arXiv:2302.10122v2 [math.CA] 8 Mar 2023

圆上的反向伯恩斯坦不等式

¨PARVANEH JOHARINAD、JURGENJOST、SUNHYUK LIM 和 ROSTISLAV MATVEEV

Abstract. 一百多年前提出的伯恩斯坦不等式指出，固定次数三角多项式的导数的 L^∞-范数可以由多项式本身的 L^∞-范数从上方控制。本文证明的反向伯恩斯坦不等式则表明，对于属于固定次数多项式空间正交补的函数，反向不等式成立。

事实上，我们还推导出了关于高阶导数下界的一个更一般的结果。这些下界优于连续多次应用一阶导数界所得的结果。

Rostislav Matveev 非常感谢 Evgeniy Abakumov 就这一主题进行的富有成效的讨论。

1. Introduction and the statement

在思考圆在其超凸包中的邻域的同伦类型时，我们不得不考虑反伯恩斯坦不等式。由于这一项目仍在进行中，我们决定先撰写这篇关于该不等式本身的短文，不涉及其应用。

定义 $S^1 := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$，并赋予其角度度量

$$d(x,y) := d_{\mathbb{R}}(x, y + 2\pi\mathbb{Z})$$

以及归一化测度 $\mathrm{d}\mu := \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}x$。我们将在圆上使用范围为 $(-\pi,\pi]$ 的角坐标。令 $L^2 := L^2(S^1,\mu)$ 表示圆上复值 L^2-函数的空间。

对于数 $k \in \mathbb{N}$，定义三角多项式空间及其正交补如下：

$$\mathcal{P}_k := \left\langle\!\left\langle \mathbf{e}^{\mathbf{i}\cdot j\cdot x} : j \in \mathbb{N}_0,\ |j| \le k \right\rangle\!\right\rangle$$
$$\mathcal{T}_k := \left\langle\!\left\langle \mathbf{e}^{\mathbf{i}\cdot j\cdot x} : j \in \mathbb{N},\ |j| \ge k \right\rangle\!\right\rangle$$

其中，$\ldots$ 表示线性包的 L^2-闭包。

对于任意 $k \in \mathbb{N}$，空间 $\mathbf{P}_{k-1}$ 和 $\mathbf{T}_k$ 互为正交补。另请注意，$\mathbf{T}_1 \subset L^2$ 恰好是所有零均值函数构成的空间。

伯恩斯坦不等式， [Ber12], 指出，任意函数 $f \in \mathcal{P}_k$都满足不等式

$$\|f'\|_\infty \le k \cdot \|f\|_\infty$$

具有使其趋于饱和的函数 $\mathbf{e}^{\pm ikx}$ 。关于这一事实及其各种推广的若干证明可见于 [QZ19]。在证明下文的反伯恩斯坦不等式 时，所引文章给予了我们很大启发。

对于 $m \in \mathbb{N}$，令 $W^{m,\infty}$表示函数 $f \in L^2(S^1, \mu)$ 的类，使得 $f \in C^{m-1}(S^1)$，且 f 在几乎处处可导 m 次，导数有界。记 $\|f^{(m)}\|_\infty \in [0, \infty)$ 为 $f \in W^{m,\infty}$ 的 m^{th} 阶导数的 L^∞-范数。对于不属于此类的函数，令 $\|f^{(m)}\|_\infty := \infty$。

定理 1.A（反伯恩斯坦不等式）。设 k, m 为自然数且 $f \in \mathrm{T}_k$，则

$$\left\|f^{(m)}\right\|_\infty \ge C_{k,m} \cdot \|f\|_\infty$$

其中 $C_{k,m} = 1/\|I^{m-1}c_k\|_\infty$。这里 $I^{m-1}c_k$ 表示三角函数 c_k 的（m–1）重原函数，其周期为 $2\pi/k$。□

