arXiv:2302.10074v1 [quant-ph] 20 Feb 2023

利用完美态传输实现平面图中的量子路由

Supriyo Dutta 数学系，阿加尔塔拉国立理工学院，巴尔贾拉，吉拉尼亚，特里普拉邦（西），印度 - 799046。电子邮箱：dosupriyo@gmail.com

摘要

本文研究由 $XX+YY$哈密顿量控制的自旋-自旋相互作用网络。网络的顶点和边分别代表自旋对象及其相互作用。我们可以选择开启或关闭任意相互作用，从而在图中同时实现多次完美态传输。我们还构建了一个可扩展网络，支持任意两个顶点之间的量子通信。随后，我们利用超立方体图的组合特性，提出一种静态路由方案，使平面网络中的一组发送方与一组接收方能够同时通信。我们的构造是全新的，且功能强大。我们详细介绍了多个支持量子路由的平面图示例，在这些图中，经典路由无法实现。

关键词：完美态传输、量子路由、可扩展量子通信网络、超立方体。

1 引言

在量子信息处理理论中[1–3], 我们利用量子网络执行不同的通信任务，例如量子态传输、路由、切换和量子信号分裂等 [4–8]。我们将要传递的信息编码到量子态中。量子信息的基本单位是量子比特，它是一种定义明确的物理系统，可用于存储逻辑值 0 和 1 及其任意叠加态。量子网络由多个生成量子比特的物理对象组合而成。网络的顶点对应于量子比特。我们通过将多个节点连接在一起，构建更大的网络。同样，量子计算设备由量子比特组成，它们本质上是静态实体。我们有效地连接不同的量子处理器，以便在量子计算硬件的不同处理器之间高保真地传输量子信息。这支持可扩展量子架构的 DiVincenzo判据 [9]。

我们无需在量子架构的不同部分之间实际移动量子比特，而是可以构建量子态总线，使量子态在不同位置之间传输。由于自旋对象之间的相互作用，量子态会从一个量子比特传输到另一个量子比特，因此无需移动实体。此类系统的一个例子是由许多永久耦合的量子比特组成的自旋链。本文将交替使用“量子比特”和“自旋”这两个术语。因此，我们可以利用静态量子比特构成的自旋链，将任意量子态从一处传输到另一处 [10, 11]。这一策略使我们能够制造仅包含单一品种量子比特、用于信息处理和传输的“全固态”芯片。在模型中，自旋之间的相互作用由不同类型的自旋-自旋相互作用哈密顿量描述。在本研究中，我们利用 $XX+YY$哈密顿量的动力学来连接可扩展量子架构中的远程寄存器。这种自旋链架构为在自旋链两端之间构建数据总线和纠缠器提供了思路 [12]。

本研究的另一个动机来自超导量子器件。超导量子比特可以视为网络中的顶点，边则对应连接量子比特的微波总线。有效哈密顿量 [13] 表示两个频率为 $\omega_{1,\ 2}$ 的量子比特与一个共振频率为 ω_r、用于模拟腔体的传输线谐振器相互作用，其形式为

$$H_{eff}=\frac{\hbar\omega_1}{2}\sigma_1^z+\frac{\hbar\omega_2}{2}\sigma_2^z+\hbar(\omega_r+\xi_1\sigma_1^z+\xi_2\sigma_2^z)a^\dagger a+\hbar J(\sigma_1^-\sigma_2^++\sigma_2^-\sigma_1^+). \tag{1}$$

当量子比特与谐振器存在强失谐，并对共振的 Jaynes–Cummings相互作用进行绝热消除后，可以得到上述哈密顿量。这里 $\xi_{1,\ 2}$ 表示频移，其数值可根据失谐以及腔谐振器与量子比特之间的耦合强度计算得到。该结果可以推广到任意数量的量子比特耦合到腔谐振器的同一模式。上述哈密顿量中的最后一项

$\hbar J(\sigma_1^-\sigma_2^+ + \sigma_2^-\sigma_1^+)$表示通过与谐振器的虚相互作用产生的翻转-翻转相互作用。请注意，该项可以转换为一个 $XX+YY$哈密顿量。

在这项工作中，我们首先提出一种构建可扩展量子网络的方法，使任意两个顶点之间都能通过完美态传输（PST）进行通信。随后，我们构建一种量子路由方案。在经典通信中，路由是在网络中寻找路径，以实现一组发送方与一组接收方之间通信的过程 [14]。人们已多次尝试将态传输的概念用于量子路由 [15–20]。这些方案能够在网络的两个顶点之间以低于 1 的概率传输状态。在这一背景下，我们的想法有着显著不同。我们在通信协议的每一步中都采用 PST。此外，我们的所有网络都是平面图。考虑平面图的动机是构建一种可在平面芯片上设计的量子架构。发送方和接收方是网络无穷面上的节点。发送方通过一系列子图，利用若干次 PST 向接收方传输量子信息。在经典路由中，我们会寻找发送方与接收方之间若干条边不相交路径。而在量子路由中，这并非必要。一个子图可能支持两对发送方和接收方之间的通信，这可以视为量子通信的一项优势。

本文的结构安排如下。下一节将介绍量子态传输和图论的一些预备知识。第 3 节将建立数学基础，使网络中的多重态传输成为可能。第 4 节将构造若干可扩展量子通信网络，使我们能够在任意两个顶点之间进行通信。第 5 节专门讨论量子路由。我们针对任意平面图提出一种静态路由协议。

2 预备知识

图 $G=(V(G)\ E(G))$ 由顶点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)\subset V(G)\times V(G)$ [21] 组成。我们用图表示自旋-自旋相互作用。顶点对应量子比特或自旋对象。如果两个自旋可以相互作用，我们就在对应的顶点之间恰好连一条边，反之亦然。本文将相互作用哈密顿量定义为

$$H_{XY}=\frac{1}{2}\sum_{(u,v)\in E(G)}J_{u,v}(\sigma_x^u\sigma_x^v+\sigma_y^u\sigma_y^v). \tag{2}$$

