arXiv:2302.10141v1 [math.LO] 20 Feb 2023

关于弱博雷尔色数与连续统的基数不变量

M ´ARK PO ´OR 与 SAHARON SHELAH

Abstract. 我们证明，在某些一致情形下，$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) < \lambda_{\mathbf{0}} < \lambda_{\mathbf{1}} < \lambda_\infty < 2^{\aleph_0}$，其中 $\lambda_{\mathbf{0}}$ 表示 Kechris-Solecki-Todorcevic 图 $\mathbb{G}_0$ 的弱博雷尔色数，即 2^ω 的 $\mathbb{G}_0$-独立博雷尔覆盖的最小基数；而 $\lambda_{\mathbf{1}}$ 和 λ_∞ 则分别是图 $\mathbb{G}_1$ 以及与等价关系 E_0相关联的简单图的相应不变量。

§ 0. Introduction

过去二十年来，博雷尔图及其组合性质已成为一个日益发展的研究领域，并且与图极限理论、可数群作用、悖论式分解以及遍历理论等其他领域有着有趣的联系。

Borel 色数最早在 [KST99][LM08] 中被研究和定义。对于波兰空间 X 上的图 $G = (X, E)$，其 Borel 色数 $\chi_{\mathrm{B}}(G)$ 是满足以下条件的最小基数 κ：存在某个波兰空间 Y，使得存在一个 Borel 着色$c : X \to Y$，其定义域为 G，且 $|\mathrm{ran}(c)| = \kappa$（即，对于每个 $y \in Y$，原像 $c^{-1}(y)$ 都是 G-独立的）。根据波兰空间理论以及解析集的完美集性质，显然该数属于集合 $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\aleph_0, 2^{\aleph_0}\}$。

S. Geschke 扩展了这一理论。他证明，若 X 是波兰空间，那么对于每个不含完美团的闭图 $G = (X, E)$，以及每个局部可数的 F_σ 图 $G = (X, E)$（即每个节点的度数至多为 $\aleph_0$），都存在某种 ccc 强迫，使连续统变大，同时 X 可由 $\aleph_1$ 个 Borel（事实上是闭的） G-独立集覆盖。 [Ges11] 后来，M. Gaspar 和 S. Geschke[GG22] 定义了固定图 G 的弱博雷尔色数，即满足以下条件的最小基数 κ：底层空间可以由 κ 个 G-独立的博雷尔集覆盖。注意，若任一色数至多可数，则两者相等。（这里我们指出，S. Geschke 曾将图 $G = (X, E)$ 的弱博雷尔色数定义为满足以下条件的最小基数κ：存在一种着色 $c : X \to \kappa$，其博雷尔纤维均为博雷尔集（即对每个 $\alpha < \kappa$，原像 $c^{-1}(\alpha)$ 都是博雷尔集） [Ges11]。注意，对固定图而言，若弱博雷尔色数的任一版本至多为 $\aleph_1$，则两者相等。）

†第一作者获得了以色列科学院与人文学院国际博士后研究人员卓越奖学金计划的资助，以及国家研究、发展与创新办公室（NKFIH）第 124749、129211 号拨款的资助。

*第二作者获得以色列科学基金会项目 1838/19 的资助。两位作者的研究均部分获得美国国家科学基金会项目 DMS 1833363 的资助。Shelah 列表中的第 1226 篇论文。类似 [She, Th0.2=Ly5] 的引用表示定理 0.2 的标签为 y5。读者请注意，第二作者网站上的版本通常比数学档案库中的版本更新。

在 A. Kechris、S. Solecki 和 S. Todor˘cevi´c [的著名论文99] KST$\mathbb{G}_0$ 中，构造了图 $\mathbb{G}_0$ （其 $X = 2^\omega$），并证明它在不可数博雷尔色数的解析图中是极小的，具体而言，对于每个简单图 $G = (Y, F)$，若 Y 是波兰空间，则 $E \in \mathbf{\Sigma}^1_1(Y^2)$ 要么 $\chi_{\mathrm{B}}(G) \leq \aleph_0$，要么存在一个连续同态 $f\colon 2^\omega \to Y$，将 $\mathbb{G}_0$ 映到 G （也就是说，只要 $(x, x') \in E_{\mathbb{G}_0}$，就必然有 $(f(x)\ f(x')) \in F$）。这还意味着，只要$G = (Y, F)$ 是定义在波兰空间上的解析图，且其弱博雷尔色数不可数，那么它的弱博雷尔色数至少与 $\mathbb{G}_0$ 的弱博雷尔色数一样大。

虽然图 $\mathbb{G}_0$ 是无环的，因此可以用两种颜色进行着色，但 B. Miller 证明了它的可测色数为 3 [Mil08]。他提出，关于 $\mathbb{G}_0$ 的弱博雷尔色数与连续统的其他基数特征之间的关系，能否得出什么结论。在 [KST99] 中，作者不仅验证了 $\chi_{\mathrm{B}}(G) > \aleph_0$，而且他们的论证还表明，每个 $\mathbb{G}_0$-独立的 Baire 可测集 $S \subseteq 2^\omega$ 都必定是瘦集。这立即意味着，cov($\mathcal{M}$) 也是 $\mathbb{G}_0$的弱博雷尔色数的下界。

M. Gaspar 和 S. Geschke 独立于本工作，计算了通过一致树强迫概念的可数支撑迭代进行强迫所得到的集合论模型中，图的各种博雷尔色数 [GG22], ；另请参见 R. Banerjee、M. Gaspar 的进一步结果 [BG22]。此前，F. Adams 和 J. Zapletal 曾研究过闭图的基数不变量 [AZ18]。

§ 1. Preliminaries、 notations

下文中的序数均指冯·诺伊曼序数；对于集合 X，符号 $|X|$ 始终表示与其具有相同基数的最小序数。对于集合 X，符号 $\mathscr{P}(X)$ 表示 X 的幂集；而当 κ 为一个基数时，我们对 $\{Y \in \mathscr{P}(X)$ 使用标准记号 $[X]^\kappa\colon \ |Y| = \kappa\}$；类似地，对于 $[X]^{<\kappa}$、$[X]^{\leq\kappa}$ 等也如此。序列是指定义在某个序数上的函数；对于序列 $\overline{s} = \langle s_\alpha\colon \ \alpha < \mathrm{dom}(\overline{s})\rangle$，$\overline{s}$ 的长度（记作 $\ell g(\overline{s})$）表示 dom($\overline{s}$)。我们用 $\langle\rangle$表示空序列。此外，对于序列 $\overline{s}$、$\overline{t}$，令 $\overline{s} \frown \overline{t}$ 表示它们的自然连接（长度为 $\ell g(\overline{s}) + \ell g(\overline{t})$）。对于集合 X和序数 α，我们使用 ${}^\alpha X = \{\overline{s}\colon \ \ell g(\overline{s}) = \alpha$、ran($\overline{s}$) $\subseteq X\}$；对于基数 λ、κ，我们使用符号 $\lambda^\kappa = |{}^\kappa\lambda|$ （即与其等势的最小序数）。

对于有限序列 $\bar{s} \in {}^{\omega>}2$，符号 $[\bar{s}]$ 表示 2^ω中由 $\bar{s}$ 确定的基本开集，即

$$[\bar{s}] = \{x \in {}^\omega 2\colon \ x \supseteq \bar{s}\}.$$

树 T 是由有限序列组成的向下封闭集。

如果 $\varphi(n, x)$ 是一个公式，那么若对除有限多个$n \in \omega$ φ之外的所有$n \in \omega$ φ，$n, x)$ 都为真，则 $\forall^\infty n \varphi(n, x)$ 为真；$\exists^\infty n$ 表示存在无穷多个 n，而量词 $\exists! y$ 表示“存在唯一的 y”。对于 $r, r' \in \omega^\omega$ 在 $r \leq^* r'$ 下，我们指的是 $\forall^\infty n\ r_n \leq r'_n$。

关于强迫，$q \leq p$ 表示 q 更强；对于强迫概念$\mathbb{P}$，术语 $1_{\mathbb{P}}$ 表示 $\mathbb{P}$的唯一最大元素。

§ 2. The forcing construction

令 $\bar{\mathfrak{s}} = \langle \mathfrak{s}_n\colon \ n \in \omega\rangle$ 固定，使得对每个 $n \in \omega$: $\mathfrak{s}_n \in {}^n\omega$，(x$_1$),

($\mathbf{x}_2$) 集合 $\bigcup_{n\in\omega}[\mathfrak{s}_n]$ 在 2^ω中稠密。回顾康托尔空间 [KST99] 上的图 $\mathbb{G}_0$ ($\bar{s}$) 的定义：

定义 2.1。图 $\mathbb{G}_0(\bar{\mathfrak{s}})$定义如下：

$$\mathbb{G}_0(\bar{\mathfrak{s}}) = \{(\mathfrak{s}_n \frown \langle 0\rangle \frown x, \mathfrak{s}_n \frown \langle 1\rangle \frown x) : \ n \in \omega, \ x \in 2^\omega\} \subseteq [2^\omega]^2.$$

定理 2.2。（[KST99]）对于满足 ($\mathbf{x}_1$)、($\mathbf{x}_2$) 的任意序列 $\bar{t}$，图 $\mathbb{G}_0(\bar{t}) \subseteq [2^\omega]^2$ 是一个闭无环图，并且只要 $H \subseteq 2^\omega$ 具有贝尔性质且是 $\mathbb{G}_0(\bar{t})$-独立的，它就必为瘦集。

此外，如果 $G = (X, E)$ 是波兰空间 X 上的解析图，并且 $\chi_B(G) > \aleph_0$，那么存在连续映射 $f : 2^\omega \to X$，它是从$\mathbb{G}_0(\bar{t})$ 到 G的同态。

