arXiv:2302.10061v1 [math.CA] 20 Feb 2023

# 准偏差与 Bajraktarević 均值的詹森凸性

Zsolt Páles 和 Paweł Pasteczka

本文谨献给 *Maciej Sablik* 教授和 *László Székelyhidi* 教授，以庆祝他们的七十寿辰。

**摘要**。 受作者于 2021 年得到的关于准算术均值詹森凸性的刻画定理启发，本文的主要目标是在不附加任何额外且不自然的正则性假设的情况下，刻画准偏差以及 Bajraktarević 均值的詹森凸性。

**数学主题分类（2010）**。26E60,26B25,39B62。
**关键词**。 詹森凸性、准偏差均值、Bajraktarević 均值、拟算术平均、Bernstein–Doetsch 定理。

## 1. 引言

本文中，令 $I$ 表示 $\mathbb{R}$ 的一个非空开子区间。给定$n \in \mathbb{N}$，函数 $M_n\colon\ I^n \to I$ 称为 $n$元平均数，如果

$$\min(x_1, \dots, x_n) \le M_n(x) \le \max(x_1, \dots, x_n)$$

对所有 $x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n$，该条件都成立。若函数 $M\colon\ \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，其限制 $M|_{I^n}$ 都是一个 $n$元平均数，则称其为平均数。

平均数的詹森凸性（詹森凹性）在 Hardy 型不等式的研究中已成为一项重要性质（参见 [11, 13, 12]）。若一个 $n$元平均数 $M_n\colon\ I^n \to I$ 满足对所有 $x$、$y \in I^n$，则称其为詹森凸，

$$M_n\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \le \frac{M_n(x) + M_n(y)}{2}.$$

若一个平均数 $M\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$，其$n$变量平均数 $M_n := M|_{I^n}$ 均为詹森凸，则称其为詹森凸。

第一作者受到 K-134191 NKFIH 资助项目的资助。

给定 $p \in \mathbb{R}$， $p$次幂平均或赫尔德平均 $\mathcal{H}_p\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$定义为

$$\mathcal{H}_p(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} & \text{if } p \neq 0, \\ (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} & \text{if } p = 0. \end{cases}$$

关于赫尔德平均的凸性，我们有如下经典结果。

**定理 A.** 设 $n \geq 2$ 固定。设 $p \in \mathbb{R}$，且 $I$ 是 $\mathbb{R}_+$ 的子区间。那么， $n$ 变量平均数 $\mathcal{H}_p|_{I^n}$ 是詹森凸的，当且仅当 $p \geq 1$。

赫尔德平均的一项重要推广是准算术平均的概念。给定连续严格单调函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$，准算术平均 $\mathcal{A}_f\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ 定义为

$$\mathcal{A}_f(x) := f^{-1}\left(\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}\right). \tag{1.1}$$

若 $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 且 $f(x) := x^p$ 对于 $x \in \mathbb{R}_+$，则 $\mathcal{A}_f = \mathcal{H}_p$。若 $f(x) := \log x$ 对于$x \in \mathbb{R}_+$，则 $\mathcal{A}_f = \mathcal{H}_0$，因此，赫尔德平均确实是准算术平均。

通过结合论文 [4] 和 [14] 的结果，准算术平均的詹森凸性最终得到了刻画。

**定理 B**。 设 $n \geq 2$ 为固定值，且 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 连续且严格单调。则 $n$元平均数 $\mathcal{A}_f|_{I^n}$ 是詹森凸的，当且仅当$f$ 二阶连续可微，具有处处非零的一阶导数，并且 $f''$在 $I$上恒等于零，或 $f''$处处不为零且 $f'/f''$在 $I$上为正且凸。

Gini 引入了赫尔德平均的另一种推广形式 [6]。为回顾这一定义，对于 $q$、 $r \in \mathbb{R}$，定义*Gini* 平均 $\mathcal{G}_{q,\,r}\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$为

$$\mathcal{G}_{q,r}(x) := \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^q + \cdots + x_n^q}{x_1^r + \cdots + x_n^r}\right)^{\frac{1}{q-r}} & \text{if } q \neq r, \\ \exp\left(\dfrac{x_1^q \log x_1 + \cdots + x_n^q \log x_n}{x_1^q + \cdots + x_n^q}\right) & \text{if } q = r. \end{cases}$$

Gini平均的凸性刻画可由 Losonczi [7] 的一般结果轻易推出，具体如下。

**定理 C**。 设 $q$， $r \in \mathbb{R}$。则平均数 $\mathcal{G}_{q,\,r}$ 是詹森凸的，当且仅当 $0 \leq \min(q,\ r) \leq 1 \leq \max(q,\ r)$。

需要强调的是，对于固定数量的变量，其刻画有所不同，因为我们有 Losonczi 和 Páles 的结果[8]:

**定理 D**。令 $q$，$r \in \mathbb{R}$。则 $\mathcal{G}_{q,\ r}|_{\mathbb{R}_+^2}$ 这一 2变量平均值是詹森凸的，当且仅当 $0 \le \min(q,\ r) \le 1 \le q + r$。

Bajraktarević 在论文 [1, 2] 中发现了一类均值，其中包含 Gini 均值和准算术均值。给定一个正函数$p: I \to \mathbb{R}_+$ 和一个连续严格单调函数 $f: I \to \mathbb{R}$，*Bajraktarević* 均值$\mathcal{B}_{f,\ p}: \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ 定义为

$$\mathcal{B}_{f,p}(x) := f^{-1}\left(\frac{p(x_1)f(x_1) + \cdots + p(x_n)f(x_n)}{p(x_1) + \cdots + p(x_n)}\right).$$

若 $q, r \in \mathbb{R}$, $q \neq r$, $f(x) := x^{q-r}$, $p(x) := x^r$ 对于 $x \in \mathbb{R}_+$成立，或者若 $q = r \in \mathbb{R}$ 且 $f(x) := \log(x)$, $p(x) := x^q$ 对于 $x \in \mathbb{R}_+$成立，则 $\mathcal{B}_{f,\ p} = \mathcal{G}_{q,\ r}$。因此，Gini 平均构成 Bajraktarević 均值的一个子类。另一方面，如果 $p$ 是一个常值函数，那么可以看出 $\mathcal{B}_{f,\ p} = \mathcal{A}_f$，因此准算术均值也包含在 Bajraktarević 均值这一类中。

