arXiv:2302.10071v1 [math.MG] 20 Feb 2023

圆内接四边形、倾斜风筝形及其他四边形的一些多项式条件

Manuele Santoprete*

2023年2月21日

关键词：四边形、圆内接四边形、倾斜风筝形、格罗布纳基、自动定理证明 2020年数学主题分类：51M04、68W30

摘要

本文研究欧几里得几何中出现的一些多项式条件。首先，我们研究与具有互补角的四边形相关的多项式，其中包括凸圆内接四边形以及某些凹四边形。接着，我们考察与具有若干相等角的四边形相关的多项式，其中包括凸倾斜风筝形和凹倾斜风筝形。部分结果通过格罗布纳基计算得到证明。

1 引言

本文研究了一些源自欧几里得几何的多项式方程。这些多项式中的变量是四个点之间的两两距离，而相关方程表达了四边形的一些性质。在 [9] Pech 研究了几个多项式，其中三个（记作 P、S 和 K；其表达式见第 3 节）是四边形为圆内接四边形的必要条件。条件 $P = 0$ 是

*威弗里德·劳里埃大学数学系 电子邮件：msantopr@wlu.ca。ORCID：0000-0003-0501-7517

著名的托勒密定理中出现的方程，而 $S = 0$和 $K = 0$ 分别是一个三次方程和一个四次方程。条件$K = 0$可由余弦定理推出，而 $S = 0$ 则鲜为人知。这三个条件彼此紧密相关；事实上，Pech 证明了 $P = 0$ 等价于（$K = 0 \wedge S = 0$）。[9]。本文将给出一个不使用代数几何的更简单证明来证明这一事实。

Pech 研究的多项式 [9]已被用于研究天体力学中四个天体的循环中心构型 [2, 11]。与另一类四边形（即梯形）相关的类似多项式，也已被证明有助于研究四个天体的中心构型 [10, 12]。鉴于此，寻找能够刻画四个点的各种点配置的其他多项式条件，不仅从几何学角度来看很有意思，也有望应用于天体力学。

本文研究多项式 R （见第 3 节）。该多项式也曾出现在 Pech 的论文 [9], 中，但未得到详细分析。我们证明，条件 $R = 0$ 选出了一些具有互补角但不共圆的构型（凸或凹）。

我们还研究了其他一些对含有相等角的四边形至关重要的多项式。回顾一下，风筝形是具有两对等长邻边的四边形。风筝形可以是凹的，也可以是凸的，并且其对角相等。将风筝形推广的一种方法是考虑对角相等的四边形。这类四边形称为倾斜风筝形 [5, 6]或等角四边形 [4], ，可以是凸的，也可以是凹的。“倾斜风筝形”这个名称似乎更形象，因为这类四边形可以通过扭斜或倾斜风筝形的一个角得到。本文研究的新多项式有助于刻画凹的和凸的倾斜风筝形。

本文结构如下。第 2 节中，我们证明欧几里得几何和代数几何中的几个有用结果。第 3 节中，我们研究与圆内接四边形以及其他具有互补角的几何图形相关的若干多项式。我们首先分析 Petch [9] 已经研究过的条件。我们给出托勒密定理的逆定理的一个更精确表述，并对 Pech 的一个结果给出更简洁的证明。最后，我们详细分析条件 $R = 0$（见方程（9））及其几何意义。第 4 节中，我们研究与倾斜风筝形以及其他具有两个相等角的几何图形相关的一些新的多项式条件。第 5 节中，我们通过介绍其他

组相似的多项式，并提出一些关于如何寻找与四边形相关的其他有趣多项式的想法，作为全文的结尾。

2 预备知识

考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的四个点 A、B、C 和 $D=$（此处使用右手坐标系），并令 $a=|AB|$、$b=|BC|$、$c=|CD|$、$d=|DA|$、$e=|AC|$、$f=|BD|$ 为各点对之间的欧几里得距离。

下面的定理给出了四个点位于同一平面上的条件。

定理 1. 若距离为 a、b、c、d、e 和 f 的四个点 A、B、C、$D\in\mathbb{R}^3$ 属于 $\mathbb{R}^3$ 的一个 $2D$ 仿射子空间，则

$$CM=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & a^2 & e^2 & d^2\\ 1 & a^2 & 0 & b^2 & f^2\\ 1 & e^2 & b^2 & 0 & c^2\\ 1 & d^2 & f^2 & c^2 & 0\end{vmatrix}=0.$$

行列式 CM 是四个点 A、B、C 和 D 的凯莱-门格尔行列式；一般而言，$CM=288V^2$，其中 V 是边长为 a、b、c、d、e、f 的三维单形的体积。在欧几里得几何中，条件 $CM=0$ 被称为欧拉四点关系。

另一个有用的结果是欧拉四边形定理：

定理 2 (欧拉四边形定理**).** 考虑一个凸四边形，其依次排列的边为 a、b、c、d，对角线为 e、f。则

$$a^2+b^2+c^2+d^2-e^2-f^2=4v^2$$

其中 v 是对角线 e 和 f的中点之间的距离。

该定理可以推广，使其适用于 $\mathbb{R}^3$ [7, 8]中的任意四个点。

定理 3 (广义四边形定理**)。** 设 A、B、C、D 是 $\mathbb{R}^3$ 中构成一个四面体的四个点，其边为 $a=|AB|$、$b=|BC|$，

$c = |CD|$、 $d = |AD|$、 $e = |AC|$ 和 $f = |BD|$。那么，对于每一对没有公共顶点的边，都有一个恒等式。具体来说：

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2 &= 4v_1^2 \\ -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + f^2 &= 4v_2^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 + f^2 &= 4v_3^2 \end{aligned}$$

其中， v_1 是 AC 和 BD这两条线段的中点之间的距离，v_2 是 AB 和 CD这两条线段的中点之间的距离，而v_3 是 BC 和 AD这两条线段的中点之间的距离。

证明。 将所有量写成坐标形式并展开，即可验证这些公式。

□

请注意，特别是，这个定理适用于凹四边形和凸四边形。

现在我们将注意力限制在四个点属于$2D$ $\mathbb{R}^3$的仿射子空间这一情形。在这种情况下，我们可以将四个点写为：$A = (A_x,\ A_y)$、 $B = (B_x,\ B_y)$、 $C = (C_x,\ C_y)$和 $D = (D_x,\ D_y)$。从现在起，我们还假设这四个点互不相同，因此 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f > 0$。

四个点的**凹构型** 中，有一个点严格位于另外三个点的凸包内部；而**凸构型** 中则不存在一个点位于另外三个点的凸包内。如果三个或更多点位于同一直线上，我们就称该构型为退化构型。对于凸构型，如果沿四边形边界顺时针或逆时针遍历时，各点依次标记，我们就称这些点依次排列 。

