arXiv:2302.10060v1 [math.GR] 20 Feb 2023

p可着色子群：汤普森群

児玉裕也和高野明宏

摘要。最近，Jones 利用汤普森群 F 的酉表示，提出了一种从其元素构造纽结与链环的方法。他还将 F 的若干子群定义为稳定子子群，并有研究者对它们进行了代数研究。其中一个子群称为 3-可着色子群汤普森群 F，作者证明，从汤普森群 F 的所有非平凡元素得到的纽结与链环都是 3-可着色的。本文中，对于任意大于二的奇整数 p，我们定义 p的F 可着色子群，其非平凡元素生成 p可着色的纽结与链环，并证明它与某个布朗–汤普森群同构。

1. 引言

汤普森群由 Richard Thompson 于1965年定义。这些群最初用于逻辑研究。如今，它们在包括几何群论在内的多个领域中得到研究。尤其是群 F，尽管其群表示并不复杂，却仍有许多未解问题，例如可和性，因此十分神秘。此外，为了进一步理解“F是什么”，人们仍在积极研究 F 的子群（例如参见 [3–5, 10, 12, 13, 15]）。

最近，Jones [17]构造了汤普森群的酉表示，其灵感源于在圆上建立代数量子场论。在这一过程中，他引入了一种从 F 构造纽结与链环的方法，并证明它们中的任意一个都可以由 F [17, 19]中的某个特定元素得到。与辫群的亚历山大定理相呼应，这样的定理称为亚历山大定理。

在他的研究计划中，他还发现了汤普森群 F 的两个有趣子群。其中之一称为定向子群，而由该子群得到的纽结与链自然具有定向。Jones 证明了亚历山大定理的一个稍弱版本，适用于定向纽结与链环；Aiello 则完整证明了该定理。Golan 和 Sapir 从与汤普森群 F 同构的图表群这一视角刻画了该子群的元素，并构造了其自然推广。他们还将该子群刻画为 (0，1) 的一个子集的稳定子。另一个群称为 3-可着色子群 $\mathcal{F}$。Aiello 和 Naginibeda 将$\mathcal{F}$ 刻画为 (0，1) 的一个子集的稳定子。作者

2020 数学主题分类。 主要分类 20F65；次要分类 57K10。关键词与短语。 汤普森群， p-可着色性。第一作者łδšu JST 的资助，资助项目为“面向科学技术创新的大学奖学金设立”，资助编号 JP MJFS2139。

证明了，由$\mathcal{F}$ 的非平凡元素得到的所有纽结与链环都是三着色的。纽结与链环的三着色性是纽结理论中著名的经典不变量之一。值得指出的是，关于三着色纽结与链环的 $\mathcal{F}$ 亚历山大定理仍未解决。

“汤普森纽结理论”中的一个重要未解问题是马尔可夫定理，也就是完整描述 F 中哪些元素给出相同的纽结或链环。为此，计算更多不变量至关重要。因此，本文聚焦于 p-着色性，它是三着色性的推广。我们将定义并研究一个称为 p-可着色子群 汤普森群 F_p的新群。

本文安排如下：第 2 节中，我们首先回顾三个群的定义，它们分别是汤普森群 F、布朗–汤普森群 $F(n)$以及 3-可着色子群 汤普森群 F。随后，我们概述 F 的琼斯构造，以及 p-着色性的定义；后者是纽结与链环的不变量。第 3 节中，我们首先定义一个称为 p-可着色子群 汤普森群 F_p的群。群 汤普森群 F_3 与 3-可着色子群 汤普森群 F相同。接着，我们证明，由汤普森群 F_p 中的非平凡元素得到的任意纽结或链环都是 p-可着色的。第 4 节中，我们研究群 汤普森群 F_p的一些代数性质。

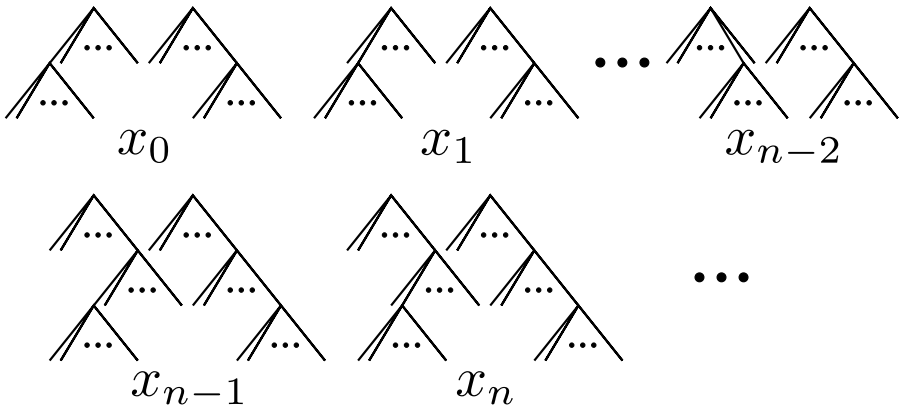
2. 预备知识

2.1. 布朗–汤普森群 $F(n)$。设 $n \geq 2$。我们通过树图定义布朗–汤普森群 $F(n)$。详情参见 [7] 。

我们首先将一个 n**叉节点**定义为具有 $n+1$ 个顶点和 n 条边的图，其中一个顶点（**根**）的度为 n，其余顶点的度均为一。将另一个 n-叉节点的根附接到一个 n-叉节点的某个度为一的顶点上，可得到一个新图。这个图称为大小为二的 n**元树**。一般来说，将一个 n-叉节点附接到度为一的顶点上称为一次**附接**，迭代进行 k 次附接所得到的图称为大小为 k 的 n**元树**。大小为一的 n 元树与一个 n 叉节点相同。我们分别将 n 元树中度为 n 的顶点和度为一的顶点称为**根**和**叶**。注意，叶子的数量为 $k(n-1)+1$。

令 W_n 为 $\{0, \ldots, n-1\}$ 上所有有限词的集合。对于每棵 n 叉树 T，都存在从 T 的叶子集合到 W_n 的单射，定义如下：由于 T 是一棵树，每个叶子都存在一条从根到该叶子的唯一路径。将 n 叉节点的每条边从左至右标记为 $0, \ldots, n-1$，即可从每条路径得到一个有限词。我们经常将叶子与词对应起来，并按照 W_n 中词的字典序定义叶子的顺序 $<$。对于 n 叉词，我们用 $\|\cdot\|$ 表示其长度。

令 $\mathcal{T}_n$ 为所有大小相同的 n叉树对的集合。我们在$\mathcal{T}_n$ 上定义如下等价关系：设 (T_+, T_-) 属于$\mathcal{T}_n$。由于 T_+ （分别为 T_-）的叶子有序，令 i_+ （分别为 i_-）为 T_+ （分别为 T_-）的第 i片叶。然后，通过对 i_+（分别为 i_-）进行附接，我们可以得到一棵 n叉树 T'_+（分别为 T'_-）。我们称此操作为对(T_+, T_-)插入 n**叉节点**，其逆操作称为约化 n**叉节点**。接着我们定义一个



