mathrm{tr}(x_3) - \mathrm{tr}(x_1x_2)\mathrm{tr}(x_3) =$$

$$= \mathrm{tr}_{(123)}(x_1, x_2, x_3) + \mathrm{tr}_{(213)}(x_1, x_2, x_3) - \mathrm{tr}_{(23)(1)}(x_1, x_2, x_3) -$$

$$-\mathrm{tr}_{(13)(2)}(x_1, x_2, x_3) + \mathrm{tr}_{(1)(2)(3)}(x_1, x_2, x_3) - \mathrm{tr}_{(12)(3)}(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_3} (\mathrm{sign}\sigma)\mathrm{tr}(x_1, x_2, x_3).$$

考虑代数 C_{km} 的定义关系，对于固定的 m，已知 C_{km} 的超越次数为

$$\mathrm{trans.deg.}(C_{km}) = (m-1)k^2 + 1,$$

也就是说，代数 C_{km} 包含 $(m-1)k^2 + 1$ 个代数独立元素，并且每 $(m-1)k^2 + 2$ 个元素都满足一个非平凡的代数方程。对于 2×2 矩阵，这个结果表述如下。

定理 5.8。 [4, 定理 6]这些多项式

$$\mathrm{tr}(x_p), \mathrm{tr}(x_p^2), \mathrm{tr}(x_1x_p), \mathrm{tr}(x_2x_q),\ p = 2, \ldots, m, q = 3, \ldots, m,$$

构成 F_{2m} 的代数独立元素极大集。

设 $Q(C_{km})$ 为 C_{km} 的商域。一个众所周知且重要的问题是，$Q(C_{km})$ 是否为基域 K 的纯超越扩张；也就是说，是否存在 $n =$ 个超越次数为 trans.deg.(C_{km}) 的元素 $u_1, \ldots, u_n$，它们来自 $Q(C_{km})$，使得 $Q(C_{km})$ 同构于有理函数域 $K(u_1, \ldots, u_n)$。Procesi（[72], 另见他的著作 [73]）证明了 $Q(C_{km})$ 是 $Q(C_{k2})$ 的纯超越扩张，也就是说，这个问题只需对 $m = 2$ 求解。他还处理了 $k = 2$ 的情形。Formanek [32, 33] 为 $k = 3, 4$ 证明了这一结果。Van den Bergh [94] 提出了另一种研究 $Q(C_{km})$ 有理性的方法，并由此为 $k = 3$ 给出了另一种证明。关于这一主题的综述可见于 [64]。

定理 5.9. [72, 32, 33] 矩阵不变量代数 $Q(C_{km})$ 的商域是基域 K 在 $k = 2$、3、4 情形下的纯超越扩张。

目前仅对 2×2 矩阵已知 C_{km} 的生成元及定义关系的显式结果。

定理 5.10. (i)（2×2 矩阵不变量第一基本定理，Siberskii[85]）多项式

$$\text{tr}(x_p),\ p = 1, \ldots, m,\ \text{tr}(x_p x_q),\ 1 \le p \le q \le m,\ \text{tr}(x_p x_q x_r),\ 1 \le p < q < r \le m,$$

构成 C_{2m} 的极小生成元系。

(ii)（关于两个和三个一般 2×2 矩阵的不变量代数的第二基本定理，Siberskii [85], Formanek [35]）令

$$a_p = \text{tr}(x_p), b_p = \det(x_p), c_p = \text{tr}(x_q x_r), d = \text{tr}(x_1)\text{tr}(x_2)\text{tr}(x_3),$$

$p, q, r = 1, 2, 3,\ p \ne q, r,\ q < r$。两个一般 2×2 矩阵的不变量代数 C_{22} 同构于多项式代数 $K[a_1, a_2, b_1, b_2, c_3]$。三个一般矩阵的不变量代数 C_{23} 由交换元素 $a_p, b_p, c_p, d,\ p = 1, 2, 3$ 生成，模去由该关系生成的主理想

$$d^2 - (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 - a_1a_2a_3)d +$$

$$+ b_1c_1^2 + b_2c_2^2 + b_3c_3^2 - a_1a_2b_3c_3 - a_3a_1b_2c_2 - a_2a_3b_1c_1 +$$

$$+ a_1^2b_2b_3 + a_2^2b_3b_1 + a_3^2b_1b_2 - 4b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3 = 0.$$