本文将使用以下记号。当我们说点 A、 B、 C、 D 的凸包是 ACD时，指的是该构型为凹构型，点 B 位于三角形 ACD的内部，而 ACD表示沿边界逆时针遍历时各点的顺序。当我们说凸包是 $ADBC$ 时，指的是该构型为凸构型，而 $ADBC$ 是沿边界逆时针遍历时各点的顺序。

Let

$$\Delta_{ABC} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{ABD} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ B_x & B_y & 1 \\ D_x & D_y & 1 \end{vmatrix},$$

and

$$\Delta_{BCD} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \\ D_x & D_y & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{ACD} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & 1 \\ C_x & C_y & 1 \\ D_x & D_y & 1 \end{vmatrix},$$

其中， Δ_{ABC} 表示三角形 ABC的有向面积的两倍。有向是指：若三角形的顶点按逆时针顺序排列，则面积为正；若顶点按顺时针顺序排列，则面积为负；若各点共线，则面积为零。以下定理有助于确定 $\mathbb{R}^2$ 中四个点的凸包，并将点配置分类为凹或凸。

定理 4. 设 A、B、C 和 D 是如上所定义的 $\mathbb{R}^2$ 上的点，并设 $N = \Delta_{ABC} \cdot \Delta_{ACD}$ 和 $M = \Delta_{ABD} \cdot \Delta_{BCD}$。由点 $ABCD$ 构成的构型是凸的，当且仅当

$$N \geq 0 \ and \ M \geq 0$$

or

$$N \leq 0 \ and \ M \leq 0.$$

该构型是凸的且各点依次排列，当且仅当

$$N \geq 0 \ and \ M \geq 0.$$

此外，如果任意一个 Δ 为零，则这三个点共线。如果所有 Δ 都为零，则四个点共线，凸包将是一条直线或一个点。如果所有 Δ 均非零且 $\Delta_{ABC} > 0$ ，那么凸包如下表所示

ABC	ABD	BCD	ACD	凸包
$+$	$+$	$+$	$+$	$ABCD$
$+$	$+$	$-$	$-$	$ABDC$
$+$	$-$	$+$	$-$	$ADBC$
$+$	$+$	$+$	$-$	ABC
$+$	$+$	$-$	$+$	ABD
$+$	$-$	$+$	$+$	BCD
$+$	$-$	$-$	$-$	CAD
$+$	$-$	$-$	$+$	不可实现

如果 $\Delta_{ABC} < 0$ ，我们可以得到一个类似的表格：

ABC	ABD	BCD	ACD	凸包
$-$	$-$	$-$	$-$	$ADCB$
$-$	$-$	$+$	$+$	$ACDB$
$-$	$+$	$-$	$+$	$ACBD$
$-$	$-$	$-$	$+$	ACB
$-$	$-$	$+$	$-$	ADB
$-$	$+$	$-$	$-$	BDC
$-$	$+$	$+$	$+$	CDA
$-$	$+$	$+$	$-$	不可实现

尽管这个结果相当常见，但我所知道的关于这个定理的唯一参考资料，是这篇 Stack Overflow 帖子 [1]。

下面的定理给出了坐标已知的四个点共圆的判据：

定理 5. 设 $A = (A_x, A_y)$、 $B = (B_x, B_y)$、 $C = (C_x, C_y)$和 $D =(D_x, D_y)$ 是平面上的点，则

$$\mathcal{C} = \begin{vmatrix} A_x^2 + A_y^2 & A_x & A_y & 1 \\ B_x^2 + B_y^2 & B_x & B_y & 1 \\ C_x^2 + C_y^2 & C_x & C_y & 1 \\ D_x^2 + D_y^2 & D_x & D_y & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

当且仅当这四个点共圆或共线时，条件成立。

证明。 假设方程 (1) 成立。表达式

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ B_x^2 + B_y^2 & B_x & B_y & 1 \\ C_x^2 + C_y^2 & C_x & C_y & 1 \\ D_x^2 + D_y^2 & D_x & D_y & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

可写为

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \tag{2}$$

其中 $\alpha = \Delta_{BCD}$。由方程 (2) 显然可知，当 $\alpha \neq 0$ 点A, B, C, D共圆时；当 $\alpha = 0$ 点 A, B, C 和 D 共线。

□

现在我们回顾一些代数几何中的事实，更多详情见 [3] 。

定义 1. 设 k 是一个任意的域，$I \subset k[x_1, \ldots x_n]$ 是一个理想。 I的**根式**记作 $\sqrt{I}$，其定义为集合

$$\{f : f^m \in I \text{ for some integer } m \geq 1\}.$$

现在我们给出一个定理，用于检验 $f \in \sqrt{I}$：

命题 1 (根式成员关系)。 设 k 是任意域，$I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个理想。那么， $f \in \sqrt{I}$ 当且仅当常数多项式 1 属于理想 $I = \langle f_1, \ldots, f_s, 1 - yf \rangle \subset k[x_1, \ldots x_n, y]$。

由此可知，要确定 $f \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_s \rangle}$ 是否成立，只需针对某个序计算理想 $\langle f_1, \ldots, f_s, 1 - yf \rangle$ 的约化 Gröbner 基。如果结果是 $\{1\}$，那么 $f \in \sqrt{I}$；否则$f \neq \sqrt{I}$。请注意，Maple 的 `Basis` 命令总是计算约化 Gröbner 基，因此很容易采用这种方法。

3 一些多项式表达式与圆内接四边形

Pech [9] 研究了以下多项式及其与圆内接四边形的关系。

$$P = ac + bd - ef \tag{3}$$
$$Q = ac + bd + ef \tag{4}$$
$$S = e(ab + cd) - f(ad + bc) \tag{5}$$
$$K = e^2(ab + cd) - (a^2 + b^2)cd - (c^2 + d^2)ab \tag{6}$$
$$R = (bc + ad)^2 - e^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2) \tag{7}$$
$$\begin{aligned} W = {} & ac(-a^2 - c^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2) \\ & + bd(a^2 + c^2 - b^2 - d^2 + e^2 + f^2) - ef(a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - e^2 - f^2) \end{aligned} \tag{8}$$

不难验证，上述多项式满足以下恒等式

$$-PW + S^2 + CM/2 = 0 \tag{9}$$
$$-eS + K + (bc + ad)P = 0 \tag{10}$$
$$2(K^2 - PQR) + e^2CM = 0, \tag{11}$$

