arXiv:2302.10090v1 [math.MG] 16 Feb 2023

膨胀族的存在条件

Ammar Hussain

数学系，拉合尔管理科学大学，巴基斯坦拉合尔

22100150@lums.edu.pk

摘要

本文介绍了一种可赋予度量空间的结构，使其呈现出类似赋范向量空间的性质，并考察了一般度量空间存在此类结构的必要和充分条件。

1 引言

数学中的许多思想和结构，都是为了填补那些已经确立并得到充分研究的概念“之间”的空白而产生的。一个经典例子是一致空间这一概念，它的出现是为了将“均匀性”的概念推广到度量空间之外的一类拓扑空间。

带有膨胀族的度量空间这一概念，在既有概念之间构成了一种类似的桥梁。具体而言，它是一种强于度量空间、弱于赋范实向量空间的结构。给定一个度量空间（不一定配备任何内部代数运算），该空间上的膨胀族类似于非负实数对该空间的作用，并满足向量范数齐次性的一种类似性质（即 $||a\vec{v}|| = |a|\ ||\vec{v}||$ 始终如此）。Marius Buliga 的论文已经探讨过类似的概念，例如

一种“膨胀结构”，它位于“群与微分结构之间的某处” [1]。M. Buliga 已经定义的一种结构，与带有膨胀族的度量空间非常相似，即“赋范锥群” [2]。赋范锥群本质上是一种赋范向量空间，只是允许向量加法运算不可交换。从这个意义上说，它是一种强于带有膨胀族的度量空间的结构。我们将证明，对于带有膨胀族的度量群，可以表述一个精确条件，以确定是否存在一个范数，使其成为赋范锥群。

关于确定一个度量空间是否能够赋予膨胀族，我们将证明，任何可度量化锥空间都可以赋予一种保持其拓扑的度量，并且在该度量下，锥的中心处存在膨胀族。随后我们将证明，在局部紧度量空间上存在某种特殊的零伦，足以保证该空间等价于一个可度量化锥，也就是说，该空间可以赋予膨胀族（这里根据膨胀族的大小分为两种情况）。最后，我们将给出一个结果，对度量空间具有膨胀族的充要条件作出刻画——这一刻画基于度量空间上某个特殊的双利普希茨映射族的存在。

致谢：我要感谢 Dr. Marius Buliga 为我指引与这一主题相关的研究，也要感谢我的本科毕业设计项目导师 Dr. Haniya Azam，感谢她鼓励我研究这一主题，并在我首次独立开展项目时给予我重要建议。

2 膨胀族、性质与刻画结果

本节探讨膨胀族的一些性质，并展示度量空间存在相关膨胀族所必需和/或充分的一些条件。

定义 2.1. 设 (X, d_1) 和 (Y, d_2) 是一对度量空间。设 α 是一个非负实数。若 $h: X \to Y$ 是一个映射，满足 $d_2(h(x_1)\ h(x_2)) = \alpha d_1(x_1, x_2) \quad \forall\ x_1, x_2 \in X$，则称 h 是从 (X, d_1) 到 (Y, d_2)、尺度为 α 的膨胀。

显而易见，与等距变换一样，所有膨胀都是连续的，且所有尺度为正的膨胀都是单射。

这里研究的核心对象是我称为“膨胀族”的概念。给定度量空间 (X, d) 和指标集 $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$，膨胀族是函数 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X^X$ 构成的一个带指标集合，它们以不动点 $x_0 \in X$ 为中心“精确地缩放距离”，并满足性质 $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha\beta}$ 始终成立。

更确切地说，我们有如下定义：

定义 2.2. 设 (X, d) 为度量空间。设 x_0 为 X 中的一个点。给定任意一个对乘法封闭的指标集 I，以及任意一族 $\mathcal{A} = \{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset X^X$，若满足以下条件，我们称 $\mathcal{A}$ 为以 x_0 为中心、定义在 X 上的膨胀族：

1) T_α 是一个在 d 下尺度为 α 的膨胀，$\forall\, \alpha \in I$
2) $T_\alpha(x_0) = x_0$, $\forall\, \alpha \in I$; 3) $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha\beta}$, $\forall\, \alpha$, $\beta \in I$; 且 4) $\lim_{\alpha \to 1} T_\alpha(x)$ 存在 $\forall\, x \in X$

我们主要关注指标集为“纯”指标集的膨胀族，如下所述：

定义 2.3. 设 I 是 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 的一个子集，在乘法下封闭且包含 1。若满足以下任一条件：1） $I \subset [1, \infty$，且对任意 $\alpha < \beta \in I$、$\frac{\beta}{\alpha} \in I$；或 2） $I \subset [0, 1]$，且对任意 $\alpha < \beta \in I$、$\frac{\alpha}{\beta} \in I$；或 3） I 在非零除法下封闭，则称 I 为纯集。

关于膨胀族定义中的第 4 个条件——这是对膨胀族提出的一种看似较弱的连续性要求。正如我们将看到的，这些结构代表了对一般拓扑中出现的经典可缩性条件的强化。不过，它们也可能

与某些类型的度量测度的研究相关，例如许多豪斯多夫测度：将一个可测集按尺度α 膨胀后，会得到一个可测集，其测度按因子 α^d 缩放（其中 d 是该测度的维数）。这还使我们能够在膨胀族的“中心”处定义函数的可微性（在进行适当扩展之后）。

我们将首先给出一些结果，以确立膨胀族的基本性质及其存在的必要条件。

命题 2.1. 设 (X, d) 是一个度量空间。设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X, d, x_0) 上的一个膨胀族。那么 $T_1 = \mathrm{Id}_X$。若 $0 \in I$, $T_0 = O_{x_0}$。

证明. 对任意 $x \in X$，有 $T_1(T_1(x)) = T_{1^2}(x) = T_1(x)$，因此 $d(x, T_1(x)) = 1 \cdot d(x, T_1(x)) = d(T_1(x)\ T_1(T_1(x))) = 0$，即 $x = T_1(x)\ \forall\ x \in X$。此外，我们必有 $T_0(x_0) = x_0$，但对任意 $x \in X$，有 $d(T_0(x)\ T_0(x_0)) = 0 \cdot d(x, x_0) = 0$，因此 $T_0(x) = x_0, \forall\ x \in X$。

□

命题 2.2. 设 (X, d) 是一个度量空间。设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X, d, x_0) 上的膨胀族。对任意 $x \in X$，有 $\lim_{\alpha\to 1} T_\alpha(x) = x$。

证明. 设 x 是 X 中任意一点。令 y 表示 $\lim_{\alpha\to 1} T_\alpha(x)$。那么我们还有 $y = \lim_{\alpha\to 1} T_{\alpha^2}(x)$。

这意味着

$$0 = d(y, y) = d(\lim_{\alpha\to 1} T_{\alpha^2}(x), \lim_{\alpha\to 1} T_\alpha(x))$$

$$= \lim_{\alpha\to 1} d(T_{\alpha^2}(x), T_\alpha(x)) = \lim_{\alpha\to 1} d(T_\alpha(T_\alpha(x)), T_\alpha(x))$$

$$= \lim_{\alpha\to 1} \alpha d(T_\alpha(x), x) = \lim_{\alpha\to 1} d(T_\alpha(x), x)$$

$$= d(\lim_{\alpha\to 1} T_\alpha(x), \lim_{\alpha\to 1} x) = d(y, x)$$

由此可得 $y = x$。

□

命题 2.3. 设 (X,d) 为一个度量空间。设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X,d,x_0) 上的一个膨胀族。那么，对于任意 $x\in X$，函数 $T^x\colon I\to(X,d)$ 定义为 $\alpha\mapsto T_\alpha(x)$，在任何满足 $a>0$ 的集合 $[a,b]\cap I$ 上都是连续且一致连续的。

证明。任取 $\alpha\in I$。我们证明 T^x 在 α处的连续性。根据纯集 I 的类型，分为三种情况——对于 α，分别讨论其属于$(0,1]$, $[1,\infty)$或等于0的情形。

假设 α 为正数。现在任取 $\epsilon\in\mathbb{R}^+$。由于$\lim_{\beta\to1}T_\beta(x)$存在且等于 x，因此存在 $0<\delta<1$，使得当 $\beta\in B(1;\delta)\cap I$时，我们有 $d(T_\beta(x),x)<\frac{\epsilon}{2\alpha}$。现在设 β是集合 $B(\alpha;\frac{\alpha\delta}{2})\cap I$中的任意元素。如果 $\alpha\in(0,1]$ 和 $\beta<\alpha$，则有：

$$d(T^x(\alpha),T^x(\beta))=d(T_\alpha(x),T_\beta(x))$$

$$=d(T_\alpha(x),T_\alpha(T_{\frac{\beta}{\alpha}}(x)))$$

$$=\alpha d(x,T_{\frac{\beta}{\alpha}}(x))$$

由于 $|\beta-\alpha|<\frac{\alpha\delta}{2}$, $|\frac{\beta}{\alpha}-1|<\frac{\delta}{2}<\delta$，因此有 $d(T^x(\alpha),T^x(\beta))<\alpha\cdot\frac{\epsilon}{2\alpha}<\epsilon$。

如果 $\alpha\in(0,1]$ 和 $\beta>\alpha$，那么我们有：

$$d(T^x(\alpha),T^x(\beta))=d(T_\alpha(x),T_\beta(x))$$

$$=d(T_\beta(T_{\frac{\alpha}{\beta}}(x)),T_\beta(x))$$

$$=\beta d(T_{\frac{\alpha}{\beta}}(x),x)$$

由于$|\beta-\alpha|<\frac{\alpha\delta}{2}$，$|1-\frac{\alpha}{\beta}|<\frac{\alpha}{\beta}\frac{\delta}{2}<\frac{\delta}{2}<\delta$，因此我们有 $d(T^x(\alpha),T^x(\beta))<\beta\cdot\frac{\epsilon}{2\alpha}$。由于 $0<\delta<1$，$0<\beta<\frac{3\alpha}{2}<2\alpha$，这意味着 $d(T^x(\alpha),T^x(\beta))<\epsilon$。