这里，$J_{u,\ v}$ 是位于顶点 u 和 v 处的两个自旋对象之间的耦合强度。此外，$\sigma_p^u=I_2\otimes I_2\otimes..\sigma_p$（第 u 个位置）$\otimes\cdots\otimes I_2$，其中 $\sigma_p=\sigma_x$ 和 σ_y 分别是泡利 x 和 y 算符。这里，我们假设所有可能的耦合强度均为 1，这使得 G 成为一个简单图。

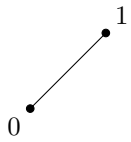
含有 n 个顶点的图 G 的邻接矩阵定义为 $A(G)=(a_{i,j})_{n\times n}$，其中 $a_{i,j}=1$ 当且仅当 $(i,j)\in E(G)$，且；$a_{i,j}=0$ 否则。已证明，当 $J_{u,v}=1$ 对所有 $(u,v)\in E(G)$ [22] 成立时，H_{XY} 对 $\mathbb{C}^{2^n}$ 的作用等价于 $\exp(-\iota A(G)t)$ 对 $\mathbb{C}^n$ 的作用。现在，对于每个顶点 $u\in V(G)$，我们赋予一个 $\mathbb{C}^n$ 的基向量，记作 $|u\rangle$。若 $\langle v|\exp(-\iota A(G)\tau)|u\rangle=1$，则顶点 u 和 v 之间在时刻 $t=\tau$ 存在完美态传输（PST）。对于 PST，u 和 v 必须属于同一个连通分量。PST 是一种罕见现象 [23–25]。如果 G 不含任何边，则这两个顶点之间不存在 PST。

如上所述，本文将研究范围限定在平面图上。我们可以将平面图嵌入平面，使其边仅在端点处相交。当平面图的绘制中没有边交叉时，顶点和边会将平面划分为若干区域或面。无穷面包围着所有其他区域。图 1中展示了若干允许 PST 的著名平面图。它们包括顶点数为 2 和 3 的路径图，以及顶点数为 4 和 8 的超立方体图 [26]。请注意，顶点数超过 8 的超立方体图不是平面图。

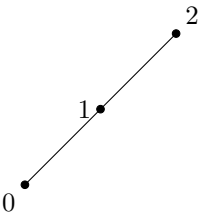
给定两个图 $G_1=(V(G_1)\ E(G_1))$ 和 $G_2=(V(G_2)\ E(G_2))$，如果 $V(G_1)=V(G_2)$、$E(G_1)=E(G_2)$，且它们具有相同的顶点标记，我们记作 $G_1=G_2$。若图 G_1 是图 G_2 的子图，则 $V(G_1)\subset V(G_2)$ 且 $E(G_1)\subset E(G_2)$。图 G_1 和图 G_2 的并是一个新图 $G=G_1\cup G_2=(V(G)\ E(G))$，满足 $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ 且 $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$。请注意，G_1 和 G_2 是 $G_1\cup G_2$ 的子图。同理，我们可以定义 m 个子图 G_1、G_2、$\ldots G_m$ 的 $G=G_1\cup G_2\cup\ldots G_m$。若 $A(G_i)$ 是 G_i 的邻接矩阵，则 G 的邻接矩阵可表示为分块对角矩阵 $A(G)=\mathrm{diag}\{A(G_1)\ A(G_2)\ldots,A(G_m)\}$。不难证明

$$\exp(-\iota A(G)\tau)=\mathrm{diag}\{\exp(-\iota A(G_1)\tau),\exp(-\iota A(G_2)\tau),\ldots,\exp(-\iota A(G_m)\tau)\}. \tag{3}$$

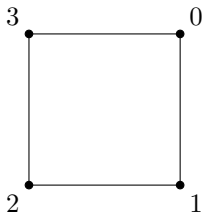
长度为 p 的路径是由互不相同的顶点和边 $\{v_1,e_1,v_2,e_2,\ldots e_p,v_{p+1}\}$ 构成的序列，使得对于 $i=1,\ 2,\ldots p$，有 $e_i=(v_i,v_{i+1})$。如果两条路径不包含共同的边，则称它们边不相交。两



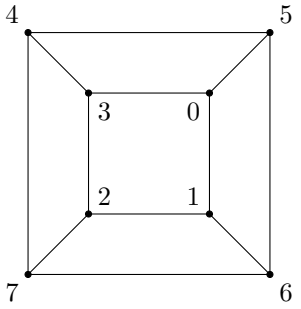
（a）0 和 1 之间的 PST，发生于时间 $\tau = \frac{\pi}{2}$。



（b）0 和 2 之间的 PST，发生于时间 $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.



（c）1 和 3 之间的 PST，以及 0 和 2 之间的 PST，发生于时间 $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.



(d) 在时间 $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$，0 与 7、1 与 4、2 与 5，以及 3 与 7 之间实现 PST。

图 1：具有 PST 的著名平面图示例 [11]。

子图 G_1 和 G_2 若满足 $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ 和 $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$，则称它们不相交。如果任意两个顶点之间都存在一条路径，则称该图是连通的。两个顶点之间的连通性是一种等价关系。等价类称为图的连通分量。两个顶点 u 和 v 之间的距离记作 $d(u,v)$，定义为它们之间最短路径的长度。图的直径为 $d = \max_{u,v \in V(G)} d(u,v)$，即图中任意两个顶点之间的最大距离。顶点 v 的离心率 $\epsilon(v)$ 是图中 v 与任意其他顶点之间的最大距离。用符号表示为 $\epsilon(v) = \max_{u \in V(G)} d(v,u)$。图的半径为 r，即图中各顶点离心率的最小值。半径为 r 的图中的中心顶点，其离心率为 r。图中所有中心顶点的集合记作 $C(G)$，称为 G 的中心。

3 哈密顿量工程

哈密顿量工程曾用于核磁共振，以在固体 [27,28]中实现核磁共振衍射。我们开启若干选择性激发之间的耦合 [29]，随后对其进行动态解耦。利用磁场梯度，我们可以同时调节耦合强度。哈密顿量工程的目标总结如下 [30,31]:

1. 消　　除不需要的耦合，即 $J_{u,\ v} = 0$ 如果边 (u,v) 未参与 PST　　.
2. 使用剩余耦合，在 $J_{u、\ v} = 1$ 之间执行 PST。

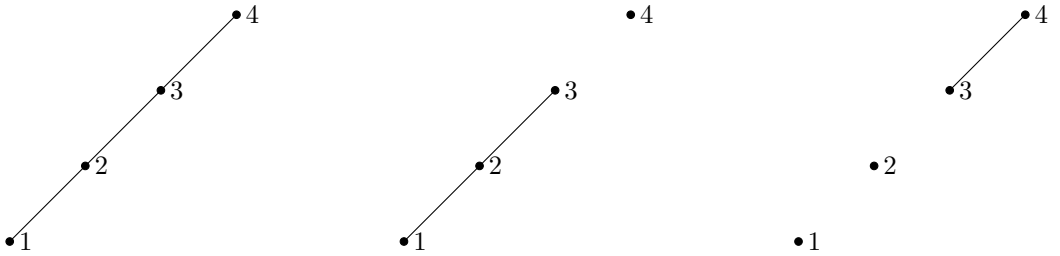
在这项工作中，我们将量子比特之间的耦合与节点之间的边进行类比。因此，接通或断开特定边等同于建立或解除相互作用耦合。这里，我们从数学上证明，在图中接通或断开若干条边后，PST 仍然成立。

引理1. 设 G 是一个具有 n 个顶点的图，且允许 u 与 v 在时刻 τ 之间实现 PST。那么，在图 $G' = G \cup v_1 \cup v_2 \cup \cdots \cup v_m$ 中，u 与 v 之间存在时刻为 τ 的态传输，其中 v_1、v_2、$\ldots v_m$ 是任意数量的孤立顶点 m。

证明. 由于 u 与 v 之间在时刻 $t = \tau$ 存在 PST，因此在 $\mathbb{C}^n$ 中存在向量 $|u\rangle = [0,0,\ldots 1$（第 u 个位置） $\ldots 0]^\dagger$ 和 $|v\rangle = [0,0,\ldots 1$（第 v 个位置） $\ldots 0]^\dagger$，使得 $\langle v|\exp(-\iota A(G)\tau)|u\rangle = 1$。注意，$A(G')$ 是一个分块对角矩阵，表示为 $A(G') = \text{diag}\{A(G)\ 0, 0, \ldots 0(m\text{- 次})\}$。对应于顶点 u 和 v，定义 $\mathbb{C}^{n+m}$ 中的新向量 $|U\rangle$ 和 $|V\rangle$，使得 $|U\rangle = [\langle u|, 0, 0, \ldots 0$ （ m 次） $]^\dagger$，以及 $|V\rangle = [\langle v|, 0, 0, \ldots 0$ （ m 次） $]^\dagger$。现在，

$$\begin{aligned} &\exp(-\iota A(G')\tau) = \text{diag}\{\exp(-\iota A(G)\tau), -\iota\tau, -\iota\tau, \cdots -\iota\tau(m\text{- times})\} \\ \text{or } &\langle V|\exp(-\iota A(G')\tau)|U\rangle = \langle V|\,\text{diag}\{\exp(-\iota A(G)\tau), -\iota\tau, -\iota\tau, \cdots -\iota\tau(m\text{- times})\}|U\rangle \\ &\qquad = \langle v|\exp(-\iota A(G)\tau)|u\rangle - \iota\tau \times 0 - \iota\tau \times 0 \cdots -\iota\tau \times 0(m\text{- times}) = 1 \end{aligned} \tag{4}$$

因此，在新图 G'中，存在从顶点 u 到 v 的态传输。 □



(a) 原始图。 我们想要将状态从顶点 1 转移到顶点 4。

(b) 从顶点 1 到顶点 3 的首次 PST 时间为 $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$，通过保持 $J_{3,4} = 0$.

(c) 从顶点 3 到 4 的第二次 PST 在时间 $\tau = \frac{\pi}{2}$，通过保持 $J_{1,2} = J_{2,3} = 0$。

图 2：长度为 4 的路径图不支持顶点 1 和 4 之间的 PST。但是，我们可以使用两次 PST 在它们之间进行通信。

引理 2. 设 G_1、G_2、$\ldots G_m$ 是图，且在时间 τ_i，顶点 u_i 和 v_i 之间允许 PST，其中 u_i 和 $v_i \in V(G_i)$，对于 $i = 1, 2, \ldots m$。那么，在图 $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_m$ 中，时间 τ_i 时，u_i 和 v_i 之间存在 PST。

证明。设图 G_i 具有 n_i 个顶点，其中 $i = 1$、2、$\ldots m$。那么 G 具有 $n = n_1 + n_2 + \ldots n_m$ 个顶点。对于顶点 u_i 和 v_i，我们定义维数为 n_i 的向量，使得 $|u_i\rangle = [0, 0, \ldots 1$（第 u_i 个位置） $\ldots 0]^\dagger$ 以及 $|v_i\rangle = [0, 0, \ldots 1$（第 v_i 个位置） $\ldots 0]^\dagger \in \mathbb{C}^{n_i}$。由于存在从 u_i 到 v_i 的 PST，我们可以写出 $\langle v_i| \exp(-\iota A(G_i)\tau_i)|u_i\rangle = 1$。对于向量 $|u_i\rangle \in \mathbb{C}^{n_i}$，构造一个新向量 $|U_i\rangle \in \mathbb{C}^n$，其中 $|U_i\rangle = [\langle 0_1|, \langle 0_2|, \ldots \langle u_i|, \ldots \langle 0_m|]^\dagger$，其中 $\langle 0_j|$ 是维数为 n_j 的全零向量。现在