或者，C_{23} 是多项式代数$K[a_p, b_p, c_p \mid p = 1, 2, 3]$上的秩为 2 的自由模（基为 1、$d$）。

定理 5.10 (ii) 的最后一条结论已由 Teranishi 推广到 $k = 2$任意 m [91]。Van den Bergh [93]证明了一个更强的结果：对于任意 k 和 m ，不变量代数 C_{km} 是科恩-麦考利的，即它是 C_{km}的一个分次多项式子代数上的自由模。

作者和 Koshlukov [26]与 [25]提出了另一种处理 T_{km} 和 C_{km} 定义关系的方法。这一思路源于群与代数的表示的恒等式理论，并且对 2×2矩阵行之有效。

定义 5.11。设 N是一个 GL_m-模，其作为向量空间的基为 y_1、.....、y_p。多项式代数 $K[y_1, \ldots, y_p]$ 或自由结合代数$K\langle y_1$、.....、$y_p\rangle$ 的理想 I称为 GL-理想，如果它在一般线性群 GL_m 的作用下保持不变；该作用由 GL_m 在 N上的作用诱导，并作用于 $K[y_1, \ldots, y_p]$ 和 $K\langle y_1$、.....、$y_p\rangle$。

迹代数 T_{km} 和矩阵不变量代数是 GL_m-模，其上的 GL_m 作用由 GL_m 在 span $\{x_1, \ldots, x_m\}$上的作用诱导:

$$g(\mathrm{tr}(x_{h_1} \ldots x_{h_p}) \ldots \mathrm{tr}(x_{i_1} \ldots x_{i_q}) x_{j_1} \ldots x_{j_r}) =$$

$$= \mathrm{tr}(g(x_{h_1}) \ldots g(x_{h_p})) \ldots \mathrm{tr}(g(x_{i_1}) \ldots g(x_{i_q})) g(x_{j_1}) \ldots g(x_{j_r}),$$

$g \in GL_m$，$\mathrm{tr}(x_{h_1} \cdots x_{h_p}) \ldots \mathrm{tr}(x_{i_1} \cdots x_{i_q}) x_{j_1} \ldots x_{j_r} \in T_{km}$。若 $d = d(k)$ 是定理 5.5 中的整数，并且

$$N = \mathrm{span}\{\mathrm{tr}(x_{i_1} \ldots x_{i_n}) \mid i_p = 1, \ldots, m, p = 1, \ldots, n \leq d\}$$

那么定理 5.6 表明，C_{km}和 T_{km}分别由 N生成，而 $N \oplus$张成$\{x_1, \ldots, x_m\}$；这两个向量空间都是 GL_m-模。因此，自然要用GL-理想的语言来寻找 T_{km} 和 C_{km} 的极小生成元系及定义关系。Silvana Abeasis 和 Marilena Pittaluga 的算法 [1] 可用于确定生成 C_{km}的 N 的极小 GL_m-子模的结构。[1]中的描述采用了 S_n 的表示论语言，但很容易将所得结果转换为 [19, 7]中的 GL_m 语言。

定义 5.12。（Razmyslov [77, 78]）设 R 是一个结合代数，且 H 是 R的李子代数，并生成 R作为结合代数。自由结合代数 $K\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ 中的元素 $f(x_1, \ldots, x_m)$称为偶对 (R, H) 的弱多项式恒等式，若对于每个 $h_1, \ldots, h_m \in H$，都有 $f(h_1, \ldots, h_m) = 0$ 属于 R。

以下定理完整描述了 T_{2m}和 C_{2m}的定义关系。

定理 5.13。设 $m \geq 2$ 且令

$$y_p = x_p - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(x_p) = \begin{pmatrix} y_{11}^{(p)} & y_{12}^{(p)} \\ y_{21}^{(p)} & -y_{11}^{(p)} \end{pmatrix},$$

其中 $y_{11}^{(p)} = \frac{1}{2}(x_{11}^{(p)} - x_{22}^{(p)})$、$y_{12}^{(p)} = x_{12}^{(p)}$、$y_{21}^{(p)} = x_{21}^{(p)}$、$p = 1$、……、$m$ 为一般无迹2×2矩阵。