算子 I 和三角函数 c_k 将在下一节讨论，参见（2.A）和（2.B）。

容易看出，对于某些常数 B_m，$C_{k,m} = (\frac{2k}{\pi})^m \cdot B_m^{-1}$。目前我们尚不知道 B_m 的闭式表达，不过很容易求出任意给定 $m \in \mathbb{N}$对应的值。例如，$C_{k,1} = 2k/\pi$以及 $C_{k,2} = 8k^2/\pi^2$。最后一节介绍了一种用于计算 $C_{k,m}$的简单算法。

定理 1.A 关于 $k = 1$ 的不等式见 [Nor39]。在文章 [Par83] 中，作者用不同方法证明了，对于每个 $f \in \mathcal{T}_1$以及每个 $p \in [1, \infty]$，以下不等式成立

$$\|f'\|_p \ge C_{1,1} \|f\|_p$$

J. Partington 告知我们，最后所引用文章中的技术可以推广，用于证明对任意 k、$m \in \mathbb{N}$ 以及任意勒贝格范数均成立的反伯恩斯坦不等式。

2. Proof of the Theorem

在证明中，我们需要使用以下记号。定义三角余弦和正弦为

$$\text{(2.A)} \qquad c(x) := \frac{\pi}{2} - d(x, 0), \qquad c_k(x) := \frac{c(k \cdot x)}{k},$$
$$s(x) := c(\frac{\pi}{2} - x), \qquad s_k(x) := \frac{s(k \cdot x)}{k}$$

函数 s_k 和 c_k 是分段线性的，并且与 $\sin(k\cdot x)$ 和 $\cos(k\cdot x)$分别具有相同的符号和单调性；对于每个$k\in\mathbb{N}$ 以及几乎处处的 $x\in S^1$，它们满足 $|c_k'(x)| = |s_k'(x)| = 1$，见图 1。显然 s_k，$c_k\in\mathcal{T}_k$，此外还有

$$\mathcal{T}_k = \langle\!\langle c_i, s_i : i \geq k\rangle\!\rangle$$

这是因为函数 c和 s 的傅里叶系数具有乘法性，并且[Har47]证明了，在这种情况下，这些函数的伸缩构成了 L^2的一个 Riesz 基，另见[Wei99]，其中专门讨论了三角函数。

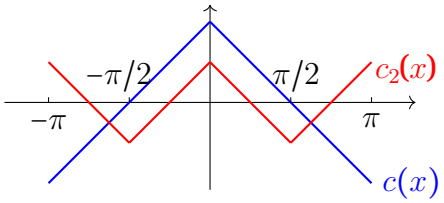

FIG. 1. (c)和 $c_2(x)$的图像。

定理的证明 *1.A.* 考虑有界线性算子

$$I : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_1$$

定义在 $\varphi\in\mathbf{T}_1$ 上为

$$I\varphi := \Phi \tag{2.B}$$

其中 Φ 是 φ 的唯一零均值原函数。注意，对任意 $k\in\mathbb{N}$，算子 I 都保持空间 $\mathbf{T}_k$ 和 $\mathbf{T}_1\cap\mathbf{P}_k$ 不变，因为 $\mathbf{T}_1$ 的标准 L^2 基是 I 的特征基。

定义 $J_m\in\mathbf{T}_1$ 为

$$\begin{aligned} J_1(x) &:= x && \text{for } x\in(-\pi,\pi)\\ J_1(\pi) &:= 0 &&\\ J_m &:= I^{m-1}J_1 && \text{for } m>1 \end{aligned}$$

那么对任意 $\varphi\in\mathbf{T}_1$

$$\begin{aligned} \langle\varphi, J_1\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}x\cdot\Phi(x)\Big|_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\\ &= \Phi(\pi) = (I\varphi)(\pi) \end{aligned}$$