$$
\begin{aligned}
&\langle V_i| \exp(-\iota A(G)\tau_i)|U_i\rangle = \langle V_i| \exp(-\iota \operatorname{diag}\{A(G_1), A(G_2), \ldots A(G_i) \ldots A(G_m)\}\tau_i)|U_i\rangle \\
&= \langle V_i| \operatorname{diag}\{\exp(-\iota A(G_1)\tau_i), \exp(-\iota A(G_2)\tau_i), \ldots, \exp(-\iota A(G_i)\tau_i), \ldots \exp(-\iota A(G_m)\tau_i)\}|U_i\rangle \\
&= \langle 0_1| \exp(-\iota A(G_1)\tau_i)|0_1\rangle + \langle 0_2| \exp(-\iota A(G_2)\tau_i)|0_2\rangle + \cdots + \langle v_i| \exp(-\iota A(G_i)\tau_i)|u_i\rangle \\
&\qquad + \cdots + \langle 0_m| \exp(-\iota A(G_m)\tau_i)|0_m\rangle \\
&= 0 + 0 + \cdots + 1 + \cdots + 0 = 1.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

因此，图 G 中顶点 u_i 与 v_i 之间存在 PST。 □

引理 2 表明，在连通分量 G 中，两个顶点之间可以同时实现完美态传输。设 $G_1, G_2, \ldots G_m$ 为允许顶点 u_i 和 $v_i \in V(G_i)$ 在时刻 τ 对所有 $i = 1, 2, \ldots m$ 之间实现 PST 的图。那么，在图 u_i 和 v_i 之间，于时刻 τ 存在同步 PST $G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_m$。因此，通过关闭若干相互作用，我们可以生成多个连通分量，使其中的顶点之间能够同时实现 PST。此过程会改变相互作用哈密顿量。

在整个 PST 过程中，要始终保持耦合强度相等在实际操作中很困难。因此，态传输成本与子图中的边数成正比。为了降低态传输成本，我们应构造边数最少的子图。在图 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 所示的、在距离为 2 时能够于时刻 1 实现 PST 的图中，长度为 2 的路径图具有最少的边数。

现在我们讨论如何利用哈密顿量工程，将信息从分别位于顶点 s 和 r 的发送方传递给接收方。为简单起见，我们假设边上的这一切换操作不耗时。考虑一个顶点序列 $s = s_0$、s_1、s_2、$\ldots s_p = r$，以及一个子图序列 G_0、G_1、$\ldots G_{p-1}$，满足 $s_0 \in V$（G_0）；对于 $j = 1$，2，.....（$p - 1$），有 $s_j \in V$（G_{j-1}）、$\cap V$（G_j）；并且 $s_p \in G_{p-1}$。此外，G_j 允许信息从 s_j 传输到 s_{j+1}，其中 $j = 0$ 为 1、2、$\ldots p - 1$。在子图 G_j 中进行 PST 时，E（G）和 $-E$（G_j）中的所有边都将保持关闭。此操作将图 G 转换为另一个图 G'，该图由 G_j 与若干个孤立顶点组成。引理1表明，在 G' 中可以实现从 s_j 到 s_{j+1} 的 PST。接下来，我们关闭 G_j 中的边，并打开 G_{j+1} 中的边，从而使下一次 PST 成为可能。因此，利用子图序列 $\{G_j\}$，我们需要进行 p 次 PST，才能将信息从 s 传递到 r。我们通过图2中的示例来描述这一过程。这些想法推动了量子路由的发展，以及生成可扩展量子通信网络的方法；我们将在接下来的两节中讨论这些内容。

4 构建允许任意两个顶点之间进行通信的可扩展网络

构建网络有两个目标。我们在图的两个不同顶点上分别设置一个发送方和一个接收方。首先，我们希望他们能够通过一系列 PST 进行通信。其次，我们可以增加图中的节点数量，使网络具有可扩展性。

定义 1. 如果我们能够使用至多 p 次完美态传输，在其中任意两个顶点之间进行通信，则称图为 p-PST。

图 1 展示了一些 1-PST 图的例子。它们无需执行切换操作即可进行信息传输。所有完全图、完全二部图、星图、轮图、友谊图和佩特森图都是 1-PST 图。2-PST 图的例子包括具有 4 个或 5 个顶点的路径图，以及具有 6 至 9 个顶点的圈图。下面的引理阐述了图的直径与在任意两个顶点之间进行通信所需的 PST 数量之间的关系。

引理 3. 任何直径至多为 $2p$ 的平面图都是 p-PST。此外，表示发送方和接收方的任意两个顶点之间的态转移时间至多为 $\frac{p\pi}{\sqrt{2}}$。

证明. 图的直径为 $2p$。因此，至少存在两个顶点 u 和 v，使得 $d(u,v)=2p$，且一条路径由顶点 $u=u_0$、u_1、u_2、$\ldots u_{2p}=v$ 组成。现在将从 u 到 v 的路径分解为长度为 2 的路径，即 $G_0=\{u_0,u_1,u_2\}$、$G_1=\{u_2,u_3,u_4\}$、……、$G_{p-1}=\{u_{2p-2},u_{2p-1},u_{2p}\}$。利用图 G_i，我们通过关闭 $E(G)-E(G_i)$ 中的所有边，在时间 $\tau=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 将 PST 从 u_{2i} 传输到 u_{2i+2}。通过这种方式，我们在时间 $\frac{p\pi}{\sqrt{2}}$ 使用至多 p 次 PST，将状态从 u 传输到 v。□

上述引理表明，如果平面图 G 的直径为 d，那么当 d 为偶数时，我们至多需要 $\frac{d}{2}$ 次PST。此时，态转移时间为 $\frac{d\pi}{\sqrt{2}}$。如果 d为奇数，那么我们至多需要$\lceil\frac{d}{2}\rceil+1$次PST。态转移时间为$\lceil\frac{d}{2}\rceil\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2}$，其中$\lceil\frac{d}{2}\rceil$表示不大于 $\frac{d}{2}$ 的最大整数。在这种情况下，我们进行$\lceil\frac{d}{2}\rceil$次长度为 2 的PST。每次耗时 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，另进行 1 次长度为 1 的PST，耗时$\frac{\pi}{2}$。