(i)（Procesi [76]）泛迹代数 T_{2m} 同构于以下 K-代数的张量积

$$K[\mathrm{tr}(x_1), \ldots, \mathrm{tr}(x_m)] \otimes_K R'_{2m},$$

其中 R'_{2m} 是由一般无迹矩阵 y_1、……、y_m 生成的结合代数。

(ii)（Razmyslov [77]）一般无迹矩阵 R'_{2m} 的代数同构于自由结合代数 $K\langle y_1$、……、$y_m\rangle$的商代数 $K\langle y_1$、……、$y_m\rangle / T_m(M_2(K)\ sl_2(K))$，其中 $sl_2(K)$ 是所有无迹 2×2 矩阵构成的李代数，而 $T_m(M_2(K)\ sl_2(K))$ 是关于对 $(M_2(K)\ sl_2(K))$ 在 $K\langle y_1$、……、$y_m\rangle$ 中的所有弱多项式恒等式构成的理想。理想 $T_m(M_2(K)\ sl_2(K))$ 由弱多项式恒等式 $[x_1^2, x_2] = 0$ 作为弱 T-理想生成，即 $T_m(M_2(K)\ sl_2(K))$ 是包含元素 $[x_1^2, x_2]$ 的最小弱多项式恒等式理想。

(iii)（Drensky 和 Koshlukov [26, 推论 2]）令 GL_m 以典范方式作用于自由结合代数 $K\langle y_1$，……，$y_m\rangle$。作为一个 GL-理想，$T_m(M_2(K)\ sl_2(K))$由弱多项式恒等式 $[x_1^2, x_2]$ 和 $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$生成；第二个关系仅在$m \geq 4$ 时出现。因此，一般无迹矩阵的代数 2×2 对任意 $m \geq 2$都有统一的定义关系集。

定理 5.14。（2×2 矩阵不变量第二基本定理，Drensky[25]）令 $m \geq 2$，令 y_1，……，y_m 为一般无迹矩阵，并令 GL_m 作用于由 $a_p = \mathrm{tr}(x_p)$、$b_{pq} = \mathrm{tr}(y_p y_q)$、$c_{pqr} = \mathrm{tr}(s_3(y_p, y_q, y_r))$、$p$、$q$、$r = 1$、……、$m$张成的向量空间，其作用方式如定义 5.11 下方的正文所示。不变量代数C_{2m} 同构于多项式代数

$$K[a_d, b_{ij}, c_{pqr} \mid d, i, j, p, q, r = 1, \ldots, m, i \leq j, p < q < r]$$

模去 G 由这些关系生成的 L-理想（对于较小的 m，其中一些关系可能缺失）

$$u_1 = 2c_{123}^2 - 3\sum_{\pi \in S_3} (\mathrm{sign}\pi) b_{1\pi(1)} b_{2\pi(2)} b_{3\pi(3)},\ m \geq 3,$$

$$u_2 = -b_{11}c_{234} + b_{12}c_{134} - b_{13}c_{124} + b_{14}c_{123},\ m \geq 4,$$

$$u_3 = \sum(\text{sign}\pi)c_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)}c_{1\pi(4)\pi(5)},\ m \geq 5,$$

其中，第三个关系中的求和遍历所有满足 $\pi(1) < \pi(2) < \pi(3)$，$1 < \pi(4) < \pi(5)$ 的排列 $\pi \in S_5$，也就是说，C_{2m} 由 $\text{tr}(x_p)$、$\text{tr}(y_p y_q)$ 和 $\text{tr}(s_3(y_p, y_q, y_r))$ 生成，并满足 GL-定义关系

$$u_1 = 2\text{tr}^2(s_3(y_1, y_2, y_3)) - 3\sum_{\pi\in S_3}(\text{sign}\pi)\text{tr}(y_1, y_{\pi(1)})\text{tr}(y_2 y_{\pi(2)})\text{tr}(y_3 y_{\pi(3)}) = 0,$$

$$u_2 = \sum_{p=1}^{4}(-1)^p\text{tr}(s_3(y_1, \ldots, \hat{y}_p, \ldots, y_4)\text{tr}(y_1 y_p) = 0,$$

（ˆ表示相应的 y_p 不出现），

$$u_3 = \sum_{\pi\in S_5}(\text{sign}\pi)\text{tr}(s_3(y_{\pi(1)}, y_{\pi(2)}, y_{\pi(3)}))\text{tr}(s_3(y_1, y_{\pi(4)}, y_{\pi(5)})) = 0.$$