其中 $CM = 288V^2$ 表示凯莱-门格尔行列式。上述第一个和第三个方程提供了一种有趣的方式来组织凯莱-门格尔行列式中的各项。第一个恒等式有助于研究天体力学中的循环中心构型 [2, 11]。

我们先陈述一个众所周知的托勒密定理，恕不证明：

定理 6（托勒密定理）。设 A、B、C、D 是按逆时针或顺时针顺序位于同一圆上的四个点，则 $P = 0$。若这四个点按一定顺序位于同一直线上，同样的结论也成立。

接下来，我们将沿用 Pech [9] 的方法陈述并证明所谓的托勒密定理的逆定理。我们 incluir 该定理及其证明，是因为我们希望涵盖直线的情形，而 Pech 的论文并未明确考虑这一情形。

定理 7（托勒密定理的逆定理）。设 A、B、C 和 D 是平面内满足 $P = 0$ 的四个点，则它们构成一个凸构型（或四边形），并且位于同一个圆或同一直线上。若它们位于同一个圆上，则它们的逆时针顺序为 $ABCD$ 或 $ADCB$。

证明。不失一般性，我们选择 $A =$(0，0)、$B =$(a，0)、$C =$(u，v) 和 $D =$(w，z)，如 [9] 所示。在此假设下，方程 ¯refeqn:det 中给出的 $\mathcal{C}$表达式可写为

$$\mathcal{C} = a(-avw + vw^2 + auz - u^2z - v^2z - v^2z - v^2z + vz^2) = 0.$$

我们还定义以下多项式

$$\begin{aligned} f_1 &= (u-a)^2 + v^2 - b^2 \\ f_2 &= (w-u)^2 + (z-v)^2 - c^2 \\ f_3 &= w^2 + z^2 - d^2 \\ f_4 &= u^2 + v^2 - e^2 \\ f_5 &= (w-a)^2 + z^2 - f^2 \end{aligned}$$

它们以代数方式描述了该四边形。

假设 $P = 0$，并考虑理想 $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle$。该理想 $\langle f_1, \ldots, f_5, P, 1 - t\mathcal{C} \rangle$ 的约化 Gröbner 基为 $\{1\}$。因此，根据命题 1，我们有 $\mathcal{C} \in \sqrt{I \cup \{P\}}$。这表明 $P = f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$ 蕴含 $\mathcal{C} = 0$。根据定理 5，点要么位于一个圆上，要么位于一条直线上。

现在我们证明凸性。考虑理想 $K = I \cup \{P\} \cup \{N - t\}$，其中 t 是一个松弛变量，而 N 在定理 4 中定义。通过消去 K 中的变量 e，f，u，v，w，z，可以证明

$$N = \frac{abcd(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}.$$

类似的计算表明

$$M = \frac{abcd(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(bc+ad)^2}.$$

由三角不等式可知，$(-a+b+c+d) \geq 0$，$(a-b+c+d) \geq 0$，等等，其中等号成立意味着四个点共线。这表明该构型是凸的。此外，如果这些点不共线，那么 M，$N > 0$，并且所有三角形 Δ_{ABC} 等均非零。因此，由定理 4 可知，它们的逆时针顺序只能是 $ABCD$ 或 $ADBC$。图 1a 展示了一个逆时针顺序为 $ABCD$ 的圆内接四边形示例。

□

注。当然，还有两个与 P 类似的多项式，分别是 P_T 和 Q_T，它们分别定义于方程 (12) 和 (13) 中。对于对角线为 b和 d的四边形陈述托勒密定理时，会出现 P_T。对于对角线为 a 和 c的四边形陈述托勒密定理时，会出现 Q_T。这些多项式将在本文后续部分发挥重要作用。

现在我们陈述并证明一个定理，说明条件 $P = 0$、$K = 0$ 和 $S = 0$ 之间的关系。该定理已由 Pech [9], 证明，但在这里我们给出一个非常简单的证明，不使用代数几何工具。

定理 8。设 A、B、C 和 D 是平面上的四个点，则

$$(K = 0 \wedge S = 0) \Leftrightarrow P = 0.$$

证明。假设 $P = 0$。由于该点配置是平面的，因此 $CM = 0$。由此，方程（9）给出 $S = 0$。由于 $S = P = 0$，方程（10）也给出 $K = 0$。现在假设 $K = 0$ 和 $S = 0$。那么，由方程（10）可得（$bc+ad$）$P = 0$，但由于 a，b，c，$d > 0$，这意味着 $P = 0$。

□

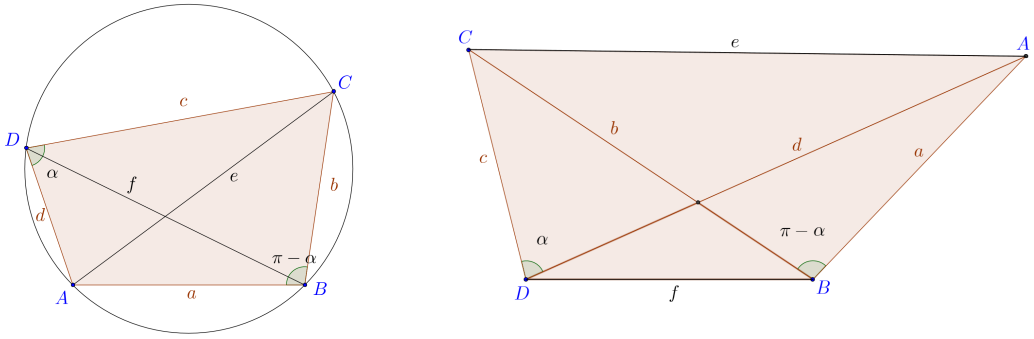

图1：（a）一个角 $\angle CDA$ 和$\angle CBA$互补的圆内接四边形。（b）一个角 $\angle CDA$ 和$\angle CBA$互补的四边形 $ACDB$ 。

下一个定理表明，条件 $R = 0$ 在某种程度上与 $P = 0$互为补充。事实上，尽管施加条件 $R = 0$后得到的图形仍有两个互补角，但它与圆内接四边形大不相同。图1b给出了这种点配置的一个凸例子，而图4给出了一个凹例子。请注意，在这两个例子中，这些点配置都可以通过沿一条对角线折叠圆内接四边形得到。以下定理似乎是新的。

定理 9. 设 A、 B、 C 和 D 是平面上的四个点，满足 $R = 0$，则角 $\angle CDA$ 和 $\angle CBA$ 互补。此外，若所有Δ均非零，则

1. 若 $\Delta_{ABC} < 0$ ，则点 A、 B、 C和 D 的凸包是ACB、 CDA、$ACDB$和 $ACBD$之一。*2.* 若 $\Delta_{ABC} > 0$，则凸包是 ABC、 CAD、$ABDC$和$ADBC$之一。