由于算子 I 是反自伴的，我们还有

$$|I^m\varphi(\pi)| = |\langle\varphi, J_m\rangle| \tag{2.C}$$

现在令 k，m 为自然数。取 $\varphi\in\mathcal{T}_k$，并令 $p\in\mathcal{P}_{k-1}$ 为任意的。由于 φ 和 p 正交，方程（2.C）推出

$$|(I^m\varphi)(\pi)| = |\langle\varphi, (J_m - p)\rangle|$$

由赫尔德不等式可知，对于每个 $p\in\mathbf{P}_{k-1}$

$$|(I^m\varphi)(\pi)| \leq \|\varphi\|_\infty\cdot\|J_m - p\|_1$$

移位算子与 I^m 交换，将其应用于函数 φ 不会影响不等式的右侧。因此我们得到

$$\|I^m\varphi\|_\infty \le \|\varphi\|_\infty \cdot \|J_m - p\|_1 \tag{2.D}$$

现在我们需要巧妙地选择 $p \in \mathbf{P}_{k-1}$。更具体地说，我们将以这样的方式选择 p：根据 m 的奇偶性，使 H¨older 不等式在 $\varphi = c_k'$ 或 $\varphi = s_k'$ 上出现共振。

为此，我们将取 $p \in \mathcal{P}_{k-1}$ 作为函数 J_m 在圆上均匀分布的点处的三角拉格朗日多项式，并利用下面的两个引理 2.E 和 2.F 。

如果圆上的函数关于圆上的复共轭（或在我们的坐标中为对合 $x \mapsto -x$）是偶的/奇的，我们就称该函数为偶函数/奇函数。显然，对于任意 $m \in \mathbb{N}$， J_m 的奇偶性与 m 的奇偶性相同。此外，对每个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $J_m \in W^{m,\infty}$。我们用 $\mathbf{P}_k^{\mathsf{even}}$ 和 $\mathbf{P}_k^{\mathsf{odd}}$ 表示次数为 $k \in \mathbb{N}_0$ 的偶（分别为奇）三角多项式空间；为方便记号，还将 $\mathbf{P}_k^{(m)}$ 定义为 $\mathbf{P}_k^{\mathsf{even}}$ 或 $\mathbf{P}_k^{\mathsf{odd}}$，具体取决于 m 的奇偶性。

引理 2.E. 设 k、$m \in \mathbb{N}$ 和 $p \in \mathbf{P}_k^{(m)}$。设

$$Z := \{x \in S^1 : (J_m - p)(x) = 0\}$$

Then

(i) $|Z| \le 2k+2$

(ii) *If* $|Z| = 2k+2$ *then all points in* Z *are simple zeroes of* $(J_m - p)$.

□

这里有必要作一点说明。函数 J_1 不连续，且 J_2 在 $x = \pi$处不可微。在这种情况下，如果 $x = \pi$ 是 的简单零点 $J_1 - p$，那么 $p(\pi) = 0$，而 $x = \pi$绝不会是的简单零点 $J_2 - p$。在证明引理 $m = 1$2.E时，需要对 2 作一些特别处理。

第二个引理讨论了三角多项式插值的存在性和唯一性。当然，这类插值的理论已经十分成熟，例如参见 [Atk91，第 3 章。8]。不过，我们这里讨论的是具有附加对称性（插值函数的奇偶性）的情形，而且证明相当简短，因此我们决定在此给出该引理及其证明。

引理 2.F. 设 k、$m \in \mathbb{N}$。则

(i) 若 m 是奇数，且 $A \subset (0,\pi)$ 的基数为 k，则存在唯一的奇多项式 $p \in \mathbf{P}_k^{(m)}$，使得

$$\{x \in S^1 : (J_m - p)(x) = 0\} = A \cup (-A) \cup \{0,\pi\}$$

(ii) 若 m 是偶数，且 $A \subset (0,\pi)$ 的基数为 $k+1$，则存在唯一的偶多项式 $p \in \mathrm{P}_k^{(m)}$，使得

$$\left\{x \in S^1 : (J_m - p)(x) = 0\right\} = A \cup (-A)$$

□

我们将引理的证明推迟到定理证明结束之后。

现在假设 $m \in \mathbb{N}$ 是奇数且 $k \in \mathbb{N}$。令

$$A := \left\{\frac{j\cdot\pi}{k} : j = 1,\dots,(k-1)\right\} \subset (0,\pi)$$

由引理 2.F(i)，存在唯一的 $p \in \mathrm{P}_{k-1}^{\mathrm{odd}}$，在 $A \cup (-A) \cup \{0,\pi\}$处插值 J_m。由引理 2.E(ii)，函数 $(J_m - p)$ 在 $A \cup (-A) \cup \{0,\pi\}$的每一点都改变符号，并且在其间不改变符号。由于函数 c_k' 模为一，且也在相同的点改变符号，因此可得

$$\|J_m - p\|_1 = |\langle J_m - p, c_k'\rangle| = |\langle J_m, c_k'\rangle| = \|I^m c_k'\|_\infty =: D_{k,m} \tag{2.G}$$