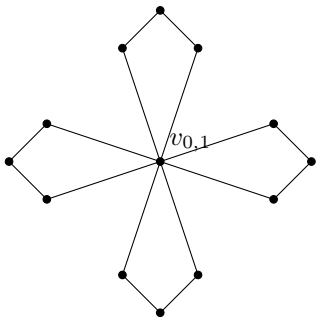
现在，我们介绍两种构建可无限扩展网络的过程，该网络支持任意两个顶点之间的PST。我们从一个初始图开始 G_0，并为其指定一个固定的平面嵌入。从 G_0 出发，我们构造一个由平面图组成的无限序列 G_i，以支持其任意两个顶点之间的量子通信。关于具有固定直径的平面图的无限族的构造，已有研究[32]。为讨论第一种过程，我们引入粘合图的概念。粘合图是一种新图 G，由两个给定的图 G_1 和 G_2 通过将 G_1 中的一个顶点与 G_2 [33,34]中的一个顶点粘合而成。

定义 2. 粘合图：设 G_1和 G_2为两个图，使得 $V(G_1)=\{v_{1,1},v_{1,2},\ldots v_{1,n_1}\}$且 $V(G_2)=\{v_{2,1},v_{2,2},\ldots v_{2,n_2}\}$。我们将 v_1、$_{n_1}$和 v_2、1 粘合起来，构造一个新图 G，其 $V(G)=\{v_i:\ i=1$、2、……$(n_1+n_2-1)\}$，其中 $v_i=v_1$、$_i$对于 $1\le i\le n_1$以及 $v_i=v_2$、$_{i-n_1+1}$，且 $n_1\le i\le(n_1+n_2-1)$。此外，$E(G)=\{(v_i,v_j):(v_{1,i},v_{1,j})\in E(G_1)$，以及 $1\le i$、$j\le n_1\}\cup\{(v_i,v_j):(v_{2,i-n_1+1},v_{2,j-n_1+1})\in E(G_2)$和 $n_1\le i$、$j\le(n_1+n_2-1)\}$。记作$G=G_1\ 人^{1,\ 2}_{n_1,\ 1}\ G_2$。

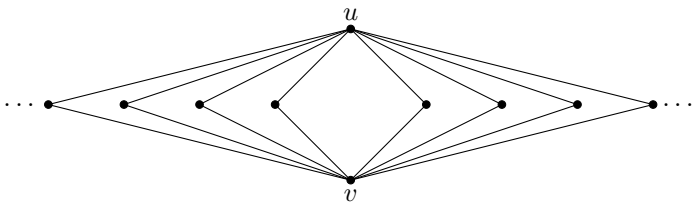
考虑平面图 G_1 和 G_2，满足 $v_{1,n_1}\in C(G_1)$ 且 $v_{2,1}\in C(G_2)$。容易看出，如果 $v_{2,1}$位于 G_2的无穷面的边界上，那么粘合图 $G_1\ 人^{1,2}_{n_1,1}\ G_2$ 是一个平面图。设 G_i的半径和直径分别为 r_i 和 d_i，对应于 $i=1$ 和 2。那么，$G_1\ 人^{1,2}_{n_1,1}\ G_2$ 的直径为 $\max\{d_1,d_2,r_1+r_2\}$。

过程1。设初始图 G_0 有 n_0 个顶点，且 $v_{0,n_0}\in C(G_0)$。考虑满足 $v_{i,1}\in C(G_i)$ 的平面图 G_i，并且 $v_{i,1}$ 位于 G_i的无穷面的边界上，其中 $i=$1=2, 3, ...。定义 $G'_0=G_0$。在第 i次迭代中，生成新的图 $G'_i=G'_{i-1}\ 人^{0,i}_{n_0,1}\ G_i$，其中 $i=$1=2, 3, ...。

在过程 1中，如果 G_i包含 n_i个顶点，依次对应 $i=0$、1、2、……，那么 G'_k中的顶点数将为$\sum_{i=0}^{k}n_j-k$。显然，对于所有 $i=0$、1、2、$\ldots k$，G_i都是 G'_k的子图。设 G_i的半径和直径分别为 r_i和 d_i。考虑 G'_k中的任意两个顶点 u和 v。如果对于某个 i，u和 v都属于 $V(G_i)$，那么我们最多可以使用 $\lceil\frac{d_i}{2}\rceil+1$个 PST 在它们之间进行通信。如果对于 $i\ne j$，u和 v分别属于 G_i和 G_j，那么我们可以通过 $v_{0,}\ _{n_0}$构造一条连接 u和 v的路径。由于 $v_{0,}\ _{n_0}$是 G_i和 G_j共同的中心顶点，因此该路径的长度至多为 r_i+r_j。所需的 PST 数量为 $\left\lceil\frac{r_i+r_j}{2}\right\rceil+1$。



(a) 过程1示例：初始图 G_0 由单个顶点 a 构成。我们在其上添加 C_4 图。所有新图都是 2-PST。



(b) 过程2示例：图 $G_0 = C_4$。我们在图中添加新的顶点，并将其与 u 和 v 相连，以构造 G_1，G_2，.....。所有新图都是 1-PST。

图3：构造可扩展平面图，实现基于 PST 的通信 s

例如，设 G_0 是仅包含一个顶点的图 $v_{0,\ 1}$ 和 $G_i = C_4$是当i = 1取 2、.....时，具有 4 个顶点的环图。注意，G_0 中的单个顶点显然是一个中心顶点。C_4 中的任意顶点都是中心顶点，并且它们都位于无穷面的边界上。在每次迭代中，我们将 C_4 的一个顶点与 $v_{0、\ 1}$ 粘合起来。新图如图 3a所示。在这里，我们最多需要两个 PST，就能在任意两个顶点之间传输信息。此外，最大的态转移时间为 $\sqrt{2}\pi$。