如果 $\alpha\in[1,\infty)$ 且 $\beta<\alpha$，那么我们有：

$$d(T^x(\alpha),T^x(\beta))=d(T_\alpha(x),T_\beta(x))$$

$$= d(T_\beta(T_{\frac{\alpha}{\beta}}(x)), T_\beta(x))$$

$$= \beta d(T_{\frac{\alpha}{\beta}}(x), x)$$

由于$|\beta - \alpha| < \frac{\alpha\delta}{2}$，$|1 - \frac{\alpha}{\beta}| < \frac{\alpha}{\beta}\frac{\delta}{2}$。由于 $\delta < 1$，$\beta > \frac{\alpha}{2}$，因此 $|1 - \frac{\alpha}{\beta}| < \delta$，从而得到$d(T^x(\alpha)\ T^x(\beta)) < \beta \cdot \frac{\epsilon}{2\alpha}$。由于 $0 < \delta < 1$，$0 < \beta < \frac{3\alpha}{2} < 2\alpha$，所以这意味着$d(T^x(\alpha)\ T^x(\beta)) < \epsilon$。

并且，如果 $\alpha \in [1, \infty)$ 和 $\beta > \alpha$，那么我们有：

$$d(T^x(\alpha), T^x(\beta)) = d(T_\alpha(x), T_\beta(x))$$

$$= d(T_\alpha(x), T_\alpha(T_{\frac{\beta}{\alpha}}(x)))$$

$$= \alpha d(x, T_{\frac{\beta}{\alpha}}(x))$$

由于$|\beta - \alpha| < \frac{\alpha\delta}{2}$, $|\frac{\beta}{\alpha} - 1| < \frac{\delta}{2} < \delta$，因此我们有 $d(T^x(\alpha)\ T^x(\beta)) < \alpha \cdot \frac{\epsilon}{2\alpha} < \epsilon$。

因此，对于任意 $\alpha > 0$，我们有 $T^x(B(\alpha; \frac{\alpha\delta}{2}) \cap I) \subset B(T^x(\alpha); \epsilon)$。但这意味着，对于任意满足 $a > 0$ 的集合 $[a, b] \cap I$，以及任意 $\alpha \in [a, b] \cap I$，我们有$T^x(B(\alpha; \frac{\alpha\delta}{2}) \cap I) \subset T^x(B(\alpha; \frac{\alpha\delta}{2}) \cap I) \subset B(T^x(\alpha); \epsilon)$。由于 ϵ 是任意的正实数，我们知道 T^x 在任意集合 $[a, b] \cap I$ 上一致连续，因此在 $(0, \infty) \cap I$ 上也连续。

现在，设 $0 \in I$。为证明 T^x 在 0 处的连续性，再次任取 $\epsilon > 0$。若 $x = x_0$，则 T^x 是常函数 x_0，因此 T^x 在 0 处显然连续。假设 $x \neq x_0$，则对于任意给定的 $\beta \in B(0; d^{\epsilon}(x_0, x))$，我们有：

$$d(T^x(0), T^x(\beta)) = d(T_0(x), T_\beta(x))$$

$$= d(x_0, T_\beta(x)) = d(T_\beta(x_0), T_\beta(x))$$

$$= \beta d(x_0, x) < \frac{\epsilon}{d(x_0, x)} \cdot d(x_0, x) = \epsilon$$

使 T^x 在 0 处也连续。

□

命题 2.4。设 (X,d) 为柯西度量空间。设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X,d,x_0) 上的膨胀族。令 $J=\overline{I}$（其中闭包是在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 中取得的），则 J 也是一个纯集，并且存在关于 x_0,$\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 的膨胀族，它扩展了 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$。

证明。首先，我证明 $J=\overline{I}$ 是纯的。由于 I 包含 1， J 也包含 1。

如果 $I\subset[0,1]$，那么 $J\subset[0,1]$ 也如此。给定任意 $c<d\in J$，我们可以选取元素序列 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\subset I$ 收敛到 c，以及 $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}\subset I$ 收敛到 d，使得 $\alpha_i<\beta_i$，$\forall\ i\in\mathbb{Z}^+$。于是 $\frac{\alpha_i}{\beta_i}\in I$， $\forall\ i\in\mathbb{Z}^+$，且 $\lim_{i\to\infty}\frac{\alpha_i}{\beta_i}=\frac{c}{d}$，因此 $\frac{c}{d}\in J$，从而 J 是纯的。

如果 $I\subset[1,\infty)$，那么 $J\subset[1,\infty)$ 也如此。给定任意 $c<d\in J$，我们可以选取元素序列 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\subset I$ 收敛到 c，以及 $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}\subset I$ 收敛到 d，使得 $\alpha_i<\beta_i$， $\forall\ i\in\mathbb{Z}^+$。于是 $\frac{\beta_i}{\alpha_i}\in I$， $\forall\ i\in\mathbb{Z}^+$，且 $\lim_{i\to\infty}\frac{\beta_i}{\alpha_i}=\frac{d}{c}$，因此 $\frac{d}{c}\in J$，从而 J 是纯的。

若 I 同时与 $[0,1)$ 和 $[1,\infty)$ 相交，则 I 在非零除法下封闭，因此 J 也如此，从而 J 也是一个纯集。

现在，利用命题 2.3（特别是， T^x 在 $[a,b]$ 上关于 $a>0$ 一致连续这一事实），对任意 $\alpha\in J$，定义函数 $T_\alpha\in X^X$，使得 $T_\alpha(x)=\lim_{\beta\to\alpha,\ \beta\in I}T^x(\beta)$。定义为 $T^x(\alpha)=T_\alpha(x)$ 的延拓 $T^x\colon J\to X$ 是连续的。

现在，对于任意 $\alpha\in J$，我们有

$$T_\alpha(x_0)=\lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}}T^x(\beta)$$

$$=\lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}}T_\beta(x_0)=\lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}}x_0=x_0$$

此外， $T_1(x_0)=x_0$。

接下来，对于任意的 $\alpha\in\overline{I}$ 以及任意的 $x,y\in X$，我们有

$$d(T_\alpha(x),T_\alpha(y))=d(\lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}}T^x(\beta),\lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}}T^y(\beta))$$

$$= \lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}} d(T_\beta(x), T_\beta(y))$$

$$= \lim_{\substack{\beta\to\alpha,\\ \beta\in I}} \beta d(x,y)$$

$$= \alpha d(x,y)$$

因此， T_α 是尺度为 α, $\forall\, \alpha \in J$ 的膨胀。

给定任意 α、$\beta \in \overline{I}$ 以及任意 $x \in X$ （利用 T_α 的连续性），我们有:

$$(T_\alpha \circ T_\beta)(x) = T_\alpha(T_\beta(x)) = T_\alpha(\lim_{\substack{\gamma\to\beta,\\ \gamma\in I}} T^x(\gamma))$$

$$= \lim_{\substack{\gamma\to\beta,\\ \gamma\in I}} T_\alpha(T^x(\gamma)) = \lim_{\substack{\gamma\to\beta,\\ \gamma\in I}} T_\alpha(T_\gamma(x))$$

$$= \lim_{\substack{\gamma\to\beta,\\ \gamma\in I}} \lim_{\substack{\delta\to\alpha,\\ \delta\in I}} T^{T_\gamma(x)}(\delta) = \lim_{\substack{\gamma\to\beta,\\ \gamma\in I}} \lim_{\substack{\delta\to\alpha,\\ \delta\in I}} T_\delta(T_\gamma(x))$$

$$= \lim_{\substack{\gamma\to\beta,\\ \gamma\in I}} \lim_{\substack{\delta\to\alpha,\\ \delta\in I}} T_{\delta\gamma}(x) = \lim_{\substack{\delta\gamma\to\alpha\beta,\\ \delta,\gamma\in I}} T^x(\delta\gamma)$$

$$= T_{\alpha\beta}(x)$$

最后两个等式成立，是因为 $T^x\colon\ J \to X$ 是连续的。

由于 x 是 X 中的任意点，这意味着 $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha\beta}$、 $\forall\, \alpha$、 $\beta \in J$。

最后，由于 $T^x\colon\ J \to X$ 是连续的 $\forall\ x \in X$，对于任意 $x \in X$，我们有 $\lim_{\alpha\to 1} T_\alpha(x)$ 存在。因此， $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是关于 x_0 的膨胀族，扩展了 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$，如所需。

□

命题 2.5. 设 (X,d) 是一个度量空间。设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X,d,x_0) 上的一个膨胀族。假设 $I \cap [0,1) \neq \emptyset$。那么 $J = I \cup \{0\}$ 是纯的，并且令 $T_0 = O_{x_0}$，函数集合 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 也是 (X,d,x_0) 上的一个膨胀族。

证明。假设 $I \cap [0,1) \neq \emptyset$，令 $J = I \cup \{0\}$。

若 $I \subset [0,1]$，则 $J \subset [0,1]$ 也成立。给定任意 $\alpha < \beta \in K$，要么 α，要么 $\beta \in I$；在后一种情况下（因为 I 是纯的），$\frac{\alpha}{\beta} \in J$。若 $0 < \alpha$，则 $\frac{0}{\alpha} = 0 \in K$。因此 J 是纯的。

若 $I \not\subset [0,1]$，则 I 对非零除法封闭。于是 J 也对非零除法封闭。给定任意 $\alpha \neq 0 \in K$，有 $\frac{0}{\alpha} = 0 \in J$，因此 J 也对非零除法封闭，即 J 也是纯的。

