arXiv:2302.10127v1 [math.GT] 20 Feb 2023

一种研究 Wall 型稳定化问题的原子化方法

Kyle Hayden

摘要。Wall 型稳定化问题研究奇异四维现象在稳定化操作下如何消失（例如，与 $S^2 \times S^2$ 取连通和）。我们为这类问题提出一种初等方法，构造可能在稳定化后仍保持奇异的奇异4-流形和打结曲面——其中包括闭单连通 4-流形情形下的例子。作为概念验证，我们证明该构造能够得到在（内部）稳定化后仍保持奇异的 B^4 中的奇异曲面；这一点可由普适 Khovanov 同调上的余边界映射检测。

我们还将针对曲面的这些 Khovanov 理论障碍，与其分支覆盖所得到的奇异4-流形所对应的 Floer理论对应物进行比较，并由此指出一条可能的桥梁：Lin 谱序列可将 Bar-Natan 同调联系到对合单极 Floer 同调。

1. 引言

在 [Wal64], Wall 证明，任何一对同伦等价的光滑闭单连通 4-流形 h均为 -余边界等价，并且在与 $k(S^2 \times S^2)$ 取连通和后微分同胚，其中 $k \geq 0$。所需稳定化的次数k衡量了 h-余边界的复杂度，从而体现了光滑结构之间距离的概念。Donaldson 对光滑 h-余边界猜想的反证，产生了奇异的闭单连通 4-流形对 [Don87], 这意味着必须允许 $k > 0$。反过来，理解 k 的可能取值，有助于量化四维中 h-余边界定理的失效程度。

Wall稳定化问题。 对于 $k \geq 1$，是否存在一对在与 $k(S^2 \times S^2)$作连通和后仍保持不同的异态闭单连通*4*-流形?

后续研究表明，Wall原则——异态现象在与 $S^2 \times S^2$ 作连通和后会变得不稳定——在多种情形下成立，包括所有紧致可定向光滑四流形 [Gom84]、异域打结曲面以及自微分同胚 [Qui86, Per86]。对于打结曲面，Baykur-Sunukjian [BS15] 还针对相关的内部稳定化概念建立了一个Wall型结果；内部稳定化是指添加一个嵌入的（且可能是打结的）把手，以增加打结曲面的亏格。最近，越来越多的进展表明，在许多情形下，一次稳定化并不足够 [Lin20, LM21, KMT22, Gut22, Kan22], ；同时也有研究确定了一次稳定化足以奏效的情形 [AKM$^+$19、AS21、RS22]。

本文提出一种策略，用于构造在稳定化后仍可能保持彼此不同的 4-流形异态对和打结曲面，包括闭、单连通的 4-流形（定理B）。我们的方法以某些构件为指导，这些构件应当出现在具有足够复杂临界点集的 h-余边中。作为概念验证，我们在 B^4 中构造了异域打结曲面，它们在一次内部稳定化后仍彼此不同，并可通过普适 Khovanov 同调的普适版本加以检测。

定理 A。对于所有整数 $g \geq 1$，存在成对异域打结的适当嵌入亏格为 g 的曲面，它们位于 B^4 中，并且在一次内部稳定化后仍保持异态；稳定化曲面在普适 *Khovanov* 同调上诱导不同的映射。

下面我们概述我们的构造、障碍，以及与 Floer 理论的潜在联系。

1.1. **拓扑构造。** 受塞理论启发 [Akb91、CFHS96、Mat96、Kir96]以及 Gompf 椭圆曲面的核 [Gom91], , 我们的目标是确定那些影响 h-余边复杂性的核心四维构件——随后，我们围绕这些原子级构件构造 4-流形；见§2。塞定理指出，若 X 和 X' 构成一对闭的单连通 4-流形异态对，那么存在一个紧可缩 4-流形 $C \subset X$ 及其上的一个对合 ∂C，使得从$\mathring{C}$ 中移除 X 并通过 ∂C 的对合将其重新粘合后，得到 X'。

沿 $C \subset X$ 进行的这一修改，也可以通过对 C 实施一系列手术来实现，其效果是交换代数对偶配对中的 1-把手和 2-把手。在 C 中此类配对的数量，给出了消解塞扭转所需稳定化次数的一个粗略上界。然而，如果不同把手对之间的几何链接不足，那么可以循环利用一份 $S^2 \times S^2$ ，用于实现多次 1-/2-把手交换。我们试图通过取多个软木，并将它们各自的 1-把手和 2-把手对彼此交错，来阻止这种循环利用。（在 §2中，我们将用h-余边界和 2-球面构形的语言重新表述这一点。）

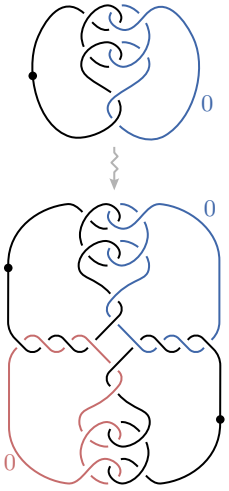


图 1

例 1.1。 图1 上方展示了正电子塞，出自[AM98], , 其中塞扭转对合通过绕 180° 垂直轴旋转来作用。下方则展示了由两个相互交错的正电子塞构造出的一个 4-流形 W 。尽管 W 本身并不是一个塞（因为它不可缩，其 $H_1 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$），但它是塞块，符合 [AY08] 的定义，并可用于构造更大的奇异 4-流形。 $\diamond$

通过改变链接方式以及 1-/2-把手对的数量，可以调整代数拓扑（例如实现可缩性），并增加预计需要的稳定化次数，从而消解扭转。此外，由于构造具有明确的显式形式，将这些带边界的紧致四流形嵌入闭四流形中，以便在闭合情形下构造候选例，也十分直接。

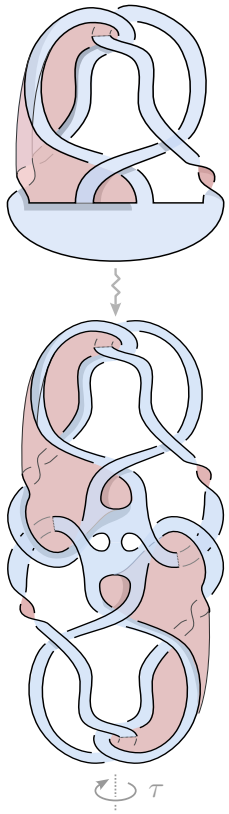


图 2

定理 B. *存在一对异态闭四流形，它们可通过沿着 4-流形 W （如图 1所示）进行扭转而彼此关联。*

类似的构造也适用于打结曲面；我们在曲面外部固定一种柄结构，并交换代数对偶的 1-把手与 2-把手对。等价地，我们通过一系列压缩逆操作和压缩，在曲面中交换对 0-手柄（即圆盘）与 1-把手（即带）。通过将曲面的多个副本相互交错排列，我们阻止这些交换逐一进行。

例 1.2。 图2 的顶部描绘了正电子圆盘，其双重分支覆盖是正电子塞 [Hay21]。将两个副本互锁并合并，得到一个切片圆盘 D ，其双重分支覆盖是 W 例1.1中的对象。施加旋转 τ 得到一个圆盘D' ，带有 $\partial D' = \partial D$；这些是定理A的构件。 $\diamond$

为了构造定理A中的奇异曲面，我们沿纽结$K = \partial D = \partial D'$ 附加额外的带，其方式旨在消除拓扑同痕的障碍，同时保留来自 Khovanov 同调的光滑障碍。我们利用 Conway-Powell [CP20]（下文定理4.4 ）的结果，证明所得的亏格1曲面彼此拓扑同痕；关键的技术步骤是计算等变交形式。随后通过边界连通和得到更高亏格的例子。

一个自然的问题是，定理B中构造的奇异4-流形，在通过 $S^2 \times S^2$进行稳定化后是否仍然彼此不同。定理 A 的证明提供了肯定的证据，因为（标准的）曲面的内部稳定化对应于其双重分支覆盖的外部稳定化。在 §1.3中，我们将进一步考察这种联系，并提出通过 Lin 谱序列搭建桥梁，将 Bar-Natan 同调与对合单极 Floer 同调联系起来 [Lin19]。

注 1.3. 上述提及的若干近期突破是在本项目进行期间取得的（参见 [Hay20]），因此我们会在 §1.3末尾作一些比较。特别是，定理 A 与 Guth 的工作最为相似 [Gut22], ，后者利用缆结操作构造了奇异曲面（包括圆盘） B^4 ，使其经过任意指定次数的内部稳定化后仍彼此不同。

1.2. **Bar-Natan 同调给出的障碍**。 Khovanov 原始理论中的余边界映射已被证明能够有效地区分 B^4 [SS21、HS21、HKM+22]中的纽结曲面；当显式的 Floer 理论计算复杂到难以进行时，这些映射似乎尤其适用。定理 A的证明依赖于 Khovanov 同调在 $\mathbb{F}[H]$上的普适版本所具备的额外结构，其中 $\mathbb{F}$ 是一个域，而 H 是一个形式变量。我们的方法使用 H-挠阶的概念，该概念见于$\widetilde{\ }$（约化）Bar-Natan 同调 BN；此前也曾使用类似概念研究解结数和带状距离，参见 [Ali19、AD19、Sar20、Guj20、ILM21]。

我们概述定理A的证明思路，并继续以圆盘 D 和 D' 为例：出于技术原因，考虑镜像并反转时间后的$\widetilde{\ }$圆盘 $-D$ 和 $-D'$，它们诱导余边界映射 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-D)$ 和 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-D')$。这些映射的像包含于 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-K)$，并由元素 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-D)(1)$ 和 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-D')(1)$ 生成。要区分底层的圆盘 $-D$ 和 $-D'$ ，只需证明它们之差

$$\delta = \widetilde{\mathrm{BN}}(-D)(1) - \widetilde{\mathrm{BN}}(-D')(1)$$

$\widetilde{\ }$是 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-K)$ 中的非零元素。为此，我们先在 Khovanov 原始的约化理论中进行相应计算，然后将结果提升到系数环为 $\mathbb{F}[H]$ 的 Bar-Natan 同调中。

接下来我们转向稳定化的曲面。内部稳定化的作用是将这些余边映射乘以变量 H 在 $\mathbb{F}[H]$ 中（参见引理3.3）。因此，我们还必须证明 $H \cdot \delta$ 非零。[1] 借助计算机计算$\widetilde{\ }$，我们得以证明，所有与 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-K)$ 双分次相同的非零元素δ 在乘以 H后仍然存活，从而完成论证。[2]

[1]对于 Lee 同调中的类似 X 作用，Sarkar 指出这类元素具有非平凡的勒索阶。[2]对于 Bar-Natan 同调中的这一 H 作用，我们称这一双分次为非平凡的挠元囿积者。

1.3. 与 Floer 同调的联系和比较。In [OS05], Ozsv´ath-Szab´o 建立了一个谱序列，将链环 $L \subset S^3$ 的约化 Khovanov 同调 Kh(L) 与其镜像的双重分支覆盖$\Sigma(-L) = \Sigma_2(S^3, -L)$的 Heegaard Floer 同调联系起来。后续研究建立了多种类似的谱序列，将 Khovanov 型链环同调与 Floer 型理论联系起来。特别地，Lin[Lin19] 建立了一个谱序列，其起始项是链环的 Bar-Natan 同调在 $\mathbb{F}_2[H]/H^2$上的截断版本，记作 $\widetilde{\mathrm{BN}}_2(L)$；其目标是双重分支覆盖 $\Sigma_2(S^3, -L)$在 $\mathbb{F}_2[Q]/Q^2$上的对合单极 Floer 同调，记作 $HMI(\Sigma(-L))$。此外，令 $H = Q$后，这是一个 $\mathbb{F}_2[Q]/Q^2$-模的谱序列。

在定理A 的证明中，用稳定化曲面区分 $\widetilde{\mathrm{BN}}(\cdot)$ 在 $\mathbb{F}_2[H]$ 上所诱导的余边界映射的论证，可以很容易地调整为证明这些稳定化曲面在截断理论 $\widetilde{\mathrm{BN}}_2(\cdot)$ 上诱导不同的映射。这暗示了使用对合单极 Floer 同调证明稳定化塞 $W\#(S^2 \times S^2) = \Sigma_2(B^4, D\#T^2)$ 仍然非平凡的可能性。

问题 1.4。由圆盘所诱导的映射之差给出的类 $\delta_2 \in \widetilde{\mathrm{BN}}_2(-K)$ 能否存留到页面 $E^\infty \cong HMI(\Sigma(K))$?