最后，若至少有一个 Δ为零，则有以下退化情形

1. 点 A、 B、 C 和 D 共线。*2.* 点 A、 B 和 D 共线，且 $b = c$，见图 *2*。

3. 点 B、 C 和 D 共线，且 $a = d$ ，见图*3*。

证明。 假设 $R = 0$。由于这些点位于平面上，我们还可得 $CM = 0$。因此，方程 (11) 给出 $K = 0$。方程 $K = 0$ 也可以写成

$$ab\left[e^2 - (c^2 + d^2)\right] = -cd\left[e^2 - (a^2 + b^2)\right].$$

对三角形 ACD 和 ABC 应用余弦定理，我们得到 $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha$ 和 $e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta$，其中 $\angle CDA = \alpha$ 和 $\angle CBA = \beta$。因此，我们得到方程

$$ab[e^2 - (c^2 + d^2)] = -2abcd\cos\alpha, \quad cd[e^2 - (a^2 + b^2)] = -2abcd\cos\beta.$$

因此， $K = 0$ 意味着 $\cos\alpha = -\cos\beta$，也可以写成

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0,$$

这意味着 $\alpha + \beta = 2\pi n - \pi$ 或 $\alpha - \beta = 2\pi m - \pi$。由于 $\alpha, \beta \le \pi$ ，唯一可能的解是 $\alpha + \beta = \pi$。这证明角 $\angle CDA$ 和 $\angle CBA$ 互为补角。

选择一个坐标系，使得 $A = (u, v)$、 $B = (f, 0)$、 $C = (w, z)$ 和 $D = (0,0)$。那么我们得到以下多项式

$$\begin{aligned}
h_1 &= (u - f)^2 + v^2 - a^2 \\
h_2 &= (u - w)^2 + (z - v)^2 - e^2 \\
h_3 &= w^2 + z^2 - c^2 \\
h_4 &= u^2 + v^2 - d^2 \\
h_5 &= (w - f)^2 + z^2 - b^2
\end{aligned}$$

我们证明 $N \le 0$。考虑理想 $J_N =< h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ R,\ N - t >$，其中 t 是一个松弛变量。使用 Maple 计算 J 的消去理想，并消去变量 $e,\ f,\ u,\ v,\ w,\ z$，得到一个关于 $a,\ b,\ c,\ d$ 和 t 的多项式 L。求解 $L = 0$ 中的 t 得到

$$t = -\frac{(-d + a + c + b)(d - a + c + b)(d + a - c + b)(d + a + c - b)abcd}{4(ab + cd)^2}.$$

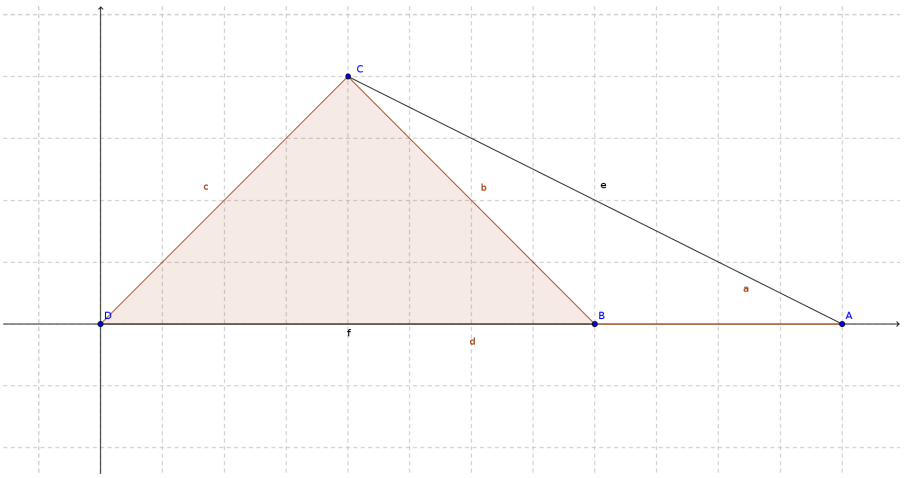

图 2：含有 $f = 2w$ 的退化构型

由 t 的这个表达式可知 $N = t \leq 0$，因为在四边形中 $-d + a + c + b \geq 0$、$d - a + c + b \geq 0$ 等成立（这可由三角不等式推出）。进行类似的计算可以求出 M 的一个表达式，但结果表明 M 也可以取正值，因此这一计算对本证明没有帮助。

现在我们研究三个或更多点位于同一直线上的退化情形。注意，等式 $-d+a+c+b = 0$ 或其他类似等式表示 A、B、C 和 D 共线。因此，当且仅当 A、B、C 和 D 共线时，$N = t = 0$成立。这意味着，除非四边形退化为一条直线，否则三角形ACD 和 ABC 的面积均非零。因此，条件 $R = 0$ 意味着 A、C 和 D 不可能共线，并且 A、B和 C不可能共线，除非 A、B、C和 D全部共线。

考虑理想 $J_{ABD} =< h_1$、h_2、h_3、h_4、h_5、R、$\Delta_{ABD} - s >$，其中 s是一个松弛变量。计算消去理想并求解 s，得到

$$s = \pm \frac{\sqrt{(-d + a + c + b)(d - a + c + b)(d + a - c + b)(d + a + c - b)}(b + c)(b - c)da}{2(ab + cd)(ac + bd)}$$

因此，当 $\Delta_{ABD} = s = 0$ A、B、C 和 D 共线时，或者$b = c$时，结论成立。在后一种情况下，$h_3 = h_5 = 0$ 得出 $f\,(f - 2w) = 0$；由于我们假设 $f > 0$，因此有 $f = 2w$，这意味着三角形 BCD 是等腰三角形，见图 2。

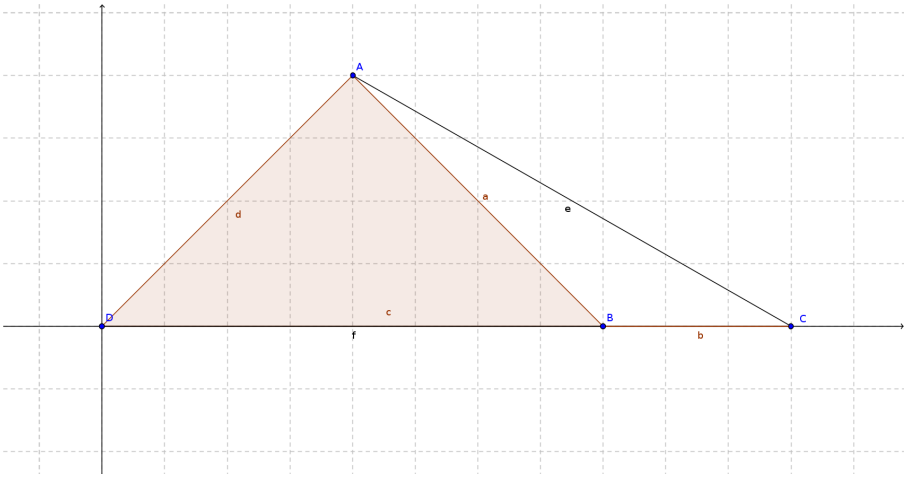

图3：含有 $f = 2u$ 的退化构型

最后，考虑理想 $J_{BCD} =< h_1、 h_2、 h_3、 h_4、 h_5、 R、 \Delta_{BCD} - \eta >$，其中 η 是一个松弛变量。计算消去理想并求解η，得到