最后，我们令 T_0 等于常值映射 O_{x_0}。根据命题 2.1，此定义不会导致矛盾。给定任意 $\alpha \in K$，有 $T_\alpha \circ T_0 = T_\alpha \circ O_{x_0} = O_{x_0} = O_{x_0} \circ T_\alpha = T_0 \circ T_\alpha$。因此 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in K}$ 也是 (X, d, x_0) 上的膨胀族，证明完毕。

□

现在我们确立此前关于膨胀族提出的核心主张之一——即它们是“经典可缩性条件的强化”（具体而言，指标集至少覆盖 $[0,1]$ 的膨胀族）：

命题 2.6. 设 (X, d) 为一个度量空间，且 x_0 是 X 中的一点。如果 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 (X, d, x_0) 上的一个膨胀族，则定义为 $F(\alpha, x) = T_\alpha(x)\ \forall (\alpha, x) \in I \times X$ 的函数 $F: I \times X \to X$ 是连续的。

证明. 设 (α, x) 是 $I \times X$ 中的任意一点，并令 ϵ 为任意正实数。根据命题 2.3，我们可以选取某个 $\delta \in (0, \alpha)$，使得只要 $\beta \in B(\alpha; \delta)$，就有 $d(T^x(\alpha)\ T^x(\beta)) < \frac{\epsilon}{2}$。现在，如果 $\alpha \geq 1$，则对于任意 $(\beta, y) \in B(\alpha; \delta) \times B_d(x; \frac{\epsilon}{4\alpha})$，我们有：

$$d(F(\alpha, x), F(\beta, y)) = d(T_\alpha(x), T_\beta(y))$$

$$= d(T_\alpha(x), T_\beta(x)) + d(T_\beta(x), T_\beta(y))$$

$$= d(T^x(\alpha), T^x(\beta)) + \beta d(x, y)$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \beta \cdot \frac{\epsilon}{4\alpha} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

其中，倒数第二个等号是由以下事实得出的：（由于 $\beta \in B(\alpha; \delta)$ 和$0 < \delta < \alpha$）$\beta < 2\alpha$。

若 $\alpha < 1$，则对任意 $(\beta, y) \in B(\alpha;\ \delta) \times B_d(x; \frac{\epsilon}{4})$，有：

$$d(F(\alpha, x), F(\beta, y)) = d(T_\alpha(x), T_\beta(y))$$

$$= d(T_\alpha(x), T_\beta(x)) + d(T_\beta(x), T_\beta(y))$$

$$= d(T^x(\alpha), T^x(\beta)) + \beta d(x, y)$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \beta \cdot \frac{\epsilon}{4} < \frac{\epsilon}{2} + 2\alpha \cdot \frac{\epsilon}{4}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

由于 (α, x) 是 $I \times X$ 中的任意点，且 ϵ 是任意正实数，因此 F 处处连续，如所需。

□

推论 2.6.1. 设 (X, d) 为度量空间，且 x_0 是 X 中的一点。若 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 (X, d, x_0) 上的膨胀族，则函数 $F\colon I \to C(X)$ 定义为 $F(\alpha)(x) = T_\alpha(x)\ \forall (\alpha, x) \in I \times X$ 连续（$C(X)$ 具有紧开拓扑）。

证明。由命题 2.6 以及以下事实可直接得出：连续函数的诱导函数会产生一个到函数空间的连续函数（前提是该函数空间赋予紧开拓扑）。

□

定义 2.4. 设 X 是一个拓扑空间。符号 $C_{x_0}(X)$ 表示集合 $\{f \in C(X) | f(x_0) = x_0\}$。

我们主要使用紧开拓扑（在 $C_{x_0}(X)$ 上，通常采用由紧开拓扑诱导的子空间拓扑）。

本文余下部分将致力于寻找膨胀族存在性的充分条件。我们将首先证明，所有可度量化锥空间都可以赋予一种度量，使其具有一种非常特殊的膨胀族；随后，我们将描述相关条件

在这些条件下，拓扑空间或度量空间可以转化为此类可度量化锥空间。这些“特殊类型”的膨胀族如下：

定义 2.5. 设 (X,d) 是一个度量空间，x_0 是 X 中的一个点。若 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X,d,x_0) 上的一个膨胀族，且对任意 $\alpha\le\beta\le\gamma\in I$，$d(T_\alpha(x)\ T_\gamma(x))=d(T_\alpha(x)\ T_\beta(x))+d(T_\beta(x)\ T_\gamma(x))\ \forall x\in X$，则称 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 (X,d,x_0) 上的线性膨胀族。

定义 2.6. 设 C 是一个拓扑空间，I 是 $\mathbb{R}$ 中包含 0 的子集，p 是任意一点。$\mathcal{C}_p(I,C)$ 表示由 $I\times C$ 通过将 $\{0\}\times C$ 与 p 识别而形成的锥。

下面的结果为我们提供了一种通用方法，可以为可度量化锥构造度量，使其具有线性膨胀族：

命题 2.7. 设 (C,d) 是一个直径不超过 2 的度量空间。令 X 表示 $\mathcal{C}_{x_0}([0,1],C)$，定义函数 $D\colon X\times X\to\mathbb{R}_{\ge0}$ 为 $D(x_0,x_0)=0, D((a,c_1)\ x_0)=D(x_0,(a,c_1))=a$，且 $D((a,c_1),(b,c_2))=|a-b|+\min(a,b)d(c_1,c_2)\ \forall a,b\in(0,1],\forall c_1,c_2\in C$，则它是 X 上保留 X 拓扑的度量。此外，由 $F(\alpha)(x_0)=x_0, F(\alpha)(a,x)=(a\alpha,x)\ \forall\ \alpha\in(0,1]$，和 $F(0)=O_{x_0}$ 定义的函数族 $\{F(\alpha)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 是 (X,D,x_0) 上的线性膨胀族。此外，$\mathrm{Bd}(B_D(x_0;1))=\{1\}\times C$。

证明。第 1 部分：

显然，D 是一个良定义的非负对称函数。

我们有 $D(x_0,x_0)=0$，并且对于任意的 $(a,c)\in X-\{x_0\}$，$D((a,c),(a,c))=|a-a|+\min(a,a)d(c,c)=0+0=0$。

反过来，若 $D(z_1,z_2)=0$，则有两种情况。第一种是 $z_1,z_2\ne x_0$，此时对于某些 $a,b\in(0,1]$，以及某些 $c_1,c_2\in C$，有 $z_1=(a,c_1)\ z_2=(b,c_2)$。这意味着 $|a-b|+\min(a,b)d(c_1,c_2)=0\Rightarrow|a-b|=0$，$\min(a,b)d(c_1,c_2)=0$。由于 $a,b>0$，$\min(a,b)>0$，所以我们也得到 $d(c_1,c_2)=0$，即 $a=b$ 且 $c_1=c_2$，由此可得 $z_1=(a,c_1)=(b,c_2)=z_2$。另一种情况（不失一般性）是 $z_1=x_0$。若 $z_2\ne x_0$，则对于某些 $a\in(0,1]$ 以及某个 $c\in C$，有 $z_2=(a,c)$，因此 $0=D(z_1,z_2)=D(x_0,(a,c))=a$，这就产生了

矛盾，因此必有 $z_2 = x_0 = z_1$。根据 D 的对称性，若 $z_2 = x_0$，也会出现相同的情况。因此， D 满足不可分辨者同一性。

现在我们必须证明 D 满足三角不等式，即 $D(x,z) \leq D(x,y) + D(y,z) \ \forall\ x, y, z \in X$。第一种情况是 x、y 和 z 都不等于 x_0。我们可以将 $x = (a, c_1)$ $y = b(c_2)$，并将 $z = (c, c_3)$ 写成某些a、b、$c \in (0,1]$ 以及某些 c_1、c_2、$c_3 \in C$ 的形式。我们不妨设 $a \geq c$。这里有两个子情况 —— 第一种是 $b \geq c$，第二种是 $b \leq c$。如果$b \geq c$，则：

$$D(x,z) = |a-c| + \min(a,c)d(c_1,c_3)$$

$$= |a-c| + cd(c_1,c_3)$$

$$\leq |a-b| + |b-c| + cd(c_1,c_3)$$

$$\leq |a-b| + |b-c| + cd(c_1,c_2) + cd(c_2,c_3)$$

$$\leq |a-b| + |b-c| + \min(a,b)d(c_1,c_2) + \min(b,c)d(c_2,c_3)$$

$$= D(x,y) + D(y,z)$$

如果 $b \leq c$，那么

$$D(x,z) = |a-c| + \min(a,c)d(c_1,c_3)$$

$$= a - c + cd(c_1,c_3)$$

Now

$$[a + c - 2b + bd(c_1,c_3)] - [a - c + cd(c_1,c_3)]$$

$$= 2c - 2b + (b-c)d(c_1,c_3)$$

$$= (c-b)(2 - d(c_1,c_3))$$

$$\geq 0$$

其中，最后一个不等式成立是因为 d 有上界 2。因此：

$$D(x,z) = a - c + cd(c_1, c_3)$$

$$\leq a + c - 2b + bd(c_1, c_3)$$

$$= (a - b) + (c - b) + bd(c_1, c_3)$$

$$= |a - b| + |b - c| + bd(c_1, c_3)$$

$$\leq |a - b| + |b - c| + bd(c_1, c_2) + bd(c_2, c_3)$$

$$= |a - b| + |b - c| + \min(a, b)d(c_1, c_2) + \min(b, c)d(c_2, c_3)$$

$$= D(x,y) + D(y,z)$$

下一个情形是 $z = x_0$，且 $x, y \neq x_0$。对于某些 $a, b \in (0, 1]$，以及某些 $c_1, c_2 \in C$，我们有 $x = (a, c_1)$ $y = (b, c_2$。这里同样有两个子情形：$a \geq b$ 和 $a \leq b$。