我们预期，类 $\delta_2 \in \widetilde{\mathrm{BN}}_2(-K)$ 在 $HMI(\Sigma(K))$ 中有一个对应物，或许由单极 Floer 同调中的两个特定接触不变量之差给出。特别地，W 具有一个 Stein 结构（如图14所示），该结构在 ξ 上诱导出一个接触结构 ∂W，而定理 B 证明中的论证表明，ξ 和$\xi' = \tilde{\tau}_*(\xi)$ 在单极 Floer 同调中诱导出不同的接触元。如果这一差异在乘以 Q后仍然存留，则稳定化塞是非平凡的。

注 1.5. (a) 我们并不一定认为类 $\delta_2 \in \widetilde{\mathrm{BN}}_2(-K)$具有接触几何解释，例如它可以是两个横截代表 K的 Plamenevskaya 型不变量[Pla06, LNS15] 之差。事实上，存在一个自然的横截代表 K，它来自将 D 和 D' 实现为$B^4 \subset \mathbb{C}^2$ 中的复曲线片段，且其边界在 S^3 中横截同痕；见图14。然而，$\Sigma(K)$上的诱导接触结构在同痕意义下是 $\tilde{\tau}$-等变的，因此不可能是 ξ 或 ξ'。

(b) 构造中所用的基本 4-流形§2 在研究四维 h余边界时会自然出现（参见 [Kir96]）。在 [Lad22], Ladu 研究了这类 4-流形的单极 Floer 同调，并将其称为“原始余柄”；这或许可以成为理解我们这些 4-流形的对合单极 Floer 同调的起点。

最后，我们比较我们的例子与 [Gut22]中的例子。Guth 的主要例子是取正电子圆盘的（p，1）缆结（图2上方），其中 $p \geq 2$。对于系数为HFK^-的结 Floer 同调 $\mathbb{F}_2[U]$，内部稳定化的作用是乘以 U，而 Guth 证明，他的曲面诱导的余边界映射，其像由HFK^-中的元素生成，且这些元素之差具有 U-挠阶 $p-1$。这种方法有若干优点，包括能够检测较大的稳定化距离，并且可灵活地推广到许多对圆盘的缆结 [GHKP]。我们的 Khovanov 理论障碍不易应用于此类圆盘。例如，正电子结的（2，1）缆结的 Bar-Natan 同调的 H-挠阶等于 1，与正电子结本身相同。另一方面，已知 Guth 的稳定化曲面的分支覆盖是微分同胚的 [GHKP]；这些论证不适用于我们的例子。

一种乐观的看法是，这些差异并非 Khovanov 型不变量的缺陷，而是 Khovanov 同调中的挠阶衡量的现象不同于 U-挠阶HFK^-中的情形。事实上，Lin 谱序列表明，Bar-Natan 同调中的 H-挠与对合 Floer 理论中的 Q-挠相类似，例如，Kang 最近证明可缩 4-流形仅做一次稳定化并不足够时所用的Q-挠 [Kan22]。这一预测与 Khovanov 同调中 H-挠相对罕见的情况相符（这可从难以找到骑士步猜想的反例看出 [MM20]，以及在解结数和带状距离方面得到的较弱界限看出 [Ali19，AD19，Sar20，Guj20，ILM21]，相比之下，例如[JMZ20]）。

致谢。作者感谢 John Baldwin、Onkar Gujral、Mikhail Kho- vanov、Siddhi Krishna、Lukas Lewark、Ciprian Manolescu、Lisa Piccirillo、Isaac Sundberg 和 Melissa Zhang 提出的建议、所做的合理性核查以及富有启发性的交流。也感谢 BIRS-CMO 及研讨会 利用量子不变量研究有趣拓扑 (22w5171) 的组织者，本项目的最后一块拼图正是在该研讨会上到位的。本项目的实验阶段得益于 Kirby Calculator [Swe 19] 和 `khoca`[Lew22]。此外，本研究还获得美国国家科学基金会 DMS-2243128 号资助。

2. 构造

2.1. **稳定化、 h-余边界与循环利用问题**。我们首先回顾：任意 h-余边界 M 在单连通 4-流形 X_0 与 X_1 之间都具有仅由 2-手柄和 3-手柄构成的柄结构（参见 [Wal64，Kir96]）。此外，我们可以安排这些手柄形成代数上（但非几何上）相消的 2/3-柄对，并令 n 表示此类柄对的数量。

将 5 维 2-柄附加到 $X_0 \times [0,\epsilon]$ 后，我们得到一个中间 4-流形 $X_{1/2} \subset M$，它可以由 X_0 经过 n 次稳定化并添加 $S^2\times S^2$ 得到。事实上，附加一个 5 维 2-柄在 4 维中的效果相当于沿环路手术。由于 X_0 是单连通的，该环路是平凡的，因此手术会产生一次添加 $S^2\times S^2$ 的稳定化，或一次添加 $S^2\tilde{\times}S^2$ 的扭曲稳定化；但此处可以排除后一种情况 [Wal64，第 147] 页。将 M 上下翻转会交换 2-柄和 3-柄的作用，因此类似的论证表明，$X_{1/2}$ 也可以由 X_1 经过 n 次稳定化得到。由此可得 $X_0\#n(S^2\times S^2) \cong X_1\#n(S^2\times S^2)$。不过，稳定化数的这个朴素上界通常可以通过“循环利用”一个 $S^2\times S^2$ 直和项来降低，如下所示。

例2.1。**（a）**如下图4所示，正电子塞在经过一次稳定化后与其扭转体（相对于边界）微分同胚。如果奇异4-流形 X_0 和 X_1 是通过沿着 X_0中两个不相交的正电子塞副本进行扭转而得到关联的，那么存在一个从 X_0 到 X_1 的 h-余边，其中含有两个2-/3-柄对，这意味着 $X_0\#2(S^2\times S^2) \cong X_1\#2(S^2\times S^2)$。但是，由于这些软木彼此不相交，我们可以为两个软木共用一个单独的$S^2\times S^2$ 和项，这意味着 $X_0\#S^2\times S^2 \cong X_1\#S^2\times S^2$。

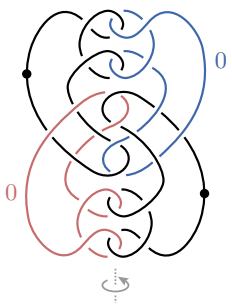


图3

(b) 作为一个更微妙的例子，读者不妨证明，只需一次稳定化，就能使图3中的软木体变为平凡。

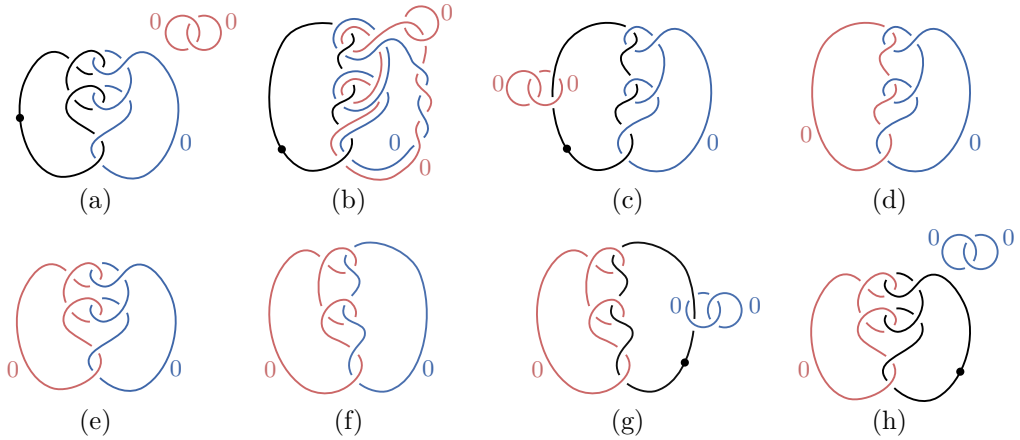


图4. 使用 $S^2 \times S^2$ 稳定化后的正电子软木扭转。(b) 由 (a) 经手柄滑动得到。(c) 通过在小型零框架经向2-手柄上进行手柄滑动来实现交叉变换。(d)–(f) 彼此同痕。(g)–(h) 的构造方式与 (a)–(d) 类似，但顺序相反。

回到上述设置，注意 $X_{1/2}$ 包含两组彼此不相交的光滑嵌入的 2-球面：$\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ 和 $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$，它们分别是 M 中 3- 手柄的附着球面和 2- 把手的腰带球面。（我们假设这些球面彼此横截。）当球面构形$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$不够复杂时，便有循环利用的机会，使我们能够重新排列手柄，从而在所有 2-把手尚未附着完毕之前，就有一些 3-手柄出现。

2.2. **将手柄保持在一起。** 为了构造一对在稳定化后仍可能彼此不同的4-流形，我们从一个足够复杂的球面构型的邻域$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$开始（这与塞定理的证明中 [Kir96]所用的方法大致相同），然后通过附加4维手柄将其扩展为一个4-流形 $X_{1/2}$。通过将5维3-手柄附加到 $X_{1/2} \times [-\epsilon, \epsilon]$ 上，沿着$\mathcal{B} \subset X_{1/2} \times \{-\epsilon\}$ 以及$\mathcal{A} \subset X_{1/2} \times \{\epsilon\}$，我们构造出两个4-流形 X_0 与 X_1之间的余边。这两个4-流形分别通过沿 $X_{1/2}$ B中的球面和$\mathcal{B}$ 以及$\mathcal{A}$中的球面进行外科手术而得到。

注2.2. 这些球面构型的邻域是球面上的圆盘丛的铅接；其把手图可利用 [GS99，§6。1]。在把手图层面， X_0 和 X_1 可通过将与 $X_{1/2}$ 相关联的 0-框架 2-把手$\mathcal{B}$ 和$\mathcal{A}$分别转换为带点的1-手柄曲线而得到。

例2.3. 图5左侧示意性地描绘了一种这样的 2-球面构型。（不过，这里我们并未安排使得 $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$。）图5 右侧给出了该球面构型邻域 N 的把手图。例1.1 中的 4-流形 W 是通过沿图5中带点的1-手柄曲线的子午线附加若干 0-框架和 (-1) 框架 2-把手而得到的，随后再对 2-球面 B_1 和 B_2进行外科手术。

我们指出，如果不确保$\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 中的球面满足 $A_i \cdot B_j = \delta_{ij}$，则上文构造的5维余边甚至不一定是同调余 bordism。然而，放宽这些条件可以得到一大类有用的4-流形。