$F(n)$ 的生成集

等价关系 $\sim$ 为由所有插入和约化生成的等价关系。若无法约化任何 n叉节点，则称$(T_+, T_-) \in \mathcal{T}_n$ 是**约化的**。对于每个等价类，都存在唯一的约化代表元（见 [8] 关于 $n = 2$的内容）。

布朗–汤普森群 $F(n)$ 是群 $(\mathbf{T}_n/\sim, \times)$，其中 $\times$ 是如下乘积：设 $A = (A_+, A_-)$ 和 $B = (B_+, B_-)$ 属于 $\mathbf{T}_n$。通过插入，存在两个元素 $A' = (A'_+, A'_-)$ 和 $B' = (B'_+, B'_-)$，使得 $A \sim A'$、 $B \sim B'$ 和 $A'_- = B'_+$成立。于是，对于 A 和 B 的等价类，它们的乘积是 (A'_+, B'_-) 的一个等价类。 $F(n)$ 的单位元是 (T, T) 的一个等价类，其中 T是一个n叉树。对于 (T_+, T_-) 的等价类 $\in \mathbf{T}_n$，其逆元是 (T_-, T_+) 的等价类。

如果 $n = 2$，那么群 $F(2)$ 也称为**汤普森群** F，2-叉节点也称为**叉节点**。

$F(n)$ [6, 16] 有两种著名的表示:

$$F(n) \cong \langle x_0, x_1, x_2, \cdots \mid x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+n-1} \ (i < j) \rangle$$

$$\cong \left\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} {x_k}^{x_0} = {x_k}^{x_i} \ (1 \le i < k \le n-1), \\ {x_k}^{x_0 x_0} = {x_k}^{x_0 x_i} \ (1 \le i, k \le n-1 \text{ and } k-1 \le i), \\ {x_1}^{x_0 x_0 x_0} = {x_1}^{x_0 x_0 x_{n-1}} \end{array} \right\rangle,$$

其中 x^y表示 $y^{-1}xy$。图 1 列出了集合$\{x_0, \ x_1, \ \ldots\}$。

布朗–汤普森群 $F(n)$ 也可定义为闭区间 $[0, 1]$ 上的一个同胚群。由于我们只在 F 这一情形下使用该定义，因此仅给出此情形下的对应关系。定义

$$f_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ x + \frac{1}{4} & \text{if } \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{x+1}{2} & \text{if } \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} x & \text{if } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{if } \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{8} \\ x + \frac{1}{8} & \text{if } \frac{5}{8} \le x \le \frac{3}{4} \\ \frac{x+1}{2} & \text{if } \frac{3}{4} \le x \le 1. \end{cases}$$

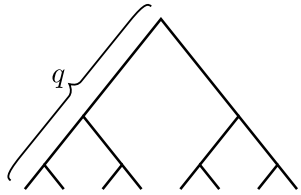


图 2. 二叉树 T_q ($q = 3$)。

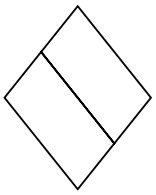


图 3. 生成元 x_0 在 F中的树图。

那么，由 f_0 和 f_1 生成的群同构于 F。该同构由$x_0 \mapsto f_0$，$x_1 \mapsto f_1$给出。我们注意到，F 中的每个元素都给出闭区间 $[0, 1]$ 的两种划分。每个叶 $a_1 \cdots a_m$ 都对应映射 $a_1 \cdots a_m \mapsto \Sigma_{i=1}^{m} a_i/2^i$下子区间最左端的元素。我们将此映射记为 ρ。详情见 [8]。

本文主要讨论 F 以及$n = 2^q$情形下的布朗–汤普森群。我们定义从 $F(2^q)$到 F的嵌入。设 T_q是与集合 $\{a_1 \cdots a_q \mid a_i \in \{0, 1\}\} \subset W_2$相对应的二叉树。示例见图 2。我们将 ϕ_q定义为一个映射，它会把每个元素中的所有 2^q-叉节点替换为 T_q。另见第3]节中的 [7, 示例 (1)。

2.2. 3-可着色子群 汤普森群 F。本节概述汤普森群 F的 3-可着色子群 $\mathcal{F}$的定义。详情请见 [1, 21]。

设 (T_+, T_-) 属于 $\mathcal{T}_2$。假设 T_+ 是根在顶部的下降树，而 T_- 是根在底部的上升树。由于 T_+ 和 T_- 的大小相同，我们按字典序连接它们的叶子。所得图称为**树图**。例子见图 3。

我们将一幅树图置于 $\mathbb{R}^2$，使得 T_+ 的根位于 $(0, 1) \in \mathbb{R}^2$ 上，T_- 的根位于 $(0, -1) \in \mathbb{R}^2$ 上，而叶子位于 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 上。然后我们添加两条短边，一条从 $(0, 1)$ 延伸到 $(0, 2)$，另一条从 $(0, -1)$ 延伸到 $(0, -2)$。这样就得到 $\mathbb{R} \times [-2, 2]$ 的一个划分（称为一条**条带**）。如果我们能为条带的每个分割区域指定颜色 0、1 或 2，使得任意两个有公共边的区域颜色不同，那么这幅树图就是三**条带可着色**的。按照惯例，如果一幅树图是三条带可着色的，那么我们将 0（分别将 1）指定给 $(-\infty, 0] \times [-2, 2]$（分别是 $[0, \infty) \times [-2, 2]$) 中的无界区域。按照这一惯例，区域的着色是唯一的。示例见图 4。

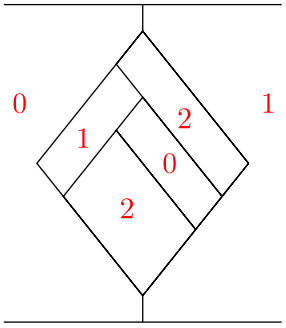


图 4. 一个 3-条带可着色树图

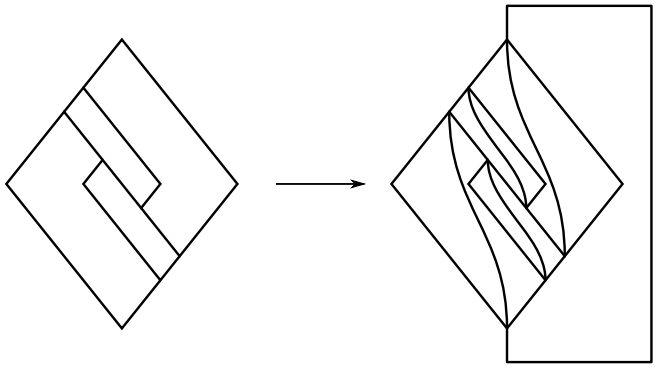


图 5. 与 $(T_+,\ T_-)$ 相关联的平面图 $\mathcal{B}(T_+,\ T_-)$。

我们注意到，3-条带可着色性在 $\mathcal{T}_2/\sim = F$ 上是定义良好的。接下来，我们将 **3-可着色子群**定义为

$$\mathcal{F} = \{(T_+, T_-) \in F \mid (T_+, T_-) \text{ is 3-strip-colorable}\}.$$

Th群 $\mathcal{F}$ 与布朗–汤普森群 $F(4)$ 有着密切的关系 ip.