如果 $\alpha \geq \beta$，那么：

$$D(x,z) = D(x, x_0) = a$$

$$= b + (a - b)$$

$$\leq b + |a - b| + \min(a, b)d(c_1, c_2)$$

$$= D(x,y) + D(y, x_0) = D(x,y) + D(y,z)$$

如果 $a \leq b$，那么：

$$D(x,z) = D(x, x_0) = a \leq b$$

$$\leq b + |a - b| + \min(a, b)d(c_1, c_2)$$

$$= D(x, y) + D(y, x_0) = D(x, y) + D(y, z)$$

接下来一个情况（也是最后一个非平凡情况）是 $y = x_0$ 但 $x, z \neq x_0$。对于某些 a, $c \in (0, 1]$,，以及某些 $c_1, c_3 \in C$，我们可以写成 $x = (a, c_1)$ $z = (c, c_3)$。这里（同样，不失一般性地假设 $a \geq c$），我们有：

$$D(x, z) = |a - c| + \min(a, c)d(c_1, c_3)$$

$$= a - c + cd(c_1, c_3)$$

$$\leq a - c + 2c = a + c$$

$$= D(x, x_0) + D(x_0, z) = D(x, y) + D(y, z)$$

通过适当运用 D 的对称性，这些情形涵盖了所有非平凡情况。其余情形只是 x、y 和 z 中有两个或更多等于 x_0，但这些都显然成立。

如果 $y = x_0 = z$，那么 $D(y, z) = 0$，因此 $D(x, z) \leq D(x, z) + 0 = D(x, z) + D(y, z) = D(x, y) + D(y, z)$。同理，如果 $x = z_0 = z$，那么 $D(x, z) = 0$；由 D 的非负性可知，这自动意味着 $\leq D(x, y) + D(y, z)$。因此， D 满足三角不等式，从而成为一个延拓 d 的度量。

第 2 部分:

接下来，我们证明由 D 诱导的拓扑就是 $\mathcal{C}_{x_0}([0, 1], C)$ 的拓扑。

首先，令 O 为 $\mathcal{C}_{x_0}([0, 1], C)$ 的任意开集，并令 x 为 O 的任意一个元素。若x 等于某个 $(a, c) \in (0, 1] \times C$，那么我们可以选取某个 $\epsilon > 0$，使得$x = (a, c_1)$ $\in B(a; \epsilon) \times B_d(c_1; \epsilon) \subset O$（其中 $B(a; \epsilon)$ 表示在 $(0, 1])$ 中以 a 为中心、半径为 ϵ 的开球。我们不妨假设 $\epsilon < \frac{a}{2}$。现在令 y 为 $B_D\left(x; \frac{a\epsilon}{2}\right)$ 的任意一个元素。若 $y = x_0$，则 $a = D(x_0, (a, c_1)) = D(y, x) < \frac{a\epsilon}{2} < \frac{a^2}{2} < a$，这就产生了矛盾，因此 y 等于某个 $(b, c_2) \in (0, 1] \times C$。由于 $y \in B_D\left(x; \frac{a\epsilon}{2}\right)$，我们有：

$$|a-b| \leq |a-b| + \min(a,b)d(c_1,c_2)$$

$$= D(x,y) < \frac{a\epsilon}{2} < \epsilon$$

因此 $b \in B(a;\ \epsilon)$。此外，由于 $\epsilon < \frac{a}{2}$, $b \in B\left(a; \frac{a}{2}\right)$，这意味着 $b > \frac{a}{2}$。这意味着：

$$\frac{a}{2}d(c_1,c_2) < \min(a,b)d(c_1,c_2)$$

$$\leq |a-b| + \min(a,b)d(c_1,c_2)$$

$$= D(x,y) < \frac{a\epsilon}{2}$$

从首尾两项中消去 $\frac{a}{2}$，得到 $d(c_1,c_2) < \epsilon$，即 $c_2 \in B_d(c_1;\ \epsilon)$。因此 $y = (b,c_2) \in B(a;\ \epsilon) \times B_d(c_1;\ \epsilon) \subset O$。由于 y 是 $B_D\left(x \text{ 中的任意一点};\ \frac{a\epsilon}{2}\right)$，所以我们有 $x \in B_D\left(x\ ;\ \frac{a\epsilon}{2}\right) \subset O$。

若情况相反，我们有 $x = x_0$，则对某个 $a \in (0,1],$，有 $\{x_0\} \cup (0,a) \times C \subset O$。但很容易看出，前一个集合恰好就是 $B_D(x_0;\ a)$，因此 $x_0 \in B_D(x_0;\ a) \subset O$。由此可知，$D$ 所诱导的拓扑至少与 $\mathcal{C}_{x_0}([0,1],C)$ 的拓扑一样精细。

反过来，设 O 是 X 在 D 下的任意开集，且 x 是 O 的任意元素。那么我们可以选取某个 $\epsilon \in \mathbb{R}^+$，使得 $B_D(x;\epsilon) \subset O$。若 x 等于某个 $(a,c_1) \in (0,1] \times C$，则令 $y = (b,c_2)$ 为 $B\left(a \text{ 中的任意元素};\ \frac{\epsilon}{2}\right) \times B_d\left(c_1;\ \frac{\epsilon}{2a}\right)$（其中第一个开球取自 $(0,1]$）。

$$D(x,y) = |a-b| + \min(a,b)d(c_1,c_2)$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \min(a,b)\frac{\epsilon}{2a}$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + a \times \frac{\epsilon}{2a} = \epsilon$$

因此 $y \in B_D(x;\ \epsilon)$，即 $x \in B\left(a;\ \frac{\epsilon}{2}\right) \times B_d\left(c_1;\ \frac{\epsilon}{2a}\right) \subset B_D(x;\ \epsilon)$。

反之，若 $x = x_0$，则 $B_D(x;\ \epsilon) = \{x_0\} \cup (0, \epsilon) \times C$。由此可知，$\mathcal{C}_{x_0}([0,1], C)$ 的拓扑至少与由 D 诱导的拓扑一样细，因此这两个拓扑相同。

第 3 部分:

现在，对于任意 $\alpha \in (0,1]$ 以及任意 $x, y \in X - \{x_0\}$，我们可以将 $x = (a, c_1)$ $y = (b, c_2)$ 写成某个 $a, b \in (0,1]$ 和某个 $c_1, c_2 \in C$ 的形式:

$$D(F(\alpha)(x), F(\alpha)(y)) = D(F(\alpha)(a, c_1), F(\alpha)(b, c_2))$$

$$= D((\alpha a, c_1), (\alpha b, c_2))$$

$$= |\alpha a - \alpha b| + \min(\alpha a, \alpha b) d(c_1, c_2)$$

$$= \alpha(|a - b| + \min(a, b) d(c_1, c_2))$$

$$= \alpha D((a, c_1), (b, c_2)) = \alpha D(x, y)$$

and

$$= D(F(\alpha)(x), F(\alpha)(x_0)) = D(F(\alpha)(a, c_1), x_0)$$

$$= D((\alpha a, c_1), x_0)$$

$$= \alpha a = \alpha D((a, c_1), x_0)$$

$$= \alpha D(x, x_0)$$

因此，$F(\alpha)$ 是一个尺度为 α，$\forall\ \alpha \in (0,1]$ 的膨胀。由于 $F(0)$ 是一个常值映射，可知 $F(\alpha)$ 是一个尺度为 α，$\forall\ \alpha \in [0,1]$ 的膨胀。

此外，给定任意 $\alpha, \beta \in (0,1]$ 以及任意 $(a, c) \in (0,1] \times C$，我们有:

$$(F(\alpha) \circ F(\beta))(a, c) = F(\alpha)(\beta a, c)$$

$$= ((\alpha\beta)a, c)$$

$$= F(\alpha\beta)(a, c)$$

并且 $(F(\alpha) \circ F(\beta))(x_0) = F(\alpha)(x_0) = x_0 = F(\alpha\beta)(x_0)$，因此 $F(\alpha) \circ F(\beta) = F(\alpha\beta)$ $\forall\, \alpha, \beta \in (0, 1]$。此外，$F(\alpha)$ 固定 x_0，$\forall\, \alpha \in [0, 1]$，因此：

$$F(\alpha) \circ F(0) = F(\alpha) \circ O_{x_0}$$

$$= O_{x_0} = F(\alpha \times 0) = F(0 \times \alpha)$$

$$= O_{x_0} = O_{x_0} \circ F(\alpha)$$

$$= F(0) \circ F(\alpha)$$

因此，$F(\alpha) \circ F(\beta) = F(\alpha\beta)$ $\forall\, \alpha, \beta \in [0, 1]$，这意味着 $\{F(\alpha)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 是 (X, D, x_0) 上的膨胀族。

接下来，给定任意 $\alpha \leq \beta \leq \gamma \in [0, 1]$。对于任意 $(a, c) \in (0, 1] \times C$，若 $\alpha > 0$，则有：

$$D(F(\alpha)(a, c), F(\gamma)(a, c)) = D((\alpha a, c), (\gamma a, c))$$

$$= |\alpha a - \gamma a| + d(c, c)$$

$$= (\gamma - \alpha)a = (\gamma - \beta + \beta - \alpha)a$$

$$= |\alpha - \beta|a + |\beta - \gamma|a$$

$$= |\alpha a - \beta a| + |\beta a - \gamma a|$$

$$= (|\alpha a - \beta a| + d(c, c)) + (|\beta a - \gamma a| + d(c, c))$$

$$= D((\alpha a, c), (\beta a, c)) + D((\beta a, c), (\gamma a, c))$$

$$= D(F(\alpha)(a,c), F(\beta)(a,c)) + D(F(\beta)(a,c), F(\gamma)(a,c))$$

且若 $\alpha = 0$:

$$D(F(\alpha)(a,c), F(\gamma)(a,c)) = D(x_0, (\gamma a, c))$$

$$= \gamma a = \beta a + |\beta a - \gamma a|$$

$$= D(x_0, (\beta a, c)) + (|\beta a - \gamma a| + d(c,c))$$

$$= D(F(\alpha)(a,c), F(\beta)(a,c)) + D((\beta a, c), (\gamma a, c))$$

$$= D(F(\alpha)(a,c), F(\beta)(a,c)) + D(F(\beta)(a,c), F(\gamma)(a,c))$$

（β 或 γ 为 0 的情况显然成立）。此外，对于任意 $\alpha \le \beta \le \gamma \in [0,1]$，我们有:

$$D(F(\alpha)(x_0), F(\gamma)(x_0)) = D(x_0, x_0)$$

$$= 0 = 0 + 0 = D(x_0, x_0) + D(x_0, x_0)$$

$$= D(F(\alpha)(x_0), F(\beta)(x_0)) + D(F(\beta)(x_0), F(\gamma)(x_0))$$

因此，$\{F(\alpha)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 实际上是（X，D，x_0）上的线性膨胀族。