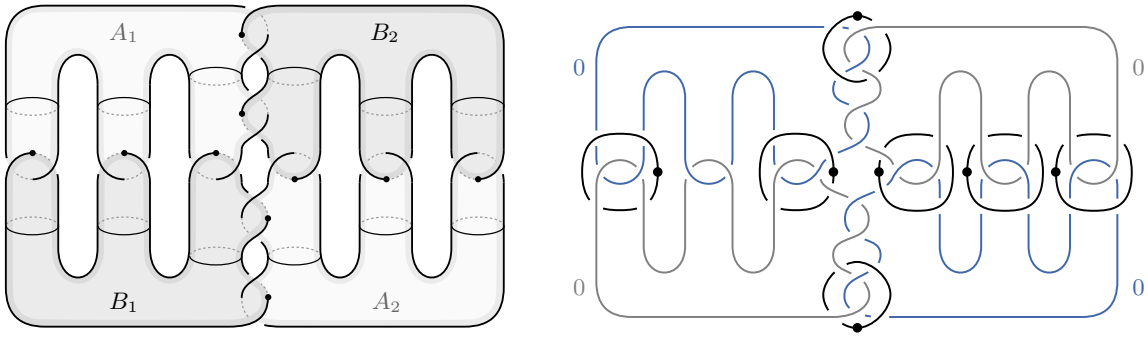


图5。左侧为相交的 2-球面构型示意图。右侧为该构型邻域的把手图。

2.3. 打结曲面。对于4-流形 X中的打结曲面 Σ，我们可以考察外部稳定化（即将 Σ 包含到 $X\#S^2\times S^2$中）或内部稳定化的影响。如 [BS15, §2.1], 中所述，后者包括在 X 中选取一个嵌入的三维1-把手 $h\approx[-1,1]\times D^2$，使其仅沿 $\{\pm1\}\times D^2$与 Σ 相交，然后从 Σ 中移除 $\{\pm1\}\times\mathring{D}^2$ 并粘合上 $[-1,1]\times\partial D^2$。在本文中，我们只考虑保持可定向性的内部稳定化。正如 [BS15], 所示，4-流形 X 中任意一对同调曲面 Σ_0 和 Σ_1，只要它们的亏格相等，在经过某些 $n\geq 0$次内部稳定化后便会变成光滑同伦的。

稳定化曲面 $\Sigma_{1/2}\subset X$ 包含两组不同的 n 不相交的简单闭曲线，它们分别界定了 $X\backslash\Sigma_{1/2}$中的压缩圆盘；沿其中一组曲线进行压缩得到 Σ_0，而沿另一组曲线进行压缩得到 Σ_1。为了防止管的循环利用，需要确保：一旦已经 沿其中一组曲线进行了压缩，就无法再对另一组曲线进行任何压缩。正如§1中所述，可以通过直接将成对的曲面相互交锁来构造明确的例子；也可以将它们实现为分支覆盖的分支集 $X\to B^4$，其中 X 是一个按 §2.2中的方式构造的 4-流形。

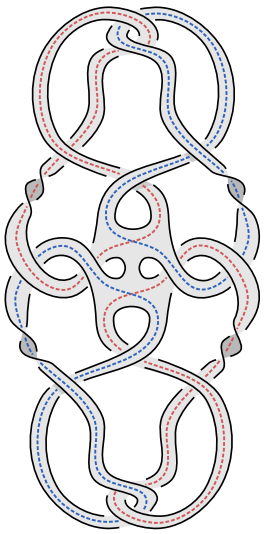


图6

例2.4。 图 D 和 D' 中的圆盘 2是通过沿图 6 中所示的两组曲线，对图中的亏格-2曲面进行压缩得到的。请注意，每条红色曲线对应的自然压缩圆盘都与 两条 蓝色曲线的压缩圆盘发生扣结交叉，反之亦然，从而阻止了任何明显的管的循环利用。

3. 来自 Bar-Natan 同调的输入

背景资料请参阅 [BN05]，这里我们回顾一些必要的细节。我们的讨论大体遵循 [KWZ 19],，包括他们的记号和约定。全文中，我们用 $\mathbb{F}$ 表示域 $\mathbb{F}_2$，用 H 表示形式变量。在环 $\mathbb{F}[H]$上，Bar-Natan复形 $\widetilde{\mathrm{CBN}}(K)$满足以下结构定理（其中 $h^aq^b\,\mathbb{F}[H]$表示 $\mathbb{F}[H]$ 的一个双分次副本，其生成元 $1=H^0$ 位于双分次（a，b））：

定理 3.1。对于任意纽结 $K \subset S^3$ 和任意域 $\mathbb{F}$，复形 $\widetilde{\mathrm{CBN}}(K)$ 与如下形式的复形双分次链同伦等价

$$h^0q^s\,\mathbb{F}[H] \bigoplus_i \left[h^{a_i-1}q^{b_i-2m_i}\mathbb{F}[H] \xrightarrow{H^{m_i}\cdot} h^{a_i}q^{b_i}\mathbb{F}[H]\right] \tag{1}$$

对于唯一确定的 a_i、$m_i \in \mathbb{Z}$，其中 $m_i > 0$ 且 s、$b_i \in 2\mathbb{Z}$。

微分在塔 $h^0q^s\mathbb{F}[H]$ 上为零，并且在其余直和项上的定义如图 7 所示（其中 η 和 ξ 分别表示 $h^{a-1}q^{b-2m}\mathbb{F}[H]$ 和 $h^aq^b\mathbb{F}[H]$的生成元）。

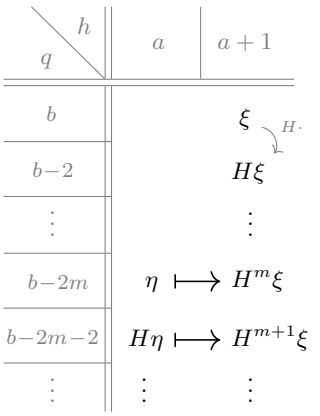


图 7。 公式（1）中的映射。

特别地，$\mathrm{BN}(K)$ 分解为一个塔$h^0q^s\,\mathbb{F}[H]$ 以及 H-挠直和项 $h^{a_i}q^{b_i}\mathbb{F}[H]/(H^{m_i})$。

$\widetilde{\mathrm{CBN}}(K)$ 将 CBN(K) 除以子复形 $H\cdot\mathrm{CBN}(K)$（即令 $H=0$）所得的复形具有平凡微分，其同调给出 Kh(K)。

余边界映射。 我们的论证依赖于 Bar-Natan 理论的函子性：定向链环协边 $\Sigma\colon K_0 \to K_1$ in $S^3\times[0,1]$ 诱导出一个双分次链映射

$$\widetilde{\mathrm{CBN}}(\Sigma) : \widetilde{\mathrm{CBN}}(K_0)_{(h,q)} \to \widetilde{\mathrm{CBN}}(K_1)_{(h,q+\chi(\Sigma))}$$

它诱导出一个同态 BN(Σ) : $\mathrm{BN}(K_0) \to \mathrm{BN}(K_1)$ [BN05]。映射 BN(Σ) 在对 ±1 进行的微分同胚下不变（相差一个 $S^3\times[0,1]$，且这些微分同胚保持 $\partial\Sigma$ 集合不变（BN05、MWW19]）。事实上，链映射 CBN(Σ) 的同伦类型本身是不变的（至多相差一个符号），因此我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{CBN}}(K_0) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{CBN}}(\Sigma)} & \widetilde{\mathrm{CBN}}(K_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \widetilde{\mathrm{CKh}}(K_0) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{CKh}}(\Sigma)} & \widetilde{\mathrm{CKh}}(K_1) \end{array} \tag{2}$$

它在同调层面诱导出相应的交换图。我们不会直接计算 Bar-Natan 理论中的余边界映射，而是在 Khovanov 同调层面进行计算，并在需要时将论证 $\widetilde{\ }$ 提升到 Bar-Natan 理论中。Bar-Natan 理论在 CKh 上诱导的映射与 [Jac04]中的映射一致。关于这些链级映射，读者还可参阅 [HS21]中的表格。

备注 3.2。虽然约化理论提供了一些便利，但它不会直接为余边 $\emptyset \to K$ 或 $K \to \emptyset$赋予映射。我们将采用标准的补救方法：设 $K \subset S^3$ 为一个以光滑曲面 $\Sigma \subset B^4$为边界的纽结。任取一点 $p \in \mathring{\Sigma}$，并固定一个以 p为中心的小 4-球 V，使得对 $(V, \Sigma\cap V)$ 与由 (S^3, U) 界定的标准对 (B^4, D^2) 微分同胚。在 $B^4\setminus \mathring{V}$ 与 $S^3\times[0,1]$之间固定一个识别（其在 $\partial B^4 = S^3\times\{1\}$ 上限制为恒等映射），便得到一个关联的穿孔协边 $\Sigma\setminus \mathring{D}^2$，它位于 $S^3\times[0,1]$ 中，从平凡结 $U \subset S^3\times\{0\}$ 到纽结 $K \subset S^3\times\{1\}$。我们将关联的余边映射 $\widetilde{\mathrm{CKh}}(\Sigma\setminus \mathring{D}^2) : \widetilde{\mathrm{CKh}}(U) \to \widetilde{\mathrm{CKh}}(K)$ 记为 $\widetilde{\mathrm{CKh}}(\Sigma)$。

尽管构造中的不同选择可能产生从 U 到 K 的 $S^3\times[0,1]$ 中不同的穿孔协边，但它们在保持 $S^3\times\{1\}$逐点不变的 $S^3\times[0,1]$ 的微分同胚意义下是一致的。 $S^3\times\{0\}$ 的微分同胚可能是非平凡的，但根据 Cerf定理，它与恒等映射同痕；因此，其诱导映射会因先与由取 U 回到自身的 S^3 的同痕所诱导的 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(U)$ 的自同构复合而有所不同，而这恰好由 $\pm\mathbb{1}$ 给出。

最后，我们回顾内部稳定化对这些余边界映射的影响：

引理 *3.3*（参见 [*Ali19*，推论 *2.3*]，[*LS22*，命题 *6.11*]）。给定一个从 K_0 到 K_1的余边 Σ，设 Σ' 是通过使用 $S^3\times[0,1]$中的一条弧对 Σ 进行稳定化后得到的余边，该弧的两个端点位于 Σ 的同一个分支上（且其内部与 Σ不相交）。$\widetilde{\mathrm{BN}}$由 Σ' 诱导的映射满足 $\widetilde{\mathrm{BN}}(\Sigma') = (2x-H)\cdot\widetilde{\mathrm{BN}}(\Sigma) \equiv H\cdot\widetilde{\mathrm{BN}}(\Sigma)$ over $\mathbb{F}_2[H]$。

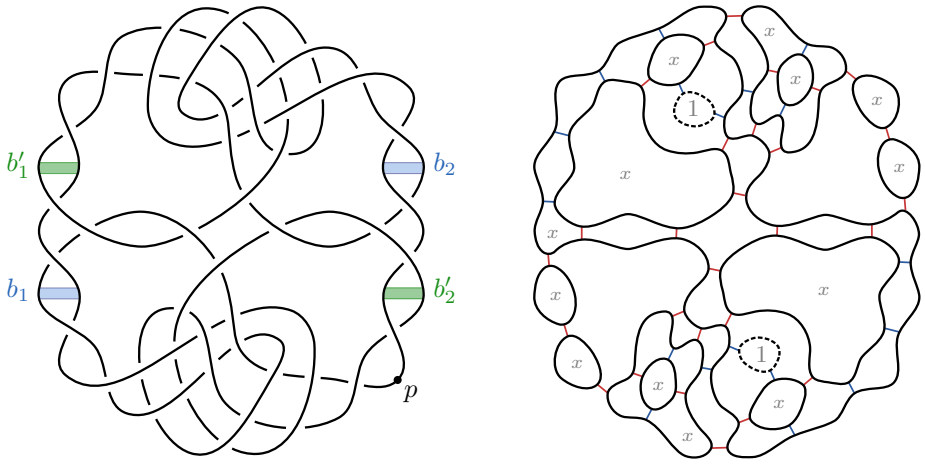
4. 内部稳定化后区分曲面

4.1. **底层圆盘**。现在我们回到圆盘 D 和 D'，它们由纽结K 界定，该纽结来自图 2 中 §1。为方便起见，我们采用图 K 左侧所示的稍加简化的示意图 8，其中蓝色带对应圆盘 D，绿色带对应 D'。（如有需要，读者可将此作为 K 及其切片圆盘的新定义。）