对于偶数 m，我们用类似的方法推理。设

$$A := \left\{\frac{(j+1/2)\cdot\pi}{k} : j = 0,\dots,k-1\right\} \subset (0,\pi)$$

并且令 $p \in \mathcal{P}_k^{\mathrm{even}}$为引理2.F(ii)给出的三角多项式。于是由引理2.E(ii)函数 $J_m - p$和 s_k'恰好在相同的点改变符号，因此有

$$\|J_m - p\|_1 = |\langle J_m - p, s_k'\rangle| = |\langle J_m, s_k'\rangle| = \|I^m s_k'\|_\infty =: D_{k,m} \tag{2.H}$$

由于当 $\varphi = c_k'$ 或 $\varphi = s_k'$ 取决于 m 的奇偶性时，不等式（2.D）中等号成立，因此我们还证明了这样的插值多项式 p 是 L^1-最优的。

将不等式（2.D）与（2.G）或（2.H）结合，可得到不等式

$$\|I^m \varphi\|_\infty \le D_{k,m}\cdot\|\varphi\|_\infty \tag{2.I}$$

为完成定理的证明，令 $k,m \in \mathbb{N}$ 和 $f \in \mathrm{T}_k$。若$f \notin W^{m,\infty}$，则定理的结论显然成立。对于$f \in W^{m,\infty}$，我们有 $f = I^m f^{(m)}$。将不等式 (2.I) 应用于函数 $\varphi := f^{(m)}$，即可得到定理的结论，其中 $C_{k,m} = (D_{k,m})^{-1}$。只需指出函数 $I^m c_k'$ 使该不等式取等，且常数 $C_{k,m}$ 是最优的。□

引理的证明 2.E. 首先我们注意到集合 $Z' := Z \cap (-\pi, \pi)$ 是 $(-\pi, \pi)$的离散子集，因为 $(J_m - p)$ 在 $(-\pi, \pi)$上是解析的。此外，Z 在圆上关于对合 $x \mapsto -x$ 保持不变。若 m 是奇数，则 $\{0, \pi\} \subset Z$.

为证明引理的断言（i），我们对 m进行归纳。

设 $m = 1$ 和 $p \in \mathbf{P}_k^{\text{odd}}$。函数 $J_1 - p$ 在 Z' 中任意两个相邻点之间至少有一个临界点。$J_1 - p$ 至多有 $2k$ 个临界点，因为 $(J_1 - p)' = 1 - p'$ 是一个次数不超过 k 的非零三角多项式，在 S^1 上至多有 $2k$ 个零点。因此 $|Z'| \le 2k + 1$，从而 $|Z| \le 2k + 2$。

设 $m > 1$，则 $(J_m - p)$ 在圆上连续，并且在 $(-\pi, \pi)$ 上解析。它在 Z 中任意两个相邻点之间都有一个临界点（其中可能包括一点 $x = \pi$，在该点 $m = 2$ 的导数未定义）。但根据归纳假设，$(J_{m-1} - p')' = (J_m - p)'$ 至多有 $2k + 2$ 个零点，因此 $|Z| \le 2k + 2$。

为证明断言（ii），注意到在引理的假设下，函数 $(J_m - p)$ 恰好有 $2k+2$个零点，且至多有 $2k+2$个临界点。由于任意两个相邻零点之间必定严格存在一个临界点，因此没有多余的临界点，所有零点都必为单零点。□

引理 2.F 的证明。首先注意到，无论m 的奇偶性如何，m 中的任意两个插值多项式在 $\mathcal{P}_k$ 个不同点处的取值都相同，因此它们的差恒等于零。于是，只要插值多项式存在，它就是唯一的。