Losonczi [7] 的以下结果刻画了生成函数足够规则的 Bajraktarević 均值的凸性。

**定理 E.** 设 $p: I \to \mathbb{R}_+$ 是一个正函数，且 $f: I \to \mathbb{R}$ 是一个具有处处非零的一阶导数的可微严格单调函数。那么，*Bajraktarević* 均值$\mathcal{B}_{f,\ p}$ 是凸的，当且仅当由下式定义的二元映射 $B_{f,\ p}: I^2 \to \mathbb{R}$

$$B_{f,p}(x,u) := \frac{p(x)(f(x) - f(u))}{p(u)f'(u)}$$

是凸的。

偏差和准偏差的概念分别由 Daróczy 在 [5] 中以及 Páles 在 [9], 中引入。下文将回顾论文 [9] 中的定义 2.1 和定理 2.1。二元函数 $E: I^2 \to \mathbb{R}$ 若具有以下三个性质，则称为 准偏差： $E$

(D1) 对所有 $x$、$u \in I$，等号 $E(x,u) = \text{sign}(x-u)$ hol ds.
(D2) 对所有 $x \in I$，映射 $I \ni u \mapsto E(x,u)$ 连续。(D3) 对所有满足 $x < y$ 的 $x, y \in I$，映射

$$(x,y) \ni u \mapsto \frac{E(x,u)}{E(y,u)}$$

严格递减。

若 $E$ 具有性质 (D1)，并且以如下条件取代 (D3)，则称 $E$ 为一种 偏差 (D2)（参见 [5]）：

(D3') 对所有 $x \in I$，映射 $I \ni u \mapsto E(x,u)$ 严格递减 .

不难证明，每个偏差也是一种准偏差。为了引入准偏差平均数，下面的命题很有帮助（参见 [9, 定理 2.1]）。

**定理 F**。设 $E: I^2 \to \mathbb{R}$ 是一个准偏差。则对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和$x_1$、.....、$x_n \in I$，存在唯一的元素 $u \in I$使得

$$E(x_1,u) + \cdots + E(x_n,u) = 0. \tag{1.2}$$

此外，最小值$(x_1, \ldots, x_n) < u <$最大值$(x_1, \ldots, x_n)$除非 $x_1 = \cdots = x_n$。

对于 $n \in \mathbb{N}$和 $x_1, \ldots, x_n \in I$，方程 (1.2) 的解 $u$称为 $E$-准偏差均值 $x_1, \ldots, x_n$，记作 $\mathcal{D}_E(x_1, \ldots, x_n)$。

如果 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 严格递增且 $p\colon I \to \mathbb{R}$ 连续，那么$E(x,u) := p(x)(f(x) - f(u))$ 是一个偏差（也是一个准偏差），简单计算可得 $\mathcal{D}_E = \mathcal{B}_{f,p}$。

我们称准偏差 $E\colon I \times I \to \mathbb{R}$ 是可归一化的（参见 [5]），如果对所有 $x \in I$，函数 $u \mapsto E(x,u)$ 在 $x$ 处可微，并且映射$x \mapsto \partial_2 E(x,x)$ 在 $I$上严格为负且连续。$E$ 的归一化$E^*\colon I \times I \to \mathbb{R}$ 定义为

$$E^*(x,u) := -\frac{E(x,u)}{\partial_2 E(u,u)}.$$

若 $E$ 可归一化，则 $E^*$ 也是一个准偏差，$\mathcal{D}_E = \mathcal{D}_{E^*}$ 且$\partial_2 E^*(x,x) = -1$，因此$(E^*)^* = E^*$。

在由可归一化准偏差生成的偏差平均类中，詹森凸性的刻画可由 Daróczy 的一般结果 [5]推出。

**定理 G.** 设 $E\colon I \times I \to \mathbb{R}$ 是一个可归一化准偏差。那么，$\mathcal{D}_E$是凸函数，当且仅当 $E^*$ 在 $I \times I$上是凸函数。

不假设可归一化时，Páles [10, 定理 11] 得到了一个一般定理，由此可推出以下结果。

**定理H.** 设 $E\colon I \times I \to \mathbb{R}$ 是一个准偏差。那么，$\mathcal{D}_E$ 是凸函数，当且仅当存在两个函数 $a$，$b\colon I \times I \to \mathbb{R}$，使得对所有$x$，$y$，$u$，$v \in I$，

$$E\Big(\frac{x+y}{2}, \frac{u+v}{2}\Big) \le a(u,v)E(x,u) + b(u,v)E(y,v). \tag{1.3}$$

受准算术均值詹森凸性刻画定理的启发，我们旨在不作任何额外的正则性假设，建立准偏差和 Bajraktarević 均值詹森凸性的刻画，即推广定理 E 和 G。我们的方法主要以定理 H 为出发点。

## 2. 主要结果

下文将用到以下辅助结果。

**引理 2.1.** 设 $I \subset \mathbb{R}$为一个开区间，且 $f\colon I \to \mathbb{R}$。若对所有 $x$，$y \in I$，均有 $f(\frac{x+y}{2}) \le f(x)$，则 $f$ 为常值函数。

证明。任取 $x$中的一个元素 $I$和 $\varepsilon > 0$，使得 $x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon \in I$。现在，对于所有 $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，有 $x - \delta, x + \delta, x + 2\delta \in (x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon) \subseteq I$，并且

$$f(x) = f\Big(\tfrac{(x+\delta)+(x-\delta)}{2}\Big) \le f(x+\delta) = f\Big(\tfrac{x+(x+2\delta)}{2}\Big) \le f(x).$$

因此，对于所有 $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$， $f(x) = f(x+\delta)$。于是 $f$在$x$ 处可微，且 $f'(x) = 0$。

由于 $x$ 是任意的，我们得到 $f$ 在 $I$ 上可微，且 $f'$ 在其上恒为零。这意味着 $f$ 是常值函数。□

为简化部分结果的表述及其证明，我们引入以下正则性：若函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 在每一点都近乎可微，即在 $I$ 的每一点都存在左、右导数，且左、右导数不相等的点集至多可数，则称该函数具有此正则性。众所周知，凸函数具有这一正则性。