命题 4.1。圆盘 D 和 D' 诱导出不同的映射 $\widetilde{\mathrm{BN}}(D)\neq\widetilde{\mathrm{BN}}(D')$。

证明。首先，移除 $D\subset B^4$ 绝对极小值处的一个小邻域，从而得到一个从 $S^3\times[0,1]$ 到 $-K$ 的同伦 $-U$，如注记 3.2 所述。它对应的链环余边电影以 K 上的一对鞍点变换开始，使用图 b_1和 b_2 中的蓝色带8。完整的链环余边电影的关键步骤展示在图 9的第一行和第三行中。（注意，约化理论需要选择一个基点；我们在图 p 8 中将其记为 p，并在整个同伦过程中保持不变。）

图 8 右侧展示了该图的一个标记平滑。容易验证它是一个圈，因为所有 0-分辨弧（以红色显示）都连接不同的 x-标记$\widetilde{\text{圆}}$。将所得同调类记为 $\phi\in\mathrm{Kh}(K)$。图 9 追踪了ϕ 在由与圆盘 $K\to U$ 相关的同伦 D所诱导的映射下的像，表明$\widetilde{\text{被映射为}}$ $\mathrm{Kh}($ ϕ 中的一个生成元$U)\cong\mathbb{F}_2$。



$\widetilde{\text{图8。纽结}}$ K 的简化示意图，以及一个圈 $\phi\in\mathrm{Kh}(K)$。

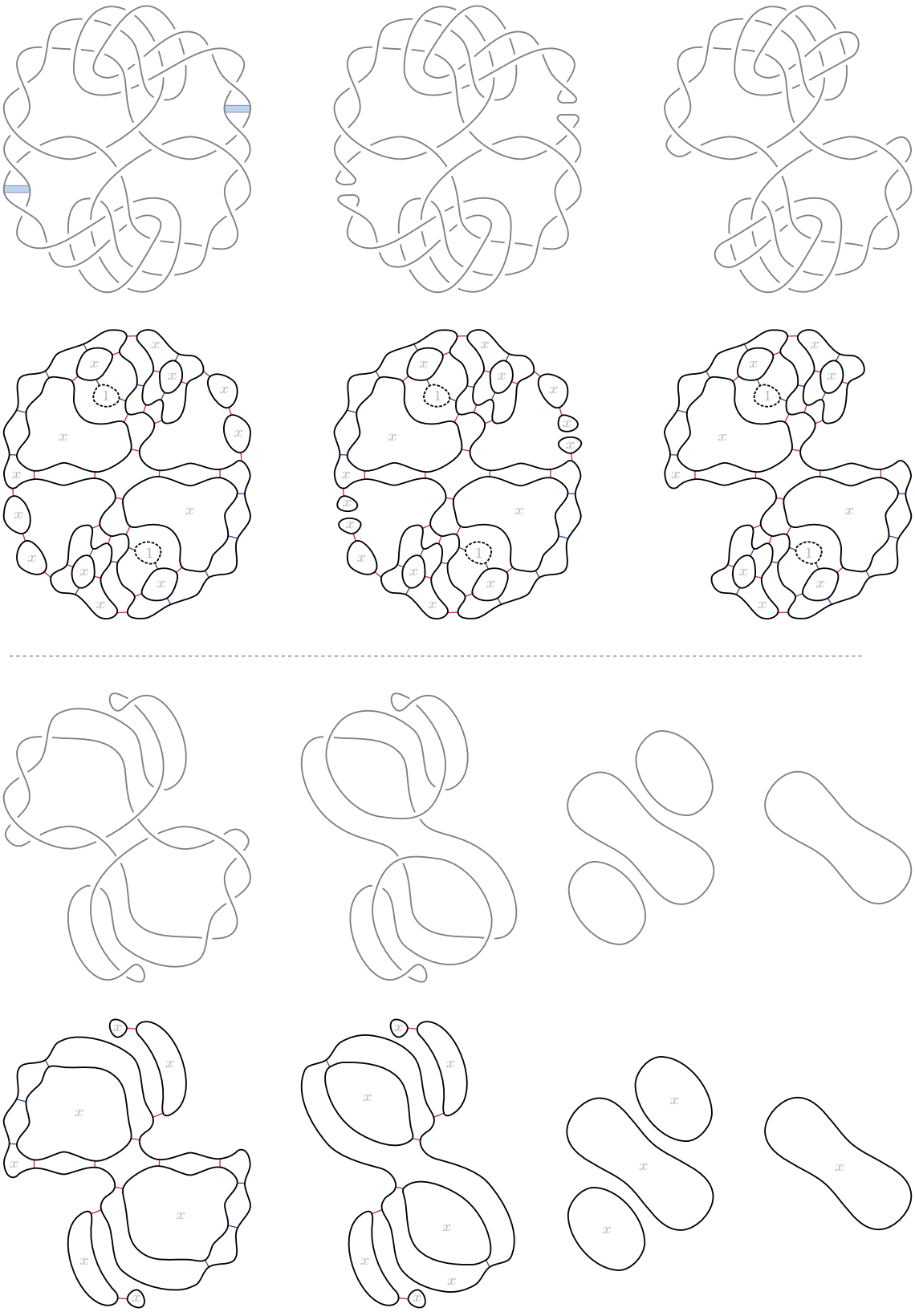


图9. 跟踪由圆盘 D 诱导的映射下的元素 ϕ 。

另一方面，与 D' 相关的同伦对应的电影以一对鞍点开始，分别对应图 b_1' 和 b_2' 中的带 8。这些鞍点变换诱导的链映射会合并 x中标记不同的圆 ϕ，因此 Kh(D') 映射 ϕ 为零。□

我们现在将这一结果推广到 Bar-Natan 理论，在该理论中，考察非平凡的 H-挠的作用，可以得出更多结论：

命题 4.2。稳定化圆盘诱导不同的映射 $H\cdot\mathrm{BN}(D) \neq H\cdot\mathrm{BN}(D')$。

证明。为方便技术处理，我们将使用由 $-D$和 $-D'$ 围成的镜像反向时间圆盘 $-K$。（在图示中，我们将此反射视为沿页面所在平面进行。）这足以证明该结论，因为这些圆盘诱导的映射与 D 和 D' 诱导的映射互为对偶（其精确含义将在下文讨论：[Kho00, §7.3]，适用于 Khovanov 原始理论；或 [LS22，引理 65]，适用于 Bar-Natan 理论）。特别地，由命题 4.1，有 Kh($-D$) $\neq$Kh($-D'$)。

我们将此提升到 Bar-Natan 理论中。为此，令 $\xi \approx H^0$ 表示 $\widetilde{\mathrm{BN}}(-U) \cong \mathbb{F}_2[H]$的生成元。由于 $\pi_*(\xi)$ 生成 Kh($-U$)，命题 4.1 表明

$$\widetilde{\mathrm{Kh}}(-D)(\pi_*(\xi)) - \widetilde{\mathrm{Kh}}(-D')(\pi_*(\xi)) \neq 0.$$

由（2）诱导的同调上的交换图继而表明

$$\pi_*\left(\widetilde{\mathrm{BN}}(-D)(\xi) - \widetilde{\mathrm{BN}}(-D')(\xi)\right) \neq 0 \implies \delta := \widetilde{\mathrm{BN}}(-D)(\xi) - \widetilde{\mathrm{BN}}(-D')(\xi) \neq 0.$$

根据引理 3.3，稳定化的效果是乘以 H。因此，要区分这些稳定化圆盘诱导的映射，只需证明 $H\cdot\delta$ 非零。为此，我们使用程序 *KnotJob* [Sch21], 来计算 Kh($-K$) 以及 Bar-Natan–Lee–Turner 谱序列，并输入 $-K$ 的 Dowker-Thistlethwaite 编码：

```
-28 -84 14 -88 -16 4 -24 86 -78 -76 44 82 -12 -2 -92 -64 54 -52 72 -56 -34 68 20
-74 -38 60 -42 -62 50 -70 40 -32 -30 90 36 -58 -48 -46 -18 8 -6 26 -10 -80 22 66
```

谱序列的相关部分见表 1。注意，Kh($-K$)在双分次 (0, 0) 上的秩为二——事实上，它由元素 Kh($-D$)($\pi_*(\xi)$)和 Kh($-D'$)($\pi_*(\xi)$) 生成。双分次 (0, 0) 上所有非零元素都存活到谱序列的第二页；由此可见，BN($-K$) 必须具有 $h^0q^0\,\mathbb{F}_2[H] \oplus h^0q^0\,\mathbb{F}_2[H]/H^2 \oplus M$ 的形式，其中 M支撑在双分次 $(h,q) \neq$(0, 0) 上。因此，BN($-K$) 在双分次 (0, 0) 上的所有非零元素乘以 H 后仍然非零，故稳定化圆盘在 Bar-Natan 同调上诱导出不同的映射。□

在继续证明定理A之前，我们强调，圆盘 D 和 D'并非相对边界拓扑同痕。具体而言，它们对应的结群$\pi_1(B^4 \setminus D)$ 和 $\pi_1(B^4 \setminus D')$ 都不是无限循环群，并且可以通过所谓的周边映射（相对边界）区分这两个圆盘。这些映射定义在周边映射上，由将 π_1 包含到圆盘补空间中而诱导得到。尽管我们认为，对这些构造作出调整应当能够得到奇异圆盘对，但我们满足于通过附加带来消除相对边界拓扑同痕的障碍，从而构造出正亏格的奇异曲面。

第 1 页

q \ h	$\dots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
2									2
0						2		3	
-2						2	6		
-4				2	13	14			
-6			4	24	19				
-8		13	44	24					
-10		75	28						
-12		26							
$\vdots$									

第 2 页

q \ h	$\dots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
2									
0						2			
-2									
-4					1				
-6									
-8									
-10									
-12									
$\vdots$									

表 1. 图中纽结的约化 Bar-Natan–Lee–Turner 谱序列的前两页 K 取自图 8，展示了 $h \geq -4$ 和 $q \geq -12$。

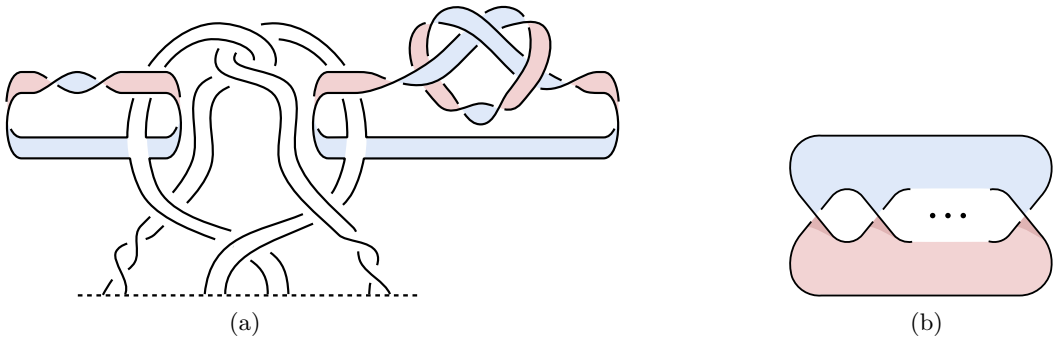
令 F 和 F' 表示 B^4 中由 D 和 D'分别附加带得到的亏格1曲面， K 如图10(a) 所示。我们将看到， F 和 F' 相对边界拓扑同痕，但光滑同痕的障碍依然存在（即使经过内部稳定化）。为了将这一结果推广到亏格不断增加的无限族曲面，我们令 $F_1 = F$和 $F_1' = F'$，然后令 F_g和 F_g'分别为 F_1和 F_1'与环面纽结 $g-1$的纤维曲面（亏格为$T_{2,}$ 作边界连通和所得的曲面，$2g-1$ 如图10(b) 所示。

为设定便 于描述以这些曲面为边界的纽结的便捷记号，我们令 $K_i = \partial F_i = \partial F_{i}'$.