最后，对于任意 $x \in \mathcal{C}_{x_0}([0,1], C)$，我们有:

$$x \in \mathrm{Bd}(B_D(x_0;1)) \iff D(x, x_0) = 1$$

$$\iff x = (1,c), c \in C \iff x \in \{1\} \times C$$

因此 $\mathrm{Bd}(B_D(x_0;1)) = \{1\} \times C$，证明至此完成。

□

现在，我们给出一个适用于紧空间的条件。该条件类似于存在能够“收缩”的膨胀族的条件，并且足以确保这些空间是可度量化锥（注意，紧空间上不可能存在能够“扩张”的膨胀族）。

命题 2.8. 设 (X,τ) 是一个紧豪斯多夫拓扑空间。假设对于某个 $x_0 \in X$，存在连续的幺半群单态 $F\colon([0,1],\times) \to (C_{x_0}(X)\ \circ)$，满足：1)$F(0) = O_{x_0}$，2)$F(1) = \mathrm{Id}_X$，且 3)$F(\alpha)$ 是单射 $\forall\ \alpha \in (0,1]$。那么，借助 $C = X - F[0,1)(X)$，$\{F(\alpha)(C)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 是 X 的一个划分。若 $F[0,1)(X)$ 是 X 的一个开子集，则函数 $f'\colon \mathcal{C}_{x_0}([0,1],C) \to X$ 定义为使得 $x_0 \mapsto x_0$，且 $(\alpha,c) \mapsto F(\alpha)(c)$ 是一个同胚。

证明。由于 F是单射，$F(0) \neq F(1)$，即$O_{x_0} \neq \mathrm{Id}_X$。这意味着$X - \{x_0\}$ 非空。

由于 X 是紧的，且 $F\colon([0,1],\times) \to (C_{x_0}(X)\ \circ)$ 是连续的，因此定义为 $f(\alpha,x) = F(\alpha)(x)\ \ \forall(\alpha,x) \in [0,1]\times X$的函数$f\colon\ [0,1]\times X \to X$也是连续的。对于任意 $x \in X$，则（由于 X 是豪斯多夫的），$f^{-1}(\{x\})$ 是 $[0,1]\times X$ 的闭子集。令 $\pi_1\colon [0,1]\times X \to [0,1]$ 表示投影到第一个分量的投影映射，由于 X 是紧的，π_1 是闭映射，因此 $\pi_1(f^{-1}(\{x\}))$ 是 $[0,1],\ \forall\ x \in X$的闭子集。由于 $[0,1]$是紧的，这意味着 $\pi_1(f^{-1}(\{x\}))$ 始终有最小元素——令 $\Gamma\colon\ X \to [0,1]$为对每个 x给出该最小元素的函数。由于 $F(0) = O_{x_0}$，$\Gamma(x_0) = 0$ 且 $\Gamma(x) > 0, \forall\ x \in X - \{x_0\}$。

现在，根据 Γ 的定义，对于任意 $x \in X - \{x_0\}$，我们有：

$$x \in F(\Gamma(x))(X) - \cup_{\alpha\in[0,\Gamma(x))} F(\alpha)(X)$$

$$= F(\Gamma(x))(X) - \cup_{\beta\in[0,1)} F(\Gamma(x)\beta)(X)$$

$$= F(\Gamma(x))(X) - \cup_{\beta\in[0,1)} (F(\Gamma(x)) \circ F(\beta))(X)$$

$$= F(\Gamma(x))(X - \cup_{\beta\in[0,1)} F(\beta)(X))$$

$$= F(\Gamma(x))(X - F[0,1)(X)) = F(\Gamma(x))(C)$$

w这里第三个等式成立，是因为 $\Gamma(x) > 0$ 且 $F(\alpha)$ 是单射 $\forall\, \alpha \in (0,1]$。

由于 x 是 $X - \{x_0\}$ 中的任意一点，集合 $\{F(\alpha)(C)\}_{\alpha\in(0,1]}$ 覆盖了 $X - \{x_0\}$。如果对于某个 $\alpha \in (0,1],$， $F(\alpha)(C)$ 为空，那么 C 本身也将为空，从而 $X - \{x_0\} = \cup_{\alpha\in(0,1]} F(\alpha)(C) = \cup_{\alpha\in(0,1]} F(\alpha)(\emptyset) = \cup_{\alpha\in(0,1]} \emptyset = \emptyset$，矛盾。因此，集合 $\{F(\alpha)(C)\}_{\alpha\in(0,1]}$ 中的每个元素都非空。特别地， $C = F(1)(C)$ 本身非空。

由于 $F(0) = O_{x_0}$ 且 C 非空， $F(0)(C) = \{x_0\}$，因此 $\{F(\alpha)(C)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 是由非空集合构成的 X 的一个覆盖。最后，对于任意 $\alpha > \beta \in [0,1]$，如果 $x \in F(\alpha)(C) \cap F(\beta)(C)$，则：

$$x \in F(\alpha)(C) = F(\alpha)(X - F[0,1)(X))$$

$$= F(\alpha)(X) - F(\alpha)(F[0,1)(X))$$

$$= F(\alpha)(X) - F[0,\alpha)(X)$$

$$\subset F(\alpha)(X) - F(\beta)(X)$$

$$\subset F(\alpha)(X) - F(\beta)(C)$$

矛盾。因此， $\{F(\alpha)(C)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 中的所有集合两两不相交。由此， $\{F(\alpha)(C)\}_{\alpha\in[0,1]}$ 是 X的一个划分。

现在，假设 $F[0,1)(X)$ 在 X 中是开集。那么 C 是 X 中的闭子集，因此是紧的，这也使得 $\mathcal{C}_{x_0}([0,1],C)$ 紧。由于 f 连续，其在 $[0,1]\times C$ 上的限制也连续。根据我们已经证明的结论，这个限制的像为 X，且其纤维恰好与 $\mathcal{C}_{x_0}([0,1],C)$ 的元素（作为等价类）相一致。这意味着 $f' : \mathcal{C}_{x_0}([0,1],C) \to X$ 是连续双射。由于 $\mathcal{C}_{x_0}([0,1],C)$ 紧且 X 是豪斯多夫的，可知 f' 是同胚。

□

例 2.1. 要求 $F[0,1)(X)$ 在 X 中为开集这一条件是必要的。考虑定义在 $[0,1]^\omega$ 上的函数族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$，使得 $F_\alpha((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (\alpha x_i)_{i\in\mathbb{N}}$，并在 $[0,1]^\omega$ 上赋予积拓扑。$[0,1]^\omega$ 是紧的，而且很容易看出，函数族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ 是 $[0,1]^\omega$ 上以 $(0)_{i\in\mathbb{N}}$ 为中心的膨胀族。然而，集合 $C = [0,1]^\omega - \cup_{\alpha\in[0,1)} F_\alpha([0,1]^\omega)$ 恰好由满足 $\sup\{a_i | i \in \mathbb{N}\} = 1$ 的那些元素 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in [0,1]^\omega$ 组成。因此，在这种情况下，C 不仅不是 $[0,1]^\omega$ 的闭子集，而且还是环境空间 $[0,1]^\omega$ 的真稠密子集。

我们可以将命题 2.8 应用于紧度量空间的一个特殊情形 :

推论 2.8.1. 设 (X,d) 是一个紧度量空间。假设对于某个 $x_0 \text{in } X$，存在一个连续幺半单态射 $F : ([0,1],\times) \to (C_{x_0}(X), \circ)$，使得 $F(0) = O_{x_0} \text{ and } F(1) = \text{Id}_X$。若 $d(F(\alpha)(x), x_0) < d(x, x_0) \ \forall\ \alpha \in [0,1)\ x \in X - \{x_0\}$，且 x_0 不是 $C = X - F[0,1)(X)$ 的极限点，那么对于任意充分小的 $\epsilon \in \mathbb{R}^+$，函数 $f' : \mathcal{C}_{x_0}([0,1], \text{Bd}(B_D(x_0;\ \epsilon))) \to B_D(x_0,\ \epsilon)$ 定义为使得 $x_0 \mapsto x_0 \text{ and } (\alpha, c) \mapsto F(\alpha)(c)$ 是一个同胚。

证明。由于 x_0 不是 C的极限点，我们可以选取某个 $\delta > 0$，使得开球 $B_D(x_0;\ \delta)$ 与 C不相交。由于 $d(F(\alpha)(x), x_0) < d(x, x_0) \ \forall\ \alpha \in [0,1),\ F[0,1)(B_D(x_0;\ \epsilon)) \subset B_D(x_0;\ \epsilon)$。这意味着 $B_D(x_0;\ \epsilon) - F[0,1)(B_D(x_0;\ \epsilon)) \supset B_D(x_0;\ \epsilon) - B_D(x_0;\ \epsilon) = \text{Bd}(B_D(x_0;\ \epsilon))$。