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{(-d+a+c+b)(d-a+c+b)(d+a-c+b)(d+a+c-b)}(a+d)(a-d)cb}{2(ab+cd)(ac+bd)}$$

因此，当 A, B, C 与 D 共线，或$a = d$时，$\Delta_{BCD} = \eta = 0$。在后一种情形下，$h_1 = h_4 = 0$ 得出 $f(f - 2u) = 0$；由于我们假设 $f > 0$，因此有 $f = 2u$，这意味着三角形 ABD 是等腰三角形，见图3。

现在我们已经研究了退化情形，可以回到非退化情形并完成证明。假设所有 Δ 都非零，我们可以应用定理 4。由于 $N \geq 0$，若 $\Delta_{ABC} > 0$，则点 $A, B, C,$ 和 D 的凸包是 ABC、CAD、$ABDC$ 和 $ADBC$ 之一。若 $\Delta_{ABC} < 0$，则点 $A, B, C,$ 和 D 的凸包是 ACB、CDA、$ACDB$ 和 $ACBD$ 之一。至此，证明完成。

□

注 (几何解释)。注意，多项式 K 可以作如下解释。我们考虑图 1a 中的圆内接四边形。由于该四边形是圆内接的，因此 $\measuredangle CDA = \pi - \measuredangle CBA = \alpha$。于是，根据

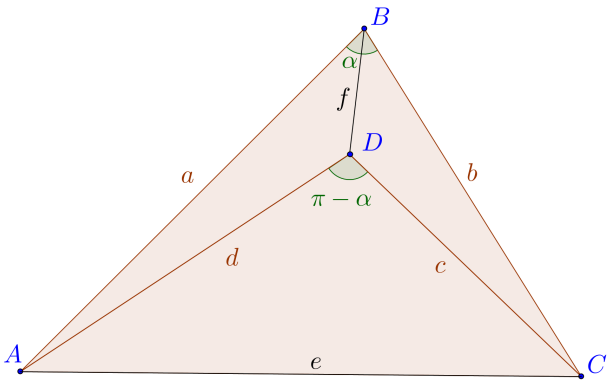

图4：凹四边形 $ADCB$，其角为互补角 $\angle ADC$和 $\angle ABC$。橙色阴影区域表示凸包 ACB。

余弦定理，我们有 $e^2 = c^2+d^2-2cd\cos\,\alpha$ 和 $e^2 = a^2+b^2+2ab\cos\,\alpha$。对这些方程作适当的线性组合，得到表达式

$$K = e^2(ab+cd) - ab(c^2+d^2) - cd(a^2+b^2) = 0.$$

对于定理 9 中的任意点配置，完全相同的计算都成立。特别是，对于图 1b、2、3 和 4 所示的情形，该计算也成立。因此，在所有情形下，表达式 $K = 0$ 都只是将余弦定理分别应用于两个三角形后所得结果的线性组合。然而，根据定理 9，我们知道，在圆内接情形下 $P = 0$，而在其他情形下$R = 0$；此时，只要该构型不是圆内接的，便可由众所周知的托勒密不等式得出 $P > 0$。

请注意，方程 $R = 0$ 体现了定理 9 所述点配置下的广义四边形定理（定理 3），因此给出了线段 AC 和 BD的中点之间的距离，其值为

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(bc+ad)^2}{e^2}},$$

对于这些点配置。因此，该公式适用于具有互补角的特定四边形，但不适用于圆内接四边形，因为在这种情况下 $R \neq 0$。例如，该公式

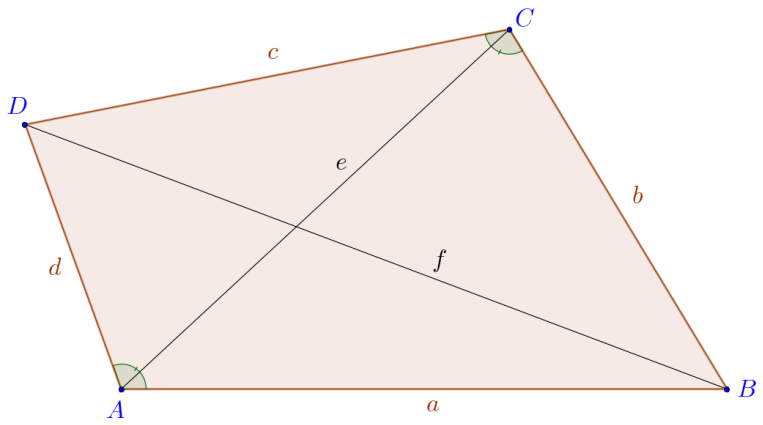

图5：具有相等角 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$的倾斜风筝形。

对图1b中的构型和图4中的凹构型均适用。

对于平面构型，如果 $R = 0$，那么我们还有 $K = 0$。对 e^2 求解 $K = 0$，并将结果代入 v，可得到关于 v的另一个公式，该公式适用于定理 9所指定的点配置，并且与对角线无关

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(bc + ad)(ab + cd)}{(ac + bd)}}.$$

4 个关于倾斜风筝形的多项式条件

在上一节中，我们认识到多项式 K 可以解释为由余弦定理得到的表达式。通过这种方式还可以得到一些更有趣的多项式，它们与四个点的各种点配置相关。回想一下，倾斜风筝形是具有两个相等对角的四边形，可以是凸的（见图6），也可以是凹的（见图7）。凸倾斜风筝形在 [6] 中有详细研究。考虑图5中的凸倾斜风筝形、图7中的凹倾斜风筝形以及四边形6。假设 $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \alpha$。那么，根据余弦定理可得 $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha \text{ and} f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$。对这些式子作线性组合，得到