Theo注 4.3. 固定一个整数 $g \geq 1$，并令 F_g、 $F_g' \subset B^4$ 为上文定义的曲面 $e.$

(a) 曲面 F_g 和 F_g' 在 ***Bar-Natan*** 同调上诱导出不同的映射，并且经过一次内部稳定化后仍然不同。(b) 曲面 F_g 和 F_g' 在 B^4中相对边界拓扑同痕，因此，对它们进行内部稳定化后得到的曲面也相对边界拓扑同痕。

该定理意味着 F_g 和 F_g' 在保持边界不变的意义下是异域打结的，并且经过一次内部稳定化后仍然如此，这将证明定理A。证明定理 4.3的 (a) 和 (b) 两部分所用的技巧颇为不同，因此我们将证明分开进行。



(a) (b)

图 10. (a) 向 K添加一对带。(b) $T_{2,\ k}$的标准 Seifert 曲面

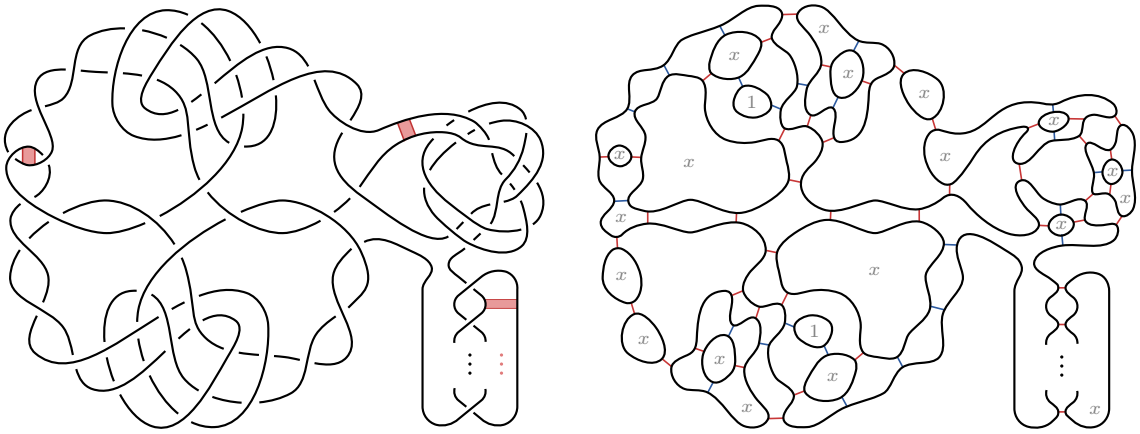


图 11。纽结 K_g 的简化图，以及一个圈 $\phi_g \in \widetilde{\mathrm{Kh}}(K_g)$.

定理 *4.3(a)*的证明。 我们先区分 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(F_g)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(F_g')$，并将它们视为映射 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(K_g) \to \widetilde{\mathrm{Kh}}(U) \cong \mathbb{F}_2$。我们将利用选定的圈 $\phi_g \in \widetilde{\mathrm{Kh}}(K_g) = \widetilde{\mathrm{Kh}}(K_1 \# T_{2,2g+1})$ 来区分它们。这个圈 ϕ_g 绘于图 11的右侧。注意，它位于双分次 $(0, 2g)$ 中。

曲面 F_g 和 F_g' 可通过从K 到 K_g附加一个亏格为g 的余边而从 D 和 D' 得到。从 K_g 到 K观察，这个初始余边可以通过一组图表的电影来表示：先进行 $2g$ 个鞍点变换（对应于图 11 左侧所描绘的带），随后进行一系列 Reidemeister I 型和 II 型移动。直接计算表明，相关的初等协边映射序列将 ϕ_g 映射到$\widetilde{\mathrm{Kh}}$图8中的元素 ϕ 。将这个初始余边映射 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(K_g) \to \widetilde{\mathrm{Kh}}(K)$与由 D 和 D'诱导的余边界映射 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(K) \to \widetilde{\mathrm{Kh}}(U) \cong \mathbb{F}_2$ 复合，我们得出：$\widetilde{\mathrm{Kh}}(F_g)(\phi_g) = \widetilde{\mathrm{Kh}}(D)(\phi)$生成 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(U) \cong \mathbb{F}_2$，而 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(F_g')(\phi_g) = \widetilde{\mathrm{Kh}}(D')(\phi) = 0$。

接下来，我们将其提升到 Bar-Natan 理论中，以便比较稳定化曲面所诱导的映射。与命题4.2的证明类似，采用镜像且时间反演的曲面会比较方便。也就是说，我们考虑曲面 $-F_g$ 和 $-F_g'$，将它们视为从 $-U$ 到 $-K_g$的余边。我们用来区分 $-F_g$ 和 $-F_g'$ 的稳定化所诱导的余边界映射的论证，在形式上与命题 4.2 中用于区分 $-D$ 和 $-D'$的稳定化的类似论证完全相同，因此我们只着重说明其中的变化。

对于 $g = 1$，纽结 K_1 具有以下 Dowker-Thistlethwaite 编码：

-8,58,-128,66,-4,56,54,52,124,-24,42,-28,122,-20,46,38,36,116,32,30,22,-120, 18,-40,-100,126,14,12,-64,2,-68, 10,-60,6,98,96,88,-106,-118,114,112,110,-90, 74,-94,108,-86,104,70,-50,-76,84,-72,92,-102,82,80,34,-78, -48, 26,-44,16,62

使用*KnotJob* [Sch21], ，我们计算 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(-K_1)$ 以及 Bar-Natan–Lee–Turner 谱序列。谱序列的相关部分见表2。注意$\widetilde{\mathrm{Kh}}(-K_1)$ 在双分次 $(0, -2)$ 中的秩为二——事实上，它由 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(-F_1)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Kh}}(-F_1')$ 的像张成。在双分次 $(0, -2)$ 中的所有非零元素都可以看出会存活到

第 1 页

q \ h	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
0									2
-2						2		6	1
-4					3	3	14	3	
-6				7	18	33	7		
-8			13	54	70	16			
-10		32	124	129	33				
-12		250	219	62					
-14		348	100						
⋮									

第 2 页

q \ h	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
0									
-2						2			
-4									
-6					1				
-8									
-10									
-12									
-14									
⋮									

表 2。 纽结 K （图 11）的约化 Bar-Natan–Lee–Turner 谱序列的前两页，其中展示了 $h \geq -4$ 和 $q \geq -14$。

$\widetilde{\text{BN}}$谱序列的第二页，因此我们可以看到 $\widetilde{\text{BN}}(-K_1)$ 必须具有 $h^0q^{-2}\,\mathbb{F}_2[H] \oplus h^0q^{-2}\,\mathbb{F}_2[H]/H^2 \oplus M$的形式，其中 M支撑在双分次 $(h,q) \neq (0,-2)$ 中。$\widetilde{\text{BN}}$由此可知，$\widetilde{\text{BN}}(-K_1)$ 在双分次 $(0,0)$ 中的所有非零元素在乘以 H 后仍然存活。特别地，我们得出结论：稳定化曲面诱导出不同的映射。

接下来，我们将其推广到更高亏格（$g \geq 2$），这需要对$\widetilde{\text{BN}}(-K_g) = \widetilde{\text{BN}}(-K_1 \# -T_{2,\,2g-1})$进行部分计算。由于环面纽结 $T_{2,\,k}$ 是交错的，因此可以利用 Jones多项式简单地计算它们的约化同调及相关谱序列。特别地，对于奇数 $k > 0$，负环面纽结 $-T_{2,\,k}$ 满足

$$\widetilde{\text{BN}}(-T_{2,k}) \cong h^0q^{1-k}\,\mathbb{F}_2[H] \;\oplus \left(\bigoplus_{i=-k}^{-2} h^i q^{-k+2i+1}\,\mathbb{F}_2[H]/H\right).$$

因此，对于满足 $g \geq 2$ 的 $k = 2g-1$，我们有

$$\widetilde{\text{BN}}(-T_{2,2g-1}) \cong h^0q^{2-2g}\,\mathbb{F}_2[H] \;\oplus \left(\bigoplus_{i=1-2g}^{-2} h^i q^{2-2g+2i}\,\mathbb{F}_2[H]/H\right)$$

$\widetilde{\text{BN}}$注意，$\widetilde{\text{BN}}(-T_{2,\,2g-1})$ 支持于“δ分次” $d := q - 2h = 2 - 2g$。根据约化 Bar-Natan 同调在连通和下的 K¨unneth 公式，我们有

$$\widetilde{\text{BN}}^{(0,-2g)}(-K_g) \cong \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} \left(\widetilde{\text{BN}}^{(j,\,-2g+j)}(-K_1) \otimes_{\mathbb{F}_2} \widetilde{\text{BN}}^{(-j,\,2-2g-j)}(-T_{2,2g-1})\right)$$

$\widetilde{\text{BN}}$由于 $\widetilde{\text{BN}}(-T_{2,2g-1})$ 仅支撑在双分次 $(h,q) \leq (0, 2-2g)$ 上，很容易看出，$\widetilde{\text{BN}}(-K_1 \# -T_{2,2g-1})$ 在双分次 $(h,q) = (0,-2g)$ 下的直和项中，唯一的贡献分别来自 $\widetilde{\text{BN}}(-K_1)$ 和 $\widetilde{\text{BN}}(-T_{2,2g-1})$ 在双分次 $(0,-2)$ 和 $(0, 2-2g)$ 下的直和项。

特别地，$\mathbb{F}_2$-子模 $\widetilde{\text{BN}}^{(0,-2g)}(-K_g)$ 张成了 $\widetilde{\text{BN}}(-K_g)$ 的一个与其同构的 $\mathbb{F}_2[H]$-子模

$$\left(h^0q^{-2}\,\mathbb{F}_2[H] \oplus h^0q^{-2}\,\mathbb{F}_2[H]/H^2\right) \otimes h^0q^{2-2g}\,\mathbb{F}_2[H] \;\cong\; h^0q^{-2g}\,\mathbb{F}_2[H] \oplus h^0q^{-2g}\,\mathbb{F}_2[H]/H^2$$

由此可知，双分次 $(h,\ q) = (0,\ -2g)$ 中的所有非零元素在乘以 H 后仍不为零，因此这些曲面在经过一次稳定化后仍保持不同。□

为了证明定理4.3(b)，我们需要研究与我们的曲面相关联的等变交形式——也就是说，曲面外部在 B^4中的无限循环覆盖上的交形式。尽管下文会回顾一些细节，但我们建议读者参阅 [Mil68]和 [CP20] 以了解相关背景。

为此，设 $S \subset B^4$ 表示一个连通的、适当嵌入的曲面，其外部$X = B^4 \setminus \mathring{N}(S)$ 具有 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$，并设 $\widetilde{X}$ 表示 X 的无限循环覆盖。群 $H_2(\widetilde{X};\mathbb{Z})$ 可视为 $\Lambda = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ 上的模；为方便起见，我们将其记作 $H_2(X;\Lambda)$。等变交形式 λ_X 是如下配对

$$\lambda_X : H_2(X;\Lambda) \times H_2(X;\Lambda) \to \Lambda \qquad \lambda_X(\alpha,\beta) = \sum_k \left(\alpha \cdot t^k\beta\right) t^k,$$