该过程在每一步都会增加顶点 $v_{0,\ n_1}$ 的度，该顶点在通信网络中充当枢纽。这可以视为该过程的一个缺点。移除该顶点会产生大量不相交子图，从而降低通信网络的效率。

过程2。设 u 和 v 是图 G_0 的无穷面边界上的任意两个顶点。构造新图 $G_i = (V(G_i)\ E(G_i))$，其中 $V(G_i) = V(G_{i-1}) \cup \{v_i\}$，且 $E(G_i) = E(G_{i-1}) \cup \{(u, v_i),\ (v, v_i)\}$，其中 i = 1=2，.....。

过程 2 相比过程 1更具优势。如果 d_i 是图序列 G_i 由过程 2 生成的直径，那么我们可以证明 $d_{i+1} \geq d_i$ 对于 $i = 0$、 1、 2、.....。随着网络规模增大，它减少了 PST 的数量，并且 $d_{i+1} > d_i$ 对于某些 i。此外，它生成两个枢纽节点 u 和 v。过程 2的示例如图 3b所示。这里，$G_0 = C_4$在每一步中，我们向 u 和 v 中G_0添加两个特定顶点。

5 任意平面图中的路由

在经典通信中，平面路由问题定义在一个平面图 G 上，该图具有 n 个顶点，并以固定嵌入方式嵌入平面 [35]中。网络 N_i 是无穷面 G边界上的一对顶点（s_i、 r_i）。这里，s_i和 r_i 分别表示图中的第 i个发送方和接收方。包含所有所考虑网络的集合为 $Ne = \{N_i :\ i$ =1、2、 $\ldots q\}$。经典路由问题是寻找一组两两边不相交路径 P_i，这些路径分别对应于网络$N_i \in Ne$，使得 P_i 同时对所有 i [36]而言，连接 N_i的两个终端 s_i 和 r_i 。这里，求解器希望找到连接各网络两端的最短路径。在静态路由中，在整个通信过程中不能添加或移除任何顶点或边。

我们重新表述路由问题，以便在量子通信领域中求解。同样，我们不能永久地在图中添加或删除任何顶点或边。不过，为了执行一系列 PST，我们会在特定时间段内关闭若干条边。给定一个平面图和一组网络 Ne，量子路由问题就是使用 PST 在各网络的终端之间进行通信。该问题的解包含一系列支持 PST 的子图$\{G_j\}_{j=0,\ 1,\ \ldots p}$，并具有以下特征：

1. 对于每个对应于 $i = 1$、2、 $\ldots q$ 的网络，都存在一个顶点序列 $s_i = s_{i,\ 0},\ s_{i,\ 1},\ s_{i,\ 2},\ \ldots s_{i,\ p} = r_i$ 以及一个子图序列 G_0、 G_1、 $\ldots G_{p-1}$，使得 $s_{i,\ 0} \in G_0$；$s_{i,\ j} \in G_{j-1} \cap G_j$ 对于 $j = 1$、2、.....（$p - 1$）；并且$s_{i,\ p} \in G_p$。

2. 该 子图 G_j 要么允许从 $s_{i,j}$ 到 $s_{i,j+1}$ 进行 PST，要么使状态保持在 $s_{i,j}$不动。

3. 在 G_j 中，我们有 $s_{i,\ j} \neq s_{k,\ j}$ 和 $s_{i,\ (j+1)} \neq s_{k,\ (j+1)}$。注意，$G_j$ 允许同时从 $s_{i,\ j}$ 到 $s_{i,\ (j+1)}$，以及从 $s_{k,\ j}$ 到 $s_{k,\ (j+1)}$ 进行 PST。$s_{i,\ j} = s_{k,\ j}$或 $s_{i,\ (j+1)} = s_{k,\ (j+1)}$ 中的任一个都会使 PST 无法进行。

我们使用路由表表示量子路由过程。对于每个网络，我们建立一行，用于登记从发送方到接收方的顶点序列。我们使用子图 G_j 来执行第 j 次 PST，这些子图对应于路由表中的一列。如果子图 G_j 允许从$s_{i,\ j}$ 到 $s_{i,\ j+1}$进行 PST，我们就在第 i 行、第 j 列中记为（$s_{i,\ j}, s_{i,\ j+1}$）。如果 G_j 使 $s_{i,\ j}$ 处的状态保持不变，我们就在第 i 行、第 j 列中标记 $\{s_{i,j}\}$。注意， G_0 和 G_p 是没有任何边的子图。

现在，我们给出一些示例，说明量子路由比其经典对应方式更高效。考虑图 4a，其中有两个网络 N_1 = (1, 5) 和 N_2 = (6, 4)。请注意，不存在边不相交路径 P_1 和 P_2 ，分别连接 N_1 和 N_2的终端点。因此，对于图 4a，无法在 N_1 和 N_2 的终端之间进行同步经典通信。我们可以使用 PST 同时将信息从 1 传输到 2、从 6 传输到 7，同时关闭除 (1, 2) 和 (6, 7) 以外的所有边。然后，我们关闭边 (1, 2) 和 (6, 7)，并开启超立方体中的边；该超立方体是由顶点 $\{2, 3, 7, 8\}$生成的导出子图。在这个超立方体中，可以同步实现从 2 到 8、从 7 到 3 的 PST。接下来，我们关闭超立方体，并开启边 (3, 4) 和 (8, 5)，以分别实现从 3 到 4、从 8 到 5 的 PST。因此，该图支持在 N_1 和 N_2的终端之间进行同步量子通信。量子路由如下表所示：

		用于 PST 的子图				
Net		G_0	G_1	G_2	G_3	G_4
$i = 1$	(1, 5)	$\{1\}$	(1, 2)	(2, 8)	(8, 5)	$\{5\}$
$i = 2$	(6, 4)	$\{6\}$	(6, 7)	(7, 3)	(3, 4)	$\{4\}$