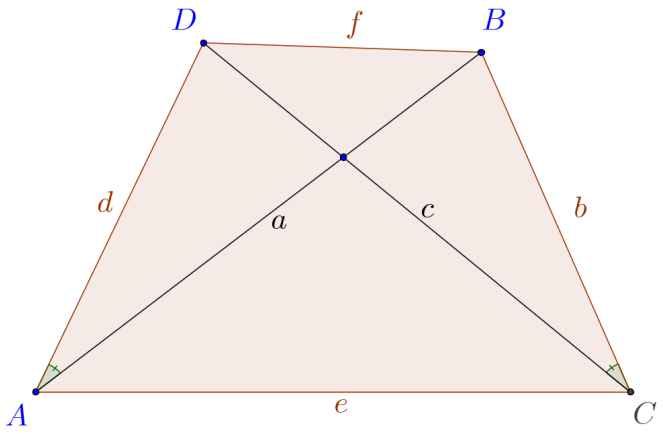

图6：具有相等角 $\angle BCD$ 和 $\angle BAD$ 的凸四边形 $ACBD$。

表达式

$$K_T = f^2(bc - ad) - bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2) = 0,$$

这与 [6] 中定理4.2的证明里的方程一致。请注意，同一个表达式适用于多种情形，包括但不限于图5、图6和图7中的点配置。

我们还得到多项式

$$P_T = (ac - bd + ef) \tag{12}$$
$$Q_T = (ac - bd - ef) \tag{13}$$
$$R_T = (ab - cd)^2 - f^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2) \tag{14}$$

它们通过方程相关联

$$f^2 CM = 2(P_T Q_T R_T - K_T^2). \tag{15}$$

此外，类比于 S 和 W的表达式，我们还得到以下多项式

$$S_T = f(bc - ad) - e(cd - ab) \tag{16}$$
$$W_T = -ac(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + e^2 + f^2) \tag{17}$$
$$- bd(a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 + f^2) + ef(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2). \tag{18}$$

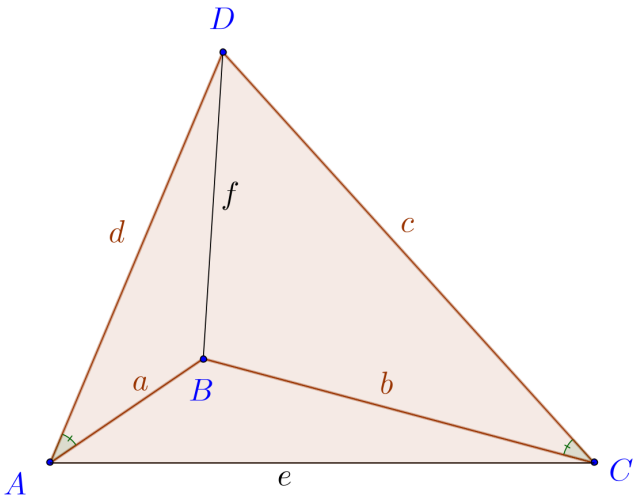

图7：具有相等角 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 的凹倾斜风筝形 $ABCD$。橙色阴影区域表示凸包 ACD。

显然， S_T 与其他多项式满足以下方程

$$-fS_T + K_T - (cd - ab)P_T = 0 \tag{19}$$
$$-P_T W_T + S_T^2 + CM/2 = 0 \tag{20}$$

假设平面上有四个点 A, B, C 和 D。那么，$CM = 0$，显然由方程 (15) 可知，我们可以考虑以下三种情况

1. $Q_T = 0$：显然，由方程 (15) 可知，我们必须有 $K_T = 0$。此外，根据托勒密定理的逆定理，这四个点按逆时针顺序构成一个凸圆内接四边形 $ACBD$ （见图6），或 $ADBC$，或位于同一直线上。注意，在图6中，边 d 与对角线 AB 之间的角$\angle DAB$，等于对边与另一条对角线之间的角。因此，根据初等几何知识可知， $ABCD$ 是一个对角线为 a 和 c的凸圆内接四边形。

2. $P_T = 0$：同样，我们必须有 $K_T = 0$，但现在这四个点构成

一个按逆时针顺序排列的凸循环四边形，其中顺序为 $ACDB$ 或 $ABDC$，或者共线。

3. $R_T = 0$: 与前两种情形一样，我们必须有 $K_T = 0$。观察图 5 和图 7，可以自然地猜想，$R_T = 0$ 是四边形为倾斜风筝形的必要条件。以下定理将这一猜想精确表述。

定理 10. 设 A、B、C 和 D 是平面内满足$R_T = 0$ 的四个点，则角 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 相等。此外，如果所有Δ都不为零，则

1. 如果 $\Delta_{ABC} < 0$，则点 A、B、C和 D 的凸包是$ADCB$、ACB、CDA之一。*2.* 如果 $\Delta_{ABC} > 0$，则凸包是 $ABCD$、ABC和 CAD之一。

特别地，如果 $ad - bc = 0$，则倾斜风筝形是平行四边形或菱形。最后，如果至少有一个 Δ为零，则会出现以下退化情形

1. 点 A、B、C 和 D 共线。

2. 点 A、B 和 c 共线，且 $c = d$。

3. 点 A、C 和 D 共线，且 $a = b$。

证明。假设 $R_T = 0$。由于该构型是平面的，$CM = 0$，因此，根据方程 (15)，我们还可得 $K_T = 0$。方程 $K_T = 0$ 也可写为

$$bc\left[f^2 - (a^2 + d^2)\right] = ad\left[f^2 - (b^2 + c^2)\right].$$

应用余弦定理，我们有 $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha$和 $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta$，其中 $\measuredangle BAD = \alpha$和 $\measuredangle BCD = \beta$。于是得到以下方程

$$bc\left[f^2 - (a^2 + d^2)\right] = -2abcd\cos\alpha, \quad ad\left[f^2 - (b^2 + c^2)\right] = -2abcd\cos\beta.$$

因此，$K_T = 0$意味着 $\cos\alpha = \cos\beta$，也可以写成

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0,$$

这意味着 $\alpha+\beta=2\pi n$ 或 $\alpha-\beta=2\pi m$，其中 $m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,$ .....。由于 $\alpha,\ \beta\le\pi$ 唯一可能的解是 $\alpha=\beta$。这证明角 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 相等。

为完成证明，选择一个坐标系，使得 $A=(0,\ 0)$、$B=(u,\ v)$、$C=(e,\ 0)$ 和 $D=(w,\ z)$。于是得到以下多项式

$$\begin{aligned}
g_1&=u^2+v^2-a^2\\
g_2&=(e-u)^2+v^2-b^2\\
g_3&=(w-e)^2+z^2-c^2\\
g_4&=w^2+z^2-d^2\\
g_5&=(u-w)^2+(z-v)^2-f^2
\end{aligned}$$