**定理 2.2**。设 $E\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 是一个准偏差。那么以下条件彼此等价：

*(i)* 准偏差均值 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的。*(ii)* 对所有 $u \in I$，映射 $x \mapsto E(x,u)$ 在 $x = u$ 处的右导数为正，记作 $\partial_1^+ E(u,u)$，且由 $E^+(x,u) := {}^{E(x,u)}\partial_1^+ E(u,u)$ 定义的映射 $E^+\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 在 $I^2$ 上是凸函数。*(iii)* 对所有 $u \in I$，映射 $x \mapsto E(x,u)$ 在$x = u$处的左导数为正，记作 $\partial_1^- E(u,u)$，且由$E^-(x,u) := {}^{E(x,u)}\partial_1^- E(u,u)$ 定义的映射 $E^-\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 在 $I^2$ 上是凸函数。

此外，若上述任一等价条件成立，则准偏差 $E$ 和准偏差均值 $\mathcal{D}_E$ 具有以下性质：

*(a)* $E$ 在 $I^2$上连续。*(b)* 对所有 $u \in I$，函数 $I \ni x \mapsto E(x,u)$ 是凸的。*(c)* 函数 $I \ni u \mapsto (\partial_1^- E(u,u)\ \partial_1^+ E(u,u))$ 连续。*(d)* 映射 $I \ni u \mapsto {}^{\partial_1^+ E(u,u)}\partial_1^- E(u,u)$ 是常值函数。*(e)* $\mathcal{D}_E$ 不小于算术平均数。

证明。现在假设条件(i)成立。根据定理H，我们知道，准偏差均值 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的，当且仅当存在两个函数 $a, b\colon I^2 \to \mathbb{R}$，使得(1.3)成立。将数对$(x,u)$与$(y,v)$互换，可得

$$E\Big(\frac{x+y}{2}, \frac{u+v}{2}\Big) \le a(v,u)E(y,v) + b(v,u)E(x,u), \qquad x,y,u,v \in I.$$

将上述不等式与（1.3）逐项相加，得到

$$E\Big(\frac{x+y}{2}, \frac{u+v}{2}\Big) \le c(u,v)E(x,u) + c(v,u)E(y,v), \qquad x,\ y,\ u,\ v \in I, \quad (2.1)$$

其中，$c\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$c(u,v) := \frac{a(u,v) + b(v,u)}{2}, \qquad u,v \in I.$$

将 $y := x$ 和 $v := u$ 代入 (2.1)，得到

$$E(x,u) \le 2c(u,u)E(x,u), \qquad x,u \in I.$$

于是，由准偏差的性质 (D1)，可知对于每个 $u \in I$，因子 $E(\cdot, u)$ 同时取正值和负值，因此我们可以得出结论：

$$c(u,u) = \frac{1}{2}, \qquad u \in I.$$

接下来，将 $u := v$ 代入 (2.1)，得到

$$E\Big(\frac{x+y}{2}, u\Big) \leq \frac{E(x,u)+E(y,u)}{2}, \qquad x,y,u \in I.$$

因此，对每个固定的 $u \in I$，函数 $I \ni x \mapsto E(x,u)$ 都是詹森凸的。另一方面，该函数在开区间 $(-\infty, u) \cap I$ 上有上界 0。因此，根据伯恩斯坦-多奇定理[3], ，它是凸的。由此可知，所有这类映射都近乎可微。因此，对所有 $(x,u) \in I^2$，单侧偏导数 $\partial_1^+ E(x,u)$ 和 $\partial_1^- E(x,u)$ 均存在。应用准偏差的性质 (D1)，还可得到

$$\partial_1^+ E(u,u) \geq \partial_1^- E(u,x) > 0, \qquad u \in I. \tag{2.2}$$

接下来，令 $y := v$ 代入 (2.1)，得到

$$E\Big(\frac{x+v}{2}, \frac{u+v}{2}\Big) \leq c(u,v)E(x,u), \qquad x,u,v \in I.$$

现在，利用 (D1)，可以得到双重不等式

$$\frac{E\big(\frac{x_2+v}{2}, \frac{u+v}{2}\big)}{E(x_2,u)} \leq c(u,v) \leq \frac{E\big(\frac{x_1+v}{2}, \frac{u+v}{2}\big)}{E(x_1,u)}, \quad x_1,x_2,u,v \in I \text{ with } x_1 < u < x_2. \tag{2.3}$$

由于 $E$ 在对角线上消失（由 (D1) 可知），我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{x_1 \to u^-} \frac{E\big(\frac{x_1+v}{2}, \frac{u+v}{2}\big)}{E(x_1,u)} \\
&\quad = \frac{1}{2} \lim_{x_1 \to u^-} \frac{E\big(\frac{x_1+v}{2}, \frac{u+v}{2}\big) - E\big(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}\big)}{\frac{x_1+v}{2} - \frac{u+v}{2}} \frac{x_1-u}{E(x_1,u)-E(u,u)} \\
&\quad = \frac{\partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^- E(u,u)}.
\end{aligned}$$

同理

$$\lim_{x_2 \to u^+} \frac{E\big(\frac{x_2+v}{2}, \frac{u+v}{2}\big)}{E(x_1,u)} = \frac{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^+ E(u,u)}.$$

在不等式 (2.3) 中取 $x_1 \to u^-$ 和 $x_2 \to u^+$ 的极限，并结合刚刚证明的等式，我们得到

$$\frac{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^+ E(u,u)} \leq c(u,v) \leq \frac{\partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^- E(u,u)}, \qquad u,v \in I. \tag{2.4}$$

根据（2.2），我们可以将这个不等式改写如下

$$\frac{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{\partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})} \leq \frac{\partial_1^+ E(u,u)}{\partial_1^- E(u,u)}, \qquad u,v \in I.$$

将引理 2.1 应用于函数 $f(u) := \frac{\partial_1^+ E(u,u)}{\partial_1^- E(u,u)}$，可知 $f$ 是常值函数，因此存在常数 $\alpha \in \mathbb{R}$，使得对所有 $u \in I$，$\partial_1^+ E(u,u) = \alpha \partial_1^- E(u,u)$。显然，$\alpha \geq 1$，因为 $\partial_1^+ E(u,u) \geq \partial_1^- E(u,u) > 0$。因此，

$$\frac{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^+ E(u,u)} = \frac{\alpha \partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\alpha \partial_1^- E(u,u)} = \frac{\partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^- E(u,u)}, \qquad u, v \in I.$$

因此，(2.4) 中的不等式给出

$$c(u,v) = \frac{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^+ E(u,u)} = \frac{\partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^- E(u,u)}, \qquad u, v \in I.$$