为证明存在性，我们分别讨论 m 为偶数和奇数的情形。设m 为偶数。对每个 $a \in A$定义

$$p_a(x) := \prod_{b \in A \setminus \{a\}} \big(\cos(x) - \cos(b)\big)$$

由于对于每个 $a \in A$，多项式 p_a 都是偶函数，且 $p_a(a) \neq 0$，因此我们可以将插值多项式写成

$$p(x) := \sum_{a \in A} J_m(a) \frac{p_a(x)}{p_a(a)}$$

对于奇数 m，考虑集合 $Z' := A \cup (-A) \cup \{\pi\}$，并对每个$z \in Z'$定义

$$p_z(x) := \mathbf{e}^{-\mathbf{i} \cdot k \cdot x} \prod_{\zeta \in Z' \setminus \{z\}} (\mathbf{e}^{\mathbf{i} \cdot x} - \mathbf{e}^{\mathbf{i} \cdot \zeta})$$

显然， $p_z(z) \neq 0$，我们定义插值多项式

$$p(x) := \sum_{z \in Z'} J_m(z) \frac{p_z(x)}{p_z(z)}$$

它将在 Z' 中所有点处取得所需的值。由于 $-p(-x)$ 和 $p(x)$ 在 Z' 中的各点处也将具有相同的值，因此 p 是奇实系数多项式，从而

$$p(0) = J_m(0) = 0$$
$$p(\pi) = J_m(\pi) = 0$$

因此， p 在 $A \cup (-A) \cup \{0, \pi\}$ 处插值 J_m。 □

3. The constants

这里给出一种计算这些常数的简单算法

$$C_{k,m} = \frac{1}{\left\| I^m C_k' \right\|_\infty}$$

对于 k、$m \in \mathbb{N}$。该算法的推导是初等的，且并不十分有启发性，因此不予列出。

在 $[0,1]$ 上递归地定义一个代数多项式序列，定义如下

$$P_0(x) := 1$$

$$P_{m+1}(x) := \begin{cases} \int_0^x P_m \mathrm{d}x & m \text{ is even} \\ \int_x^1 P_m \mathrm{d}x & m \text{ is odd} \end{cases}$$

定义常数 B_m 为

$$B_m := \begin{cases} P_m(0) & m \text{ is even} \\ P_m(1) & m \text{ is odd} \end{cases}$$

该数列至少有前 27 项$(B_m \cdot m!\ )_0^\infty$与数列 $A000111$、欧拉数或升降数相匹配，见 https://oeis.org/A000111。

命题 3.A. 对于 k， $m \in \mathbb{N}$

$$C_{k,m} := \left(\frac{2k}{\pi} \right)^m B_m^{-1}$$

特别是，

$$C_{k,1} = \frac{2k}{\pi} \quad and \quad C_{k,2} = \frac{8k^2}{\pi^2}.$$

□

References

[Atk91] Kendall Atkinson：《数值分析导论》。John Wiley & Sons，1991年。[Ber12] Serge Bernstein：《关于用给定次数的多项式对连续函数进行最佳逼近》。载于：《哈尔科夫数学会通讯》13.2（1912年），第49–144页。[Har47] Philip Hartman：《乘法序列与 T¨oplerian (L^2)- 基》。载于：（1947年）。[Nor39] DG Northcott：《周期函数与其导数之间的一些不等式》。载于：《伦敦数学会会刊》1.3（1939年），第198–202页。[Par83] JR Partington：《巴拿赫空间上厄米算子的预解式》。载于：《伦敦数学会会刊》2.3（1983年），第507–512页。[QZ19] Herv´e Queff´elec 和 Rachid Zarouf：《关于多项式的 Bernstein 不等式》。载于：《分析与数理物理》9（2019年），第1181–1207页。[Wei99] Yuchuan Wei：《三角函数分析》。载于：《计算机与应用数学》37.6（1999年），第37–56页。

Max-Plank Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Inselstrasse 22, 04103 Leipzig, Germany