我们证明 $M>0$。考虑理想 $J_M=<h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ R,\ M-t>$，其中 t 是一个松弛变量。使用 Maple 计算 J_M 的消去理想，消去变量 $e,\ f,\ u,\ v,\ w,\ z$，得到一个关于 $a,\ b,\ c,\ d$ 和 t 的多项式。解出 t 得到

$$t=-\frac{abcd\,\Gamma}{4(ad-bc)^2}$$

其中 $\Gamma=(d+a+c+b)(d+a-c-b)(-d+a+c-b)(-d+a-c+b)$。对理想 $<h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ R,\ \Delta_{ABD}-s>$ 重复此计算，得到

$$s=\pm\frac{\sqrt{-\Gamma}\,da}{(2(ad-bc))},$$

这意味着，若 $ad-bc\neq0$，则必有 $-\Gamma\ge0$，否则 $\Delta_{ABD}=s$不是实数。这表明，只要 $ad-bc\neq0$，就有 $M\ge0$。如果所有的 Δ都不为零，那么 $M>0$，并且存在以下几种可能情况：若 $\Delta_{ABC}>0$，则为 $ABCD$、ABC 和 CAD；若 $\Delta_{ABC}<0$，则为 $ADCB$、ACB 和 CDA。四边形 $ABCD$ 和 $ADCB$ 是凸倾斜风筝形（见图5），而 $ACB\ CDA$、ABC 和 CAD 是凹倾斜风筝形（见图7）。设 $ad-bc=0$。利用格罗布纳基进行计算可得

$$b^2c^2(a-c)^2(a+c)^2(a-b)^2(a+b)^2\in\sqrt{J},$$

其中 $J=<h_1,$ ....., $h_5,\ R_T,\ ad-bc>$。因此，$c=a$ 或 $a=b$。若 $c=a$，则我们还有 $d=b$。反之，若 $a=b$，则有 $c=d$。在这两种情况下

$R_T = -f^2\,(2a^2+2b^2-e^2-f^2)$，因此必有 $2a^2+2b^2-e^2-f^2=0$，这就是平行四边形法则。由于平行四边形法则成立，在这两种情况下，该四边形都是平行四边形。注意，在第一种情况下，我们证明了对边相等；而在第二种情况下，邻边相等。因此，第二种情况下的平行四边形实际上是菱形。

现在，我们考虑其中一个或多个 Δ为零的情形。首先，我们有

$$\Delta_{BCD} = \pm\frac{\sqrt{-\Gamma}\,cb}{(2(ad-bc))}, \quad \Delta_{ABC} = \pm\frac{\sqrt{-\Gamma}\,(c+d)(c-d)ba}{2(ac-bd))(ad-bc)}$$

and

$$\Delta_{ACD} = \pm\frac{\sqrt{-\Gamma}\,(a+b)(a-b)dc}{2(ac-bd))(ad-bc)}.$$

因此，当且仅当 $\Gamma = 0$ 时， $\Delta_{BCD} = 0$ 或 $\Delta_{ABD} = 0$ 。由此可知，若$\Delta_{BCD} = 0$ 或 $\Delta_{ABD} = 0$，则所有的 Δ 都必须为零，且这四个点共线。

若 $c = d$ ，则 $\Delta_{ABC} = 0$，因此点 A、 B 和 C 共线。由方程 $g_3 = g_4 = 0$ 可得 $e\,(e-2w) = 0$，也就是说，$e = 2w$。这一构型可描述为等腰三角形 ABC，其中点 B 位于线段 AC 上。若 $a = b$ ，则 $\Delta_{ACD} = 0$，因此点 A、 C 和 D 共线。由方程 $g_3 = g_4 = 0$ 可得 $e\,(e-2u) = 0$，也就是说， $e = 2u$。这一构型可描述为等腰三角形 ACD，其中点 D 位于线段 AC 上。

□

注。 注意，根据前面的定理，对于图5和图7中的倾斜风筝形，我们必须有 $R_T = 0$ 和 $K_T = 0$。然而，对于图 6 中的四边形，边 d 与对角线 AB 之间的角等于对边与另一条对角线之间的角。因此，在这种情况下，根据初等几何，我们有：顶点 $ABCD$ 构成一个凸圆内接四边形，其对角线为 a 和 c。由托勒密定理，我们随后得到 $Q_T = 0$；由余弦定理，我们得到 $K_T = 0$。在这种情况下，我们得到的是 $K_T = Q_T = 0$。

我们以一个定理结束本节。该定理表明，由条件 $Q_T P_T = 0$ 确定的四边形与由条件 $\tilde{}\, R_T = 0$ 确定的四边形（即条件 $R_T = 0$ ，但距离不同）

彼此可通过反射对应。为介绍这个定理，回顾一下，A、B、C 和 D 是平面上的四个点，并且照例，$a = |AB|$、$b = |BC|$、$c = |CD|$、$d = |DA|$、$e = |AC|$、$f = |BD|$ 表示各点对之间的欧几里得距离。设点 $\tilde{C}$ 关于经过点 B 和 D 的直线反射所得的点为 C。设 $\tilde{b} = |B\tilde{C}|$、$\tilde{c} = |\tilde{C}D|$ 和 $\tilde{e} = |AC|$ 分别表示 C 到点 B、D 和 A 的距离。显然，$\tilde{b} = b$ 且 $\tilde{c} = c$。设 K_T、P_T、Q_T 和 R_T 分别为方程 (4)、12)、(13) 和 (14) 中给出的多项式。设 K_T、P_T、Q_T 和 R_T 分别为点 A、B、C 和 D 对应的 K_T、P_T、Q_T 和 R_T 的类似量。于是容易看出，$K_T = K_T$；而 P_T、Q_T 和 R_T 则由 P_T、Q_T 和 R_T 将 e 替换为 $\tilde{e}$ 得到。此外，我们用 CM 表示点 A、B、C 和 D 的 Cayley–Menger 行列式，用 $\widetilde{CM}$ 表示点 A、B、C 和 D 的 Cayley–Menger 行列式。

采用这些记号，我们证明以下定理

定理 11. 设 A、B、C 和 D 是平面上的四个点，且令 $\tilde{C}$ 为点 C 关于经过点 B 和 D 的直线的反射。则 $R_T = 0$ 当且仅当 $P_T Q_T = 0$。

证明。 应用定理 1 即可证明此定理。这里我们给出一个不依赖格罗布纳基计算的证明。

设 $P_T = 0$。将 $P_T = 0$ 代入方程 (15)，得到

$$CM = -2\frac{K_T^2}{f^2} = 0,$$

因此 $K_T = 0$。点 A, B, C 和 D 的方程 (15) 为

$$\widetilde{CM} = 2\frac{\tilde{P}_T\tilde{Q}_T\tilde{R}_T - K_T^2}{f^2}. \tag{21}$$