根据命题 2.8 的证明中所述的推理，对每个 $x \in B_D(x_0;\epsilon)$，都存在某个 $c \in C$ 和某个 $\alpha \in [0,1)$，使得 $x = F(\alpha)(c)$。现在定义 $\Gamma :\ [\alpha,1] \to \mathbb{R}$ 为 $\Gamma(\delta) = d(F(\delta)(c), x_0) \ \forall\ \delta \in [\alpha,1]$。这是定义在一个连通区间上的连续实值函数。我们有$\Gamma(1) = d(F(1)(c), x_0) = d(c, x_0) \geq \epsilon$（这是由 ϵ 的选取所致），且 $\Gamma(\alpha) = d(F(\alpha)(c), x_0) = d(x, x_0) < \epsilon$，因此存在某个 $\beta \in (\alpha, 1]$，使得$\Gamma(\beta) = \epsilon$，即 $d(F(\beta)(c), x_0) = \epsilon$。令 $y = F(\beta)(x)$，则有 $y \in B_D(x_0;\epsilon)$。由于 $\beta > \alpha$，我们有

$$x = F(\alpha)(c) = F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(F(\beta)(c))$$

$$= F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(y)$$

$$\in F[0,1)(\overline{B_D(x_0;\epsilon)})$$

这对 $\forall x \in X$ 成立，因此可直接得出 $B_D(x_0;\ \epsilon) \subset F[0,1)(B_D(x_0;\ \epsilon)) \Rightarrow B_D(\overline{x_0;\ \epsilon)} - \overline{F[0,1)(B_D(x_0;\ \epsilon))} \subset \mathrm{Bd}(B_D(x_0;\ 1)))$，所以 $B_D(x_0;\ \epsilon) - \overline{F[0,1)(B_D(x_0;\ \epsilon))} = \mathrm{Bd}(B_D(x_0;\ \epsilon)))$。由于 $F(1) = \mathrm{Id}_X$，$F[0,1](B_D(x_0;\ \epsilon)) \subset B_D(x_0;\ \epsilon)$，因此结论可直接由命题 2.8 得出。

□

现在，我们来看一个与命题 2.8 的陈述类似的条件，不过它针对的是具有膨胀族的局部紧空间，且这些膨胀族既会“收缩”也会“扩张”：

命题 2.9. 设 (X,τ) 是一个局部紧豪斯多夫空间。假设对于某个 x_0 in X，存在一个连续幺半群单射同态 $F : ([0,\infty)\ \times) \to (C_{x_0}(X)\ \circ)$，使得 $F(0) = O_{x_0}$ 且 $F(1) = \mathrm{Id}_X$。若存在一个紧集 D，使得 $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$ 且 $F[0,1)(D) \subset \mathrm{Int}(D)$，那么 $F[0,1)(D) = \mathrm{Int}(D)$，并且函数 $f' \colon \mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(D)) \to X$ 定义为使得 $x_0 \mapsto x_0$ 且 $(\alpha, c) \mapsto F(\alpha)(c)$ 的，是一个同胚。

证明。首先，我们证明 X 不可能是紧的。反设 X 是紧的。由于 F 是单态射，且 $F(0) = O_{x_0}, F(1) = \mathrm{Id}_X$，我们必须有 $X \neq \{x_0\}$，也就是说，我们可以选取某个点 $y \in X$，使得 $X - \{y\}$ 是 x_0 的开邻域。我们还有 $F(0)(X) = O_{x_0}(X) = \{x_0\}$，因此 $F(0)$ 属于子基元素 $S(X, X - \{y\})$。由于 F 是连续的，这意味着我们可以选取某个 $\alpha > 0$，使得 $F(\beta) \in S(X, X - \{y\})\ \forall \beta \in [0, \alpha)$。特别地：

$$F\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in S(X, X - \{y\})$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\alpha}{2}\right)(X) \subset X - \{y\} \subsetneq X$$

然而，我们还有 $F\left(\frac{\alpha}{2}\right) \circ F\left(\frac{2}{\alpha}\right) = F(1) = \mathrm{Id}_X$，因此还必须有 $F\left(\frac{\alpha}{2}\right)(X) = X$，这就产生了矛盾。因此，$X$ 不可能是紧的。

现在，任取 $X - \{x_0\}$，x 中的一点。我断言 $F[0,\infty)(x) \not\subset D$。反设 $F[0,\infty)(x) \subset D$。这意味着 $F[0,\infty)(x)$ 是紧的。此外，任取 $\alpha \in [0,\infty)$，由连续性可知

$$F(\alpha)(\overline{F[0,\infty)(x)}) \subset \overline{F(\alpha)(F[0,\infty)(x))}$$

$$= \overline{(F(\alpha) \circ F[0,\infty))(x)} \subset \overline{F[0,\infty)(x)}$$

因此，每个 $F(\alpha)$ 都将 $\overline{F[0,\infty)(x)}$ 映入自身。最后，若对任意 $\alpha \neq \beta \in [0,\infty)$ 都有 $F(\alpha)(x) = F(\beta)(x)$，那么（不失一般性地假设 $\alpha < \beta$） $F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(x) = x$），于是 $F\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right)(x) = x, \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$，但由于 $x \neq x_0$，这与 $\lim_{\gamma\to 0} F(\gamma)(x) = x_0$ 的事实矛盾，因此 $F(\alpha)(x) \neq F(\beta)(x) \quad \forall\, \alpha \neq \beta \in [0,\infty)$。这意味着限制映射 $F'\colon ([0,\infty) \times) \to (C_{x_0}(F[0,\infty)(x)) \circ)$ 也是连续幺半单态射。然而，这与第一段中证明的结果矛盾。因此必有 $F[0,\infty)(x) \not\subset D$。

接下来，我声称 $F[0,\infty)(x) \cap \mathrm{Bd}(D) \neq \emptyset$。否则， $X - D$ 和 $\mathrm{Int}(D)$ 是两个互不相交的开集，且二者都与 $F[0,\infty)(x)$ 相交（由上一段可知），这与 $F[0,\infty)(x)$ 的连通性矛盾。因此，对某个 $\alpha \in (0,\infty)$，有 $F(\alpha)(x) \in \mathrm{Bd}(D)$，也就是说，对于某个满足 $\beta = \frac{1}{\alpha}$ 的 $c \in \mathrm{Bd}(D)$，有 $F(\beta)(c) = x$。我声称，对于任意 $c_1, c_2 \in \mathrm{Bd}(D)$，只有当 $\alpha = \beta$ 且 $c_1 = c_2$，或者简单地说 $\alpha = \beta = 0$ 时， $F(\alpha)(c_1)$ 才有 $= F(\beta)(c_2)$。因为如果 α 和 β 中有一个为 0，那么另一个也必定为 0（因为 c_1 和 c_2 都不可能等于 x_0）。而如果 α 和 β 都为正（不妨设 $\alpha < \beta$），那么我们有：

$$c_2 = F(1)(c_2) = F\left(\frac{1}{\beta}\right)(F(\beta)(c_2))$$

$$= F\left(\frac{1}{\beta}\right)(F(\alpha)(c_1)) = F\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)(c_1)$$

但由于 $c_1 \in \mathrm{Bd}(D) \subset D$ 以及 $\frac{\alpha}{\beta} \in (0,1)$，这意味着 $c_2 \in F[0,1)(D) \subset \mathrm{Int}(D)$，与 $c_2 \in \mathrm{Bd}(D)$ 的假设相矛盾。

我还声称，如果 $x \in \mathrm{Int}(D) - \{x_0\}$，那么 β 必须属于 $(0,1)$，否则，$\frac{1}{\beta} \in (0,1)$（若 $\beta = 1$，则 $x = F(1)(c) = c$），从而

$$c = F(1)(c) = F\left(\frac{1}{\beta}\right)(F(\beta)(c)) = F\left(\frac{1}{\beta}\right)(x)$$

$$\in F\left(\frac{1}{\beta}\right)(\mathrm{Int}(D)) \subset F\left(\frac{1}{\beta}\right)(D) \subset \mathrm{Int}(D)$$

产生矛盾。由此还可推出 $\mathrm{Int}(D) \subset F[0,1)(\mathrm{Bd}(D)) \subset F[0,1)(D)$，这意味着 $\mathrm{Int}(D) = F[0,1)(D)$。

对于任意 $c \in \mathrm{Bd}(D)$，这说明 $\forall x \in F[0,1)(D) - \{x_0\}$ 且 $x_0 = F(0)(c)$，因此可得 $F[0,1)(D) \subset F[0,1)(\mathrm{Bd}(D)) \Rightarrow F[0,1)(D) = F[0,1)(\mathrm{Bd}(D))$。由于 $F(1) = \mathrm{Id}_X$，$F[0,1](D) \subset D$。此外，由于 $\mathrm{Bd}(D) \neq \emptyset$ 且 $d(F(\alpha)(x)\ x_0) < d(x, x_0)\ \forall \alpha \in [0,1)$ $\forall x \in U - \{x_0\}$，限制映射 $F' : ([0,\infty) \times) \to (C_{x_0}(D) \circ)$ 也是连续幺半单态射。因此，根据命题 2.8，限制映射 $f'_{[0,1]} : \mathcal{C}_{x_0}([0,1], \mathrm{Bd}(D)) \to D$ 是一个同胚。

现在需要证明映射 $f' : \mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(D)) \to X$ 是一个同胚。由于 X 是局部紧且豪斯多夫的，受限的求值映射 $f : [0,\infty) \times \mathrm{Bd}(D) \to X$ 是连续的。根据我们已经证明的结果，它还是满射，并且其纤维恰好与 $\mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(D))$ 的成员重合，因此 f' 是一个连续双射。设 O 是 $\mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(D))$ 中任意一个开基元素。存在某个 $\alpha > 0$ 使得 $O \subset \mathcal{C}_{x_0}([0,\alpha), \mathrm{Bd}(D))$。令 G_α 表示映射：$\mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(D)) \to \mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(D))$，它固定 x_0，并将任意点 (a, c) 发送到 $\left(\frac{a}{\alpha}, c\right)$。这个映射显然是一个同胚。现在检验 $f'(O) = (F(\alpha) \circ f'_{[0,1]} \circ G_\alpha)(O)$ 是平凡的。G_α 是一个同胚。由于 O 是 $\mathcal{C}_{x_0}([0,\alpha), \mathrm{Bd}(D))$ 的开子集，$G_\alpha(O)$ 是 $\mathcal{C}_{x_0}([0,1), \mathrm{Bd}(D))$ 的开子集。由于 $f'_{[0,1]}$ 是一个同胚，$f'_{[0,1]}(G_\alpha(O))$ 是 $F[0,1)(D)$ 的开子集，而后者在 X 中是开集。最后，由于 $F(\alpha)$ 是一个同胚，我们有 $f'(O)$ 在 X 中是开集，从而 f' 是一个同胚。