定理 2.1 ([22, 定理 1。3])。群 F 与布朗–汤普森群 $F(4)$ 同构。同构映射由 ϕ_2 给出。

2.3. 琼斯构造。 本节介绍如何根据 [19]，从 F 的元素构造纽结与链环。设 $(T_+,\ T_-)$ 是一个约化树图。

我们按如下方式构造平面图 $\mathcal{B}(T_+, T_-)$，使树图 (T_+, T_-) 成为其子图：对于 (T_+, T_-) 的任意区域（包括无界区域），其边界子图恰好包含两个分叉节点，一个位于 T_+，另一个位于 T_-。然后，我们用一条边连接该区域内这两个分叉节点的根。图 5 展示了这种构造的一个例子。

由于平面图 $\mathcal{B}(T_+, T_-)$ 的所有顶点都是四价的，因此可将其视为链环投影。于是，按照规则 or，将每个顶点变成交叉，即可得到链环图 $\mathcal{L}(T_+, T_-)$。图 6 展示了这一构造的一个例子。

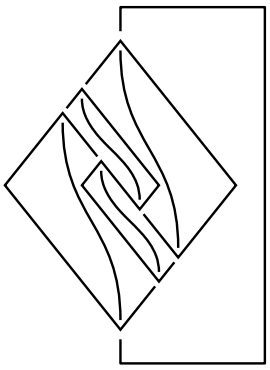


图 6。链环图 $\mathcal{L}(T_+,\ T_-)$。

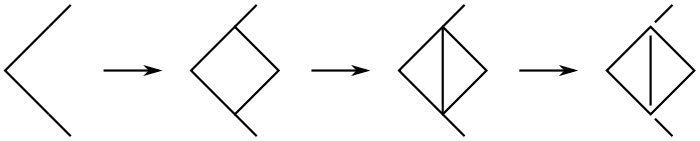


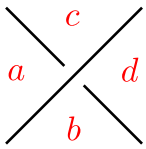
图 7。通过插入分叉节点得到的平凡链分支。

注 2.2。此构造可应用于任意非约化树图。不过，所得链环图与等价的约化树图所得的链环图不同：设 (T'_+, T'_-) 是通过在约化树图 (T_+, T_-) 的一个叶上插入分叉节点得到的非约化树图。那么我们有 $\mathcal{L}(T'_+, T'_-) = \mathcal{L}(T_+, T_-) \sqcup \bigcirc$；见图 7。另一方面，每个元素 $g \in F$ 都有唯一的约化树图。因此，我们可以考虑一个映射 $\mathcal{L}\colon F \to \{\text{所有纽结与链}\}$，定义为 $\mathcal{L}(g)$ 是由其约化树图得到的链环图。Jones [17, 定理 5.3.1] 证明了该映射是满射，这被称为亚历山大定理。另一方面，显然该映射不是单射。

2.4. **Dehn 染色**。本节将简要回顾一种由区域着色得到的链不变量。详见 [9, 20]。设 $p \geq 3$ 为一个整数，D 为链 L的一个图示。

定义 2.3。D 的 **Dehn** p**-着色**是指为 D 的每个区域赋予 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中的一个元素，使得

- 无界区域被赋值为 0；并且
- 它对任意交叉都满足以下条件：



$$a + b \equiv c + d \pmod{p}. \tag{2.1}$$

回顾一下，每个链环图都有唯一的棋盘着色，使无界区域为白色。如果每个白色区域都标记为

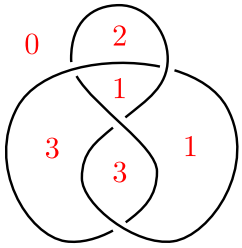


图 8. 8字结的 Dehn 5-染色。

0，且每个黑色区域都标记为一个固定元素 $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，则称 Dehn $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-染色是**平凡的**。如果存在非平凡的 Dehn p-染色，则称该链环图**Dehn$p$-可染色**。众所周知，Dehn$p$-可染性是一个链不变量。图 8 展示了 8字结的一个非平凡 Dehn 5-染色 4_1。

存在一种类似于 Dehn 染色的经典不变量，称为 Fox 染色。Carter、Silver 和 Williams [9] 证明了这些可着色性是等价的。

3. p可着色子群汤普森群 F_p

3.1. 定义。 在本文余下部分，设 $p \geq 3$ 为奇整数。为了定义 p可着色子群，我们使用二进有理数重新诠释 3-可着色子群汤普森群 F。

设 T 为一棵二叉树。将第 2.2 节中定义的划分限制到 $\mathbb{R} \times [0,2]$上，我们得到 $\mathbb{R} \times [0,2]$ 由 T构成的划分。此外，存在唯一的方式为每个分割区域赋予数字 0、1 或 2，使其满足第 2.2 节中的条件，其中左侧（分别为右侧）的无界区域赋值为 0（分别为 1）。对于 T的每个叶 i，设 $\omega(i)$为 i左侧区域的编号。由定义可知，以下结论显然成立：

命题 3.1（[3,命题 2.1]）。成立

$$\mathcal{F} = \{(T_+, T_-) \in F \mid \forall i \geq 0, \omega(i_+) = \omega(i_-)\},$$

其中，i_+（分别为 i_-）叶 i，属于 T_+（分别为 T_-）。

由于我们在第2.1节中将每个叶与一个二进制词对应，因此得到一个映射ω: $W_2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。Aiello 和 Nagnibeda [3] 证明了以下结果：

命题 3.2（[3, 命题 2.5]）。对于任意二进制词 $a_1 \cdots a_n \in W_2$，有

$$\omega(a_1 \cdots a_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i \pmod 3.$$

回顾映射 ρ: $W_2 \to \mathbb{Z}[1/2] \cap [0,1)$，其定义为 $\rho(a_1 \cdots a_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i/2^i$。由于 $-1 \equiv 1/2$ (模 3)，我们有

$$\omega(a_1 \cdots a_n) \equiv \rho(a_1 \cdots a_n) \pmod 3.$$

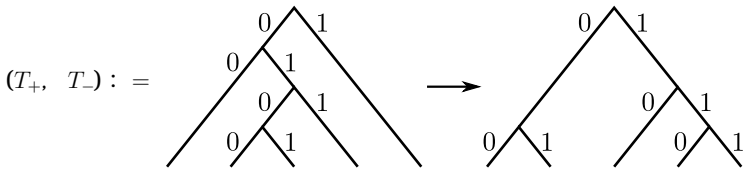
也就是说，$\mathcal{F}$ 的任意树图（T_+，T_-）中的每对叶子 i_+ 和 i_- 模 3 同余于同一个二进有理数。因此，我们可以利用二进有理数，将 3-可着色子群 $\mathcal{F}$ 推广到奇整数 $p \geq 3$ 的情形。