现在我们综述一些关于 T_{km} 和 C_{km}的希尔伯特级数的结果。根据定理 1.4 和 5.6 C_{km} 是由有限个多齐次元素生成的交换代数。交换代数的一般结果表明，C_{km} 的希尔伯特级数是 t_1、.....、t_m的有理函数。代数 T_{km} 是一个有限生成的C_{km}-模，根据同一结果，其希尔伯特级数也为有理函数。紧群的 Molien 公式 1.6 [96] 的韦尔类比给出了 C_{km} 和 T_{km} 的希尔伯特级数的公式，形式为（多重）积分。回顾一下，复酉群 $U(k, \mathbf{C})$由所有可逆的 $k \times k$ 矩阵 g 组成，这些矩阵具有复数元素且满足 $g^{-1} = {}^t\bar{g}$，其中${}^t\bar{g}$ 是 g的共轭矩阵的转置矩阵。

定理 5.15。（例如参见 [35, 第 204] 页）设 $U(k, \mathbf{C})$ 为配备归一化哈尔测度 μ 的复酉群。那么

$$\text{Hilb}(C_{km}, t_1, \ldots, t_m) = \int_{U(k,\mathbf{C})}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\det(1 - t\phi^g)}\right)d\mu(g),$$

$$\text{Hilb}(T_{km}, t_1, \ldots, t_m) = \int_{U(k,\mathbf{C})}\text{tr}(\phi^g)\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{\det(1 - t\phi^g)}\right)d\mu(g),$$

其中，对于每个 $g \in U(k, \mathbf{C})$，$\phi^g \in U(k^2, \mathbf{C})$ 是一个矩阵，给出 g 通过共轭作用于 $M_k(\mathbf{C})$ 的作用。

遗憾的是，计算定理 5.15 中的多重积分十分困难。用 GL_m 表示论的语言描述 C_{km} 和 T_{km} 的希尔伯特级数的另一种方式见 Formanek [35]；另请参阅 [34]，了解如何转换 Razmyslov-Procesi [80, 74] 的结果，从而得到 C_{km} 和 R_{km} 的希尔伯特级数的另一种表达式。特别是，Formanek 已成功显式计算出 C_{2m} 和 T_{2m}（另请参阅 [76] 以及 Le Bruyn 的著作 [63]，其中介绍了处理 C_{2m} 和 T_{2m} 的其他方法）。众所周知，对于 $m=4$ 而言，C_{2m} 和 T_{2m} 的 GL_m-模结构完全由其希尔伯特级数决定，我们将以这种形式给出结果。

定理 5.16。（[35,定理 12], 另见 [76] 和 [63]）

$$\mathrm{Hilb}(C_{24}, t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1 + \sum t_p t_q t_r - t_1 t_2 t_3 t_4 \sum t_p - (t_1 t_2 t_3 t_4)^2}{\prod (1 - t_p)(1 - t_p^2) \prod (1 - t_p t_q)},$$

$$\mathrm{Hilb}(T_{24}, t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{1 - t_1 t_2 t_3 t_4}{\prod (1 - t_p)^2 \prod (1 - t_p t_q)},$$

其中，求和与乘积分别遍历 $1 \le p \le 4$、$1 \le p < q \le 4$、$1 \le p < q < r \le 4$。

Teranishi [89, 90] 将柯西积分公式应用于定理 5.15，得到了 C_{k2} 和 T_{k2} 在 $k=3$ 和 4 的情形下的希尔伯特级数的显式形式。

由于一般矩阵代数 R_{km} 是泛迹代数 T_{km}的子代数，我们可以利用关于 T_{km} 和 C_{km} 的信息来描述 R_{km} 及其中心$R_{km} \cap C_{km}$。这里我们不打算详细讨论这个主题，只提及 Kaplansky 在 1956 [51] 提出的一个著名且重要的问题：对于任意 $k \ge 3$ 和 $m \ge 2$, R_{km}的中心是否非平凡？Formanek [39] 和 Razmyslov [78] 已肯定地解决了这个问题，并促使人们修订 PI-代数的结构理论（见 [50,82]）。关于中心多项式的研究成果综述，请参阅 [34, 40, 22]。至于 R_{km} 和 $R_{km} \cap C_{km}$的希尔伯特级数，Formanek [35] 证明，分次向量空间 T_{km}/R_{km} 和 $C_{km}/(R_{km} \cap C_{km})$ 的希尔伯特级数的系数“很小”；也就是说，对于 $n \longrightarrow \infty$，当 k 和 m 固定时，T_{km} 和 R_{km}（以及 C_{km} 和 $R_{km} \cap C_{km}$）的 n 次齐次分量的维数渐近相等。