其中 $\alpha \cdot t^k\beta$ 是同调类 α 与（平移后的）同调类 $t^k\beta$之间的带符号交数。为方便起见，我们有时将其记为 λ_S而不是 λ_X。我们将使用 [CP20中的以下结果，定理 7.5.(2)]:

定理 4.4 (Conway-Powell)。设 S、$S' \subset B^4$ 是由 *Alexander* 多项式平凡的纽结 $\Delta \equiv 1$ 所围成的、适当嵌入的亏格 *1* 曲面。若 λ_S 和 $\lambda_{S'}$ 等距，则 S 和 S' 相对边界拓扑同痕。

定理 *4.3(b)* 的证明。只需证明亏格 1 曲面 F_1 和 F_1' 相对边界拓扑同痕，因为高亏格曲面 F_g 和 F_g'（其中 $g \geq 2$）是通过向 F_1和 F_1'附加一组相同的带而得到的：$K_1 = \partial F_1 = \partial F_1'$。

我们先构造曲面外部 $X = B^4 \setminus \mathring{N}(F_1)$ 及其~无限循环覆盖 X 在图12 和13中对应的把手图。（一些细节见图注。）容易验证 $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$。图13 中的标记将用于描述 $H_2(X;\ \Lambda)$ 的一个基以及 λ_X 的一个表示。

作为中间步骤，令 X_0 表示这样得到的 4-流形：对对应于 α 和 β 的 1-把手的腰带球面进行外科手术，即将它们视为 0-框架 2-把手。注意，这会在 X_0 中产生一对自交数为零的嵌入的 2-球面，而通过对这些球面进行外科手术，可以从 X_0 恢复 X。直接计算（通过计算图中的链接数完成）表明，$H_2(\tilde{X}_0;\Lambda) \cong \Lambda^6$ 上的等变交形式由下面的矩阵 Q_0 给出：

$$Q_0 = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \zeta \\ \eta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} t^k\alpha & t^k\beta & t^k\gamma & t^k\delta & t^k\zeta & t^k\eta \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -t^{-1}+1 & 1 & 0 & t^{-1} \\ 0 & 0 & -1 & t^{-1}-1 & 0 & 0 \\ 1-t & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1+t & 0 & 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{-1}+1 & (t^{-1}-2+t) & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & 0 & (0) \end{bmatrix} \end{array}$$

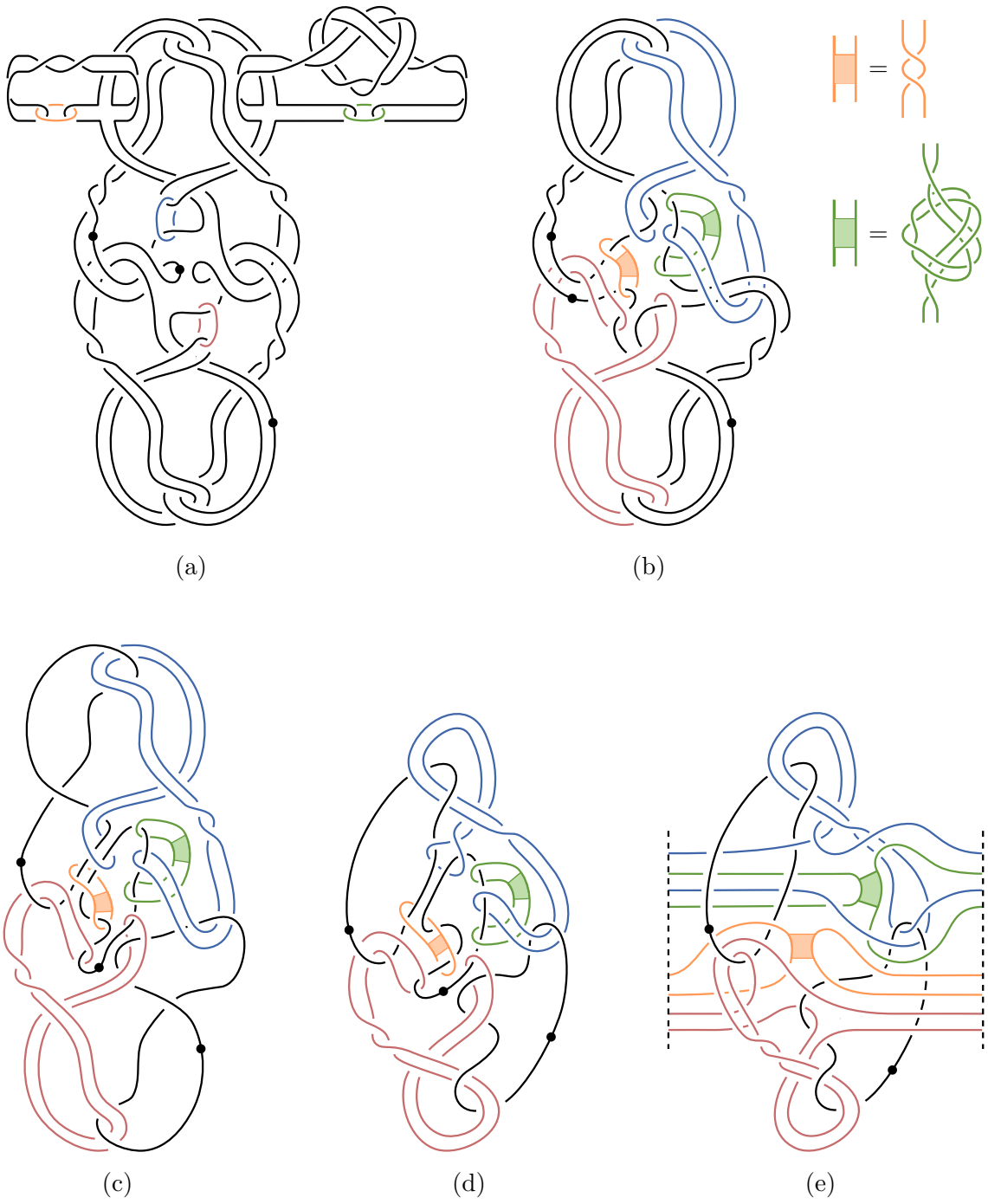


图 12。对 $F_1 \subset B^4$ 外部的把手图进行操作。（所有未加点的曲线均表示 0-框架的 2-把手。）从 (a) 开始，通过简化点线分量、同时使 2-手柄曲线变得更复杂，得到 (b)；橙色和绿色的 2-把手分别在实心方框处将弦编成负全扭转和 0-框架三叶结。我们将最大的点线曲线分别滑过两条较小的曲线，得到 (c)。进一步的同痕变换得到 (d)。在 (e) 中，我们沿内侧点线分量剪开图，以构造曲面外部的无限循环覆盖的基本域。

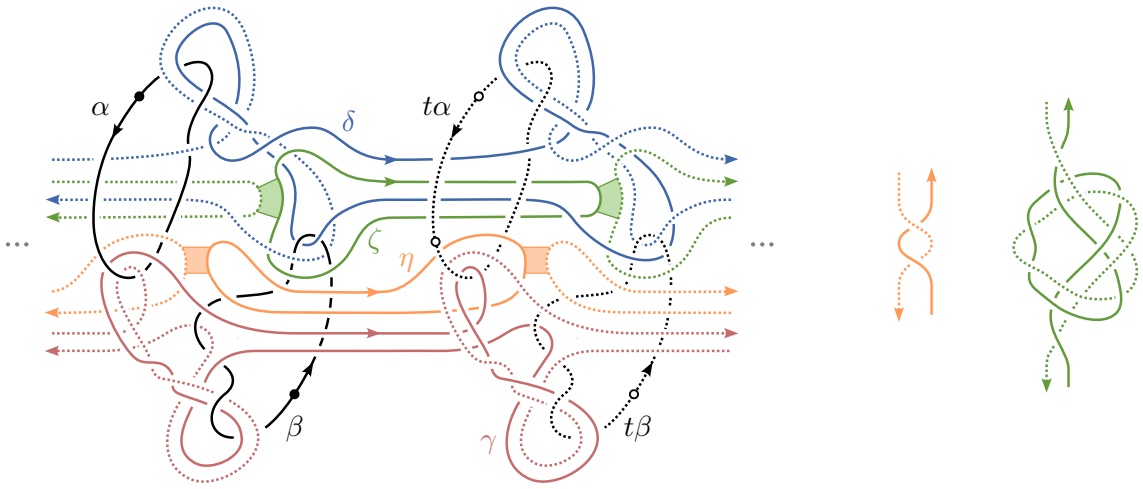


图 13。表示 $F_1 \subset B^4$ 的外部的无限循环覆盖的把手图。在橙色和绿色方框内，被围住的弦如图右侧所示。

我们通过分别将 γ、δ、ζ 和 η 替换为 $\gamma' = -\gamma + (t^{-1}-1)\eta$、$\delta' = (-t+1)\gamma - \delta + (2-t)\eta$、$\zeta' = (t-1)\gamma + \delta + \zeta + (t-2)\eta$ 和 $\eta' = t^{-1}\eta$ 来换基。等变交形式变换为 $Q_0 \rightsquigarrow P^T Q_0 P$，其中 P 是换基矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-t & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1}-1 & 2-t & t-2 & t^{-1} \end{bmatrix}$$

而 P^-是通过映射 $t \mapsto t^{-1}$ 从 P 得到的。这得到

$$P^T Q \overline{P} = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma' \\ \delta' \\ \zeta' \\ \eta' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} t^k\alpha & t^k\beta & t^k\gamma' & t^k\delta' & t^k\zeta' & t^k\eta' \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{-1}-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

~为了得到 X 自身的等变交形式 Q，我们对 $\tilde{X}_0$中对应于 α 和 β 的2-球面（及其平移像）进行手术。注意，同调类 $t^k\alpha$ 和 $t^k\beta$分别与 $t^k\eta'$ 和 $t^k\gamma'$代数对偶，并且这两个对偶类分别是唯一与 $t^k\alpha$ 和 $t^k\beta$非平凡配对的同调类。因此，$H_2(\tilde{X};\ \Lambda)$ 由

对应于 δ' 和 ζ'的其余同调类生成，而等变交形式 λ_X 由矩阵表示

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & t-1 \\ t^{-1}-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

接下来我们考虑 F_1'。设 $X' = B^4 \setminus \mathring{N}(F_1')$，并令 $\widetilde{X}'$ 表示其无限循环覆盖。回想一下，F_1 和 F_1' 是通过将一组相同的带附加到原始的底层圆盘 D 和 D' 上得到的，而 D 和 D' 的区别在于绕垂直轴进行 $180°$ 旋转。因此，在同痕意义下，我们可以通过交换组成 $F_1' \setminus \mathring{D}'$ 的两条带（即图 10(a) 中的两条带），并将其附加到 D 上，从 D 得到 F_1'。由此可知，图 12–13 中 X 和 X 的把手图可以通过交换橙色和绿色方框中的内容，转换为 X' 和 X' 的 $\widetilde{}$ 把手图。在链接形式层面，这只会改变 ζ 和 η 的自链接项。

为应用这一点，我们考虑类似的辅助四维流形 X_0'，它是通过对 X' 中的 1-把手 α 和 β 进行外科手术得到的。其等变交形式由 Q_0 通过交换最后两个对角元素（即 0 和 $t^{-1}-2+t$）得到。在这种情况下，我们使用矩阵换基（不涉及将要转换为 1-把手的那对 2- 把手）：