定义 3.3。 **p-可着色子群** 汤普森群 F_p 汤普森群 F 定义为以下集合

$$\mathcal{F}_p := \{(T_+, T_-) \in F \mid \forall i \geq 0, \rho(i_+) \equiv \rho(i_-) \pmod{p}\}.$$

我们将在后文证明，该集合构成 F 的一个子群。显然，3-可着色子群 汤普森群 F 与 汤普森群 F_3重合。

例 3.4。考虑 $p = 3$ 的情形以及以下树图：

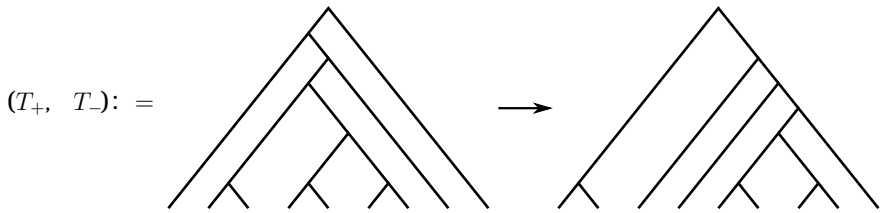


Then

$$\begin{aligned}
&\rho(0_+) = \rho(00) = 0 = \rho(00) = \rho(0_-),\\
&\rho(1_+) = \rho(0100) = \frac{1}{4} \equiv 1 \equiv \frac{1}{4} = \rho(01) = \rho(1_-),\\
&\rho(2_+) = \rho(0101) = \frac{5}{16} \equiv 2 \equiv \frac{1}{2} = \rho(10) = \rho(2_-),\\
&\rho(3_+) = \rho(011) = \frac{3}{8} \equiv 0 \equiv \frac{3}{4} = \rho(110) = \rho(3_-), \text{ and}\\
&\rho(4_+) = \rho(1) = \frac{1}{2} \equiv 2 \equiv \frac{7}{8} = \rho(111) = \rho(4_-).
\end{aligned}$$

因此，该树图是 汤普森群 F_3 的一个元素。

例子　引理 3.5。考虑情形 $p = 7$。那么下面的树图属于 汤普森群 F_7 .



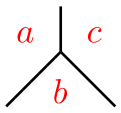
事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&\rho(0_+) = 0 = \rho(0_-), && \rho(1_+) = \frac{1}{4} \equiv 2 \equiv \frac{1}{4} = \rho(1_-),\\
&\rho(2_+) = \frac{9}{32} \equiv 4 \equiv \frac{1}{2} = \rho(2_-), && \rho(3_+) = \frac{5}{16} \equiv 6 \equiv \frac{3}{4} = \rho(3_-),\\
&\rho(4_+) = \frac{21}{64} \equiv 0 \equiv \frac{7}{8} = \rho(4_-), && \rho(5_+) = \frac{11}{32} \equiv 1 \equiv \frac{57}{64} = \rho(5_-),\\
&\rho(6_+) = \frac{23}{64} \equiv 2 \equiv \frac{29}{32} = \rho(6_-), && \rho(7_+) = \frac{3}{8} \equiv 3 \equiv \frac{59}{64} = \rho(7_-), \text{ and}\\
&\rho(8_+) = \frac{1}{2} \equiv 4 \equiv \frac{15}{16} = \rho(8_-).
\end{aligned}$$

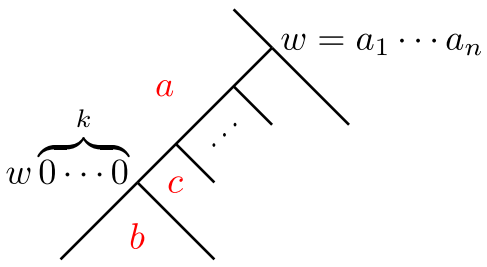
在本节余下部分，我们将用树图各区域的着色来改写汤普森群 F_p 的定义。

设 T 是一棵二叉树，再次考虑由 T 对 $\mathbb{R}^2 \times [0,2]$ 作出的划分。除右无界区域外，每个区域都有唯一一片叶，使得该区域位于这片叶的左侧。因此，我们可以为每个区域赋予与其叶对应的二进有理数。我们假设右无界区域赋值为 1。

命题 3.6。 设 a、b 和 c 是下方一个分叉周围各区域对应的二进有理数。那么它们满足 $2b = a + c$。



证明。**情形 1**。 假设 a 和 c 的两个区域共享一条标记为 0 的边。二进有理数 a 对应于叶 $w0\cdots\mathbf{0}$，其中 $w = a_1 \cdots a_n$ 是一个满足 $a_n = 1$ 的二进制词。于是， b 上方分叉的二进制词可写为 $w\,0\cdots\underbrace{\quad}_{k}0$，其中 $k \in \mathbb{Z}$，因此二进有理数 b 和 c 分别对应于 $w\,0\cdots\underbrace{\quad}_{k-1}0\,10\cdots\mathbf{0}$ 和 $kw\,0\cdots\underbrace{\quad}_{k-1}0\,10\cdots\mathbf{0}$。下图描述了这种情形：



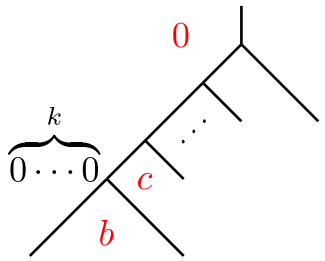
因此

$$a = \rho(w0\cdots0) = \rho(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i},$$
$$b = \rho(w\underbrace{0\cdots0}_{k}10\cdots0) = \rho(w\underbrace{0\cdots0}_{k}1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+k+1}}, \text{ and}$$
$$c = \rho(w\underbrace{0\cdots0}_{k-1}10\cdots0) = \rho(w\underbrace{0\cdots0}_{k-1}1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+k}}.$$

因此

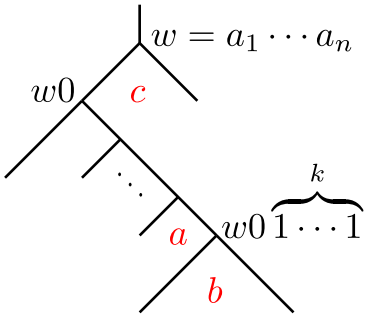
$$2b = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+k}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+k}}\right) = a + c.$$