□

当局部紧空间同时也是度量空间时，命题 2.9 有一个类似且便于使用的推论：

推论 2.9.1. 设 (X, d) 是一个局部紧度量空间。假设对于某个 $x_0 \in X$，存在一个连续幺半单态射 $F : ([0,\infty) \times) \to (C_{x_0}(X) \circ)$，使得 $F(0) = O_{x_0}$ 且 $F(1) = \mathrm{Id}_X$。若 $d(F(\alpha)(x)\ x_0) < d(x, x_0)\ \forall \alpha \in [0,1)\ x \in X - \{x_0\}$，则对所有充分小的 $\epsilon > 0$，函数 $f' : \mathcal{C}_{x_0}([0,\infty), \mathrm{Bd}(B(x_0; \epsilon)) \to X$ 定义为使得 $x_0 \mapsto x_0$ 且 $(\alpha, c) \mapsto F(\alpha)(c)$ 是一个同胚。

证明。任取足够小的 ϵ，使得 $B(x_0; \epsilon)$ 有紧闭包。于是根据收缩条件，$F[0,1)(B(x_0; \epsilon)) \subset B(x_0; \epsilon) \subset \mathrm{Int}(B(x_0; \epsilon))$.

结论现在可由命题 2.9 直接得出。

□

我们注意到，若将命题 2.7 的结果与推论 2.8.1 或推论 2.9.1 结合使用，就能在满足推论陈述条件的空间上得到相应的膨胀族，而且这些膨胀族也是线性膨胀族。因此，在许多情况下，空间上膨胀族的存在性可以意味着膨胀中心具有某种“平坦性”。

现在我们来考察膨胀族及类似结构的一些其他刻画，这些刻画不需要像之前那样依赖于将空间转换为可度量化锥。

命题 2.10. 设 (X, d) 是一个度量空间。设 I 是一个包含 0 的纯集，且 $F\colon (I, \times) \to (X^X, \circ)$ 是一个幺半群同态，其中$F(0) = O_{x_0}$。若对每个 $x \in X$，都存在某个 $\alpha_x, A_x > 0$ 使得$\beta d(A_x^{x\ y} \leq d,) (F(\beta)(x)\ F(\beta)(y)) \leq A_x \beta d(x, y)$ $\overline{\forall\ y} \in X,\ \forall\ \beta \in (0, \alpha_x)$，并且 $\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha \in I}} F(\alpha)(x)$ 存在，则定义函数 $D : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 为 $(x, y) \to \lim_{\alpha \to 0^+} \sup \left\{ {}^{d(F}_{\beta}(\beta)(x)\ {}_{F\ \beta\ y} \,\middle|\, \beta \in I \cap (\,)(\,)) (0, \alpha] \right\}$，它在 X 上定义一个度量，该度量诱导与 d 相同的拓扑，并且在此度量下，集族 $\{F(\alpha)\}_{\alpha \in I}$ 在 (X, d, x_0) 上构成一个膨胀族。

证明。首先，我们证明 D 是 X上的度量。
根据命题陈述中的不等式条件， D 显然是一个良定义的非负实值函数。

如果 $x = y$，则

$$\frac{d(F(\beta)(x), F(\beta)(y))}{\beta} = \frac{d(F(\beta)(x), F(\beta)(x))}{\beta} = \frac{0}{\beta} = 0$$

so

$$D(x, y) = \lim_{\alpha \to 0^+} \sup\{0\} = \lim_{\alpha \to 0^+} 0 = 0$$

反之，若 $D(x, y) = 0$，则存在一个正实数序列，$\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ 使得 $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ 且

$$\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,a_n]\right\}<\frac{1}{n}\ \forall\ n\in\mathbb{Z}^+$$

这意味着

$$\frac{d(F(a_n)(x),F(a_n)(y))}{a_n}<\frac{1}{n},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}^+\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{d(F(a_n)(x),F(a_n)(y))}{a_n}=0$$

当 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 时，存在某个 M，使得 $\forall\ n\geq M, a_n<\alpha_x$。由于

$$\frac{d(x,y)}{A_x}\leq\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta},\ \forall\ \beta<\alpha_x$$

我们有：

$$\frac{d(x,y)}{A_x}\leq\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq M}}\frac{d(F(a_n)(x),F(a_n)(y))}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d(F(a_n)(x),F(a_n)(y))}{a_n}=0$$

由此可得 $d(x,y)=0\Rightarrow x=y$，因此 D 满足不可分辨者同一性。

D 显然也是对称的。

并且，对于任意 x、y、$z\in X$ 以及任意 $\beta\in\mathbb{R}^+$，我们有

$$\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(z))}{\beta}\leq\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}+\frac{d(F(\beta)(y),F(\beta)(z))}{\beta}$$

因此，对于任意 $\alpha\in\mathbb{R}^+$，我们有：

$$\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(z))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

$$\leq\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}+\frac{d(F(\beta)(y),F(\beta)(z))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\Big|\beta\leq\alpha\right\}+\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(y),F(\beta)(z))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

对两边取 $\alpha\to 0$ 的极限，得到 $D(x,z)\leq D(x,y)+D(y,z)$，从而使 D 成为 X 上的一个度量。

现在我们证明， D 在 X 上诱导的拓扑与 d相同。任取 $x\in X$和 $\epsilon>0$。若 y 是 $B_d\left(x\text{中的任意一点；}\ \frac{\epsilon}{2A_x}\right)$ 则对任意 $\beta<\alpha_x$，有:

$$\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\leq A_x d(x,y)<\frac{\epsilon}{2}$$

So:

$$D(x,y)=\lim_{\alpha\to 0^+}\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

$$\leq\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha_x]\right\}\leq\frac{\epsilon}{2}<\epsilon$$

也就是说， $B_d\left(x;\ \frac{\epsilon}{2A_x}\right)\subset B_D(x;\ \epsilon)$。

类似地，任取 $B_D\left(x\text{中的一点 }y;\ \frac{\epsilon}{A_x}\right)$。我们有 $D(x,y)<\frac{\epsilon}{A_x}\Rightarrow\lim_{\alpha\to 0^+}\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}<\frac{\epsilon}{A_x}$。这意味着我们可以选取某个 $\gamma>0$，使得 $\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(x),F(\beta)(y))}{\beta}\Big|\beta\leq\gamma\right\}<\frac{\epsilon}{A_x}$，因此若 δ 是小于 γ 和 α_x的任意正实数，则有:

$$\frac{d(x,y)}{A_x}\leq\frac{d(F(\delta)(x),F(\delta)(y))}{\delta}<\frac{\epsilon}{A_x}$$

$$\Rightarrow d(x,y)<\epsilon$$

因此 $y\in B_d(x;\epsilon)$，也就是说 $B_D\left(x;\ \frac{\epsilon}{A_x}\right)\subset B_d(x;\epsilon)$。所以 d 和 D 在 X 上诱导出相同的拓扑。

最后，给定任意 γ 属于 I 以及任意 $x,y\in I$，我们有:

$$D(F(\gamma)(x),F(\gamma)(y)) = \lim_{\alpha\to 0^+}\sup\left\{\frac{d(F(\beta)(F(\gamma)(x)),F(\beta)(F(\gamma)(y)))}{\beta}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

$$= \gamma\lim_{\alpha\to 0^+}\sup\left\{\frac{d(F(\beta\gamma)(x),F(\beta\gamma)(y))}{\beta\gamma}\Big|\beta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

$$= \gamma\lim_{\alpha\to 0^+}\sup\left\{\frac{d(F(\delta)(x)),F(\delta)(y))}{\delta}\Big|\delta\in I\cap(0,\alpha]\right\}$$

$$= \gamma D(x,y)$$

其中，倒数第二个表达式中的 δ 是对 $\beta\gamma$ 的代换（这是可行的，因为 I 是一个纯集）。因此，对每个$\alpha\in I$， $F(\alpha)$都是在 D 下、尺度为 α 的膨胀，从而完成证明。

□

命题 2.11. 设 $(X,*)$ 是一个拓扑群，其单位元为 x_0。设 d 是 X 上诱导上述拓扑的一个度量。假设 (X,d,x_0) 上存在一个膨胀族 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in[0,\infty)}$，它由关于 $*$ 的 X 上的群同态组成。如果平移映射的集合 $\{\rho_c\}_{c\in X}$（其中每个 ρ_c 都是映射 $x\mapsto c*x$）关于 d 等度连续，那么定义为 $D(x,y) = \sup\{d(c*x,c*y) \mid \forall\ c\in X\}$ 的函数$D:\ X\times X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ 是 X 上诱导与 d 相同拓扑的一个度量，并且 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in[0,\infty)}$ 是 (X,D,x_0) 上的膨胀族。此外，在 X 上定义为 $||x|| = D(x,x_0)$ $\forall\ x\in X$ 的范数是 X 上的齐次范数。

证明。很容易看出，只要我们能证明对于每个 $(x,y)\in X\times X$， $\{d(c*x,c*y) \mid \forall\ c\in X\}$ 有界，那么 D 就是良定义的。