因此，利用 (2.1)，不等式 (2.2) 蕴含如下詹森凸性类型的性质：

$$\frac{E(\frac{x+y}{2}, \frac{u+v}{2})}{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{E(x,u)}{\partial_1^+ E(u,u)} + \frac{E(y,v)}{\partial_1^+ E(u,u)}\right), \qquad x, y, u, v \in I \quad (2.5)$$

and

$$\frac{E(\frac{x+y}{2}, \frac{u+v}{2})}{\partial_1^- E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{E(x,u)}{\partial_1^- E(u,u)} + \frac{E(y,v)}{\partial_1^- E(u,u)}\right), \qquad x, y, u, v \in I.$$

等价地，$E^+$ 和 $E^-$ 在 $I^2$ 上都是詹森凸的。另一方面，函数 $E$，以及由此得到的 $E^+$ 和 $E^-$，在开集 $\{(x,u) \in I^2 \mid x < u\}$ 上均被零从上方界定。因此，根据 Bernstein–Doetsch 定理，詹森凸性蕴含 $E^+$ 和 $E^-$ 的凸性，即条件 (ii) 和 (iii) 分别成立。

为证明逆向蕴含，假设 (ii) 成立，即对于所有 $u \in I$，映射 $x \mapsto E(x,u)$ 在 $x = u$ 处具有正的右导数，并且 $E^+$ 在 $I^2$ 上是凸函数。于是，(2.1) 满足

$$c(u,v) := \frac{\partial_1^+ E(\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2})}{2\partial_1^+ E(u,u)},$$

由此应用定理 H 可知，$\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的。蕴含关系 (iii)$\Longrightarrow$(i) 的证明类似。

为证明定理的最后几个结论，假设 (i)（因而 (ii)、(iii)）成立。正如我们在证明中所见，这意味着 $E$ 关于其第一个变量是凸的，即 (b) 成立。我们还验证了断言 (d)。由 (ii) 可知，函数 $E^+$ 是凸的，因而在 $I^2$ 上连续。

为证明断言 (c)，固定 $u_0 \in I$ 并选取 $x \in I \setminus \{u_0\}$。再利用准偏差的性质 (D2)，可得映射

$$u \mapsto \frac{E(x,u)}{E^+(x,u)} = \partial_1^+ E(u,u)$$

在 $u_0$ 处连续。这证明映射 $I \ni u \mapsto \partial_1^+ E(u,u)$ 是连续的。类似地，我们可以看到映射 $I \ni u \mapsto \partial_1^- E(u,u)$ 也连续，因此断言 (c) 成立。

利用等式 $E(x,u) = \partial_1^+ E(u,u)\cdot E^+(x,u)$、$E^+$ 的连续性（这是其凸性的结果）以及性质 (c)，我们可以得出断言 (a) 也成立。

由准偏差 $E$ 的性质 (b) 很容易推出 (e)。事实上，如果对于所有 $u \in I$，函数 $E(\cdot,u)$ 都是凸函数，那么存在一个函数 $h\colon I \to \mathbb{R}$ 使得

$$h(u)(x-u) \le E(x,u) \qquad (x,u \in I).$$

根据论文 [10, 定理7的结果，条件（iv）], 可知，$\mathcal{D}_E$ 不小于算术平均数。□

**定理 2.3**。设 $E\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 是一个准偏差，且 $\alpha$，$\beta \in (0,\infty)$。定义$E_{\alpha,\beta}\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 为

$$E_{\alpha,\beta}(x,u) := \begin{cases} \alpha E(x,u) & \text{for } x \le u, \\ \beta E(x,u) & \text{for } x > u. \end{cases} \tag{2.6}$$

则 $E_{\alpha,\beta}$ 是一个准偏差。此外，如果 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的且$\alpha \le \beta$，那么 $\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 也是詹森凸的。

此外，如果 $E$ 在 $I^2$ 的对角线上的每一点都具有 *Gateaux* 意义下的可微性，并且映射 $u \mapsto \partial_1 E(u,u)$ 是连续的，那么 $\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$是詹森凸的，当且仅当 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的且 $\alpha \le \beta$。

证明。准偏差显然满足性质（D1）和（D2）。为检验（D3），设 $x$, $y \in I$ 满足 $x < y$。那么，对于所有 $u \in (x,y)$，有

$$\frac{E_{\alpha,\beta}(x,u)}{E_{\alpha,\beta}(y,u)} = \frac{\alpha E(x,u)}{\beta E(y,u)}.$$

右端是关于 $u$ 的严格递减函数，因为 $E$ 是准偏差，因此左端也严格递减，这表明 $E_{\alpha,\beta}$ 同样具有性质（D3）。

现在假设 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的，且 $\alpha \le \beta$。那么，

$$E_{\alpha,\beta}(x,u) = \max(\alpha E(x,u), \beta E(x,u)), \qquad (x,u) \in I^2,$$

并且，根据定理 2.2 的条件（ii），函数 $E^+$ 在 $I^2$ 上是凸的。另一方面，对于 $(x,u) \in I^2$,

$$\begin{aligned} E^+_{\alpha,\beta}(x,u) &= \frac{E_{\alpha,\beta}(x,u)}{\partial_1^+ E_{\alpha,\beta}(u,u)} = \frac{\max(\alpha E(x,u), \beta E(x,u))}{\beta \partial_1^+ E(u,u)} \\ &= \frac{1}{\beta}\max\big(\alpha E^+(x,u), \beta E^+(x,u)\big). \end{aligned}$$

因此，

$$E^+_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta}\max\big(\alpha E^+, \beta E^+\big), \tag{2.7}$$

这表明，$E^+_{\alpha,\beta}$ 是两个凸函数的最大值，因此其自身也是凸函数。因此，定理 2.2 的条件（ii）对 $E_{\alpha,\beta}$ 成立，进而$\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 是詹森凸的。

现在假设 $E$ 在 $I^2$ 的对角线上的每一点都具有 Gateaux 可微性，映射 $I \ni u \mapsto \partial_1 E(u,u)$ 连续，且 $\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 是詹森凸的。那么 $E_\alpha^+$ 是凸的，当且仅当 $\alpha \le \beta$。

为证明 $\alpha \le \beta$，令 $u \in I$ 固定。于是有

$$\alpha\partial_1 E(u,u) = \partial_1^- E_{\alpha,\beta}(u,u) \le \partial_1^+ E_{\alpha,\beta}(u,u) = \beta\partial_1 E(u,u).$$