从现在起，我们只写 $\mathbb{G}_0$，而不写 $\mathbb{G}_0(\bar{\mathfrak{s}})$。注意，若 ($\mathbf{x}_1$)、($\mathbf{x}_2$) 成立，那么无论具体的序列 $\bar{\mathfrak{s}}$ 如何，图 $\mathbb{G}_0(\bar{s})$ 都具有预期的性质，因此使用术语 $\chi_{\mathrm{B}}(\mathbb{G}_0)$、 $\chi_{\mathrm{wB}}(\mathbb{G}_0)$、覆盖数($I_{\mathbb{G}_0}$)是合理的。

定义 2.3。图 $\mathbb{G}_1$ 定义如下：

$$\mathbb{G}_1 = \{(x, y) : \ x, y \in 2^\omega, \ \exists! n \in \omega \ x_n \neq y_n\} \subseteq [2^\omega]^2.$$

定义 2.4。维塔利关系 E_0 定义如下：

$$E_0 = \{(x, y) : \ x \neq y \in 2^\omega, \ \forall^\infty n \in \omega \ x_n = y_n\} \subseteq [2^\omega]^2.$$

请注意，这并非维塔利关系的标准定义，因为我们将其视为 $[2^\omega]^2$ 的子集，而文献中 $E_0 \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ 是一个等价关系。

定义 2.5。若 X 是一个拓扑空间，且 G 是其上的一个图，则我们用$I_G \subseteq \mathscr{P}(X)$表示由博雷尔 G-独立集生成的 σ-理想。

现在我们可以陈述主要定理了。

定理 2.6. 假设连续统假设成立，并设 $\lambda_{\mathbf{0}} \leq \lambda_{\mathbf{1}} \leq \lambda_\infty \leq \lambda_{\mathbb{S}} = \kappa$ 是满足对每个 $\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty, \mathbb{S}\}$ 都有 $\lambda_\iota = \lambda_\iota^{\aleph_0}$ 的无限基数。则在某个保基数的强迫扩张中，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{d} &= \aleph_1, \\ \mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_0}) &= \lambda_{\mathbf{0}}, \\ \mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_1}) &= \lambda_{\mathbf{1}}, \\ \mathrm{cov}(I_{E_0}) &= \lambda_\infty, \\ 2^{\aleph_0} &= \kappa = \lambda_{\mathbb{S}}. \end{aligned}$$

证明. 我们按以下步骤定义强迫偏序集。

定义 2.7.

($\mathbf{D1}$) 对每个 n，我们令 $C_n \subseteq 2^{<\omega}$ 为一个有限非空集合，使得对每个 n，(a) $x \neq y \in C_n \to x \not\subseteq y$ 或 $y \not\subseteq x$，(b) $C_{2n+1} = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\}$，并且 (c) 对每个 $\bar{t} \in \prod_{i<2n} C_i$，存在 $\bar{t}' \in C_{2n}$，使得对于某个 $k \in \omega$，$\bar{t} \frown \bar{t}' = \mathfrak{s}_k$（来自 ($\mathbf{x}_1$)-($\mathbf{x}_2$)）。

（例如，可以通过归纳法实现：在构造 C_{2n} 之前，施加辅助要求，即对某个 $r \in 2^\omega \ \bar{t} \in C_{2n} \ \to \ r \notin [\bar{t}]_\circ$ ）

($\mathbf{D2}$) 设 $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{0}}$，若 ($i$) $p = \langle p_i : \ \ i \in \omega\rangle$，其中 $\forall i$: $\emptyset \neq p_i \subseteq C_i$，且

(ii) $\exists^\infty j$: $p_{2j} = C_{2j} \wedge p_{2j+1} = C_{2j+1}$, 其中 q 强于 p, （记作 $q \leq p$）当且仅当对每个 i 都有 $q_i \subseteq p_i$。（D3）对于 $\mathbb{P}^{\mathbf{1}}$，只需回顾 Silver 实数强迫的定义：设 $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{1}}$，若 (i) $p = \langle p_i : \ i \in \omega\rangle$，其中 $\forall i : \ \emptyset \neq p_i \subseteq \{0,1\}$，且 (ii) $\exists^\infty j$: $p_j = \{0,1\}$，其中 q 强于 p, （记作 $q \leq p$）当且仅当对每个 i 都有 $q_i \subseteq p_i$。

(D4) 若满足以下条件，我们令 $p \in \mathbb{P}^\infty$

(i) $p = \langle p_i : \ i \in \omega\rangle$，其中 $\forall i \in \omega : \emptyset \neq p_i \subseteq {}^{k_{p_i}}2$，对于某个 $k_{p_i} > 0$，且 (ii) $\exists^\infty j$: $|p_j| = 2$,

q 强于 p（记作 $q \leq p$），当且仅当

- 存在一个严格递增的无限有限序数序列 $j_0 < j_1 < \ldots$，使得

$$(\forall i < \omega) : \ k_{q_i} = k_{p_{j_{i-1}+1}} + k_{p_{j_{i-1}+2}} + \cdots + k_{p_{j_i}},$$

其中在 j_{-1} 下，我们指的是 -1,

- 对于每个 $i < \omega$, $\bar{t} \in q_i$，都存在

$$(\bar{t}^*_{j_{i-1}+1} \in p_{j_{i-1}+1}) \ \& \ (\bar{t}^*_{j_{i-1}+2} \in p_{j_{i-1}+2}) \ \& \ldots \& \ (\bar{t}^*_{j_i} \in p_{j_i}),$$

使得

$$\bar{t} = \bar{t}^*_{j_{i-1}+1} \frown t^*_{j_{i-1}+2} \frown \cdots \frown t^*_{j_i}.$$

（因此，最大元素 p 可以描述为满足对每个 j $p_j = \{\langle 0\rangle, \langle 1\rangle\}$都成立的条件。）

（D5）如果 $p \in \mathbb{P}^\iota$ $(\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty\})$, $\bar{t} \in \prod_{j<i} p_j$ 对某个 $i < \omega$成立，那么令 $p^{[\bar{t}]}$ 表示由 $p^{[\bar{t}]}$定义的条件 $q = p$ 当且仅当 $q_j = \{t_j\}$ 对于 $j < i$，且 $p^{[\bar{t}]} \restriction [i, \omega) = p \restriction [i, \omega)$。

（D6）此外，令 $\mathbb{P}^{-m}$ 表示 $\mathbb{P}$ 的子强迫 $\{p \restriction [m, \omega) : \ p \in \mathbb{P}\}$，并赋予其自然序。

回顾萨克斯强迫的定义，因此令 $\mathbb{P}^{\mathbb{S}} = \{T \subseteq 2^{<\omega} : \ T$是一个完美树$\}$，当且仅当 $T \leq T'$ iff $T \subseteq T'$。

定义 2.8。

（D7）对于 $n \in \omega$，我们在 $\mathbb{P}^{\mathbf{0}}$ 上定义偏序 $\leq_n$ 为 $q \leq_n p$，当且仅当

- $q \leq p$，且
- 对于某个 $\ell_0 < \ell_1 < \cdots < \ell_{n-1} < \omega$，我们有$\forall j < n$：($p_{2\ell_j} = q_{2\ell_j} = C_{2\ell_j}$)&($p_{2\ell_j+1} = q_{2\ell_j+1} = C_{2\ell_j+1}$)，并且 (D8) 对于 $n \in \omega$，我们将 $\mathbb{P}^{\mathbf{1}}$ 上的偏序 $\leq_n$ 定义为 $q \leq_n p$，当且仅当

$$(\forall k < 2\ell_{n-1}) \ p_k = q_k.$$

- $q \leq p$，并且
- 对于某个 $l_0 < l_1 < \cdots < l_{n-1} < \omega$，我们有，并且 (D9) 对于 $n \in \omega$，我们将 $\mathbb{P}^\infty$ 上的偏序 $\leq_n$ 定义为 $q \leq_n p$，当且仅当

$$(\forall k < l_{n-1}) \ p_k = q_k.$$

$$\forall j < n : \ p_{l_j} = q_{l_j} = \{0,1\},$$

- $q \leq p$，且

- 对于某个 $l_0 < l_1 < \dots l_{n-1} < \omega$，我们有
$$\forall j < n:\ |p_{l_j}| = |q_{l_j}| = 2,$$
and
$$(\forall k < l_{n-1})\ p_k = q_k,$$

(D10) 对于 $q \in \mathbb{P}^{\mathbb{S}}$ （因此 $q = T_q \subseteq {}^{\omega>}2$ 是完美树），我们将 stem(q) 定义为 q 的最小分支节点（即 q 和 stem(q) 满足 stem(q) $\frown \langle 0\rangle$、stem(q) $\frown \langle 1\rangle \in q$, 但 stem($q$) 的每个真初始段都有唯一的直接后继）。

(D11) 我们在 $\mathbb{S}$ 上定义偏序 $\leq_n$ （对每个 $n \in \omega$），如下:
- $q \leq_0 p$, 当且仅当 $q \leq p$,
- $q \leq_{n+1} p$, 当且仅当 $q \leq p$, stem(q) = stem(p), 且对于这个公共树干 s:
$$q^{[s^\frown\langle 0\rangle]} \leq_n p^{[s^\frown\langle 0\rangle]}, \text{ and}$$
$$q^{[s^\frown\langle 1\rangle]} \leq_n p^{[s^\frown\langle 1\rangle]}.$$

一个标准论证可得如下结论。

观察 2.9. $\mathbb{P}^{\mathbf{0}}$, $\mathbb{P}^{\mathbf{1}}$, $\mathbb{P}^{\infty}$, $\mathbb{P}^{\mathbb{S}}$ 关于 D7) 和 D11) 中定义的偏序满足 Baumgartner 公理 A，特别是给定序列
$$p_0 \geq_0 p_1 \geq_1 p_2 \geq_2 \cdots \geq_{n-1} p_n \geq_n p_{n+1} \geq_{n+1} \cdots,$$
那么存在一个关于 $\geq$ 的共同下界 p' （事实上，还可以假设每个 n 都是 $p' \leq_n p_n$ ）。

(D12) 对于 $I \subseteq \lambda_{\mathbf{0}}$，我们令
$$\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_I = \{f \in {}^I(\mathbb{P}^{\mathbf{0}}):\ f(i) = 1_{\mathbb{P}^{\mathbf{0}}} \text{ for all, but countable } i's\}$$
为 $\mathbb{P}$ 的可数支撑积。