如果 w 是空词，那么 $a = 0$ 位于左无界区域：



我们有 $b = 1/2^{k+1}$ 和 $c = 1/2^k$，因此等式显然成立。

情况 2. 假设 a 和 c 的两个区域共用一条标记为 1 的边。如果二进有理数 c 不在右无界区域中，那么 c 对应于叶 $w10\cdots0$，其中 $w = a_1\cdots a_n \in W_2$。那么， b 上方分叉的二进制词可写为 $w0\,1\cdots\underbrace{\quad}_{k}1$，其中某个 $k \in \mathbb{Z}$，因此二进有理数 a 和 b 分别对应于$w0\,1\cdots\underbrace{\quad}_{k}1\,0\cdots0$ 和 $w0\,1\cdots\underbrace{\quad}_{k}1\,10\cdots0$。下图描述了这种情况：



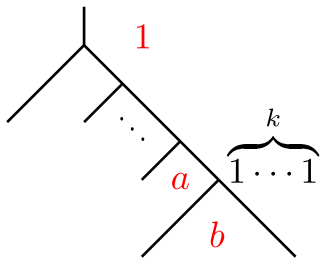
因此

$$a = \rho(w0\underbrace{1\cdots1}_{k}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^{n+j+1}},$$
$$b = \rho(w0\underbrace{1\cdots1}_{k}1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^{n+j+1}}, \text{ and}$$
$$c = \rho(w1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

因此

$$2b = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{2^{n+j}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2^{n+j+1}}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = a + c.$$

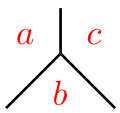
最后，考虑 c 位于右无界区域的情形：



于是我们有 $c = 1$，$a = \sum_{i=1}^{k} 1/2^i$，以及 $b = \sum_{i=1}^{k+1} 1/2^i$，因此很容易验证该等式。□

若存在一种着色，将 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 中的一个元素分配给每个分割区域，并满足以下条件，则称树图 (T_+, T_-) 是 **p-条带可着色的**

- 左侧和右侧的无界区域分别着色为 0 和 1；并且
- 每个分叉周围的三种颜色满足以下条件：



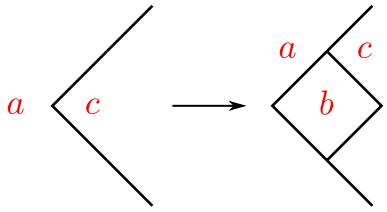
$$2b \equiv a + c \pmod{p}. \tag{3.1}$$

根据命题 3.6，每棵二叉树 T_+ 和 T_- 都具有一种由叶子的二进有理数诱导的、满足上述条件的区域唯一着色。因此，树图的 p-条带着色性等价于 $\mathcal{F}_p$ 的以下条件：

命题 3.7。成立

$$\mathcal{F}_p = \{(T_+, T_-) \in F \mid (T_+, T_-) \textit{ is } p\textit{-strip-colorable.}\}.$$

为了证明这个集合构成 F 的子群，只需检查插入分叉节点是否保持 p-条带-着色性，这从下图中显而易见：



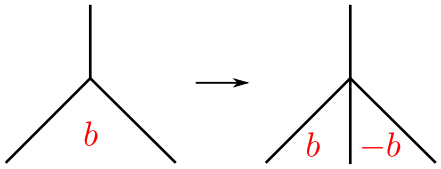
$2b \equiv a + c \pmod{p}$。

3.2. 由 $\mathcal{F}_p$ 获得的纽结与链环。 本节将描述由 p-可着色子群 $\mathcal{F}_p$ 中的元素获得的纽结与链环的一个性质。

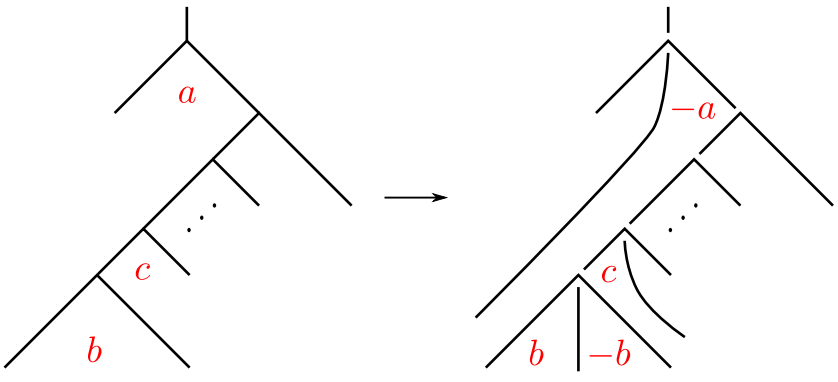
定理 3.8。 由 F_p 的非平凡元素获得的所有纽结与链环都是 p-可着色的。

证明。为了证明该定理，我们将为任意非平凡元素 $g = (T_+,\ T_-) \in \mathcal{F}_p$ 找到链环图 $\mathcal{L}(g)$ 的一个非平凡 Dehn p-着色。

设 $(T_+,\ T_-)$ 是 $\mathcal{F}_p$ 中的一个约化树图。在第 2.3 节的 Jones 构造中，通过用一条边划分每个区域，我们得到平面图 $\mathcal{B}(T_+,\ T_-)$。也就是说，对于 T_+（或 T_-）的每个分叉，都有两个区域，分别称为左区域 和右区域。然后，如下所示，使用 p-条带着色为 $\mathcal{B}(T_+,\ T_-)$ 的各个区域赋予一个数：



根据琼斯构造的替换规则，我们得到链环图 $\mathcal{L}(T_+,\ T_-)$。事实上，对于每个交叉（即分叉），它都满足条件 (2.1)。确实，$\mathcal{B}(T_+,\ T_-)$ 中一个分叉的左上方（分别为右上方）区域，实际上是上方另一个分叉的右区域 （分别为左区域）。下面描述了这一情况：命题 3.6 的证明中的情况 1 具有如下形式