由于 $\partial_1 E(u,u) > 0$，因此可得 $\alpha \le \beta$。

$\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 的詹森凸性意味着 $E_\alpha^+$ 是凸的。根据公式（2.7），我们可以看到，$E^+$ 在两个三角形 $\Delta^+ := \{(x,u) \in I^2 \mid x \le u\}$ 和 $\Delta^- := \{(x,u) \in I^2 \mid x \ge u\}$上都是凸的。为了证明 $E^+$ 在$I^2 = \Delta^+ \cup \Delta^-$上是凸的，只需证明 $E^+$ 沿着任何穿过 $I^2$对角线的直线都是凸的。

令 $u \in I$固定，并令$(0,0) \ne (v,w) \in \mathbb{R}^2$为任意点。则直线 $\mathbb{R} \ni t \mapsto (u+tv, u+tw)$穿过 $I^2$ 的对角线于$(u,u)$处。我们将证明函数 $e\colon T \to \mathbb{R}$ 由 $e(t) := E^+(u+tv, u+tw)$定义，在区间 $T := \{t \in \mathbb{R} \mid (u+tv, u+tw) \in I^2\}$上是凸的。$E^+$ 在三角形 $\Delta^+$ 和 $\Delta^-$ 上的凸性意味着 $e$ 在子区间 $T_- := (-\infty, 0] \cap T$和 $T_+ := [0,\infty) \cap T$上是凸的。另一方面，利用映射 $u \mapsto \partial_1 E(u,u)$的连续性，我们可以得到

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{e(t)-e(0)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{E^+(u+tv,u+tw)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{E(u+tv,u+tw)}{\partial_1 E(u+tw,u+tw)t} \\ &= \frac{1}{\partial_1 E(u,u)} \lim_{t\to 0} \frac{E(u+tv,u+tw)-E(u,u)}{t}.\end{aligned}$$

根据 $E$ 的盖托可微性假设，右侧的极限存在，因此 $e$ 在 $t=0$ 处可微。$e$ 的这一性质与其在子区间 $T_-$ 和 $T_+$ 上的凸性共同表明，$e$ 在 $T$ 上是凸的。因此，我们证明了 $E^+$ 在 $I^2$ 上是凸的，进而均值 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的。□

**推论 2.4.** 设 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 是连续的严格递增函数，且 $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ 满足 $\alpha \le \beta$。那么，由下式定义的函数 $E_{\alpha,\beta}\colon I^2 \to \mathbb{R}$

$$E_{\alpha,\beta}(x,u) := \begin{cases} \alpha(f(x)-f(u)) & \text{for } x \le u; \\ \beta(f(x)-f(u)) & \text{for } x > u \end{cases} \tag{2.8}$$

是一个准偏差。此外，$\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 是詹森凸的，当且仅当 $\alpha \le \beta$，$f$ 二阶可微，且其导数为正，并且

$$\text{either } f'' \text{ is nonvanishing and } \frac{f'}{f''} \text{ is positive and convex or } f'' \equiv 0. \tag{2.9}$$

证明。定义 $E\colon I^2 \to \mathbb{R}$，使得 $E(x,u) := f(x) - f(u)$。则 $E$ 是一个偏差，因此也是一个准偏差。由定理 2.3 的第一个陈述可知，$E_{\alpha,\beta}$ 是一个准偏差。

首先，假设 $\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 是詹森凸的。于是，根据定理 2.2 的断言 (b)，对于所有 $u \in I$，映射 $x \mapsto E_{\alpha,\beta}(x,u)$ 在 $I$ 上是凸函数。这意味着，对于所有 $u \in I$，$\alpha f - \alpha f(u)$ 在 $(-\infty, u) \cap I$上是凸函数，因此，

$f$ 在 $I$ 上是凸函数。因此，$f$ 近乎可微。现在我们可以得到，对于所有 $u \in I$，$\partial_1^- E(u,u) = \alpha f'_-(u)$，以及 $\partial_1^+ E(u,u) = \beta f'_+(u)$。根据定理2.2 的断言 (b)，比值函数

$$u \mapsto \frac{\partial_1^+ E(u,u)}{\partial_1^+ E(u,u)} = \frac{\beta f'_+(u)}{\alpha f'_-(u)}$$

在 $I$ 上为常值函数。由于除去可数多个 $u$ 值外，我们有 $f'_+(u) = f'_-(u)$，因此上述比值等于常数 $\beta/\alpha$。于是，对所有 $u \in I$，我们得到 $f'_+(u) = f'_-(u)$，这证明了 $f$ 在 $I$ 的每个元素处都可微。因此，$E$ 在 $I^2$ 上也可微，并且在 $I^2$ 的对角线点处盖托可微。因此，根据定理 2.3，可知 $\alpha \leq \beta$，且均值 $\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的。根据定理 B，$\mathcal{D}_E$ 是詹森凸的，当且仅当 $f$ 二阶可微、具有正导数且满足 (2.9)。

现在反过来假设 $E_{\alpha,\beta}$ 具有形式 (2.8)，其中某些 $\alpha$、$\beta \in \in (0,+\infty)$ 满足 $\alpha \leq \beta$，且函数 $f$ 满足 (2.9)。那么，根据定理 B，$\mathcal{A}_f = \mathcal{D}_E$ 是凸的；由定理 2.3 可知，均值 $\mathcal{D}_{E_{\alpha,\beta}}$ 也是凸的。□

## 3. Bajraktarević 均值的情形

下文中，在开区间 $I$ 上定义的 $k$ 次连续可微函数空间，以及具有处处非零的一阶导数的 $k$ 次连续可微函数空间，分别记为$\mathcal{C}^k(I)$ 和 $\mathcal{C}^{k\#}(I)$。

**定理 3.1**。设 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 是严格单调且连续的函数，$p\colon I \to \mathbb{R}_+$ 是正函数。则以下条件彼此等价：

(i) *Bajraktarević* 均值$\mathcal{B}_{f,p}$ 是詹森凸的。(ii) $f \in \mathcal{C}^{1\#}(I)$，且映射 $B_{f,p}\colon I^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$B_{f,p}(x,u) := \frac{p(x)(f(x)-f(u))}{p(u)f'(u)}$$

在 $I^2$上是凸的。

(iii) $f \in \mathcal{C}^{2\#}(I)$、$p \in \mathcal{C}^1(I)$，且对所有 $x$，$y$，$u$，$v \in I$，

$$\frac{p(y)(f(y)-f(v))}{p(v)f'(v)} \geq \frac{p(x)(f(x)-f(u))}{p(u)f'(u)} + \frac{(pf)'(x)-f(u)p'(x)}{(pf')(u)}(y-x) + p(x)\frac{(f(u)-f(x))\cdot(pf')'(u)-(pf')(u)\cdot f'(u)}{(pf')(u)^2}(v-u).$$