(D13) 对于 $I \subseteq [\lambda_{\mathbf{0}}, \lambda_{\mathbf{1}})$, 令
$$\mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_I = \{f \in {}^I(\mathbb{P}^{\mathbf{1}}):\ f(i) = 1_{\mathbb{P}^{\mathbf{1}}} \text{ for all, but countable } i's\}$$
为 $\mathbb{P}^{\mathbf{1}}$ 的可数支撑积。

(D14) 对于 $I \subseteq [\lambda_{\mathbf{1}}, \lambda_{\infty})$, 类似地，令
$$\mathbb{Q}^{\infty}_I = \{f \in {}^I(\mathbb{P}^{\infty}):\ f(i) = 1_{\mathbb{P}^{\infty}} \text{ for all, but countable } i's\}$$
为 $\mathbb{P}^{\infty}$ 的可数支撑积,

(D15) 对于 $I \subseteq [\lambda_{\infty}, \lambda_{\mathbb{S}})$, 令
$$\mathbb{Q}^{\mathbb{S}}_I = \{f \in {}^I(\mathbb{P}^{\mathbb{S}}):\ f(i) = 1_{\mathbb{P}^{\mathbb{S}}} \text{ for all, but countable } i's\}$$
为 $\mathbb{P}^{\mathbb{S}}$ 的可数支撑积。

(D16) 令 $\mathbb{Q}$ 为以下可数支撑积:
$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^0_{\lambda_{\mathbf{0}}} \times \mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{\lambda_{\mathbf{1}}\setminus\lambda_{\mathbf{0}}} \times \mathbb{Q}^{\infty}_{\lambda_{\infty}\setminus\lambda_{\mathbf{1}}} \times \mathbb{Q}^{\mathbb{S}}_{\lambda_{\mathbb{S}}\setminus\lambda_{\infty}}.$$

我们需要验证强迫 $\mathbb{Q}$ 确实是基数保持的，使得 $\mathfrak{d}$ 为 $\aleph_1$，连续统为 $\kappa = \lambda_{\mathbb{S}}$, 存在一个由 $\lambda_{\mathbf{0}}$ 个 $\mathbb{G}_0$-独立博雷尔集构成、覆盖 2^ω 的系统，但任何基数更小的系统都不够（对于 $\mathbb{G}_1$ 和 E_0，情况也类似）。为此，我们将证明以下结论:

($\circledast$)$_1$ $\mathbb{Q}$ 是适当的，并且具有 $\aleph_2$-cc; ($\circledast$)$_2$ $\mathbb{Q}$ 是 ω^ω-bounding，即对于每个 $r \in {}^\omega\omega \cap V^{\mathbb{Q}}$，都存在 $r' \in {}^\omega\omega \cap V$使得 $r' \geq^* r$,

$(\circledast)_3$ 对于每个 $r \in {}^{\omega}2 \cap V^{\mathbb{Q}}$，都存在一个

- 树 $T_{\mathbf{0}} \in V^{\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{\lambda_{\mathbf{0}}}} \cap \mathscr{P}(2^{<\omega})$，使得 $r \in [T_{\mathbf{0}}]$，且 $[T_{\mathbf{0}}]$ 是 $\mathbb{G}_0$-独立的，
- 树 $T_{\mathbf{1}} \in V^{\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{\lambda_{\mathbf{0}}} \times \mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{\lambda_{\mathbf{1}} \setminus \lambda_{\mathbf{0}}}} \cap \mathscr{P}(2^{<\omega})$，使得 $r \in [T_{\mathbf{1}}]$，且 $[T_{\mathbf{1}}]$ 是 $\mathbb{G}_1$-独立的，
- 树 $T_{\infty} \in V^{\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{\lambda_{\mathbf{0}}} \times \mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{\lambda_{\mathbf{1}} \setminus \lambda_{\mathbf{0}}} \times \mathbb{Q}^{\infty}_{\lambda_{\infty} \setminus \lambda_{\mathbf{1}}}} \cap \mathscr{P}(2^{<\omega})$，使得 $r \in [T_{\infty}]$，且$[T_{\infty}]$是 E_0-独立的，

$(\circledast)_4$ 若 $\alpha < \lambda_{\mathbb{S}}$，$T \in V^{\mathbb{Q} \restriction \lambda_{\mathbb{S}} \setminus \{\alpha\}} \cap \mathscr{P}({}^{\omega >}\{0,1\})$ 是一棵树，使得

- 或者 $\alpha < \lambda_{\mathbf{0}}$，且 $[T]$ 是 $\mathbb{G}_0$-独立的，
- 或 $\alpha \in [\lambda_{\mathbf{0}}, \lambda_{\mathbf{1}})$，并且 $[T]$ 是 $\mathbb{G}_1$-独立的，
- $\alpha \in [\lambda_{\mathbf{1}}, \lambda_{\infty})$，并且 $[T]$ 是 E_0-独立的，

那么对于 r_α，由第 α 个坐标给出的泛型实数（$\mathbb{Q} \restriction \{\alpha\}$），我们有：

$$r_\alpha \notin [T].$$

与 $(\circledast)_3$ 类似的结论由 [GG22, §3] 独立证明（针对添加单个实数的扩张，并将其推广到可数支撑迭代）；另见 [Zap19, 定理 3.47—推论 3.49], ，这是一个更一般的结果，不过仅适用于单步扩张，且与前两者均独立。

请注意，$\mathbb{Q}$ 的真适性（连同我们对基模型的假设）将意味着 $(2^{\aleph_0})^{V^{\mathbb{Q} \restriction \lambda_\iota}} = \lambda_\iota$ $(\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty, \mathbb{S}\})$，因此 $(2^{\aleph_0})^{V^{\mathbb{Q}}} = \kappa^{\aleph_0} = \kappa\ (= \lambda_{\mathbb{S}})$；而由 $(\circledast)_3$ 可知，$\mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_0}) \leq \lambda_{\mathbf{0}}$（对于 $\mathbb{G}_1$ 和 E_0，相应的不等式也同样成立）。

根据 $\mathbb{Q}$ 的 $\aleph_2$-cc，若 μ 不可数，则每个大小为 μ 的博雷尔集系统都属于 $V^{\mathbb{Q} \restriction M}$，其中某个 $M \in V$ 的大小至多为 $\mu \cdot \aleph_1 = \mu$。

此外，$(\circledast)_2$ 显然蕴含 $\mathfrak{d}^{V^{\mathbb{Q}}} = \aleph_1$，且在 ZFC 中不等式 $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}$ 成立（因为 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 中的每个紧集也都是瘦集，或参见 [BJ95]）。最后，由于波兰空间的每个不可数博雷尔子集都是 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ [的一个闭子空间的连续像，Kec12，定理 7.9、13. 1]，表明，每个博雷尔集都是 $\mathfrak{d}$ 个紧集的并。因此，若一个波兰空间可由 $\aleph_1 \leq \mu$ 个博雷尔集覆盖，那么我们可以将每个博雷尔集 B 替换为一个由 $\aleph_1$ 个紧集组成的系统 $\langle K_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ 且 $B = \bigcup_{\alpha < \omega_1} K_\alpha$，于是（在扩张中）存在 $\langle K'_\alpha : \alpha < \mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_0}) \rangle$，其中每个 K'_α 都是紧集，并覆盖 2^ω。这与 $(\circledast)_4$ 一起蕴含 $\mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_0}) \geq \lambda_{\mathbf{0}}$、$\mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_1}) \geq \lambda_{\mathbf{1}}$、$\mathrm{cov}(I_{E_0}) \geq \lambda_\infty$。因此，确实只需验证子句 $(\circledast)_1$- $(\circledast)_4$。

断言 2.10. $\mathbb{Q}$具有 $\aleph_2$-链条件。

证明. 假设 $\langle a_i : i < \omega_2 \rangle$ 是一个反链。由于 $|\mathrm{supp}(a_i)| \leq \aleph_0$ 对于$i < \omega_2$成立，根据连续统假设，我们可以假设 $\{\mathrm{supp}(a_i) : i < \omega_2\}$ 构成一个以 K为核的 Δ-系统。但 $|\mathbb{P}^{\mathbf{0}}| = |\mathbb{P}^{\mathbf{1}}| = |\mathbb{P}^{\infty}| = |\mathbb{P}^{\mathbb{S}}| = |(2^{\aleph_0})^V| = \aleph_1$（根据定义 2.7），因此$|^K(\mathbb{P}^{\mathbf{0}} \cup \mathbb{P}^{\mathbf{1}} \cup \mathbb{P}^{\infty} \cup \mathbb{P}^{\mathbb{S}})| = \aleph_1$，证毕。$\square_{\mathrm{Claim}2.10}$

约定 2.11. 将 $\mathbb{P}^{\mathbf{0}}$缩减到一个稠密子集后，从现在起我们可以假设，每当 $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{0}}$, $k \in \omega$,

$$\neg(p_{2k} = C_{2k} \ \wedge \ p_{2k+1} = C_{2k+1}) \ \rightarrow \ |p_{2k}| = |p_{2k+1}| = 1.$$

定义 2.12.

(D^*1) 若 $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{0}}$, $n \in \omega$,且 d 是满足条件的最小整数

对于某个 $l_0 < l_1 < \cdots < l_{n-1} < d$，我们有

$$\forall j < n : \ (p_{2l_j} = q_{2l_j} = C_{2l_j}) \& (p_{2l_j+1} = q_{2l_j+1} = C_{2l_j+1}),$$

那么我们令

$$T_n(p) = \prod_{j<2d} p_j,$$

and

$$T(p) = \bigcup_{n\in\omega} T_n(p),$$

(D*2) 若 $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{0}}$, $\bar{u} \in \bigcup_{n\in\omega} \prod_{j<n} p_j$, （例如 $\bar{u} \in T(p)$），则我们将 $p^{[\bar{u}]} = p^{(\bar{u})}$ 定义为满足以下条件的 $\mathbb{P}^0$

- $p_j^{[\bar{u}]} = p_j^{(\bar{u})} = \{u_j\}$, if $j < \ell g(\bar{u})$,
- $p_j^{[\bar{u}]} = p_j^{(\bar{u})} = p_j$, if $j \geq \ell g(\bar{u})$.