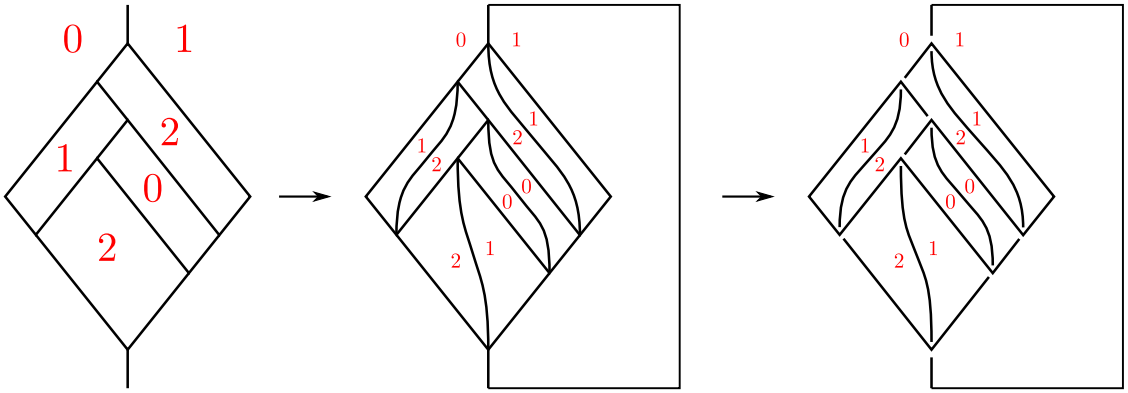
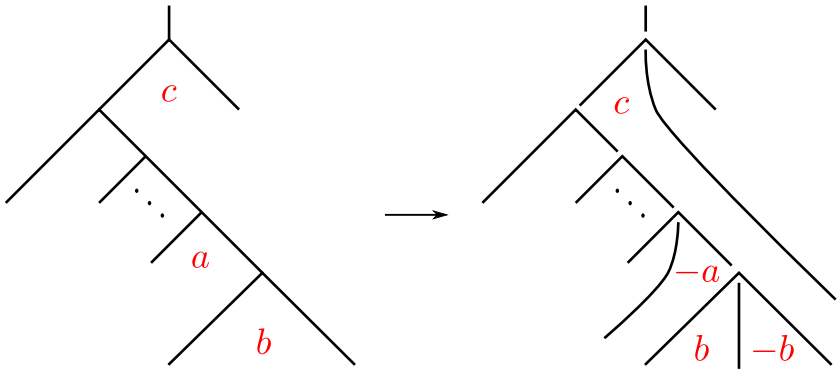


图9。最左侧的图是例3.4中 $(T_+,\ T_-)$ 的 3 条带着色，最右侧的图则是纽结图 $\mathcal{L}(T_+,\ T_-)$ 的相应非平凡 Dehn 3-着色。

而情况 2 具有如下形式



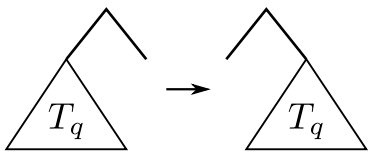
因此，分叉周围左侧（分别为右侧）的两个区域的数字之和为$-a+b$（分别为 $-b+c$），根据条件 (3.1)，它们模 p 同余。我们容易看出，这是 $\mathcal{L}(T_+,\ T_-)$ 的非平凡 Dehn p-着色。□

例3.9。考虑例3.4中的树图 $(T_+,\ T_-)$。那么纽结$\mathcal{L}(T_+,\ T_-)$ 是三叶结 3_1，并且是 3- 可着色的；参见图 9。

例3.10。考虑例3.5中的树图 $(T_+,\ T_-)$。那么纽结$\mathcal{L}(T_+,\ T_-)$ 是扭结 5_2，它是 7-可着色的；参见图10。

备注 3.11. 对于奇整数 $p \geq 3$，令 q 为满足 $2^q \equiv 1$（模 p）的正整数。考虑如下树图 (T_+, T_-):

$$(T_+, T_-) :=$$



根据下文的命题4.1，(T_+, T_-) 属于 汤普森群 F_p。通过直接计算，我们发现 $\mathcal{L}(T_+, T_-)$ 的连通分支数为 1。因此，总存在一个元素属于 汤普森群 F_p

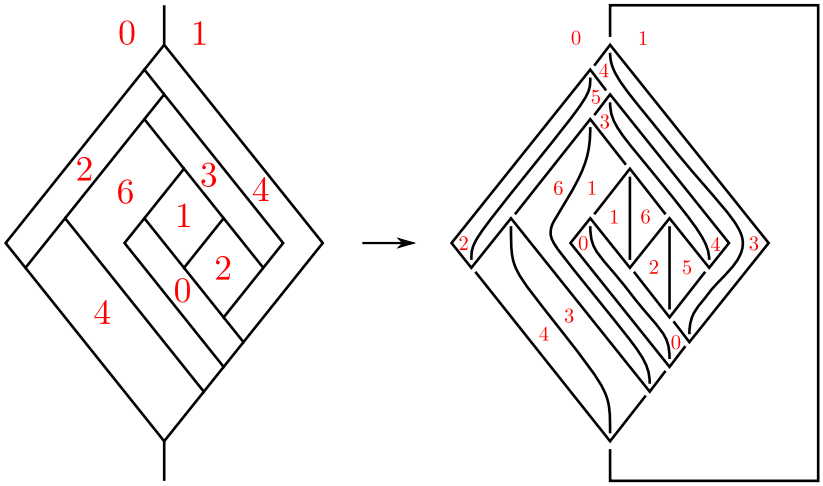


图10。左图是例3.5中（T_+，T_-）的7条带着色，右图则是纽结图$\mathcal{L}$（T_+，T_-）对应的非平凡 Dehn 7着色。

它会产生一个非平凡的 p-可着色纽结。例如，如果 $p=3$ 和 $q=2$，那么我们得到三叶结 3_1。此外，如果 $p=7$ 和 $q=3$，那么我们得到纽结 7_7。

4. p-可着色子群汤普森群 F_p的性质

4.1. 与 Brown-Thompson 群的关系。本节将对 p-可着色子群汤普森群 F_p 给出另一种解释，并证明它与某个 Brown–Thompson 群同构。

设 (T_+,T_-) 是汤普森群 F_p的一个树图。固定 T_+（分别为 T_-）的一个叶 i_+（分别为 i_-），并假设 $\mathrm{k}i_+\mathrm{k}=k$（分别为 $\mathrm{k}i_-\mathrm{k}=m$）。在叶 i处插入分叉节点，得到等价的树图 (T'_+,T'_-)。那么 T'_+ 和 T'_- 的 $(i+1)_+$ 与 $(i+1)_-$ 的长度分别为 $k+1$ 和 $m+1$。因此它们必须满足 $2^{k+1}\equiv 2^{m+1} \pmod p$。这等价于 $k\equiv m \pmod q$，其中 q 是满足 $2^q\equiv 1 \pmod p$ 的最小正整数。也就是说，汤普森群 F_p 的树图中，每个叶 i_+ 和 i_- 的长度模 q同余。此外，我们有以下结果：

命题4.1。成立

$$\mathcal{F}_p=\{(T_+,T_-)\in F \mid \forall i\geq 0, \|i_+\|\equiv\|i_-\| \pmod q\}.$$

为证明反向包含关系，我们使用第2.1节中定义的具有 2^q 个叶子的二叉树 T_q。

引理4.2。设 T 是一个二叉树，其中每个叶 i 都满足 $\mathrm{k}i\mathrm{k}=k_iq$，其中 k_i是某个正整数。那么 T 可以通过附加一些 T_q's得到。