这里， G_1 是一个包含两条边 (1, 2) 和 (6, 7) 的子图，并且有孤立顶点 3、4、8 和 5。此外， G_2 是由四个顶点 $\{2, 3, 7, 8\}$ 组成的超立方体，并且有四个孤立顶点 1、4、5 和 6。对于最终的 PST，我们使用子图 G_3。它包含边 (3, 4) 和 (8, 5)，并且有孤立顶点 1 、 2 、 6 和 7。初始图和最终图 G_0 和 G_4 中没有边。

同样，在图 4b 中，考虑网络 $N_1 = (8, 12)$ $N_2 = (9, 13)$ $N_3 = (15, 10)$ 和 $N_4 = (14, 11)$。连接这些网络终端的边不相交路径是不可能存在的。因此，我们无法同时在这些网络的终端之间进行经典通信。因此，对于 4b 中的图，平面图上的经典路由是不可能的。但是，我们可以类似地进行量子路由，如下表所示：

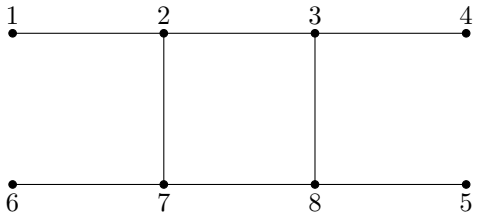
		PST 的子图						
Net		G_0	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
$i = 1$	(8, 12)	$\{8\}$	(8, 3)	$\{3\}$	(3, 6)	(6, 12)	$\{12\}$	$\{12\}$
$i = 2$	(9, 13)	$\{9\}$	$\{9\}$	(9, 4)	(4, 1)	$\{1\}$	(1, 13)	$\{13\}$
$i = 3$	(15, 10)	$\{15\}$	(15, 7)	$\{7\}$	(7, 0)	(0, 10)	$\{10\}$	$\{10\}$
$i = 4$	(14, 11)	$\{14\}$	$\{14\}$	(14, 2)	(2, 5)	$\{5\}$	(5, 11)	$\{11\}$

请注意，子图 G_3 是一个具有 8 个顶点的超立方体，如1d 所示，并包含孤立顶点 8、9、.....15。在这里，我们利用超立方体上的 PST，实现网络中不同发送者和接收者之间的同步量子通信。其他 G_j则是由长度为 1 或 2 的路径组成的子图，用于在表格中所示的顶点之间实现态传输。

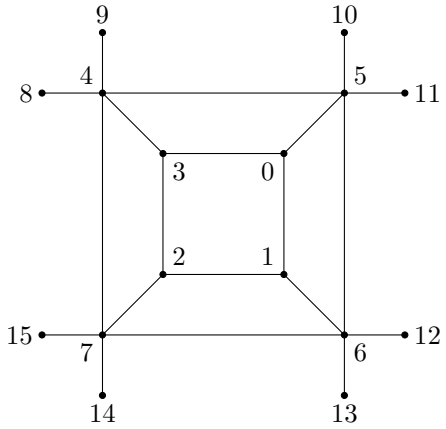
6 结论与讨论

在这项工作中，我们提出了一种利用多个 PST 在平面图中任意两个顶点之间进行量子通信的方法。图中多个 PST 的基础是哈密顿量工程，它能让我们消除自旋对象之间不需要的耦合，从而实现特定的 PST。用图论的语言来说，这是一种图切换方法，通过开启和关闭若干条边来构建特定的子图，使所选的两个顶点之间能够实现 PST。我们讨论了构建可扩展网络的两种方法，在这种网络中，我们可以利用多个 PST 在任意选定的两个顶点之间进行通信。随后，我们阐述了在平面图上实现量子路由的一种思路：将多个发送方和接收方设置在图的无穷面的边界上。我们的示例表明，量子路由比其经典对应方法更高效。

基于 PST 的量子路由是文献中研究充分的课题。文献 [37] 证明，在多个不同接收方之间进行单次态传输的路由是不可能的。因此，多次 PST 对路由至关重要，本文将对此进行阐释。多次 PST 的性能需要对相互作用进行控制，这在实验上可能颇具挑战性。此外，已有研究表明，只需对相互作用进行非常有限的控制，就能实现具有较高传输速率的路由 [18,38]。文献 [15], 提出了一种基于 PST 的路由协议，并证明



(a) 考虑两个网络 (1, 5) 和 (6, 4)。不存在从 1 到 5 以及从 6 到 4 的两条边不相交路径。因此，无法进行经典路由。但是，我们可以通过一系列 PST，同时实现从 1 到 5 和从 6 到 4 的通信。



(b) 当网络为 (8, 12)、(9, 13)、(15, 10) 和 (14, 11) 时，无法进行经典路由。但是，通过一系列 PST 可以实现量子通信。

图 4：图 4a 和 4b 中的超立方体是由顶点集 $\{2,3,7,8\}$ 和$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$分别生成的导出子图。超立方体图允许其对顶顶点之间发生 PST。这使我们能够利用所有网络执行量子路由。

在图 $K-\{(u,v)\}$ 中，任意两个顶点 u 和 v 之间都可能发生 PST；该图是去掉特定边 (u,v) 后的完全图。如果图 $K-\{(u,v)\}$ 有 n 个顶点，则它有 $(n+1)(n-2)\ 2$ 条边。我们的方法允许实现全对全~~通信，此~~时图中包含任意数量的边，边数可以显著少于 $(n+1)(n-2)\ 2$ 。尽管如此，要彻底解决平面上的量子路由问题仍是一项艰巨的任务。

致谢

作者感谢 Sougato Bose 和 Subhashish Banerjee 对本工作提出的一些建议。

资助

本工作由 SERB 资助的项目“利用完美态传输进行量子信息传输”（资助编号：CRG/2021/001834）提供支持。

参考文献

[1] Giuliano Benenti、Giulio Casati 和 Giuliano Strini。量子计算与信息原理。World scientific，2004。[2] Mladen Pavicic。量子计算与量子通信：理论与实验。Springer Science & Business Media，2006。[3] Georgios M Nikolopoulos、Igor Jex 等。量子态传输与网络工程。Springer，2014。[4] Rodney Van Meter。量子网络。John Wiley & Sons，2014。[5] H Jeff Kimble。量子互联网。《自然》，453(7198):1023–1030，2008。[6] Marcello Caleffi、Angela Sara Cacciapuoti 和 Giuseppe Bianchi。量子互联网：从通信到 di