(D*3) 对于 $n \in \omega$, $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{1}}$，若 $d < \omega$ 是满足某个 $l_0 < l_1 < \cdots < l_{n-1} < d$ 的最小自然数

$$\forall j < n : \ \left(p_{l_j} = \{0,1\}\right),$$

那么对于每个 $\bar{v} = \langle v_0, v_1, .., v_{n-1}\rangle \in {}^n2$，我们将序列 $\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{v}}(p) = \langle \mathfrak{t}_{\bar{v}}(p)_j : j < d\rangle \in {}^d2$ 定义如下

- $\mathfrak{t}_{\bar{v}}(p)_{l_j} = v_j$,
- $\mathfrak{t}_{\bar{v}}(p)_k = a_k$, 其中 $p_k = \{a_k\}$, $k \in (l_j, l_{j+1})$, 对某个 $j < n-1$ 成立。

若 (D*4) 满足 $p \in \mathbb{P}^{\mathbf{1}}$, $\bar{t} \in \bigcup_{n\in\omega} \prod_{j<n} p_j$（例如，对某个 $\bar{u} \in {}^{\omega>}2$，有 $\bar{t} = \bar{\mathfrak{t}}_{\bar{u}}(p)$），则我们定义 $p^{[\bar{t}]}$ 为满足下述条件的 $\mathbb{P}^{\mathbf{1}}$

- $p_j^{[\bar{t}]} = \{t_j\}$, if $j < \ell g(\bar{t})$,
- $p_j^{[\bar{t}]} = p_j$, if $j \geq \ell g(\bar{t})$.

此外，若 $\bar{u} \in {}^n2$ 或某个 n，则我们令

$$p^{(\bar{u})} := p^{[\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{u}}(p)]}.$$

对于 $n \in \omega$, $p \in \mathbb{P}^{\infty}$，若 $d < \omega$ 是满足某个 $l_0 < l_1 < \cdots < l_{n-1} < d$ 的最小自然数，则 (D*5)

$$\forall j < n : \ \left(|p_{l_j}| = 2\right),$$

那么，对于每个 $\bar{v} = \langle v_0, v_1, .., v_{n-1}\rangle \in {}^n2$，我们将序列 $\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{v}}(p) = \langle \mathfrak{t}_{\bar{v}} : j < d\rangle \in {}^d2$ 定义为

- $\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{v}}(p)_{l_j} = \bar{t}^{p_k}_{l_j, w_j}$, where $p_{l_j} = \{\bar{t}^{p_k}_{l_j,0} <_{\text{lex}} \bar{t}^{p_k}_{l_j,1}\}$,
- $\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{v}}(p)_k = \bar{t}^{p_k}$, where $p_k = \{\bar{t}^{p_k}\}$, $k \in (l_j, l_{j+1})$ for some $j < n-1$.

(D*6) 若 $p \in \mathbb{P}^{\infty}$, $\bar{t} \in \bigcup_{n\in\omega} \prod_{j<n} p_j$（例如 $\bar{t} \in T(p)$），则我们定义 $p^{[\bar{t}]}$ 为 $\mathbb{P}^{\infty}$ 中满足以下条件的对象

- $p_j^{[\bar{t}]} = \{\bar{t}_j\}$, if $j < \ell g(\bar{t})$,
- $p_j^{[\bar{t}]} = p_j$, if $j \geq \ell g(\bar{t})$.

此外，若 $\bar{w} \in {}^n2$ 或某个 n，则我们令

$$p^{(\bar{w})} := p^{[\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{w}}(p)]}.$$

(D*7) 对于 $p \in \mathbb{P}^{\mathbb{S}}$, $\bar{s} \in {}^n2$，我们通过对 $\ell g(\bar{s})$ 进行归纳法，定义节点 $\bar{\mathfrak{t}}_{\bar{s}}(p) \in p$ 如下。设

$$\bar{\mathfrak{t}}_{\langle\rangle}(p) = \langle\rangle, \tag{2.1}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{t}}_{\bar{s}^\frown\langle 0\rangle}(p) &= \ \mathrm{stem}\left(p^{[\bar{\mathrm{t}}_{\bar{s}}(p)]}\right)^\frown\langle 0\rangle,\\ \bar{\mathrm{t}}_{\bar{s}^\frown\langle 1\rangle}(p) &= \ \mathrm{stem}\left(p^{[\bar{\mathrm{t}}_{\bar{s}}(p)]}\right)^\frown\langle 1\rangle,\end{aligned}\tag{2.2}$$

(回忆 D10)，树 T 的树干是其中唯一的最大元素

$$\{t\in T:\ \forall t'\in T:\ t\subseteq t'\ \vee\ t'\subseteq t\}).$$

注意， $q\leq_n p$当且仅当 $q\leq p$，并且对于每个 $s\in {}^n2$，我们有 $\bar{\mathrm{t}}_s(p)=\bar{\mathrm{t}}_s(q)$。

(D*8) 若 $p\in\mathbb{P}^{\mathbb{S}}$ 且 $\bar{s}\in p$，则我们将条件 $p^{[\bar{s}]}=\{\bar{t}\in p$ 定义为 $p^{[\bar{s}]}$: $\bar{t}\supseteq\bar{s}\}$，对于任意的 $\bar{s}\in {}^{\omega>}2$，我们令

$$p^{(\bar{s})}=p^{[\bar{\mathrm{t}}_{\bar{s}}(p)]}.$$

观察 2.13. 若 $p\in\mathbb{P}^\infty$, $i\in\omega$,

$$p_0=\{\bar{t}^p_0\},p_1=\{\bar{t}^p_1\},p_{i-1}=\{\bar{t}^p_{i-1}\},\tag{2.3}$$

并且我们考虑定义为如下的条件 $p'\leq p$

$$\begin{aligned}&p'_0=\{\bar{t}^{p'}_0=\bar{t}^p_0{}^\frown\bar{t}^p_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{t}^p_{i-1}\},\\ &p'_{j+1}=p_{j+i}\ (for\ j\in\omega)\end{aligned}$$

那么 $p\Vdash_{\mathbb{P}^\infty}p'\in\mathsf{G}_\sim$。

证明。假设 $p^*\leq p$，且 $p^*\perp p'$。进一步加强 p^*，不失一般性地，我们可以假设 $|p^*_0|=1$，并且对于唯一的 $\bar{t}^*\in p^*_0$，有

$$\ell g(\bar{t}^*)>|\bar{t}^p_0|+|\bar{t}^p_1|+\cdots+|\bar{t}^p_{i-1}|.$$

但这个界与 $p^*\leq p$ 及 (2.3) 一起推出

$$\bar{t}^*=(\bar{t}^p_0{}^\frown\bar{t}^p_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{t}^p_{i-1})^\frown t^p_i{}^\frown\ldots t^p_{i+k}=\bar{t}^{p'}_0{}^\frown\bar{t}^p_i{}^\frown\ldots\bar{t}^p_{i+k}$$

对于某些 $\bar{t}^p_i\in p_i=p'_1$、$\bar{t}^p_{i+1}\in p_{i+1}=p'_2$、……、$\bar{t}^p_{i+k}\in p_{i+k}=p'_{k+1}$，因此 p' 不仅与 p^* 相容，而且 $p^*\leq p'$。

$\square_{\text{Observation 2.13}}$

定义 2.14。我们令 $\bar{\ell}\in\mathcal{L}$，当且仅当 $\bar{\ell}=(\bar{\ell}^{\mathbf{0}},\bar{\ell}^{\mathbf{1}},\bar{\ell}^\infty,\bar{\ell}^{\mathbb{S}})$，其中

- $\bar{\ell}^{\mathbb{S}}=\langle\ell^{\mathbb{S}}_i:\ \ i<\omega\rangle\in {}^\omega\omega$，其中 $\sum_{i<\omega}\ell^{\mathbb{S}}_i<\infty$，
- $\bar{\ell}^{\mathbf{0}}=\langle\ell^{\mathbf{0}}_i:\ \ i\in\omega\rangle\in {}^\omega\omega$，其中 $\sum_{i<\omega}\ell^{\mathbf{0}}_i<\infty$，
- $\bar{\ell}^{\mathbf{1}}=\langle\ell^{\mathbf{1}}_i:\ \ i\in\omega\rangle\in {}^\omega\omega$，其中 $\sum_{i<\omega}\ell^{\mathbf{1}}_i<\infty$，
- $\ell^\infty=\langle\ell^\infty_i:\ \ i\in\omega\rangle\in {}^\omega\omega$，其中 $\sum_{i<\omega}\ell^\infty_i<\infty$，

定义 2.15。固定 $\langle\varepsilon^{\mathbf{0}}_j:\ \ j\in\omega\rangle\in {}^\omega\lambda_{\mathbf{0}}$，$\langle\varepsilon^{\mathbf{1}}_j:\ \ j\in\omega\rangle\in {}^\omega[\lambda_{\mathbf{0}},\lambda_{\mathbf{1}})$，$\langle\varepsilon^\infty_j:\ \ j\in\omega\rangle\in {}^\omega[\lambda_{\mathbf{1}},\lambda_\infty)$，$\langle\varepsilon^{\mathbb{S}}_j:\ \ j\in\omega\rangle\in {}^\omega[\lambda_\infty,\lambda_{\mathbb{S}})$。以下符号取决于具体固定的 $\bar{\varepsilon}^\iota$，但我们省略这一点，因为这些序列总是显而易见的。

Now

(►1) 对于 $j\in\omega$, $n\in\omega$ let

$$T^j_n(q)=T_n(q(\varepsilon^{\mathbf{0}}_j))$$

and

$$T^j(q)=\bigcup_{n\in\omega}T^j_n(q),$$

(►2) 假设 $\ell\in\mathcal{L}$, $q\in\mathbb{Q}'$。那么 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\in\mathsf{seq}_{\bar{\ell}}(q)$，当且仅当