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2t+2t^{-1}-5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1}-1 & 2-t & 0 & t^{-1} \end{bmatrix}.$$

由此得到一个基，其中等变交形式由下列矩阵表示（该矩阵借助 Mathematica 计算得出 [Wol]）：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t^2+4t-6+\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^3}+\frac{5}{t^2}-2t+7-\frac{9}{t} & 0 & -t^2+3t-3+\frac{1}{t} \\ 0 & 0 & -t^3+5t^2-9t+7-\frac{2}{t} & 0 & t-1 & -t^3+4t^2-5t+2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t}-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3+t+\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2} & 2-\frac{1}{t^3}+\frac{4}{t^2}-\frac{5}{t} & 0 & t-2+\frac{1}{t} \end{bmatrix}$$

对与前两个基元素对应的球面进行外科手术后，我们得到了一些与第三和第六个基元素代数对偶的 1-把手。剩余的 $\widetilde{}$ 两个基元素生成 $H_2(X';\Lambda)$，因此其等变交形式为

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & t-1 \\ t^{-1}-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

使用定理 理4.4，我们得出结论：F_1 和 F_1' 相对边界拓扑同痕。 □

5. 进一步的应用与例子

5.1. **在闭合情形下构造候选4-流形**。§1中的“交锁”构造有一个特点：§1它能得到带有明确且控制良好的把手图的4-流形，因此便于利用这些带边界的4-流形对，在闭合情形下构造奇异4-流形。

定理 B 的证明。图14左侧描绘了 W 的 Stein把手图，其中标注了曲线 γ 和 $\tilde{\tau}(\gamma)$，以说明 $\tilde{\tau}$ 对 ∂W 的作用。图15中的 Stein 4-流形 W_+ 是由 W 附加两个额外的 Stein 2-把手得到的，这两个把手以绿色显示。（感兴趣的读者可以验证，该 4-流形是沿 F_1 对 B^4 作双重分支覆盖所得，但我们不需要这一事实。）图 15 右侧的 4- 流形 $W_+'^{\circ}$ 与挖去 $W \subset W_+$ 后再通过 $\tilde{\tau}$ 将其重新粘合所得的结果微分同胚。更确切地说，令 $L \subset \partial W$ 表示对应于图 15 左侧所示两个额外 Stein 2- 把手的附着曲线的带框链环。图 15 右侧的 1-把手与灰色 2-把手的并集可自然地识别为 W，该图中的绿色附着曲线则表示带框链环 $\tilde{\tau}(L) \subset \partial W$。分别沿 L 和 $L(\tilde{\tau})$ 对 W 作外科手术后，我们得到 ∂W_+ 和 $\partial W_+'$。因此，微分同胚 $\tilde{\tau}$ 诱导出微分同胚 $f\colon \partial W_+ \to \partial W_+'$。

我们对这个映射提出两个断言：

> (i) 微分同胚 f 可延拓为 W_+ 与 W_+'之间的同胚；(ii) 微分同胚 f 不能延拓为 W_+ 与 W_+'之间的微分同胚。

我们先证明 (i)。容易验证，3-流形 $\partial W_+ \cong \partial W_+'$ 是一个整数同调球面（可以手动验证，也可以使用 *SnapPy* [Snap]），并且相对于适当的基，W_+ 和 W_+' 的交叉形式均由标准双曲形式 $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$给出。因此，由 [Fre82]（参见 [Boy86，§1]），任何从 ∂W_+ 到 $\partial W_+'$的同胚都可延拓为从 W_+ 到 W_+'的同胚。将此结论应用于 f 即可得到第一个断言。

为证明 (ii)，我们采用 [AM97] 中的策略：考虑将一个（-1）框架的 2-把手沿 W_+ 中的曲线 $\gamma \subset \partial W_+$（见图 15）附着后得到的 4-流形。

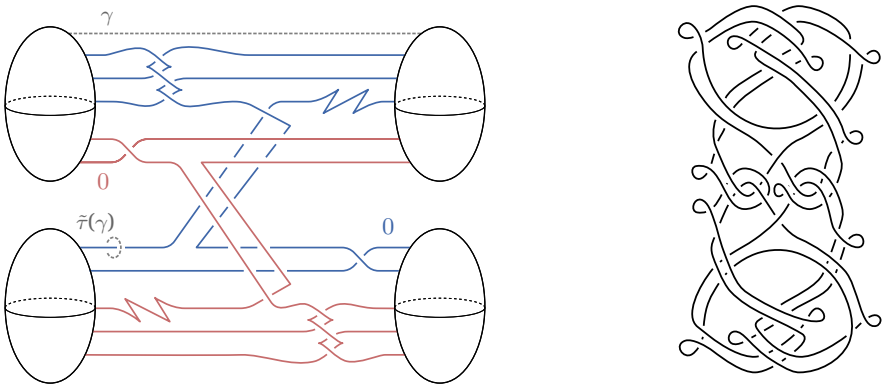


图14。 左侧是 $W = \Sigma_2(B^4, D)$ 的 Stein把手图。曲线γ 和 $\tilde{\tau}(\gamma)$ 是用于说明自微分同胚 $\tilde{\tau}$ 对∂W的作用的装饰。右侧是例 *1.2*中的纽结 K 的横截代表 。

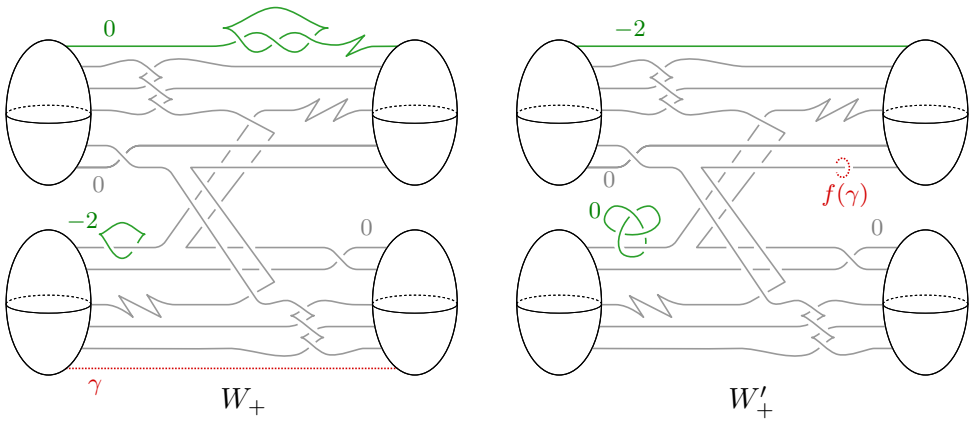


图 15. Stein 把手图，标出了曲线 γ 和 $f(\gamma)$。

注意，这可以实现为 Stein 2-把手附着，因此这个扩大的 4-流形具有 Stein 结构。另一方面，$f(\gamma) \subset \partial W'_+$ 在 W'_+中界定了一个光滑嵌入圆盘。由此可知，沿 -1（f）框架的 2- 把手附着于 γ（-1）会得到一个包含平方为 [的光滑 2- 球面的 4- 流形。根据 97], LM f，Stein 区域不能包含这样的球面，因此我们得出 W_+ 不能从 W'_+延拓为到 的微分同胚，从而证明第二个结论。

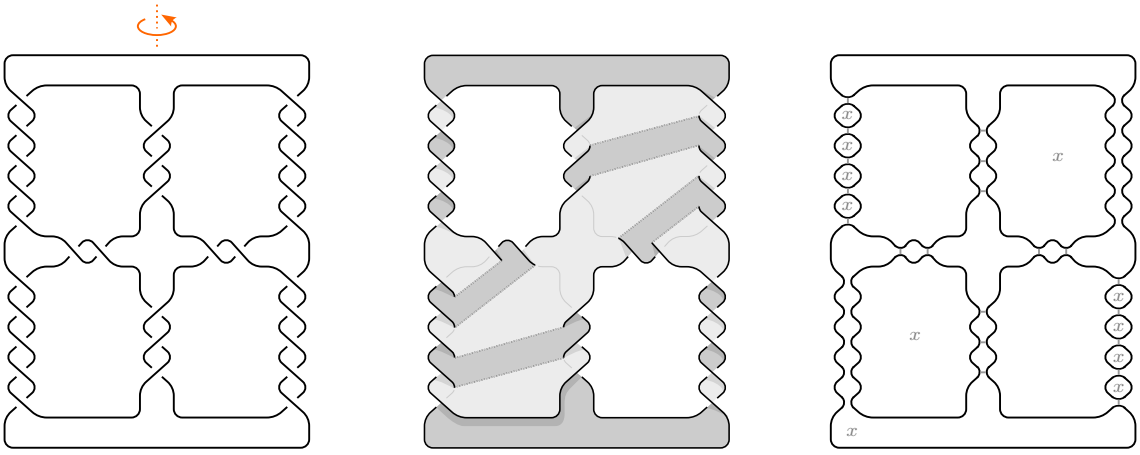
为证明定理中的断言，我们再次考虑由W_+ 沿 $\gamma \subset \partial W_+$附加一个带 (-1) 框架的 2-把手所得到的 Stein 4-流形。根据 [LM97], ，这个 4-流形嵌入到一个极小复曲面 Z中。挖去 $W_+ \subset Z$ 并通过 f 粘上 W'_+，得到一个 4- 流形 Z'；根据上面的断言 (i)，它与 Z 同胚。然而，根据证明断言 (ii) 时所用的论证，Z' 包含一个光滑嵌入的平方为-1的 2-球面，因此它不可能与 Z微分同胚。此外，注意，挖去 W_+ 并通过 f 粘上 W'_+，等价于从 $W_+ \subset Z$中挖去其中底层的 W 副本，再通过 τ重新粘合。□

着眼于对合背景下的各类不变量，我们提出以下问题：

问题 5.1. 前述证明中的闭 *4*-流形能否取为自旋流形 *?*

5.2. **另一对圆盘。** 纽结 9_{46} 围成一对著名的切片圆盘，它们在 Khovanov 同调上诱导不同的映射 [SS21](参见 [HS21])，不过这对圆盘甚至并非拓扑同痕。与图 2 中的例子类似，我们将两个 $m(9_{46})$ 副本“钩接”在一起（并化简所得图示），得到图 16(a) 所示的纽结。它围成一对自然的切片圆盘，其中一个见图 16 (b)，另一个圆盘则由图 (a) 所示的旋转得到。其分支覆盖见图 17。

这两个圆盘在 Khovanov 同调上诱导不同的映射（不过需要指出的是，它们同样并非拓扑同痕）。图16 (c) 展示了一个类，很容易验证，该类属于图示圆盘所诱导映射的支撑集，同时属于第二个圆盘所诱导映射的核。正如命题4.2的证明所示，即使经过内部稳定化，这两个圆盘在 Bar-Natan 同调上仍诱导不同的映射。本例中，Bar-Natan–Lee–Turner 谱序列的相关部分见表 3（使用*KnotJob* [Sch21]计算）。



(a) (b) (c)