任取 x in X。由于集合 $\{\rho_x\}_{x\in X}$ 关于 d 等度连续，因此存在 x_0 的某个开邻域 U，使得对每个 $z\in U$， $\{d(c*x_0,c*z)\mid \forall\ c\in X\}$ 有界。由命题 2.3，存在某个 $\gamma>0$，使得 $T_\alpha(x)\in U$，因此 $\{d(c*x_0,c*T_\gamma(x))\mid \forall\ c\in X\}$ 有界。但这个集合可以改写为:

$$= \{d(c*T_\gamma(x_0),c*T_\gamma(x))\mid \forall\ c\in X\}$$

$$= \{d(T_\gamma(T_\gamma^{-1}(c)*x_0),T_\gamma(T_\gamma^{-1}(c)*x)\mid \forall\ c\in X\}$$

由于 $\gamma > 0, T_\gamma$ 是 X 上的双射，因此（作代换 $e = T_\gamma^{-1}(c)$ 后），这个集合就是:

$$= \{d(T_\gamma(e * x_0), T_\gamma(e * x) | \ \forall \ e \in X\}$$

$$= \{\gamma d(e * x_0, e * x) | \ \forall \ e \in X\}$$

因此，集合 $\{\gamma d(e*x_0, e*x) | \ \forall \ e \in X\}$ 必须有界。由于 $\gamma > 0$，这意味着 $\{d(e * x_0, e * x) | \ \forall \ e \in X\}$ 必须有界， $\forall \ x \in X$。现在，任取 $x, y \in X$。根据我们刚才证明的结论， $\{d(e*x_0, e*(x^{-1}*y)) | \ \forall \ e \in X\}$ 有界。乘以 X 中任意一个固定元素都是一个双射，因此，令 c 表示 $e * x^{-1}$，我们有

$$\{d(e * x_0, e * (x^{-1} * y)) | \ \forall \ e \in X\}$$

$$= \{d((c * x) * x_0, (c * x) * (x^{-1} * y) | \ \forall \ c \in X\}$$

$$= \{d(c * x, c * y) | \ \forall \ c \in X\}$$

因此这个最后的集合也有界， $\forall (x, y) \in X \times X$，这意味着 D 是良定义的。

D 是对称的，这一点可由 d 是对称的这一事实推出。

若 $x = y$，则 $D(x, y) = \sup\{d(c * x, c * y) | \ \forall \ c \in X\} = \sup\{d(c * x, c * x) | \ \forall \ c \in X\} = \sup\{0\} = 0$。类似地，若 $D(x, y) = 0$，则 $0 \leq d(x, y) = d(x_0 * x, x_0 * y) \leq \sup\{d(c * x, c * y) | \ \forall \ c \in X\} = 0$，因此 $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$，这意味着 D 也满足不可分辨者同一性。

并且对于任意 x、 y、 $z \in X$，都有 $d(c * x, c * z) \leq d(c * x, c * y) + d(c * y, c * z) \ \forall \ c \in X$，因此:

$$D(x, z) = \sup\{d(c*x, c*y) | \ \forall \ c \in X\} \leq \sup\{d(c*x, c*y) + d(c*y, c*z) | \ \forall \ c \in X\}$$

$$\leq \text{s上确界}\{d(e*x, e*y) | \ \forall \ e \in X\} + \text{上确界}\{d(f*y, f*z) | \ \forall \ f \in X\} = D(x, y) + D(x, z \ \ )$$

含义 D 也满足三角不等式。因此， D 是 X上的度量。

要证明 D 在 X 上诱导出与 d 相同的拓扑，任取 $x \in X$，以及任意正实数 ϵ。由于 $D(x,y) < \epsilon \Rightarrow d(x,y) = d(x_0 * x, x_0 * y) \leq D(x,y) < \epsilon$，可得 $x \in B_D(x;\ \epsilon) \subset B_d(x;\ \epsilon)$，这意味着 D 诱导出的拓扑比 d 诱导出的拓扑更细。同时，由于集合 $\{\rho_x\}_{x\in X}$ 关于 d 是等度连续的，存在某个 $\delta > 0$，使得 $d(c*x, c*y) < \frac{\epsilon}{2}$，$\forall\ c \in X$，并且对于所有 $y \in B_d(x;\ \delta)$，这意味着 $D(x,y) = \sup\{d(c*x, c*y) \mid \forall\, c \in X\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$。因此， $x \in B_d(x;\ \delta) \subset B_D(x;\ \epsilon)$，这意味着 d 诱导出的拓扑比 D 诱导出的拓扑更细。因此， D 和 d 在 X 上诱导出等价拓扑。

接下来，对于任意 x、$y \in X$ 以及任意 $\alpha \in (0,\infty)$，我们有：

$$D(T_\alpha(x), T_\alpha(y)) = \{d(c * T_\alpha(x), c * T_\alpha(y)) \mid \forall\, c \in X\}$$

$$= \sup\{d(T_\alpha(T_\alpha^{-1}(c) * x), T_\alpha(T_\alpha^{-1}(c) * y) \mid \forall\, c \in X\}$$

$$= \sup\{d(T_\alpha(e * x), T_\alpha(e * y) \mid \forall\, e \in X\}$$

$$= \sup\{\alpha d(e * x, e * y) \mid \forall\, e \in X\}$$

$$= \alpha D(x,y)$$

其中，在第 3 个等式中， e 表示 $T_\alpha^{-1}(c)$。由此可直接得出，$\{T_\alpha\}_{\alpha\in[0,\infty)}$ 是 (X, D, x_0) 上的膨胀族。

最后，我们证明 D 在 X 上诱导出一个群范数。对于任意 x、$y \in X$ 和任意 $z \in X$，我们有：

$$D(z*x, z*y) = \sup\{d(c*(z*x), c*(z*y)) \mid \forall\, c \in X\}$$

$$= \sup\{d((c*z)*x, (c*z)*y) \mid \forall\, c \in X\}$$

$$= \sup\{d(e*x, e*y) \mid \forall\, e \in X\}$$

$$= D(x, y)$$

因此， D 是（左）平移不变的。对于任意 $x \in X$，现在有：

$$||x|| = D(x, x_0) = D(x_0, x)$$

$$= D(x^{-1} * x_0, x^{-1} * x) = D(x^{-1}, x_0)$$

$$= ||x^{-1}||$$

并且对于任意 x、$y \in X$，我们有：

$$||x * y|| = D(x * y, x_0) = D(x^{-1} * (x * y), x^{-1} * x_0)$$

$$= D(y, x^{-1}) \leq D(y, x_0) + D(x_0, x^{-1})$$

$$= D(y, x_0) + D(x^{-1}, x_0) = ||y|| + ||x^{-1}||$$

$$= ||x|| + ||y||$$

从而使诱导范数也成为群范数。

□

3 与 Marius Buliga 工作的链接

首先，这里的某些结果可以表述为：说明度量空间何时是“度量锥”。根据 M. Buliga 的定义（见 [2], 第 10 页，定义 2.17），度量锥基本上是一个带基点的局部紧度量空间（X、d、x_0），其中存在一个关于 x_0 的开球，该开球允许以 x_0 为中心、对 $(0, 1]$ [2] 中的所有尺度进行膨胀并映射到自身。这比空间具有膨胀族这一条件稍弱一些。

因此我们有：

命题 3.1. 设 (X, d) 是一个局部紧度量空间。假设对于某个 x_0 in X，存在一个连续作用 $F: [0, \infty) \times X \to X$ with$F(0, x) = x_0$, $\forall\, x \in X (F(1, x) = x$, $\forall\, x \in X$。若 $d(F(\alpha, x)\ x_0) < d(x, x_0)\ \forall\, \alpha \in [0, 1)\ x \in X - \{x_0\}$，则存在一个度量 D，定义在 X 上，使得 D 和 d 在 X 上诱导相同的拓扑，并且 (X, D, x_0) 是一个度量锥。

同样，还有以下关于“带膨胀的赋范局部群”的结果（见 [2], 第 13 页，定义 3.2）：

命题 3.2. 设 (X, d) 是一个局部紧度量空间，且 X 是一个以 x_0 为单位元的局部群。假设存在一个连续作用 $F : [0, \infty) \times X \to X$，满足 $F(0, x) = x_0$, $\forall\, x \in X (F(1, x) = x, \forall\, x \in X$ 也满足此条件）。如果 $d(F(\alpha, x)\ x_0) < d(x, x_0)\ \forall\, \alpha \in [0, 1)\ x \in X - \{x_0\}$，那么存在一个度量 D 作用于 X，使得 D 和 d 在 X 上诱导相同的拓扑，并且 $(X, ||\cdot||, \delta)$ 是一个带膨胀的赋范局部群，具有齐次范数，其中 $||x||$ 定义为 $D(x, x_0)\ \forall\, x \in X$，且 $\delta_\epsilon(x) = F(\epsilon, x)\ \forall\, (\epsilon, x) \in [0, \infty) \times X$。

对于“赋范锥群”，还有如下结果（它们是配备了膨胀族的赋范群，且这些膨胀是群同态——参见 [2], 第 14 页，定义 3.3）：

命题 3.3。设 (X, d) 是一个度量空间，其中 X 是一个群，其运算为 $*$，单位元为 x_0。进一步设在 (X, d) 中存在关于 x_0 的膨胀族 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in [0, \infty)}$，其中每个 T_α 都是群同态。若平移族 $\{\rho_c\}_{c \in X}$（其中 $\rho_c(x) = c * x, \forall\, c, x \in X$）在 x_0 处等度连续，则定义为 $X \times X \to \mathbb{R}$ 的函数 D：

$$D(x, y) = \sup\{d(c * x, c * y) | c \in X\}$$

是在 X 上的平移不变度量，它在 X 上诱导出与 d 相同的拓扑，并且由 D 诱导的范数使 X 成为赋范锥群。

参考文献

[1] Marius Buliga. 膨胀结构 I：基础。《一般李理论及其应用杂志》，第1卷（2007），第2期，65-9，2006。

[2] Marius Buliga. 从内在视角看次黎曼几何，2012。