证明。选取二叉树 T 的叶 l，使其成为长度最大的最左叶。令 a_{k_lq} 为与叶 l 对应的二进制词 $a_1\cdots$。于是有

$a_{(k_l-1)q+1} = \cdots = a_{k_lq} = 0$。事实上，若存在一个数 i 使得 $a_{(k_l-1)q+i} = 1$，则存在二叉树 T 的一个叶 $m < l$ 使得 $k_m = k_l$，这与叶 l 是长度最大的最左叶相矛盾。因此，从 l 到 $l + 2^q - 1$ 的所有叶的长度均为 k_lq。注意，它们的二进制词具有如下形式： $a_1 \cdots a_{(k_l-1)q} b_1 \cdots b_q$，其中 $b_j \in \{0, 1\}$。由于这样的二进制词共有 2^q 个，集合 $\{b_1 \cdots b_q \mid b_j \in \{0, 1\}\}$ 对应于二叉树 T_q。令 T' 为从 T 中移除此二叉树 T_q 后得到的二叉树。对 T' 应用相同的论证，我们再次从中得到一个二叉树 T_q。□

引理4.3。设二叉树 T 满足引理4.2中的假设。那么，其叶子的二进有理数模 p 的形式为

$$0, 1, 2, \ldots, p-1, 0, 1, 2, \ldots, p-1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, p-1, 0$$

从左到右。

证明。叶 i （$0 \le i \le 2^q - 1$）的二进有理数是 $i/2^q$，其中属于 T_q。因此，根据条件 $2^q \equiv 1$ （模 p），T_q 的叶子的二进有理数模 p 的形式为

$$0, 1, 2, \ldots, p-1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, p-1, 0$$

从左到右。

注意，任何满足引理4.2中假设的二叉树，都可以通过连接若干个 T_q 得到。我们假设这样的二叉树 T 满足引理4.3的结论。设 T' 是由 T 通过将树 T_q 连接到 T 的一个叶 i 上得到的二叉树。如果 T 的 i 的二进有理数模 p 为 r，那么 T' 的叶 i 的二进有理数也相同。与上文一样，T' 中从 i 到 $i + 2^q - 1$ 的二进有理数的形式为

$$r, r+1, r+2, \ldots, r-1, \ldots, r, r+1, r+2, \ldots, r-1, r.$$

根据假设，叶子 $i + 2^q$ 在 T'中的二进有理数，也就是叶子 $i + 1$ 在 T模 p 下的二进有理数，是 $r + 1$。因此，二叉树 T' 也满足所需结果。□

命题4.1的证明。 设(T_+, T_-)是一个树图，对任意叶子均有$\|i_+\| \equiv \|i_-\|$ (模 q)。通过添加叉节点，我们可以得到一个与(T_+, T_-)等价的树图(T'_+, T'_-)，使其满足引理4.2中的假设。由引理4.3，T'_+ 和T'_- 中叶子的二进有理数模 p均为以下形式

$$0, 1, 2, \ldots, p-1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, p-1, 0$$

从左到右。因此，$(T'_+, T'_-) \sim (T_+, T_-)$属于汤普森群 F_p。 □

根据引理4.2，汤普森群 F_p 的每个元素都有一个树图，可通过附加一些T_q得到。回顾嵌入 ϕ_q的定义： $F(2^q) \to F$，可知将 $F(2^q)$中的一个元素的所有2^q-叉节点替换为 T_q，即可得到汤普森群 F_p中的一个元素。因此，我们得到以下定理:

定理 4.4。 p-可着色子群 F_p 同构于布朗–汤普森群 $F(2^q)$。该同构映射由 ϕ_q给出。

特别地，对于任意整数 $n \geq 2$，布朗–汤普森群 $F(2^n)$ 同构于 (2^n-1)-可着色子群汤普森群 F_{2^n-1}。

推论 4.5。 设 $n \geq 2$ 为整数。那么，子群 $\phi_n(F(2^n))$ （属于 F）的非平凡元素所得到的所有纽结与链环都是 (2^n-1)-可着色的。

例 4.6. 3-可着色子群 汤普森群 F_3 同构于 $F(4)$，这已由 Ren [22, 定理 1.3] 证明。此外，子群 汤普森群 F_5 和 汤普森群 F_7 分别同构于 $F(16)$ 和 $F(8)$。此外，15-可着色子群 汤普森群 F_{15} 也同构于$F(16)$，因此 汤普森群 $F_5(=$ 汤普森群 $F_{15})$ 的非平凡元素会产生 15-可着色链环。

由推论 4.5 可知，自然会提出一个关于纽结与链环的性质以及 p-可染色子群 $\mathcal{F}_p$ 的问题，它是 [21, 问题 3.5] 的推广：

问题 4.7。映射

$$\mathcal{L}\colon \mathcal{F}_{2^n-1}(=\phi_n(F(2^n)))\setminus\{1\} \to \{\text{all } (2^n-1)\text{-colorable knots and links}\}$$

在注 2.2 中定义的映射是满射吗?

4.2. 汤普森群 p-可染色子群作为稳定子子群。 本节将 [3, 第 2] 节中针对 $\mathcal{F}_p$ 的论证加以推广。尽管某些论证略有修改，但当 $p=3$ 时，它仍会在 [3] 中得出相同的结果。

令 q 为第 4.1 节中定义的正整数。集合 $W_2\setminus\{0^i \mid i\geq 0\}$ 记作 W_2^-。我们首先在 W_2^- 上定义一个等价关系 $\approx$，它由 $v \approx v\,0\cdots\underbrace{\quad}_{q}0$ 生成

其中 v 属于 W_2^-。令 $W^q := W_2^-/\approx$。对于 $u \in W_2^-$，我们将其等价类记作 $[u]$。我们通过将子词改写为对应于叶子的两个二进制词，定义 F 在 W^q 上的右群作用。注意，该群作用诱导出 F 在 $[0,1]$ 上的自然作用。

例 4.8。 作用于 x_0^{-1} $\in F$在 $[01]$ 和 $[1] = [1\,0\cdots\underbrace{0\text{ 上}}_{q}]$ 是 $[001]$和 $[01\,0\cdots\underbrace{\quad}_{q-1}0]$，分别。

回顾一下，对于 $u \in W_2$，$\|u\|$ 表示其作为二进制词的长度。另外，回顾映射ρ，它由 $u = a_1\cdots a_m \mapsto \Sigma_{i=1}^m a_i/2^i$定义。我们考虑以下集合：

$$S_i^q := \{[u] \in W^q \mid \|[u]\| \in q\mathbb{N}, \rho([u]) \equiv i \pmod p\}$$

其中 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。请注意，上述两个条件定义良好。

注记 4.9。映射

$$\rho : \coprod_i S_i^q \to \mathbb{Z}[1/2] \cap (0,1)$$

定义良好且为双射。

我们首先研究稳定子。

引理 4.10。 对于每个 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{Stab}(S_i^q) \subset \mathrm{Stab}(S_{i-1}^q)$$