- $\bar{s} \in {}^{\omega}({}^{<\omega}2)$ 且 $s_j \in {}^{\ell^{\mathbb{S}}_j}2$ $(j<\omega)$,
- $\bar{u} \in \prod_{j<\omega} T^j(q)$ 与 $u_j \in T^j_{\ell^{\mathbf{0}}_j}(q)$ $(j<\omega)$,
- $\bar{v} \in {}^{\omega}({}^{<\omega}2)$ 与 $v_j \in {}^{\ell^{\mathbf{1}}_j}2$ $(j<\omega)$,
- $\bar{w} \in {}^{\omega}({}^{<\omega}2)$ 与 $w_j \in {}^{\ell^{\infty}_j}2$ $(j<\omega)$。

$(\blacktriangleright_3)$ 对每个

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \langle u_j :\ j\in\omega\rangle \quad \in \textstyle\prod_{j\in\omega} T^j(q)),\\ \bar{v} &= \langle v_j :\ j\in\omega\rangle \quad \in \textstyle\prod_{j\in\omega} ({}^{\omega>}2)\,,\\ \bar{w} &= \langle v_j :\ j\in\omega\rangle \quad \in \textstyle\prod_{j\in\omega} ({}^{\omega>}2)\,,\\ \bar{s} &= \langle s_j :\ j\in\omega\rangle \quad \in \textstyle\prod_{j\in\omega} ({}^{\omega>}2)\,,\end{aligned}$$

我们令$q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in$ 定义为

- $q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\mathbf{0}}_j) = q(\varepsilon^{\mathbf{0}}_j)^{(u_j)}$ $(j\in\omega)$,
- $q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\mathbf{1}}_j) = q(\varepsilon^{\mathbf{1}}_j)^{(v_j)}$ $(j\in\omega)$,
- $q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\infty}_j) = q(\varepsilon^{\infty}_j)^{(w_j)}$ $(j\in\omega)$,
- $q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\mathbb{S}}_j) = q(\varepsilon^{\mathbb{S}}_j)^{(s_j)}$ $(j\in\omega)$,

定义 2.16。

注意到

$$\text{whenever } \bar{\ell}\in\mathcal{L}:\ |\mathbf{seq}_{\bar{\ell}}(q)| < \aleph_0, \tag{2.4}$$

由于 ℓ 具有有限和。

定义 2.17。假设序列 $\bar{\varepsilon}^{\iota}$ 如定义 2.15（$\iota\in\{\mathbf{0},\mathbf{1},\infty,\mathbb{S}\}$、和 $\ell\in\mathcal{L}$中所述，我们令偏序 $\leq_{\bar{\ell}}$ 定义为

$$\begin{aligned} p\leq_{\bar{\ell}} q \iff\ & \bullet_1\ (p\leq q)\ \wedge\\ & \bullet_2\ \mathbf{seq}_{\bar{\ell}}(p)=\mathbf{seq}_{\bar{\ell}}(q)\ \wedge\\ & \bullet_3\ \forall(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\in\mathbf{seq}_{\bar{\ell}}(q):\ p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\leq q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}.\end{aligned}$$

注意以下由我们的定义直接得到的推论：

观察 2.18。令 $\bar{\varepsilon}^{\iota}$ （$\iota\in\{\mathbf{0},\mathbf{1},\infty,\mathbb{S}\}$）如定义 2.15 中所述，并且 $\bar{\ell}\in\mathcal{L}$给定。

那么，若 $p\geq q\in\mathbb{Q}$ 成立，则 $p\geq_{\bar{\ell}} q$ 当且仅当

- 对每个 $j\in\omega$: $T^j_{\ell^{\mathbf{0}}_j}(p) = T^j_{\ell^{\mathbf{0}}_j}(q)$，并且
- 对每个 $j\in\omega$ 和 $u\in{}^{\ell^{\mathbf{1}}_j}2$，都有 $\mathfrak{t}^{\mathbf{1}}_{u^{\frown}}(p) = \mathfrak{t}^{\mathbf{1}}_{u^{\frown}}(q)$，并且
- 对每个 $j\in\omega$ 和 $v\in{}^{\ell^{\infty}_j}2$: $\mathfrak{t}^{\infty}_{v^{\frown}}(p) = \mathfrak{t}^{\infty}_{v^{\frown}}(q)$，并且
- 对每个 $j\in\omega$ 和 $s\in{}^{\ell^{\mathbb{S}}_j}2$: $\mathfrak{t}^{\mathbb{S}}_{s^{\frown}}(p) = \mathfrak{t}^{\mathbb{S}}_{s^{\frown}}(q)$。

观察 2.19。若 $p,q\in\mathbb{Q}$, $\ell\in\mathcal{L}$, $\bar{\varepsilon}^{\iota}$ ($\iota\in\{\mathbf{0},\mathbf{1},\infty,\mathbb{S}\}$) 如定义 2.15 中所述，$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\in\mathsf{seq}_{\bar{\ell}}(p)$，且 $q\leq p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$，则存在某个 $q_*\leq_{\bar{\ell}} p$，

$$q_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\Vdash q\in\mathbf{G},$$

即使 $q_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=q$，若还对每个 j 都成立 $p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\infty}_j)\geq_{\ell^{\infty}_j} q(\varepsilon^{\infty}_j)$。

此外，我们可以假设，每当 $m\in\omega$，且 $s'\in{}^{\omega>}2$ 与 s_m 不可比较（即 $s'\not\subseteq s_m$, $s'\not\supseteq s_m$）时，$q_*(\varepsilon^{\mathbf{0}}_m)\in\mathbb{P}^{\mathbf{0}}$ 满足 $q_*(\varepsilon^{\mathbf{0}}_m)^{(s')} = p(\varepsilon^{\mathbf{0}}_m)^{(s')}$。

请注意，一般而言，我们不能期待上述 $q_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=q$ 成立，因为对于形如 ε^{∞}_j 的坐标，可能有 $q(\varepsilon^{\infty}_j)_0=\{\bar{t}\}$，其中 $\bar{t}=(\bar{t}^*)^0{}^{\frown}(\bar{t}^*)^1$，且 $(\bar{t}^*)^0\in q_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\infty}_j)_0$,，以及 $(\bar{t}^*)^1\in q_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^{\infty}_j)_1$。

观察 **2 20** $p \geq q \in \mathbb{Q}$ $\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}\ \bar{s}\ \in\ {}_{\bar{\ell}}\ q$ $\leq$。若 , $\bar{\ell} \in \mathcal{L}$, (, , ,) $p^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}'}$ $\bar{u}'\ \bar{v}'\ \bar{w}'\ \bar{s}' \in {}_{\bar{\ell}}\ p$ seq ( ), 则对某个 (, , ,) seq ( ), 有 $q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}})$。

下一个断言验证了 $(\circledast)_1$，和 $(\circledast)_2$ 中的真适性部分。

断言 2.21. 设 $q \in \mathbb{Q}$, $D_0, D_1, \ldots, D_i, \ldots$ 是 $\mathbb{Q}$ 的一个可数极大反链序列。那么，取一个适当的扩张 $q' \leq q$，使得对每个 $i \in \omega$，q' 仅与 D_i 中有限多个元素相容。

证明。假设 $q \in \mathbb{Q}$ 和各个 D_j 都已固定。下面我们将简述一个用于 Baumgartner 公理 A 的标准融合论证。

以下是观察 2.9 的一个平凡应用：

观察 2.22. 假设序列 $\langle q_n : n \in \omega \rangle \in {}^{\omega}\mathbb{Q}$ 是递减的，序列 $\bar{\varepsilon}^{\iota}$ ($\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty, \mathbb{S}\}$) 如定义 2.15 所述，并且对每个 k，都有 $\bar{\ell}^k = ((\bar{\ell}^k)^{\mathbf{0}}, (\bar{\ell}^k)^{\mathbf{1}}, (\bar{\ell}^k)^{\infty}, (\bar{\ell}^k)^{\mathbb{S}}) \in \mathcal{L}$，满足

- 对于每个 $\alpha \in \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{supp}(q_n)$，都有 $\alpha = \varepsilon^{\iota}_j$ 对某个 ι 和 j成立，并且$\langle (\ell^k)^{\iota}_j : k \in \omega \rangle$ 是不减的，收敛于 ∞,
- $q_{n+1} \leq_{\bar{\ell}^n} q_n$ 对每个 n都成立。

那么存在序列 $\langle q_n$ 的一个公共下界 $q_\omega \in \mathbb{Q} : n \in \omega\rangle$。此外，存在 q_ω，使得对每个 n $q_\omega \leq_{\bar{\ell}^n} q_n$都成立。

我们将定义满足以下条件的序列 $\langle q_i : i < \omega\rangle$、 $\langle \varepsilon^{\mathbf{0}}_i : i \in \omega\rangle$、 $\langle \varepsilon^{\mathbf{1}}_i : i \in \omega\rangle$、$\langle \varepsilon^{\infty}_i : i < \omega\rangle\langle \varepsilon^{\mathbb{S}}_i : i < \omega\rangle$、 $\langle \bar{\ell}^i : i \in \omega\rangle$：

($\boxtimes_1$) $q_0 = q$，并且对每个 i 都有 $q_i \in \mathbb{Q}$; ($\boxtimes_2$) $\{\varepsilon^{\mathbf{0}}_i : i \in \omega\} \subseteq \lambda_{\mathbf{0}}$、 $\{\varepsilon^{\mathbf{1}}_i : i \in \omega\} \subseteq \lambda_{\mathbf{1}} \setminus \lambda_{\mathbf{0}}$、 $\{\varepsilon^{\infty}_i : i < \omega\} \subseteq \lambda_\infty \setminus \lambda_{\mathbf{1}}$、$\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_i : i < \omega\} \subseteq \lambda_{\mathbb{S}} \setminus \lambda_\infty$; ($\boxtimes_3$) 对每个 n $\mathrm{supp}(q_n)$， $\subseteq \{\varepsilon^{\iota}_j : \iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty, \mathbb{S}\}$、 $j \in \omega\}$; ($\boxtimes_4$) 对每个 $\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty, \mathbb{S}\}$ 和 $j \in \omega$，序列

$$\langle (\ell^n)^{\iota}_j : n \in \omega\rangle \text{ 是非递减的，并趋于 } \infty,$$

($\boxtimes_5$) $\forall n$ $q_n \geq_{\bar{\ell}^n} q_{n+1}$, ($\boxtimes_6$) $\forall n$ 条件 q_{n+1} 仅与D_n中的有限多个条件相容。