(iv) $f \in \mathcal{C}^{2\#}(I)$、 $p \in \mathcal{C}^1(I)$，且对所有 $x$， $y$， $u$， $v \in I$，

$$\left(\frac{(pf)'(x) - f(u)p'(x)}{(pf')(u)} - \frac{(pf)'(y) - f(v)p'(y)}{(pf')(v)}\right)(x-y) + \left(p(x)\frac{(f(u)-f(x))(pf')'(u) - (pf')(u)f'(u)}{(pf')(u)^2} - p(y)\frac{(f(v)-f(y))\cdot(pf')'(v) - (pf')(v)\cdot f'(v)}{(pf')(v)^2}\right)(u-v) \geq 0.$$

证明。 不失一般性，我们可以假设 $f$ 是递增的。定义准偏差 $E\colon\ I^2 \to \mathbb{R}$，使得 $E(x,u) := p(x)(f(x)-f(u))$。于是有 $\mathcal{B}_{f,\ p} = \mathcal{D}_E$。

假设 $\mathcal{B}_{f,\ p} = \mathcal{D}_E$ 是詹森凸的。那么，根据定理 2.2 的断言 (a)，我们得到 $E$ 关于其第一个变量是凸的。也就是说，对所有$u \in I$，函数 $pf - f(u)p$ 是凸的，因而近乎可微。令 $u, v$ 为 $I$中的两个不同元素，则

$$p = \frac{(pf - f(u)p) - (pf - f(v)p)}{f(v) - f(u)},$$

这表明 $p$ 也近乎可微。我们还有

$$f = \frac{pf - f(u)p}{p} + f(u),$$

这表明 $f$ 也近乎可微。

鉴于这些性质，对所有 $u \in I$，我们可以得到

$$\begin{aligned}\partial_1^+ E(u,u) &= (pf - f(u)p)'_+(u)\\ &= p'_+(u)f(u) + p(u)f'_+(u) - f(u)p'_+(u) = p(u)f'_+(u).\end{aligned}$$

类似地，

$$\partial_1^- E(u,u) = p(u)f'_-(u).$$

由定理 2.2 的断言 (a)，比值函数 $u \mapsto {}^{\partial_1^+ E}_{(u,u)}\,{}_{\partial_1^- E(u,u)}$ 是常值函数，因此，对于某个常值函数 $c \in \mathbb{R}$，有 $f'_+ = cf'_-$。另一方面， $f$几乎处处可微，因此， $c = 1$，这说明 $f$ 处处可微且具有正导数。由定理 2.2 的断言 (ii) 可知，断言 (ii) 中定义的函数 $B_{f,p}$ 是凸的。由此，我们证明了断言 (i) 与 (ii) 等价。

现在假设 (ii) 成立。由 $B_{f,p}$ 的凸性可知，对于所有 $x \in I$，映射 $u \mapsto B_{f,p}(x,u)$ 是凸的。因此，它是近乎可微的。对于 $x, u \in I$，我们有

$$f'(u) = \frac{p(x)(f(x) - f(u))}{p(u)B_{f,p}(x,u)}.$$

对于任意固定的 $x \in I$，右侧的函数关于 $u$近乎可微。因此， $f'$ 也近乎可微，特别是， $f'$ 连续。

再次利用凸性$B_{f,\ p}$，我们可以得到存在两个函数 $r,s\colon I^2\to\mathbb{R}$，使得

$$B_{f,p}(y,v)-B_{f,p}(x,u)\geq r(x,u)(y-x)+s(x,u)(v-u),\quad x,y,u,v\in I. \tag{3.1}$$

代入 $y:=x$ 后，不等式 (3.1) 意味着

$$\frac{(f(x)-f(v))((pf')(u)-(pf')(v))-(pf')(v)(f(v)-f(u))}{(pf')(v)(pf')(u)}\geq\frac{s(x,u)}{p(x)}(v-u).$$

若 $v>u$，则将不等式两边同时除以 $(v-u)$，再令 $v\downarrow u$ 并取右极限，得到

$$\frac{(f(u)-f(x))\cdot(pf')'_+(u)-(pf')(u)\cdot f'(u)}{(pf')(u)^2}\geq\frac{s(x,u)}{p(x)},\qquad x,u\in I.$$

对 $v<u$ 重复上述论证，得到

$$\frac{s(x,u)}{p(x)}\geq\frac{(f(u)-f(x))\cdot(pf')'_-(u)-(pf')(u)\cdot f'(u)}{(pf')(u)^2},\qquad x,u\in I.$$

结合上述两个不等式，可得

$$(f(u)-f(x))\cdot[(pf')'_+(u)-(pf')'_-(u)]\geq 0,\qquad x,u\in I.$$

由于 $x$ 是任意的，该不等式只有在对所有 $u\in I$ 都有 $(pf')'_+(u)=(pf')'_-(u)$ 时才成立，这证明 $pf'$ 处处可微。由此可知，对所有 $x,u\in I$，

$$s(x,u)=p(x)\frac{(f(u)-f(x))\cdot(pf')'(u)-(pf')(u)\cdot f'(u)}{(pf')(u)^2}=\partial_2 B_{f,p}(x,u). \tag{3.2}$$

现在将 (3.1) 用于 $v:=u$，可得

$$\frac{p(y)(f(y)-f(u))-p(x)(f(x)-f(u))}{(pf')(u)}\geq r(u,x)(y-x),\qquad x,y,u\in I.$$

因此，对于所有满足 $y>x$ 的 $x$、$y$、$u\in I$，有

$$\begin{aligned}r(u,x)&\leq\frac{p(y)(f(y)-f(u))-p(x)(f(x)-f(u))}{(pf')(u)(y-x)}\\&=\frac{1}{(pf')(u)}\left(\frac{(pf)(y)-(pf)(x)}{y-x}-f(u)\frac{p(y)-p(x)}{y-x}\right).\end{aligned}$$

由于 $p$ 和 $f$ 都近乎可微，我们可以取极限 $y\searrow x$，得到

$$\frac{(pf)'_+(x)-f(u)p'_+(x)}{(pf')(u)}\geq r(u,x),\qquad x,u\in I. \tag{3.3}$$