成立。

证明。设 f 是 $\mathrm{Stab}(S_i^q)$ 的一个元素。我们证明，如果 $[u]$ 属于 S_{i-1}^q，那么 $[u] \cdot f$ 也属于 S_{i-1}^q。设 u 是 $[u]$ 的一个代表元，使得 $u \cdot f$ 有定义，并将 $u \cdot f$ 写成 $a_1 \cdots a_m$。由于 $\|u\| \in q\mathbb{N}$，我们有

$$\rho(u \underbrace{0 \cdots 0}_{q-1} 1) \equiv (i-1) + 1 = i \pmod{p}.$$

这意味着

$$(u \underbrace{0 \cdots 0}_{q-1} 1) \cdot f = a_1 \cdots a_m \underbrace{0 \cdots 0}_{q-1} 1$$

属于 S_i^q。由于 $\|a_1 \cdots a_m 0 \cdots \underbrace{\quad}_{q-1} 0 1\|$ 属于 $q\mathbb{N}$，$\|a_1 \cdots a_m\|$ 也属于 $q\mathbb{N}$。此外，由于

$$\rho(a_1 \cdots a_m \underbrace{0 \cdots 0}_{q-1} 1) \equiv i$$

成立，因此我们有 $\rho(a_1 \cdots a_m) \equiv i - 1$。 □

由此引理可知，对于任意 $i, j \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$\mathrm{Stab}(S_i^q) = \mathrm{Stab}(S_j^q)$ 成立。现在我们可以证明本节的主要定理了。

定理 4.11. 对于所有 $i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$p$-可着色子群 F_p 与 $\mathrm{Stab}(S_i)$ 相同。

证明。对于包含关系 $\mathcal{F}_p \subset \mathrm{Stab}(S_i^q)$，我们只需检查$\mathcal{F}_p$的生成元（及其逆元）。根据定理 4.4，$\mathcal{F}_p$ 由 $\phi_q(x_0) \ldots, \phi_q(x_{2^q-1})$生成，其中每个 x_k 都属于布朗–汤普森群 $F(2^q)$。由二叉树的定义可知 T_q。

令 $f = (T_+, T_-) \in \mathrm{Stab}(S_i) = \bigcup_i \mathrm{Stab}(S_i)$。根据定义 3.3，我们证明 $\rho(l_+) \equiv \rho(l_-) \pmod{p}$ 成立，其中 l_+（分别为 l_-）是与 T_+（分别为 T_-）的第 l 个叶对应的二进制词。若对于某个 $j \geq 1$，有 $l_+ = 0 \cdots \underbrace{\quad}_{j} 0$，则显然有$j$

$\rho(l_+) = \rho(l_-) = 0$ 成立。若 l_+ 不然，我们考虑二进制词 $u := l_+ 0 \cdots \underbrace{\quad 0}_{j}$，其中存在某个 $j \geq 0$，使得 $[u]$ 属于 W^q。于是，由于 $f \in \bigcup_i \mathrm{Stab}(S_i)$，我们有

$$\rho(l_+) = \rho(l_+ \underbrace{0 \cdots 0}_{j}) \equiv \rho(l_- \underbrace{0 \cdots 0}_{j}) = \rho(l_-).$$

至此，证明完成。 □

注4.12. 由 Golan 的工作 [11, 推论 5.7], 可知， p-可着色子群汤普森群 F_p 是闭的。

致谢

我们感谢加藤元子教授提出的建议。我们感谢第一作者的导师深谷知宏教授所给予的宝贵意见。我们也感谢第二作者的导师笠井拓也教授所给予的宝贵意见。

参考文献

[1] V. Aiello，《汤普森纽结理论与琼斯子群导论》，arXiv:2211.15461. [2] ，关于定向汤普森群的亚历山大定理 $\overrightarrow{F}$，《代数与几何拓扑》20 (2020), no. 1, 429–438.[3] V. Aiello 和 T. Nagnibeda，关于 3-可着色子群汤普森群 F 以及汤普森群 F的极大子群，arXiv:2101.04534.[4] C. Bleak，R. 汤普森群的近正规可解子群，Internat. J. Found. Comput. Sci. 32 (2021), no. 6, 785–800. [5] C. Bleak、M. G. Brin 和 J. T. Moore，汤普森群的有限生成子群之间的复杂性，J. Comb. Algebra 5 (2021), no. 1, 1–58.[6] M. G. Brin 和 F. Guzmán，广义汤普森群的自同构，J. Algebra 203 (1998), no. 1, 285–348.[7] J. Burillo、S. Cleary 和 M. I. Stein，汤普森群的推广的度量与嵌入F，Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 4, 1677–1689.[8] J. W. Cannon、W. J. Floyd 和 W. R. Parry，理查德·汤普森群入门笔记，Enseign. Math. (2) 42 (1996), no. 3-4, 215–256.[9] J. S. Carter、D. S. Silver 和 S. G. Williams，纽结着色的三个维度，Amer. Math. Monthly 121 (2014), no. 6, 506–514.[10] M. Chaudkhari，汤普森群 F 的受限子群及其向摆动群的嵌入，Groups Geom. Dyn. 15 (2021), no. 2, 491–501.[11] G. Golan，汤普森群 F的生成问题，arXiv:1608.02572.[12] ，汤普森群 F的随机生成，J. Algebra 593 (2022), 507–524.[13] G. Golan 和 M. Sapir，关于 R. 汤普森群 F的琼斯子群，J. Algebra 470 (2017), 122–159.[14] ，关于 R. 汤普森群 F的琼斯子群，《代数杂志》470 (2017), 122–159.[15] ，关于 R. 汤普森群 F的子群，Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 12, 8857–8878.

[16] V. S. Guba 和 M. V. Sapir，图群，Mem. Amer. Math. Soc. **130** (1997), no. 620, viii+117。[17] V. F. R. Jones，汤普森群 F 与 T，J. Comb. Algebra **1**(2017), no. 1,1–44.[18] ,周期量子自旋链连续统极限的不可能性定理，Comm. Math. Phys. **357** (2018),no. 1,295–317.[19] ,由汤普森群构造纽结与链环，纽结、低维拓扑及其应用 **284** (2019), 43–66.[20] L. H. Kauffuman，形式纽结理论评述，Courier Dover Publications (2006)。[21] Y. Kodama 和A. Takano，汤普森群的3-可着色子群与链环的三色性，arXiv:2212.14713。[22] Y. Ren，从 *skein* 理论到汤普森群的表示，J. Algebra **498** (2018),178–196.

东京都立大学数学科学系，东京八王子市南大泽，192-0397，日本电子邮箱地址：kodama-yuya@ed.tmu.ac.jp东京大学数理科学研究科，东京目黑区驹场 3-8-1，153-8914，日本电子邮箱地址： takano@ms.u-tokyo.ac.jp