分布式计

发表于第5届 ACM 纳米尺度计算与通信国际会议论文集，第 1–4 页，2018 年。[7] Stefano Pirandola 和 Samuel L Braunstein。物理学：携手构建量子互联网。《自然》，532(7598)：169–171，2016 年。

[8] Angela Sara Cacciapuoti、Marcello Caleffi、Francesco Tafuri、Francesco Saverio Cataliotti、Stefano Gherardini 和 Giuseppe Bianchi。量子互联网：分布式量子计算中的网络挑战。《IEEE 网络》，34(1)：137–143，2019 年。

[9] David P DiVincenzo。 量子计算的物理实现。 物理学进展：物理学进展，48(9-11)：771–783，2000。

[10] Sougato Bose。 通过未调制自旋链进行量子通信。 物理评论快报，91(20)：207901，2003。

[11]Matthias Christandl、Nilanjana Datta、Artur Ekert 和 Andrew J Landahl。量子自旋网络中的完美态传输。 物理评论快报，92(18)：187902，2004。

[12]Sougato Bose、Abolfazl Bayat、Pasquale Sodano、Leonardo Banchi 和 Paola Verrucchi。作为数据总线、逻辑总线和纠缠器的自旋链。见 量子态传输与网络工程，第 1–37 页。Springer，2014。

[13] Johannes Majer、JM Chow、JM Gambetta、Jens Koch、BR Johnson、JA Schreier、L Frunzio、DI Schuster、Andrew Addison Houck、Andreas Wallraff 等。 通过腔体总线耦合超导量子比特。 *Nature*，449(7161)：443–447，2007。[14] Christian Huitema。 互联网中的路由。Prentice-Hall 公司，1995。[15]Sougato Bose、Andrea Casaccino、Stefano Mancini 和 Simone Severini。缺少一条链路的 XYZ 全连接量子网络中的通信。 国际量子信息杂志，7(04)：713–723，2009。[16] Ronald Sadlier 和 Travis S Humble。 噪声量子态的近最优路由。见 第十七届量子通信与量子成像，第 11134 卷，第 28–39 页。SPIE，2019。[17] Christopher Chudzicki 和 Frederick W Strauch。 量子网络上的并行态传输与高效量子路由

物理评论快报，105(26):260501，2010。[18] Peter J Pemberton-Ross 和 Alastair Kay。 规则自旋网络中的完美量子路由。 物理评论快报，106(2):020503，2011。[19] Xiang Zhan、Hao Qin、Zhi-hao Bian、Jian Li 和 Peng Xue。完美态传输与高效量子路由：一种离

物理评论A辑，90(1):012331, 2014.[20]Simone Paganelli、Salvatore Lorenzo、Tony JG Apollaro、Francesco Plastina 和 Gian Luca Giorgi。自旋链中的量子信息路由。物理评论A辑，87(6):062309, 2013.[21] Douglas Brent West 等。《图论导论》，第2卷。Prentice Hall，Upper Saddle River，2001.[22] Tobias J Osborne。图上量子 XY 系统和海森堡系统的静态与动态。Physical Review B，74(9):094411, 2006.[23] Chris Godsil。何时会发生完美态传输？arXiv 预印本 arXiv:1011.0231，2010.[24] Wang-Chi Cheung 和 Chris Godsil。立方图中的完美态传输。线性代数及其应用，435(10):2468–2474，2011.[25] Gabriel Coutinho 和 Henry Liu。树中不存在拉普拉斯完美态传输。SIAM离散数学杂志，29(4):2179–2188，2015.[26] Vivien M Kendon 和 Christino Tamon。图上量子漫步中的完美态传输。计算与理论纳米科学杂志，8(3):422–433，2011.[27] John S Waugh、Lee M Huber 和 Ulrich Haeberlen。固体高分辨率核磁共振方法。物理评论快报，20(5):180，1968.[28] Peter Mansfield 和 Peter K Grannell。利用核磁共振对固体和液体进行“衍射”与显微成像。物理评论B辑，12(9):3618，1975。

[29] WS Warren、S Sinton、DP Weitekamp 和 A Pines。核磁共振中多量子相干的选择性激发。物理评论快报，43(24):1791，1979.[30] Ashok Ajoy 和 Paola Cappellaro。通过滤波哈密顿量工程实现量子模拟：在自旋网络完美量子传输中的应用。物理评论快报，110(22):220503，2013.[31]Siddhant Singh、Bibhas Adhikari、Supriyo Dutta 和 David Zueco。超立方体中的完美态传输及其超导量子比特实现。物理评论A辑，102(6):062609，2020.[32] Pavol Hell 和 Karen Seyffarth。直径为二且最大度固定的最大平面图。离散数学，111(1-3):313–322，1993.[33] L´aszl´o Lov´asz。图子式理论。美国数学会通报，43(1):75–86，2006.[34] Ivan Contreras、Michael Toriyama 和 Chengzheng Yu。图拉普拉斯矩阵的粘合及其谱。线性与多重线性代数，68(4):710–749，2020.[35] Greg N Frederickson 和 Ravi Janardan。平面网络中的高效消息路由。SIAM计算杂志，18(4):843–857，1989.[36] Michael Becker 和 Kurt Mehlhorn。平面图路由算法。信息学学报，23(2):163–176，1986.[37] Alastair Kay。通过量子网络实现完美通信的基础。物理评论A辑，84(2):022337，2011.[38] V Kostak、GM Nikolopoulos 和 I Jex。任意拓扑和耦合网络中的完美态传输

配置。

物理评论A辑，75(4)：042319，2007年。