只要这样的序列存在，我们就可以利用观察 2.22，从而完成断言 2.21 的证明。

我们显然可以定义一个如观察 2.22 中那样的 $\bar{\ell}^i$序列。现在根据观察 2.18 以及一些标准的记账论证，很容易看出，一旦我们说明如何利用 q_n 和 $\bar{\varepsilon}^{\iota}$的适当片段来定义条件 $q_{n+1} \in \mathbb{Q}$，就可以完成整个归纳法。这个 q_{n+1} 将满足

($\blacktriangle_1$) $q_{n+1} \leq_{\bar{\ell}^n} q_n$, ($\blacktriangle_2$) 只要 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_n)$，那么 $(q_{n+1})_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 就恰好与 D_n中的一个元素相容。

对于此 ($\circledcirc_1$)，令

$$M = |\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_n)|,$$

并固定一个枚举

$$\langle (\bar{u}^i, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{s}^i) : i < M\rangle \tag{2.5}$$

$\mathsf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_n)$。

注意，(▲$_2$)包含 M个不同的目标，每个目标都对应于（2.5）中的某个$(\bar{u}^i, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{s}^i)$。因此

(◎$_2$)我们构造序列 $\langle q_i^* : \ i \leq M\rangle$ 满足

$$q_0^* = q_n \geq_{\bar{\ell}^n} q_1^* \geq_{\bar{\ell}^n} \cdots \geq_{\bar{\ell}^n} q_M^*,$$

and

$$(\forall i < M) : \ (q_{i+1}^*)^{(\bar{u}^i, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{s}^i)} \Vdash p_* \in \mathbf{G}, \ \text{ for some } p_* \in D_n,$$

因此， q_M^* 将可行（即(▲$_1$)、(▲$_2$)成立）。

假设 $i < M$和 q_i^*已定义，选取 $q' \leq (q_i^*)_{(\bar{u}^i, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{s}^i)}$，使得对于某个 $p_* \in D_n$，有 $q' \leq p_*$。令$q_{i+1}^* \leq_{\bar{\ell}^n} q_i^*$，$(q_{i+1}^*)_{(\bar{u}^i, \bar{v}^i, \bar{w}^i, \bar{s}^i)} \Vdash p_* \in \mathbf{G}$（由观察 2.19 保证）。子句(◎$_2$)显然成立，因此证明完毕。

$\square_{\text{Claim}2.21}$

我们可以转而证明（⊛）$_3$:

断言 2.23。对于上文定义的强迫 $\mathbb{Q}$，条件（⊛）$_3$ 成立。

证明。固定一个 $\mathbb{Q}$-名称 $\underset{\sim}{z}$，满足 $q \Vdash_{\mathbb{Q}} \underset{\sim}{z} \in 2^\omega$。根据断言 2.21（以及标准的稠密性论证），我们可以假设:

（⊠$_1$） $\underset{\sim}{z}$ 是某个 $X_{\mathbf{0}} \in [\lambda_{\mathbf{0}}]^{\aleph_0}$, $X_{\mathbf{1}} \in [\lambda_{\mathbf{1}} \setminus \lambda_{\mathbf{0}}]^{\aleph_0}$,$X_\infty \in [\lambda_\infty \setminus \lambda_{\mathbf{1}}]^{\aleph_0}$, $X_{\mathbb{S}} \in [\lambda_{\mathbb{S}} \setminus \lambda_\infty]^{\aleph_0}$ 的 $\mathbb{Q}' = \prod_{\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty, \mathbb{S}\}} \mathbb{Q}_{X_\iota}^\iota$-名称,

此外，不妨设。

（⊠$_2$） $\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z} \notin V$。（⊠$_3$）固定枚举 $X_{\mathbf{0}} = \{\varepsilon_j^{\mathbf{0}} : \ j \in \omega\}$, $X_{\mathbf{1}} = \{\varepsilon_j^{\mathbf{1}} : \ j \in \omega\}$, $X_\infty = \{\varepsilon_j^\infty : \ j \in \omega\}$, $X_{\mathbb{S}} = \{\varepsilon_j^{\mathbb{S}} : \ j \in \omega\}$。

(⊠$_4$) 若 $\varepsilon \in X_{\mathbf{1}} \cup X_\infty \cup X_{\mathbb{S}}$, $q \in \mathbb{Q}'$, $\bar{s} \in {}^{\omega>}2$，我们令 $q^{\{\varepsilon\}, (\bar{s})} \in \mathbb{Q}'$ 定义为

$$\begin{aligned} q^{\{\varepsilon\}, (\bar{s})} \restriction X_{\mathbf{0}} \cup X_{\mathbf{1}} \cup X_\infty \cup X_{\mathbb{S}} \setminus \{\varepsilon\} = &\ (q \restriction X_{\mathbf{0}} \cup X_{\mathbf{1}} \cup X_\infty \cup X_{\mathbb{S}} \setminus \{\varepsilon\}), \\ q^{\{\varepsilon\}, (\bar{s})}(\varepsilon) = &\ (q(\varepsilon)^{(\bar{s})}). \end{aligned}$$

(⊠$_5$) 若 $\varepsilon \in X_{\mathbf{1}} \cup X_\infty \cup X_{\mathbb{S}}$, $q, p \in \mathbb{Q}'$, $n \in \omega$，则 $q \leq_{\{\varepsilon\}, n} p$，若 $q \leq p$ 且$q(\varepsilon) \leq_n p(\varepsilon)$。

我们还需要使用定义 2.15 中引入的术语。

定义 2.24. 若 $\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z} \in 2^\omega$, $n \in \omega$, $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$，则我们令 $q \in D^{\iota, \mathbf{un}}_n(\underset{\sim}{z})$（其中 un 是“唯一”的缩写），当且仅当

(i) $q \in \mathbb{Q}'$，(ii) 存在 $k \in \omega$，以及满足以下条件的 $i_0 \neq i_1 \in \{0, 1\}$：($ii$)$_1$ $q^{\{\varepsilon_n^\iota\}, (\langle 0\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_k = i_0$，($ii$)$_2$ $q^{\{\varepsilon_n^\iota\}, (\langle 1\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_k = i_1$，并且 ($ii$)$_3$ 只要 $q \geq_{\{\varepsilon_n^\iota\}, 1} r$，且 $r^{\{\varepsilon_n^\iota\}, \langle 0\rangle}$ 或 $r^{\{\varepsilon_n^\iota\}, \langle 1\rangle}$ 对某个$j \neq k$ 决定了 $\underset{\sim}{z}_j$，那么 r也会如此。

定义 2.25. 若 $\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z} \in 2^\omega$, $n \in \omega$, $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$，则我们令 $q \in D^{\iota, \mathbf{eq}}_n(\underset{\sim}{z})$，当且仅当每当 $q \geq_{\{\varepsilon_n^\iota\}, 1} r$，且 $r^{\{\varepsilon_n^\iota\}, (\langle 0\rangle)}$ 或 $r^{\{\varepsilon_n^\iota\}, (\langle 1\rangle)}$ 对某个 $k \in \omega$ 决定 $\underset{\sim}{z}_k$ 时，r 也如此。

定义 2.26. 若 $\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z} \in 2^\omega$, $n \in \omega$, $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$，则我们令 $q \in D^{\iota, \mathbf{mul}}_n(\underset{\sim}{z})$，当且仅当不存在 $q' \leq_{\{\varepsilon_n^\iota\}, 1} q$ 满足 $q' \in D^{\iota, \mathbf{un}}_n(\underset{\sim}{z}) \cup D^{\iota, \mathbf{eq}}_n(\underset{\sim}{z})$。

请注意以下内容：

事实 2.27. 如果 $\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z} \in 2^\omega$, $n \in \omega$, $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$，那么

(1) $D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{un}}(\underset{\sim}{z}) \cup D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{mul}}(\underset{\sim}{z}) \cup D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{eq}}(\underset{\sim}{z})$ 在 $\mathbb{Q}'$ 中稠密（事实上，甚至是 $\leq_{\{\varepsilon^\iota_n\},1}$-稠密）。(2) 若 $q \in D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{un}}(\underset{\sim}{z}))$ ($D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{mul}}(\underset{\sim}{z})$, $D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{eq}}(\underset{\sim}{z})$, 分别），且 $q' \leq_{\{\varepsilon^\iota_n\},1} q$，则 $q' \in D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{un}}(\underset{\sim}{z}))$ ($D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{mul}}(\underset{\sim}{z})$, $D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{eq}}(\underset{\sim}{z})$, 分别）。(3) $D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{un}}(\underset{\sim}{z})$, $D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{mul}}(\underset{\sim}{z})$, $D^\iota_{,n}{}^{\boldsymbol{eq}}(\underset{\sim}{z})$ 两两不相交。

当前主张的证明将通过阐明子主张 2.28 和 2.33 来完成：

¯主张 2.28. 设给定 $q \in \mathbb{Q}'$、$\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z} \in 2^\omega$ 和 $\bar{\ell} = (\bar{\ell}^{\mathbf{0}}, \bar{\ell}^{\mathbf{1}}, \bar{\ell}^{\infty}, \bar{\ell}^{\mathbb{S}}) \in \mathcal{L}$，并设 $m \in \omega$ 固定。那么存在某个 $r \in \mathbb{Q}'$, $r \leq_{\bar{\ell}} q$，使得对于每个 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}}(r)$，以下情况之一成立：