由于 $K_T = 0$，我们得到

$$\widetilde{CM} = 2\frac{\tilde{P}_T\tilde{Q}_T\tilde{R}_T}{f^2}.$$

因此，我们必须有 $P_T Q_T R_T = 0$，因为对于平面构型，$\widetilde{CM} = 0$。若 $P_T = 0$，则必须有 $e = \tilde{e}$，而这只有在 A 或 C 位于经过 B 和 D 的直线上时才会发生。然而，由于我们假设 $P_T = 0$ 这些点 A，B，C 和 D 要么共圆，要么共线。

由于三个共线点不可能共圆，因此所有点都必须~ ~ ~ ~共线。在这种情况下 $Q_T = P_T = R_T = 0$。另一方面，若 $Q_T = 0$~，则 $P_T - Q_T = (e + \tilde{e})\, f = 0$。但这是不可能的，因为我们取 $e,\ f > 0$。

对 $Q_T = 0$ 这一情形的分析与 $P_T = 0$ 这一情形类似，因此略去。

~ ~现在，假设 $R_T = 0$。将 $R_T = 0$ 代入 (21) 得

$$\widetilde{CM} = -2\frac{K_T^2}{f^2} = 0,$$

因此 $K_T = 0$。由于根据方程 (15)，$CM = 2^{\frac{P_T Q_T R_T - K_T^2}{f^2}}$，可得

$$CM = 2\frac{P_T Q_T R_T}{f^2}.$$

由于该构型是平面的，$CM = 0$，因此 $P_T Q_T R_T = 0$。若 $R_T \neq 0$，则结论成立。接下来需要考察 $R_T = 0$ 时的情况。由于~$R_T = 0$，我们有，$R_T = 0$ 当且仅当 $e = \tilde{e}$。这一最后条件成立，当且仅当 A 或 C 位于经过点 B 和D 的直线上。注意，根据定理 10，若 $R_T = 0$ 且 $\Delta_{ABD} = 0$ 或 $\Delta_{BCD} = 0$，那么这四个点必定共线。因此，在此~情形下，根据托勒密定理，点 $A,\ B,\ C$ 和 D 也满足以下等式：$P_T = Q_T = 0$。证明至此完成。

□

5 寻找更多多项式条件

这些条件本身就很有趣，而且有望应用于天体力学和其他领域，因此我们认为，寻找更多多项式条件是有益的。下面给出两个例子，说明如何找到新的条件。

首先，我们考虑一种非常简单直接的方法。如果我们应用余弦定理，求出 e^2 的表达式，而不是 f^2，那么就可以得到下面这个多项式

$$K_1 = (ad + bc)f^2 - (a^2 + d^2)bc - (b^2 + c^2)ad.$$

我们还可以考虑

$$R_1 = (ab + cd)^2 - f^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2).$$

这些多项式满足以下条件

$$2(K_1^2 - PQR_1) + f^2CM = 0$$
$$fS + K_1 + (ab + cd)P = 0.$$

这些多项式关系与 Pech[9], 发现的关系非常相似，因此没有必要对它们进行研究。不过，将这些方程与 (10) 和 (11) 结合起来，我们可以得到以下对称化关系

$$(f - e)S + K + K_1 + (ab + cd + bc + ad)P = 0$$
$$2[K^2 + K_1^2 - PQ(R + R_1)] + (e^2 + f^2)CM = 0$$

这或许能满足某些学者对对称性的渴求。

另一种不那么平凡的方法是使用格罗布纳基类型的计算来寻找新的多项式和新的关系。这种方法似乎更有前景。例如，使用 Maple 在分次逆字典序下计算由 $h_1, \dots, h_5$ 和 P 生成的理想的格罗布纳基，我们可以得到若干多项式，其中之一是

$$(a^2ce - ac^2f + ad^2f - ae^2f - cd^2e + cef^2)^2$$

然后我们可以定义

$$K_G = (a^2ce - ac^2f + ad^2f - ae^2f - cd^2e + cef^2) = (af - ce)d^2 + ce(a^2 + f^2) - (c^2 + e^2)af$$

Then

$$\frac{CMd^2}{2} = PQ_GR_G - K_G^2$$

其中 $Q_G = -ac + bd + ef$ 和

$$R_G = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 + f^2)d^2 - (ae - cf)^2$$

这些多项式与我们在第 4 节研究的多项式非常相似，只不过这里 b 和 d 是对角线。因此，我们不会对它们进行研究，因为它们不会带来实质性的新发现。

致谢

作者谨此感谢 Martin Josefsson 提供的宝贵评论和建议。

参考文献

[1]comingstorm（ https://stackoverflow.com/users/210211/comingstorm）。4 个点的凸包。数学 Stack Exchange。网址：https://stackoverflow.com/a/2122620（版本：2018-07-07）。[2] Josep M Cors 和 Gareth E Roberts。四体共圆中心构形。*Nonlinearity*, 25(2):343，2012。[3] David Cox、John Little 和 Donald O'Shea。理想、簇与算法：计算代数几何和交换代数导论。施普林格科学与商业媒体, 2013。[4] Michael De Villiers。欧几里得几何中的若干探索。Dyna mic Mathematics Learning，2009。[5]G¨unter Graumann。研究并排列四边形及其在空间中的类比——具有多个方面的问题领域。*ZDM*, 37(3):190–198，2005。[6] Martin Josefsson。倾斜风筝形的性质。《国际几何学杂志》，7(1):87–104，2018。[7] Geoffrey A Kandall。课堂专题：广义四边形的欧拉定理。《大学数学杂志》，33(5):403，2002。[8] Oliver Knill。数学中的若干基本定理。*arXiv* 预印本 *arXiv:1807.08416*, 2018。[9]Pavel Pech。关于四边形为圆内接四边形的条件等价性。载于 Beniamino Murgante、Osvaldo Gervasi、Andr´es Iglesias、David Taniar 和 Bernady O. Apduhan 编，计算科学及其应用——*ICCSA 2011*，第 399–411 页，柏林、海德堡，2011。Springer 柏林海德堡。[10] Manuele Santoprete。以角为坐标的平面性条件与四体中心构形方程。《几何与物理学杂志》，140:74–84，2019。[11] Manuele Santoprete。共圆四体中心构形的唯一性。《理性力学与分析文献》，240(2):971–985，2021。

[12] Manuele Santoprete。关于梯形四体中心构形唯一性的研究。
Nonlinearity，34(1)：424，2021。