由于 C_{km} 和 R_{km} 具有额外的良好代数性质，它们的希尔伯特级数应当具有良好的形式。Van den Bergh [95]运用 Stanley [88]的一些思想，将确定 C_{km} 和 R_{km} 的希尔伯特级数化归为某个图中的流问题，并由此得到了关于显式表示该级数的有理函数分母的一项重要结论。

定理 5.17。 [95] C_{km} 和 T_{km} 的希尔伯特级数可以表示为有理函数，其分母是若干项 $(1-u)$ 的乘积，其中 u 是t_1，.....，t_m 中的一个次数为 $\leq k$的单项式。

C_{km} 和 T_{km} 的希尔伯特级数满足一个函数方程，这进一步证实了它们具有良好的性质。

定理 5.18。（Formanek [37], Teranishi [89, 91], ；对于 $k=2$的情形，另见 Le Bruyn [62] ）设 $H(t_1,\ldots,t_m)$是 C_{km} 或 T_{km}的不变量代数的希尔伯特级数，其中 $m\geq 2$ 对于$k\geq 3$ 成立，而 $m>2$ 对于 $k=2$成立。那么 $H(t_1,\ldots,t_m)$满足函数方程

$$H(t_1^{-1},\ldots,t_m^{-1})=(-1)^d(t_1\ldots t_m)^{k^2}H(t_1,\ldots,t_m),$$

其中， d 是 C_{km} （或相应地 T_{km}）的 Krull 维数。（已知 d =的超越次数 trans.deg.(C_{km}) $=(m-1)k^2+1$。 ）

显然， GL_m 的每个子群也作用于向量空间 span$\{x_{pq}^{(i)} \mid p,q$ =1, . . . , $k, i=1,\ldots,m\}$，因此研究其他某些经典群 G 在 $\Omega = K[x_{pq}^{(i)} \mid p,q=1,\ldots,k,i=1,\ldots,m]$上的不变量代数 Ω^G 是有意义的。例如，针对 $Sp(k)$、 $SO(k)$和 $O(k)$，已有相关研究；这些研究涉及带对合的一般矩阵代数。有关详情，可参阅 Procesi [74], Berele [8, 9, 10], H. Aslaksen、Eng-Chye Tan、Chen-Bo Zhu 的论文（见 [4] 及其中的参考文献）。

参考文献

1. S. Abeasis, M. Pittaluga，关于 3×3矩阵不变量的一组极小生成元，《代数通讯》17 (1989), 487 – 499。2. S.A. Amitsur, C. Procesi，Jacobson 环与希尔伯特代数，Ann. Mat. Pura Appl. 71 (1966), 67 – 72。3. A.Z. Anan'in，代数簇的局部有限可逼近性与局部可表示性（俄语），《代数与逻辑》16 (1977), 3 – 23。译文：《代数与逻辑》16 (1977), 1 – 16。4. H. Aslaksen, Eng-Chye Tan, Chen-Bo Zhu，2×2 矩阵不变量的生成元与关系，《代数通讯》22 (1994), 1821 – 1832。5. Yu.A. Bakhturin，《李代数中的恒等关系》（俄语），Nauka，莫斯科，1985。译文：VNU Science Press，乌得勒支，1987。6. A.I. Belov，自由李代数的周期自同构及其不动点，预印本。7. A. Berele，齐次多项式恒等式，《以色列数学杂志》42 (1982), 258 – 272。8. A. Berele，带对合的矩阵与不变量理论，《代数杂志》135 (1990), 139 – 164。