类似地，对于所有满足 $y<x$ 的 $x$、$y$、$u\in I$，有

$$r(u,x)\geq\frac{1}{(pf')(u)}\left(\frac{(pf)(y)-(pf)(x)}{y-x}-f(u)\frac{p(y)-p(x)}{y-x}\right),$$

当 $y\nearrow x$ 时，在极限情况下可得到不等式

$$r(u,x)\geq\frac{(pf)'_-(x)-f(u)p'_-(x)}{(pf')(u)},\qquad x,u\in I. \tag{3.4}$$

由不等式 (3.3) 和 (3.4)，我们可以得出

$$\frac{(pf)'_+(x)-f(u)p'_+(x)}{(pf')(u)}\geq\frac{(pf)'_-(x)-f(u)p'_-(x)}{(pf')(u)},\qquad x,u\in I.$$

我们知道 $(pf')(u)>0$，因此可以得到

$$(pf)'_+(x)-f(u)p'_+(x)\geq(pf)'_-(x)-f(u)p'_-(x),\qquad x,u\in I.$$

利用 $f$ 的可微性，对于所有 $x,u\in I$，可得

$$p'_+(x)f(x)+p(x)f'(x)-f(u)p'_+(x)\geq p'_-(x)f(x)+p(x)f'(x)-f(u)p'_-(x),$$

这也可以等价地改写为

$$(f(x)-f(u))(p'_+(x)-p'_-(x))\geq 0,\qquad x,u\in I.$$

由于 $u$ 是任意的，且 $f$ 严格单调，这个不等式只有在对所有 $x\in I$，$p'_+(x)-p'_-(x)=0$ 时才成立，由此可知 $p$ 在区间 $I$ 上可微。然而，我们已经证明 $pf'$ 可微，因此 $f$ 必须二阶可微。

因此，由 (3.3) 和 (3.4) 给出的函数 $r$ 的上界和下界彼此相等，从而得到

$$r(u,x)=\frac{(pf)'(x)-f(u)p'(x)}{(pf')(u)}=\partial_1B_{f,p}(x,u),\qquad x,u\in I. \tag{3.5}$$

$p$ 的可微性以及 $f$ 的二阶可微性意味着$B_{f,\,p}$ 是可微的。另一方面，众所周知，凸函数的偏导数是连续的。因此，$\partial_1B_f$

$_{,p}$ 和 $\partial_2B_f$ $_{,p}$ 在 $I^2$上连续。

根据公式 (3.5)，对于所有满足 $x\neq u$的 $x$、 $u$、 $\in I$，我们可以得到

$$p'(x)=\frac{\partial_1B_{f,p}(x,u)(pf')(u)-(pf')(x)}{f(x)-f(u)}.$$

这表明 $p'$ 除 $x=u$处外处处连续。但是，由于 $u$是 $I$中的任意元素，我们得到 $p'$ 在 $I$ 上连续，因此它属于 $\mathcal{C}^1(I)$。

利用公式 (3.2)，对于所有满足 $x\neq u$ 的 $x$、 $u$、 $\in I$，我们可以得到

$$f''(u)=\frac{1}{p(u)}\left(\frac{(pf')(u)^2\partial_2B_{f,p}(x,u)+p(x)(pf')(u)f'(u)}{p(x)(f(u)-f(x))}-(p'f')(u)\right),$$

这表明 $f''$ 在除 $u=x$ 之外的所有点处都连续。由于 $x$ 是任意的，这意味着 $f''$ 在 $I$ 上连续，因此它属于 $\mathcal{C}^{2\#}(I)$。

现在可以看出，不等式 (3.1) 等价于条件 (iii)，因此蕴含关系 (ii)⇒(iii) 得以验证。另一方面，如果 (iii) 成立，那么 $B_{f,\,p}$ 是仿射函数的逐点上确界，因此它是凸的，即 (ii) 也成立。最后一个条件表达了 $B_{f,\,p}$ 的梯度的单调性，即对于所有 $x$、 $y$、 $u$、 $v\in I$，不等式

$$(\partial_1B_{f,p}(x,u)-\partial_1B_{f,p}(y,v))(x-y)+(\partial_2B_{f,p}(x,u)-\partial_2B_{f,p}(y,v))(u-v)\geq 0$$

成立，而这也已知等价于$B_{f,p}$的凸性。 □

## 4. 子区间上的基尼平均数的凸性

对于 $q,r\in\mathbb{R}$，我们需要引入以下记号。

$$\gamma_{q,r}(t):=\begin{cases}\dfrac{t^q-t^r}{q-r} & \text{if } q\neq r,\\ t^q\log t & \text{if } q=r,\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

and

$$\beta_{q,r}:=\begin{cases}\left(\dfrac{q(q-1)}{r(r-1)}\right)^{\frac{1}{q-r}} & \text{if } q\neq r \text{ and } qr(q-1)(r-1)>0,\\ \exp\left(\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q-1}\right) & \text{if } q=r \text{ and } q(q-1)\neq 0.\end{cases}$$

**定理 4.1.** 设 $q,r\in\mathbb{R}$, $0<a<b<\infty$。那么以下三个断言彼此等价。

*(i)* 平均数 $\mathcal{G}_{q,r}$ 在区间 $(a,b)$ 上是詹森凸的。*(ii)* 函数 $\gamma_{q,r}$ 在区间 $\left[\frac{a}{b},\frac{b}{a}\right]$ 上是凸的。*(iii)* 以下条件之一成立：
*(1)* $0\le \min(q,r)\le 1\le \max(q,r)$; *(2)* $\max(q,r)<1\le q+r$ 且 $\beta_{q,r}\le\frac{a}{b}$; *(3)* $\min(q,r)\le 0$, $1\le q+r$ 且 $\beta_{q,r}\ge\frac{b}{a}$; *(4)* $1\le\min(q,r)$ 且 $\beta_{q,r}\ge\frac{b}{a}$。