$\odot^m_1(r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})$：$r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 迫使 $\underset{\sim}{z}$ 不依赖于 $\{p(\varepsilon^{\mathbb{S}}_m) : p \in \mathsf{G}\}$，也就是说，不存在 $p \in \mathbb{Q}'$, $p \leq r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 使得存在 $k \in \omega$ 和 $c \in \{0,1\}$：

$$\begin{aligned} p^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)} &\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z}_k = c, \\ p^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 1\rangle)} &\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z}_k = 1 - c. \end{aligned}$$

$\odot^m_2(r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})$：对于每个 $p \in \mathbb{Q}'$, $p \leq r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$，都存在 $q \leq p$, $k \in \omega$ 和 $c \in \{0,1\}$，使得：

$$\begin{aligned} q^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)} &\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z}_k = c, \\ q^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 1\rangle)} &\Vdash_{\mathbb{Q}'} \underset{\sim}{z}_k = 1 - c. \end{aligned}$$

证明。注意到

(■1) 若 $p \geq r \in \mathbb{Q}'$，则 $\odot^m_1(p) \to \odot^m_1(r)$，类似地，对每个 $m \in \omega$, $\odot^m_2(p) \to \odot^m_2(r)$。

注意

(■2) 若对于 $p \in \mathbb{Q}$，不存在满足 $\odot^m_1(p')$ 的扩张 $p' \leq p$，则 $\odot^m_2(p)$ 成立（反之亦然），

因此，

（■3）对于 $n \in \omega$ 该集合

$$D^m_\odot = \{p \in \mathbb{Q}' : \odot^m_1(p) \vee \odot^m_2(p)\}$$

是稠密开集（且集合 $\{p \in \mathbb{Q}' : \odot^m_1(p)\}$、$\{p \in \mathbb{Q}' : \odot^m_2(p)\}$ 是开集）。

为便于后文引用，我们指出观察 2.20 的以下推论：

¯观察 2.29。若 $r \in \mathbb{Q}'$ 由子断言 2.28 给出（对于固定的 m 和 $\ell \in \mathcal{L}$），且 $r \geq_{\bar{\ell}} r'$，则对于每个（$\bar{u}$、$\bar{v}$、$\bar{w}$、$\bar{s}$）$\in$序列$_{\bar{\ell}}$（r），我们有（r'）$_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in D^m_\odot$，即以下两者之一成立：$\odot^m_1$（（$r'$）$_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$），或 $\odot^m_2$（（r'）$_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$）。

事实 2.30. 对于每个 $p \in \mathbb{Q}'$、$m \in \omega$，$(\bar{u}、\bar{v}、\bar{w}、\bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}}(p)$，存在 $p' \leq_{\bar{\ell}} p$，使得 $\odot^m_1((p')_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})$ 成立，或 $\odot^m_2((p')^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})$ 成立。

证明。利用 (■3) 选择 $p'' \leq p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$，使其满足 $p'' \in D^m_\odot$。通过类似于观察 2.13 中所用的论证，我们可以假设对于每个 j, $p''(\varepsilon^\infty_j) \leq_{\ell^\infty_j} p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}(\varepsilon^\infty_j)$，因此根据观察 2.19，存在一个条件 $p' \leq_{\bar{\ell}} p$，使得 $(p')_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} = p''$。$\square_{\mathrm{Fact}2.30}$

由于 $\leq_{\bar{\ell}}$ 是一个偏序，枚举有限集合

$$\left\{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}}(q)\right\}$$

作为 $\{(\bar{u}^i,\bar{v}^i,\bar{w}^i,\bar{s}^i)\colon\ i<M\}$ 我们可以选取一个序列

$$q_0=q_0^*\geq_{\bar{\ell}}\cdots\geq_{\bar{\ell}} q^*_{M-1}\geq_{\bar{\ell}} q^*_M$$

要求满足 $(q^*_{i+1})_{(\bar{u}^i,\bar{v}^i,\bar{w}^i,\bar{s}^i)}\in D^m_{\odot}(i<M)$（回顾观察 2.18）。因此 $r=q^*_M$可行。

$\square_{\mathrm{Subclaim}2.28}$

现在我们可以回到断言 2.23 的证明。

定义 2.31。固定一个序列 $\langle\xi_n:\ n\in\omega\rangle$，该序列列出

$$X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty\cup X_{\mathbb{S}}=\{\varepsilon^\iota_j:\ \iota\in\{\mathbf{0},\mathbf{1},\infty,\mathbb{S}\},\ j\in\omega\}$$

使每个这样的元素都出现无穷多次（其中 X^ι 来自 $(\boxtimes_3)$）。然后我们定义

$\bar{}\mathbf{1}$）序列 $\langle\ell^n:\ n\in\omega\rangle$ 使得$_$

- $\bar{\ell}^n=((\bar{\ell}^n)_{\mathbf{0}},\ (\bar{\ell}^n)_{\mathbf{1}},\ (\bar{\ell}^n)^\infty,\ (\bar{\ell}^n)^{\mathbb{S}})\in\mathcal{L}$ 对每个 n，$_$
- $\bar{\ell}^0$ 由常零序列组成，$_$
- 若 $\xi_n=\varepsilon^\iota_m$，则我们定义 $\bar{\ell}^{n+1}$ 使得

$$(\ell^{n+1})^{\iota'}_k=\begin{cases}(\bar{\ell}^n)^{\iota'}_k+1, & \text{if } \iota'=\iota\ \wedge\ k=m\\ (\bar{\ell}^n)^{\iota'}_k, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

2）对于 $q\in\mathbb{Q}'$，$n\in\omega$ 以及 $(\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{w},\ \bar{s})\in$序列$_{\bar{\ell}^n}(q)$，我们定义序列

$$\bar{t}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=\langle t_j^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}:\ j<n\rangle$$

归纳定义如下：若 $k<n$，$K=|\{j<k:\ \xi_k=\xi_j\}|$ 且若 $\xi_k=$

- $=\varepsilon^{\mathbf{0}}_m$, then set $t_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=u_m(K)$,
- $=\varepsilon^{\mathbf{1}}_m$, then set $t_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=v_m(K)$,
- $=\varepsilon^{\infty}_m$, then set $t_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=w_m(K)$,
- $=\varepsilon^{\mathbb{S}}_m$, then set $t_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=s_m(K)$,

3) 对于 $q\in\mathbb{Q}'$ and the finite sequence t，我们令

$$\mathbf{qp}(q,\bar{t}')=(\bar{u}_*,\bar{v}_*,\bar{w}_*,\bar{s}_*),$$

if

$$\bar{t}'=\bar{t}^{(\bar{u}_*,\bar{v}_*,\bar{w}_*,\bar{s}_*)},$$

（其中 $(\bar{u}_*,\bar{v}_*,\bar{w}_*,\bar{s}_*)\in\mathbf{seq}_{\bar{\ell}|\bar{t}|}(q)$，且 $\bar{t}^{(u_*,\bar{v}_*,\bar{w}_*,\bar{s}_*)}$ 按上述方式定义），

4) 并且（对于 $q\in\mathbb{Q}'$），对于 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})$、$(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')\in\bigcup_{j<\omega}\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^j}(q)$，我们按自然方式定义 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\sqsubseteq(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')$，即

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\sqsubseteq(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}'),\ \text{iff}\ \bar{t}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\subseteq\bar{t}^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')},$$

以及

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\sqsubset(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}'),$$

当且仅当 $((\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\sqsubseteq(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')\ \wedge\ (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\neq(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')$,

5) 对于 $(q\in\mathbb{Q}')$，$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\in\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q)$，我们令 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction k$ 为满足该条件的 $\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^k}(q)$ 的（唯一）成员 $(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')$

$$(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')\sqsubseteq(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}).$$

观察 2.32。

a) 若 $\bar{t}^*$ 和 $\bar{t}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$（其中 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^{|\bar{t}^*|}}(q)$）满足：每当 k 满足 $t_k \neq t_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 时，则 $(*)_k$ $t_k \in \{0,1\}$，且 ξ_k 并非任何 m 对应的 $\varepsilon_m^{\mathbf{0}}$ 形式，则 $\mathrm{qp}(q,\bar{t}^*)$ 有定义。b) 若

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \neq (\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}') \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q)$$

满足以下条件：$\bar{t}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 和 $\bar{t}^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}$ 恰好在一个坐标上不同，即满足 $(*)_k$ 的第 k 个坐标，则存在一个条件 $p' \leq_{\{\xi_k\},1} p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction k}$，使得

$$\{(p')^{\{\xi_k\},(\langle 0\rangle)}, (p')^{\{\xi_k\},(\langle 1\rangle)}\} = \{p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}, p^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}\}.$$

子断言 2.33. 设 r, $\bar{z}$ 如子断言 2.28 中所述，且 $\langle \ell^n : n \in \omega\rangle$ 由定义 2.31 定义。假设 $r \Vdash \bar{z} \notin V$。则存在一个条件 $r_* \in \mathbb{Q}', r \geq r_*$，以及

$$\bar{y} = \left\langle y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} : n \in \omega,\ (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_*)\right\rangle,$$
$$\bar{\mathbf{x}} = \left\langle \mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} : n \in \omega,\ (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_*)\right\rangle,$$

使得对于每个 n

$\varphi_a(r_*,\bar{y},\bar{\mathbf{x}})$：对于每个 n 以及 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_*)$：
- $y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in {}^{\omega>}2$，
- $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in \{\mathbf{un},\mathbf{eq},\mathbf{mul}\}$，

$\varphi_b(r_*,\bar{y})$：对于每个 $m < n$：
- $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^m}(r_*)$，
- $(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}') \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_*)$，

我们有

$$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \sqsubset (\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}') \Rightarrow y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \subsetneq y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')},$$

$\varphi_c(r_*,\bar{y})$：对于每个 n，$(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_*)$：

$$(r_*)^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \Vdash \bar{z} \in [y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}],$$

$\varphi_d(r_*,\bar{y},\bar{\mathbf{x}})$：如果 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^{n+1}}(r_*)$，那么