9. A. Berele，带双头边和双尾边的图上的流，预印本。10. A. Berele，迹恒等式与 $Z/2Z$-分次不变量，预印本。11. A. Braun，有限生成的多项式恒等式环中根的幂零性，《代数杂志》89 (1984), 375 – 396。12. R.M. Bryant，有限群作用于自由李代数时的不动点，《伦敦数学会杂志》(2) 43 (1991), 215 – 224。13. R.M. Bryant，有限群表示的对称幂，《代数杂志》154 (1993), 416 – 436。14. L. Carini，与格拉斯曼代数相关的 Poincar´e 级数，《线性与多重线性代数》27 (1990), 199 – 205。15. C. Chevalley，由反射生成的有限群的不变量，Amer. J. Math. 67 (1955), 778 – 782。16. W. Dicks, E. Formanek，Poicar´e 级数与 S. Montgomery 问题，《线性与多重线性代数》12 (1982), 21 – 30。17. J.A. Dieudonn´e, J.B. Carrell，《不变量理论：古典与现代》，学术出版社，纽约 - 伦敦，1971。18. M. Domokos，有限反射群的相对自由不变量代数，《美国数学会汇刊》348 (1996), No. 6, 2217 – 2234。19. V. Drensky，对称群的表示与线性代数簇（俄语），《数学文集》115 (1981), 98 – 115。译文：《苏联数学文集》43 (1981), 85 – 101。20. V. Drensky，T-理想的余维数与相对自由代数的希尔伯特级数，《代数杂志》91 (1984), 1 – 17。21. V. Drensky，有限维代数的多项式恒等式，《塞尔迪卡》12 (1986), 209 – 216。22. V. Drensky，交换代数在非交换环论中的方法，Atti Accad. Peloritana dei Pericolanti, Classe I di Sci. Fiz., Mat. e Nat. 70 (1992), Parte Prima, 239 – 260。23. V. Drensky，有限生成代数上的有限线性群不变量的有限生成性，《线性与多重线性代数》35 (1993), 1 – 10。24. V. Drensky，剩余幂零李代数的不动子代数，《美国数学会会刊》120 (1994), 1021 – 1028。25. V. Drensky，2×2矩阵不变量代数的定义关系，Algebras

与表示论 6 (2003)，第 2 期，193 – 214。26. V. Drensky、P. Koshlukov，具有对称双线性形式的向量空间的弱多项式恒等式，《数学与数学教育》：保加利亚数学家联盟第 16 届春季会议论文集，索非亚，保加利亚科学院出版社，1987，213 – 219。27. J. Dubnov，关于 Hamilton - Cayley 方程的一种推广及多个仿射算子的同时不变量，向量与张量分析研讨会论文集，力学研究所，莫斯科国立大学 2/3 (1935)，351 – 367（另见 Zbl. f¨ur Math. 12 (1935)，第 176 页）。28. J. Dubnov、V. Ivanov，关于降低仿射算子多项式的次数，《苏联科学院学报》41 (1943)，96 – 98（另见 MR 6 (1945)，第113 页，Zbl. f¨ur Math. 60 (1957)，第 33 页）。29. J.L. Dyer、G.P. Scott，自由群的周期自同构，《代数通讯》3 (1975)，195 – 201。30. J.W. Fisher、S. Montgomery，作用于一般矩阵的有限循环群的不变量，《代数杂志》99 (1986)，430 – 437。31. E. Formanek，矩阵环的中心多项式，《代数杂志》23 (1972)，129 – 132。32. E. Formanek，一般矩阵环的中心，《线性与多重线性代数》7 (1979)，203 – 212。33. E. Formanek，一般矩阵环的中心，《代数杂志》62 (1980)，304 – 319。34. E. Formanek，矩阵的多项式恒等式，《当代数学》13 (1982)，41 – 79。35. E. Formanek，不变量与一般矩阵环，《代数杂志》89 (1984)，178 – 223。36. E. Formanek，非交换不变量理论，《当代数学》43 (1985)，87–119。37. E. For manek，与矩阵相关联的特征标级数的函数方程，《美国数学会汇刊》294 (1986)，647 – 663。38. E. Formanek，矩阵不变量环的生成，《数学讲义》1195，施普林格出版社，柏林 - 海德堡 - 纽约，1986，73 – 82。39. E. Formanek，矩阵的不变量，《数学讲义》1278，施普林格出版社，柏林 - 海德堡 - 纽约 - 伦敦 - 巴黎 - 东京，1987，18 – 43。40. E. Formanek，矩阵的多项式恒等式与不变量，CBMS