证明。在后续论证中令 $r<q$。情形 $q=r$ 和 $q<r$ 可用类似方法处理，因此留给读者。

定义 $f(x):=x^{q-r}$ 以及 $p(x):=x^r$，其中 $x\in\mathbb{R}_+$。那么，Bajraktarević 均值 $\mathcal{B}_{f,p}$ 等于 Gini 平均 $\mathcal{G}_{q,r}$。因此，要刻画 $\mathcal{G}_{q,r}$ 在 $(a,b)$ 上的詹森凸性，我们需要描述 $\mathcal{B}_{f,p}$ 在 $(a,b)$ 上的詹森凸性。根据定理 E 或定理 3.1，这一性质等价于下述映射的凸性

$$\begin{aligned}(a,b)^2\ni(x,u)\mapsto\frac{p(x)(f(x)-f(u))}{p(u)f'(u)}&=\frac{x^r(x^{q-r}-u^{q-r})}{(q-r)u^ru^{q-r-1}}\\&=\frac{u}{q-r}\left(\left(\frac{x}{u}\right)^q-\left(\frac{x}{u}\right)^r\right)=u\,\gamma_{q,r}\left(\frac{x}{u}\right).\end{aligned}$$

也就是说，$\mathcal{G}_{q,r}$ 在 $(a,b)$ 上是詹森凸的，当且仅当，对于所有 $x$、$u$、$y$、$v\in(a,b)$ 和 $t\in[0,1]$,

$$(tu+(1-t)v)\,\gamma_{q,r}\left(\frac{tx+(1-t)y}{tu+(1-t)v}\right)\le tu\,\gamma_{q,r}\left(\frac{x}{u}\right)+(1-t)v\,\gamma_{q,r}\left(\frac{y}{v}\right).$$

这个不等式等价于

$$\begin{aligned}&\gamma_{q,r}\left(\frac{tu}{tu+(1-t)v}\frac{x}{u}+\frac{(1-t)v}{tu+(1-t)v}\frac{y}{v}\right)\\&\qquad\le\frac{tu}{tu+(1-t)v}\gamma_{q,r}\left(\frac{x}{u}\right)+\frac{(1-t)v}{tu+(1-t)v}\gamma_{q,r}\left(\frac{y}{v}\right).\end{aligned}$$

通过代换 $w := \frac{x}{u}$, $z := \frac{y}{v}$ and $\lambda := \frac{tu}{tu + (1-t)v}$，容易看出，上述不等式对所有 $x, u, y, v \in (a, b)$ 和 $t \in [0, 1]$ 成立，当且仅当

$$\gamma_{q,r}(\lambda w + (1-\lambda)z) \leq \lambda\gamma_{q,r}(w) + (1-\lambda)\gamma_{q,r}(z)$$

对所有 $w$、$z \in \left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$ 和 $\lambda \in [0, 1]$ 均成立，也就是说，如果 $\gamma_{q,\,r}$ 在区间 $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$ 上是凸的。

因此，我们证明了断言 (i) 等价于断言 (ii)。

$\gamma_{q,\,r}$ 在 $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right)$ 上的凸性成立，当且仅当对所有 $t \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right]$，$\gamma''_{q,\,r}(t) \geq 0$，即

$$q(q-1)t^{q-2} \geq r(r-1)t^{r-2}, \qquad t \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right]. \tag{4.1}$$

代入 $t = 1$，可得 $(q-r)(q+r-1) \geq 0$，这意味着 $1 \leq q + r$。

于是，对于 $(q, r)$ 的位置，我们有以下四种可能性（请记住 $r < q$）。

$$(1)\quad 0 \leq r \leq 1 \leq q; \qquad (2)\quad r < q < 1 \leq q + r; \qquad (3)\quad r < 0 \text{ and } 1 \leq q + r; \qquad (4)$$

在情形 (1) 中，不等式 (4.1) 对所有 $t > 0$ 均成立，因为左侧非负、右侧非正，且条件等价于 (iii)(1)。

在情形 (2) 中，我们有 $r, q \in (0, 1)$，因此不等式 (4.1) 的两侧均为负，故它等价于以下不等式

$$\beta_{q,r} \leq \frac{1}{t}, \qquad t \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right],$$

而这又等价于 (iii)(2)。

在情形 (3) 和 (4) 中，可以看出不等式 (4.1) 的两侧均为正，因此它等价于以下不等式

$$\beta_{q,r} \geq \frac{1}{t}, \qquad t \in \left[\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right],$$

而这又分别等价于 (iii)(3) 和 (iii)(4)。 □

## 参考文献

[1] M. Bajraktarević. 关于平均值函数方程。*Glas- nik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II*, 13:243–248, 1958年.[2] M. Bajraktarević. 关于拟线性平均值的推广。贝尔格莱德数学研究所出版物 *(N.S.)*, 3 (17):69–76, 1963年.
[3] F. Bernstein and G. Doetsch. 论凸函数理论。《数学年刊》, 76(4):514–526, 1915年.[4] J. Chudziak, D. Głazowska, J. Jarczyk, and W. Jarczyk. 关于凸加权拟算术均值。*Math. Inequal. Appl.*, 22 1136, 2019年 4 1123( ): – .[5]Z. Daróczy. 平均值的一般不等式。*Aequationes Math.*, 7 21, 1971年 1 16( ): – .

[6] C. Gini. 均值的压缩公式。*Metron*, 13:3–22, 1938.[7] L. Losonczi. 次可加均值。*Arch. Math. (Basel)*, 22:168–174, 1971.[8] L. Losonczi and Zs. Páles. 二元基尼均值的闵可夫斯基不等式。*Acta Sci. Math. (Szeged)*, 62:413–425, 1997.[9] Zs. Páles. 准偏差均值的刻画。*Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40(3-4):243–260, 1982.[10] Zs. Páles. 拟偏差均值的一般不等式。*Aequationes Math.*, 36(1):32–56, 1988.[11] Zs. Páles and P. Pasteczka. 均值哈代性质及最佳哈代常数的刻画。*Math. Inequal. Appl.*, 19(4):1141–1158, 2016.[12] Zs. Páles and P. Pasteczka. 关于加权均值的凯德拉亚型不等式。*J. Inequal. Appl.*, pages 论文第 99 号, 22, 2018.[13] Zs. Páles and P. Pasteczka. 关于拟算术均值和齐次偏差均值的最佳哈代常数。*Math. Inequal. Appl.*, 21 599, 2018 2 585( ): – .[14] Zs. Páles and P. Pasteczka. 关于均值的詹森凸包络和詹森凹包络。*Arch. Math.*, 116(4):423–432, 2021.

Zsolt Páles 数学研究所，德布勒森大学，Pf. 400，4002 德布勒森，匈牙利，电子邮件：pales@science.unideb.hu

Paweł Pasteczka 数学研究所，克拉科夫教育大学，Podchorążych 街 2 号，30-084 克拉科夫，波兰，电子邮件：pawel.pasteczka@up.krakow.pl