图16。（a）由两个 $m(9_{46})$ 复制体构成的纽结。（b）以该纽结为边界的切片圆盘。（c）区分这两个切片圆盘的 Khovanov 同调中的一个元素。

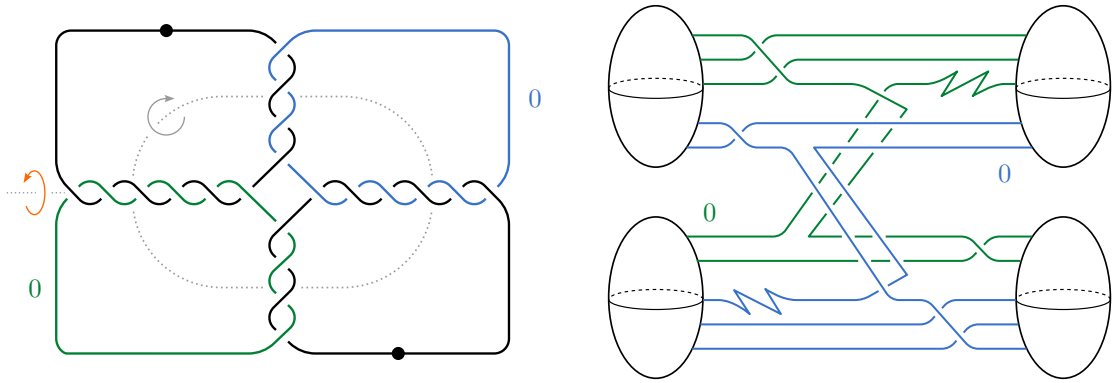


图17。沿图 B^4 中圆盘的双重分支覆盖16。第一个图展示了其边界的两种对称性，第二个图展示了一种 Stein 结构。尽管它并非可缩，读者仍可验证，这个 4-流形仍可用于构造更大的 4-流形的奇异对（如定理B的证明所示）。

第1页

q \ h	⋯	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
0									2
−2									
−4							2	1	
−6						4			
−8					9	1			
−10				17	1				
−12			21						
−14		27	1						
⋮									

第2页

q \ h	⋯	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
0									2
−2									
−4								1	
−6									
−8									
−10				1					
−12									
−14			1						
⋮									

表3. 图中纽结的约化 Bar-Natan–Lee–Turner 谱序列的前两页 K 来自图 16，展示了 $h \geq -7$ 和 $q \geq -14$。

参考文献

[*AD*19] *Alishahi*、*Dowlin*，《*Lee*谱序列、解结数与骑士步猜想》，《*Topology Appl.*》，*254:29–38*，*2019*。[*Akb*91] *Akbulut*，《一个假紧致可缩 *4*-流形》，《*J. Differential Geom.*》，*33(2):335–356*，*1991*。[*AKM*$^+$19] *Auckly*、*Kim*、*Melvin*、*Ruberman*、*Schwartz*，《单次稳定化后 *4*-流形中曲面的同痕》，《*Adv. Math.*》，*341:609–615*，*2019*。[*Ali*19] *Alishahi*，《解结数与 *Khovanov* 同调》，《*Pacific J. Math.*》，*301(1):15–29*，*2019*。[*AM*97] *Akbulut*、*Matveyev*，《奇异结构与伴随不等式》，《*Turkish J. Math.*》，*21 53*，*1997 1 47( ): – .* [*AM*98] *Akbulut*、*Matveyev*，《*4*-流形的凸分解定理》，《*International Mathematics Research Notices*》，*1998(7):371–381*，*01 1998*。[*AS*21] *Auckly*、*Sadykov*，《嵌入 *4*-流形中的不可定向曲面》，《*J. Topol.*》，*( ): – 587–607*，*2021 14 2*。[*AY*08] *Akbulut*、*Yasui*，《软木、插塞与奇异结构》，《*J. G¨okova Geom. Topol. GGT*》，*2:40–82*，*2008*。[*BN*05] *Bar-Natan*，《缠结与余边界的 *Khovanov* 同调》，《*Geom. Topol.*》，*9:1443–1499*，*2005*。[*Boy*86] *Boyer*，《边界给定的单连通 *4*-流形》，《*Trans. Amer. Math. Soc.*》，*298(1):331–357*，*1986*。[*BS*15] *Baykur*、*Sunukjian*，《*4*-流形中的打结曲面与稳定化》，《*J. Topol.*》，*( ): – 215–231*，*2015 9 1*。[*CFHS*96] *Curtis*、*Freedman*、*Hsiang*、*Stong*，《*h*-余边界等价的光滑单连通紧致 *4*-流形的分解定理》，《*Inventiones mathematicae*》，*123(2)*，*1996*。[*CP*20] *Conway*、*Powell*，《具有无限循环结群的嵌入曲面》，《*Geom. Topol.*》（即将出版），*2020*。[*Don*87] *Donaldson*，《无理性与 h-余边界猜想》，《*J. Diff. Geom.*》，*26(1):141–168*，*1987*。[*Fre*82] *Freedman*，《四维流形的拓扑》，《*J. Differential Geom.*》，*17(3):357–453*，*1982*。[*GHKP*] *Guth*、*Hayden*、*Kang*、*Park*，《双重圆盘与卫星曲面》，准备中。[*Gom*84] *Gompf*，《紧致 *4*-流形的稳定微分同胚》，《*Topol. Appl.*》，*18:115–120*，*1984*。[*Gom*91] *Gompf*，《椭圆曲面的核》，《拓扑学》，*30(3):479–511*，*1991*。[*GS*99] *Gompf*、*Stipsicz*，《*4*-流形与 *Kirby*演算》，《*Graduate Studies in Mathematics*》第 *20* 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，*1999*。[*Guj*20] *Gujral*，《由 *Bar-Natan* 同调和 α-同调给出的带状距离界》，*arXiv:2011.01190*，*2020*。[*Gut*22] *Guth*，《对于带边界的奇异曲面，一次稳定化还不够》，*arXiv:2207.11847*，*2022*。[*Hay*20] *Hayden*，《美国国家科学基金会 *DMS-2114837* 项目提案：软木、同伦与复曲线》，*2020*。[*Hay*21] *Hayden*，《软木、覆盖与复曲线》，*arXiv:2107.06856*，*2021*。[*HKM*$^+$22] *Hayden*、*Kim*、*Miller*、*Park*、*Sundberg*，《*4*-球中的 *Seifert* 曲面》，*arxiv:2205.15283*，*2022*。[*HS*21] *Hayden*、*Sundberg*，《*Khovanov* 同调与四维球中的奇异曲面》，*arXiv:2108.04810*，*2021*。[*ILM*21] *Iltgen*、*Lewark*、*Marino*，《*Khovanov* 同调与有理解纽》，*arXiv:2110.15107*，*2021*。[*Jac*04] *Jacobsson*，《由 *Khovanov* 同调得到的链环余边界不变量》，《*Algebr. Geom. Topol.*》，*4:1211–1251*，*2004*。[*JMZ*20] *Juh´asz*、*Miller*、*Zemke*，《结余边界、桥指数与 *Floer* 同调中的挠》，《*J. Topol.*》，*13(4):1701–1724*，*2020*。[*Kan*22] *Kang*，《可缩 *4*-流形的一次稳定化还不够》，*arXiv:2210.07510*，*2022*。[*Kho*00] *Khovanov*，《*Jones*多项式的范畴化》，《*Duke Math. J.*》，*101(3):359–426*，*2000*。[*Kir*96] *Kirby*，《*Akbulut*软木与光滑单连通 *4*-流形的 *h*-余边界》，《*Turkish Journal of Mathematics*》，*20(1):85–93*，*1996*。

[*KMT*22] *Konno*、*Mukherjee*、*Taniguchi*，《*4*-流形中的奇异余维一子流形与稳定化》，*arxiv:2210.05029*，*2022*。[*KWZ*19] *Kotelskiy*、*Watson*、*Zibrowius*，《*Khovanov* 同调中的浸入曲线》，*2019*。[*Lad*22] *Ladu*，《原始余柄与单极 *Floer* 同调》，*arXiv:2205.13319*，*2022*。[*Lew*22] *Lewark*，《*khoca*》，可访问 `http://lewark.de/lukas/khoca.html`，*2022*。[*Lin*19] *Lin*，《*Bar-Natan* 对 *Khovanov* 同调的变形与对合单极 *Floer* 同调》，《*Mathematische Annalen*》，*373(1):489–516*，*2019*。[*Lin*20] *Lin*，《单次稳定化后 *K3#K3* 上 *Dehn* 扭转的同痕》，*arxiv:2003.03925*（即将在《*Geom. Topol.*》发表），*2020*。[*LM*97] *Lisca*、*Mati*

´

129 3 509 525, *c*，《紧致 1997

接触结构与 *Seiberg-Witten* 不变量》，《数学发明》，*( ): –*。[*LM*21] *Lin*、*Mukherjee*，《族 *Bauer–Furuta* 不变量、奇异曲面与 *Smale* 猜想》，*arxiv:2110.09686*，*2021*。[*LNS*15] *Lipshitz*、*Ng*、*Sarkar*，《由 *Khovanov* 同调得到的横截不变量》，《*Quantum Topol.*》，*6(3):475–513*，*2015*。[*LS*22] *Lipshitz*、*Sarkar*，《等变 *Khovanov* 同调中不可定向曲面的混合不变量》，《*Trans. Amer. Math. Soc.*》，*375(12):8807–8849*，*2022*。[*Mat*96] *Matveyev*，《光滑单连通且 *h*-余边界等价的 h*4*-流形的分解》，《*J. Differential Geom.*》，*44(3):571–582*，*1996*。[*Mil*68] *Milnor*，《无限循环覆盖》，载于《流形拓扑学会议》（密歇根州立大学，密歇根州东兰辛，*1967*），第 *115–133* 页，*Prindle, Weber & Schmidt*，马萨诸塞州波士顿，*1968*。[*MM*20] *Manolescu*、*Marengon*，《骑士步猜想是错误的》，《美国数学会会刊》，*148(1):435–439*，*2020*。[*MWW*19] *Morrison*、*Walker*、*Wedrich*，《由 *Khovanov-Rozansky* 链环同调得到的 *4*-流形不变量》，《*Geom. Topol.*》（即将出版），*2019*。[*OS*05] *Ozsv´ath*、*Szab´o*，《关于分支双重覆盖的 *Heegaard Floer* 同调》，《*Adv. Math.*》，*194(1):1–33*，*2005*。[*Per*86] *Perron*，《拓扑范畴中四维的伪同痕与同痕》，《拓扑学》，*25:381–397*，*1986*。[*Pla*06] *Plamenevskaya*，《横截结与 *Khovanov* 同调》，《数学研究快报》，*13(4):571–586*，*2006*。[*Qui*86] *Quinn*，《*4*-流形的同痕》，《微分几何杂志》，*24:343–372*，*1986*。[*RS*22] *Ruberman*、*Strle*，《*Wall* 稳定实现对定型 *4*-流形微分同胚的应用》，*arxiv:2210.16260*，*2022*。[*Sar*20] *Sarkar*，《带状距离与 *Khovanov* 同调》，《*Algebr. Geom. Topol.*》，*20(2):1041–1058*，*2020*。[*Sch*21] *Sch¨utz*，《*KnotJob*》，可访问 `http://www.maths.dur.ac.uk/~dma0ds/knotjob.html`，*2021*。[*Snap*] *Culler*、*Dunfield*、*Goerner*、*Weeks*，《*SnapPy*：用于研究 *3*-流形几何与拓扑的计算机程序》，`http://snappy.computop.org`。[*SS*21] *Sundberg*、*Swann*，《相对 *Khovanov-Jacobsson* 类》，《*Algebr. Geom. Topol.*》（即将出版），*2021*。[*Swe*19] *S wenton*，《*Kirby Calculator*》，可访问 `https://community.middlebury.edu/~mathanimations/klo/` 2019 ，。[

*Wal*64] *Wall*，《关于单连通 *4*-流形》，《*J. London Math. Soc.*》，*39:141–149*，*1964*。[*Wol*] *Wolfram Research, Inc.*，《*Mathematica*》，版本 *13.2*，伊利诺伊州尚佩恩，*2022*。

罗格斯大学，新泽西州纽瓦克，07102电子邮
件地址： `kyle.hayden@rutgers.edu`