区域数学会议系列 78，由数学科学会议委员会委托出版，华盛顿特区，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991。41. E. Formanek、P. Halpin、W.-C.W. Li，一般矩阵环的庞加莱级数，《代数杂志》69 (1981)，105 – 112。42. E. Formanek、A.H. Schofield，作用于两个一般矩阵环的群及其迹环的余积分解，《美国数学会会刊》95 (1985)，179 – 183。43. R.M. Guralnick，作用于相对自由代数的有限线性群的不变量，《线性代数及其应用》72 (1985)，85 – 92。44. G.B. Gurevich，《代数不变量理论基础》，P. Noordhoff 有限公司，格罗宁根，1964。45. H. Helling，群与结合代数上的特征标的一种刻画，《代数通讯》1 (1974)，491 – 501。46. G. Higman，关于永田猜想，《剑桥哲学学会会刊》52 (1956)，1 – 4。¨47. D. Hilbert，关于代数形式理论，《数学年刊》36 (1890)，473 – 534；重印于《论文集》第二卷：代数、不变量理论、几何，第二版，Springer-Verlag，柏林 - 海德堡 - 纽约，1970，199 – 257。¨48. D. Hilbert，关于完备不变量系，《数学年刊》42 (1893)，313 – 373；重印于《论文集》第二卷：代数、不变量理论、几何，第二版，Springer-Verlag，柏林 - 海德堡 - 纽约，1970，287 – 344。49. D. Hilbert，《数学问题》，《数学与物理档案》1 (1901)，44 – 63，213 – 237；重印于《论文集》第三卷：分析、数学基础、物理、杂项、生平，第二版，Springer-Verlag，柏林 - 海德堡 - 纽约，1970，290 – 329。50. N. Jacobson，PI-代数：导论，《数学讲义》441，施普林格出版社，柏林 - 纽约，1975。51. I. Kaplansky，修订版环论问题，《美国数学月刊》77 (1970)，445 – 454。52. A.R. Kemer，卡佩利恒等式与有限生成 PI-代数根的幂零性（俄语），苏联科学院学报 255 (1980)，793 – 797。译文：苏联数学文献 22 (1980)，750 – 753。

53. A.R. Kemer, 《Var($M_2(F)$) 这一类含单位元恒等式的渐近基》（俄语），高等院校学报·数学（1989），第6期，71 – 76。译文：苏联数学 33（1990），第6期，71 – 76。54. A.R. Kemer, 《结合代数恒等式的理想》，数学专著译丛第87卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991。55. V.K. Kharchenko, 《自由代数的不变量代数》（俄语），《代数与逻辑》17（1978），478 – 487。译文：《代数与逻辑》17（1978），316 – 321。56. V.K. Kharchenko，有限群的非交换不变量与诺特类，《纯粹与应用代数》31（1984），83 – 90。57. A.I. Kostrikin, 《伯恩赛德问题》（俄语），苏联科学院通报，数学辑 23（1959），3 – 34。译文：美国数学会译丛（第2辑）36（1964），63 – 99。58. D. Krakowski，A. Regev，格拉斯曼代数的多项式恒等式，《美国数学会汇刊》181（1973），429 – 438。59. E.N. Kuz'min，论 Nagata–Higman 定理（俄语），载于《数学结构、计算数学、数学建模：献给 L. Iliev 院士60岁生日的论文集》，索非亚，1975，101 – 107。60. D.R. Lane，《秩为二的自由代数及其自同构》，博士论文，贝德福德学院，伦敦，1976。61. V.N. Latyshev，希尔伯特关于基的有限性定理的推广（俄语），《西伯利亚数学杂志》7（1966），1422 – 1424。译文：《西伯利亚数学杂志》7（1966），1112 – 1113。62. L. Le Bruyn，泛型 2×2矩阵迹环的 Poincar´e 级数函数方程，《以色列数学杂志》52（1985），355 – 360。63. L. Le Bruyn，泛型 2×2 矩阵的迹环，美国数学会回忆录第66卷第363号，罗得岛州普罗维登斯，1987。64. L. Le Bruyn，G. Molenberghs，泛型除代数的中心，以色列数学会议论文集第1卷，1989，310 – 319。65. I.V. L'vov，带恒等元代数中的极大性条件（俄语），《代数与逻辑》8（1969），449 – 459。译文：《代数与逻辑》8（1969），258 – 263。66. A.I. Malcev，论无限代数的表示（俄语），《数学文集》13（1943），263 – 286。67. V.T. Markov，有限生成自由代数的 T-理想生成元系（俄语），《代数与逻辑》18（1979），587 – 598。译文：《代数与逻辑》18

（1979），371 – 378。¨68. T. Molien，关于线性代换群的不变量，普鲁士皇家科学院会议记录（1897），第52号，1152 – 1156。69. M. Nagata，论幂零代数的幂零性，《日本数学会杂志》4（1953），296 – 301。70. M. Nagata，论希尔伯特第十四问题，《美国数学杂志》81（1959），766–772。71. E. Noether，有限群不变量的有限性定理，《数学年刊》77（1916），89 – 92；重印于《论文集》，Springer-Verlag，柏林–海德堡–纽约–东京，1983，181 – 184。72. C. Procesi，非交换仿射环，意大利林琴科学院纪要，第8辑，8（1967），237 – 255。73. C. Procesi，《具有多项式恒等式的环》，Marcel Dekker，纽约，1973。74. C. Procesi，矩阵的不变量理论，《数学进展》19（1976），306 – 381。75. C. Procesi，迹恒等式与标准图，载于《环论》，《数学讲义》第51卷，Marcel Dekker，纽约，1979，191 – 218。76. C. Procesi，矩阵计算，《代数杂志》87（1984），342 – 359。77. Yu.P. Razmyslov，特征为零的域上二阶矩阵代数恒等式的有限基（俄语），《代数与逻辑》12（1973），83 – 113。译文：《代数与逻辑》12（1973），43 – 63。78. Yu.P. Razmyslov，关于 Kaplansky 的一个问题（俄语），苏联科学院通报，数学辑 37（1973），483 – 501。译文：苏联科学院通报·数学辑 7（1973），479 – 496。79. Yu.P. Razmyslov，PI代数中的 Jacobson 根（俄语），《代数与逻辑》13（1974），337 – 360。译文：《代数与逻辑》13（1974），192 – 204。80. Yu.P. Razmyslov，特征为零的域上全矩阵代数的迹恒等式（俄语），苏联科学院通报，数学辑 38（1974），723 – 756。译文：苏联科学院通报·数学辑 8（1974），723 – 760。81. A. Regev，$A \otimes B$中恒等式的存在性，《以色列数学杂志》11（1972），131 – 152。82. L.H. Rowen，《环论中的多项式恒等式》，学术出版社，纽约，1980。83. G.F. Seelinger，广义矩阵值不变量，《代数杂志》161（1993），199 – 215。84. G.C. Shephard，J.A. Todd，有限酉反射群，《加拿大数学杂志》6（1954），274 – 304。

85. K.S. Siberskii, 《一组矩阵的代数不变量》（俄语），《西伯利亚数学杂志》9 (1) (1968), 152 – 164。译文：Siber. Math. J. 9 (1968), 115 – 124。86. W. Specht, 《环中的定律》I, 《Math. Z.》52 (1950), 557 – 589。87. T.A. Springer, 《不变量理论》，《数学讲义》585，Springer-Verlag，柏林 - 海德堡 - 纽约，1977。88. R.P. Stanley, 《组合学与交换代数》，Progress in Math. 41，Birkh¨auser Boston，波士顿，MA, 1983。89. Y. Teranishi，矩阵的不变量环，《Nagoya Math. J.》104 (1986), 149 – 161。90. Y. Teranishi，线性丢番图方程与矩阵不变量理论，“交换代数与组合学（京都，1985）”，Adv. Stud. Pure Math. 11，North-Holland，阿姆斯特丹 - 纽约，1987, 259 – 275。91. Y. Teranishi，矩阵伴随不变量的希尔伯特级数，《 Nagoya Math. J. 》 111 (1988), 143 – 156。92. I.K. Tonov，结合代数含幺代数的极小非弱诺特簇（俄语），Pliska Stud. Math. Bulg. 2, 1981, 162 – 166。93. M. Van den Bergh，迹环是科恩-麦考利的，《美国数学会杂志》2 (1989), 775 – 799。94. M. Van den Bergh，泛除代数的中心，《代数杂志》127 (1989), 106 – 126。95. M. Van den Bergh，泛矩阵迹环的庞加莱级数的显式有理形式，《Isr. J. Math.》73 (1991), 17 – 31。96. H. Weyl，关于射影群、复群和旋转群的表示理论与不变量计数，《Acta Math.》48 (1926), 255 – 278；重印于《文集》，第III卷，Springer-Verlag，柏林 - 海德堡 - 纽约，1968, 1 – 25。97. E.I. Zel’manov，关于恩格尔李代数（俄语），《西伯利亚数学杂志》29 (1988), 第5期，112 – 117。译文：Siberian Math. J. 29 (1988), 777 – 781。Vesselin Stoyanov Drensky，保加利亚科学院数学研究所，Akad. G.Bonchev Str., Block 8, 1113 索非亚，保加利亚，电子邮件：drensky@bmath.bas.bg