1) *if $\xi_n = \varepsilon_m^{\mathbb{S}}$ for some m, then $\odot_1^m(r_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n}) \vee \odot_2^m(r_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n})$ (from Subclaim 2.28), and*

$$\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n} = \mathbf{eq} \iff \odot_1^m(r_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n}),$$

$$\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n} = \mathbf{mul} \iff \odot_2^m(r_*^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n}),$$

2) 若 $\xi_n = \varepsilon_m^{\iota}$，其中 $\iota \in \{\mathbf{1},\infty\}$ 对某个 m 成立，则对于每个 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in$ 序列$_{\bar{\ell}^n}(r_*)$
- $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} =$ 等价于，当且仅当 $r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})*} \in D^{\iota}_{m,\mathbf{eq}}(\bar{z})$，

$\varphi_e(r_*,\bar{y},\bar{\mathbf{x}})$：若 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \neq (\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}') \in$ 序列$_{\bar{\ell}^{n+1}}(r_*)$（对某个 n），满足以下条件 $\bar{u} = \bar{u}'$，则以下蕴含关系成立：

$e1$) 若 $\xi_n = \varepsilon_m^{\mathbb{S}}$ 对某个 m，$\bar{s}_m \neq \bar{s}'_m$，且 $\odot_2^m((r_*)^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})$，则存在存在

$$j \geq \ell g(y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n}, \ell g(y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')\restriction n}),$$

使得 $(j < \ell g(y^{(u,v,w,\bar{s})}, \ell g(y^{(u',v',w^{\iota},s^{\iota})}))$ 且

$$y_j^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \neq y_j^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}.$$

$e2)$ *if* $\psi((\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}),(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}'))$, *under which we mean that* $(\bar{u}=\bar{u}'$, *and) for each* $k<n+1$ *either*

- $t_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=t_k^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}$, *or*
- $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction k-1}=\mathbf{eq}$,

then $y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}=y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}$,

$e3)$ *if* $\xi_n=\varepsilon^{\mathbf{1}}_m$ *or* ε^{∞}_m *for some* m, *and*

(i) $\psi((\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n,(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')\restriction n)$, *but*

(ii) $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n}\neq\mathbf{eq}$ *and* $t_n^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\neq t_n^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}$,

(iii) and ξ_n *is of the form* $\varepsilon^{\mathbf{1}}_m$, *or* ε^{∞}_m *for some* m,

then

- *if* $\xi_n=\varepsilon^{\mathbf{1}}_m$, *then*

$$\exists i<\ell g(y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}),\ell g(y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}):\\ y_i^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\neq y_i^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')},$$

moreover, if this i *is unique, then*

$$y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\restriction i=y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}\restriction i\neq\mathfrak{s}_i$$

(where $\bar{\mathfrak{s}}$ *is from* (x_1), (x_2)*),*

- *if* $\xi_n=\varepsilon^{\infty}_m$, *then*

$$\exists i<i'<\ell g(y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}),\ell g(y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}):\\ y_i^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\neq y_i^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}\ \ \textit{and}\\ y_{i'}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\neq y_{i'}^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')},$$

首先，我们验证断言 2.23，条件是采用子断言 2.33 给出的 r 的扩张 r_* 以及 $y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$，即满足 $\varphi_a(r_*,\bar{y},\bar{}\mathbf{x})$–$\varphi_e(r_*,\bar{y},\bar{}\mathbf{x})$。首先定义

$$T_*=\{y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}:\ (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\in\bigcup_{n\in\omega}\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r^*)\},$$

并注意到

$$r_*\Vdash\underset{\sim}{z}\in[T_*].$$

As

$$\mathbb{Q}'\simeq\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{X_{\mathbf{0}}}\times\mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{X_{\mathbf{1}}}\times\mathbb{Q}^{\infty}_{X_\infty}\times\mathbb{Q}^{\mathbb{S}}_{X_{\mathbb{S}}},$$

我们可以

(1) 首先向 V 添加一个 $\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{X_{\mathbf{0}}}$-泛型滤子 $\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}}$，其中有 $r_*\restriction X_{\mathbf{0}}\in\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}}$，并定义 $T_{\mathbf{0}}\in V[\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}}]$，使得 $[T_{\mathbf{0}}]$ 是 $\mathbb{G}_{\mathbf{0}}(\bar{\mathfrak{s}})$-独立的，并且

$$V[\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}}]\models\text{“}r_*\restriction(X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty\cup X_{\mathbb{S}})\Vdash_{\mathbb{Q}'\restriction(X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty\cup X_{\mathbb{S}})}\underset{\sim}{z}\in[T_{\mathbf{0}}]\text{”},\tag{2.6}$$

or

（2）添加一个 $\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{X_{\mathbf{0}}}\times\mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{X_{\mathbf{1}}}$-泛型滤子 $\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}}$ 到 V，使其满足 $r_*\restriction(X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}})\in\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}}$，并定义 $T_{\mathbf{1}}\in V[\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}}]$，使得 $[T_{\mathbf{1}}]$ 是 $\mathbb{G}_{\mathbf{1}}$-独立的，并且

$$V[\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}}]\models\text{“}r_*\restriction(X_\infty\cup X_{\mathbb{S}})\Vdash_{\mathbb{Q}'\restriction(X_\infty\cup X_{\mathbb{S}})}\underset{\sim}{z}\in[T_{\mathbf{1}}]\text{”},\tag{2.7}$$

or

(3) 向 V 中加入一个 $\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{X_{\mathbf{0}}}\times\mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{X_{\mathbf{1}}}\times\mathbb{Q}^{\infty}_{X_\infty}$-泛型滤子 $\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty}$，满足 $r_*\restriction(X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty)\in\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty}$，并定义 $T_\infty\in V[\mathsf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty}]$，使得 $[T_\infty]$ 是 E_0-独立的，并且

$$V[\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty}]\models\text{“}r_*\restriction(X_{\mathbb{S}})\Vdash_{\mathbb{Q}'\restriction X_{\mathbb{S}}}\underset{\sim}{z}\in[T_\infty]\text{”}.\tag{2.8}$$

因此，固定相互泛型滤子 $\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}}$、$\mathbf{G}_{X_{\mathbf{1}}}$、$\mathbf{G}_{X_\infty}$（包含 $r_*{\restriction}X_{\mathbf{0}}$、$r_*{\restriction}X_{\mathbf{1}}$ 和 $r_*{\restriction}X_\infty$），并按如下方式定义 $T_{\mathbf{0}} \in V[\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}}]$、$T_{\mathbf{1}} \in V[\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}} \times \mathbf{G}_{X_{\mathbf{1}}}]$、$T_\infty \in V[\mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}} \times \mathbf{G}_{X_{\mathbf{1}}} \times \mathbf{G}_{X_\infty}]$:

$$T_{\mathbf{0}} = \{y^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)} :\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s) \in \bigcup_{n\in\omega} \mathbf{seq}_{\bar\ell^n}(r_*) :\ r_*^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}{\restriction}X_{\mathbf{0}} \in \mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}}\},$$

$$T_{\mathbf{1}} = \{y^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)} :\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s) \in \bigcup_{n\in\omega} \mathbf{seq}_{\bar\ell^n}(r_*) :\ r_*^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}{\restriction}(X_{\mathbf{0}} \cup X_{\mathbf{1}}) \in \mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}}\},$$

$$T_\infty = \{y^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)} :\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s) \in \bigcup_{n\in\omega} \mathbf{seq}_{\bar\ell^n}(r_*) :\ r_*^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}{\restriction}(X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty) \in \mathbf{G}_{X_{\mathbf{0}}\cup X_{\mathbf{1}}\cup X_\infty}\},$$

（回顾定义 2.7），对于每个固定的 n

$$\{r_*^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)} :\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s) \in \mathbf{seq}_{\bar\ell^n}(r_*)\} \text{ is predense below } r_*,$$

因此，标准的稠密性论证蕴含 (2.6)、(2.7) 和 (2.8)。还需检验 $[T_{\mathbf{0}}]$ ($[T_{\mathbf{1}}]$, $[T_\infty]$, 分别地) 确实是 $\mathbb{G}_0(\bar{\mathfrak{s}})$- ($\mathbb{G}_1$-、$E_0$-，分别地)-独立的。对此，只需检验以下断言（使用子断言 2.33 中的 $\varphi_b(r^*,\bar y)$、$\varphi_e(r^*,\bar y)$），留给读者完成:

- 对于每个分支 $\langle b_i :\ i\in\omega\rangle$ 中存在一个无限序列 $\langle(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i) : i\in\omega\rangle$，使得 $(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i) \in \mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_*)$ 满足
$$(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i) \sqsubseteq (\bar u^{i+1},\bar v^{i+1},\bar w^{i+1},\bar s^{i+1}),$$
并且 $b_i = y^{(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i)}$（对每个 $i\in\omega$）（回想一下，$\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_*)$ 根据 (2.4) 是有限的，并使用 K″onig 定理）。
- 如果 $\langle(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i) :\ i\in\omega\rangle$ 和 $\langle((\bar u')^i,(\bar v')^i,(\bar w')^i,(\bar s')^i) :\ i\in\omega\rangle$ 彼此不同、递增的、$(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i)$，$((\bar u')^i,(\bar v')^i,(\bar w')^i,(\bar s')^i) \in \mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_*)$，并且对每个 i 都有 $\bar u^i = (\bar u')^i$，那么以下情况至少有一种成立:
  - $(\wp)_1$ 对每个 n，前提 $e2)$（来自 $\varphi_e(r_*,\bar y)$）都成立，因此
  $$y^{(\bar u^n,\bar v^n,\bar w^n,\bar s^n)} = y^{((\bar u')^n,(\bar v')^n,(\bar w')^n,(\bar s')^n)}.$$
  - $(\wp)_2$ 对某个 n，$e1$）中的前提成立，因此它无限多次成立（因为 $\{q\in\mathbb{Q}' :$ 对于任意 m，$\odot_2^m(q)\}$ 是开集），所以 $\cup\{y^{(\bar u^n,\bar v^n,\bar w^n,\bar s^n)} : n\in\omega\}$ 以及 $\cup\{y^{((\bar u')^n,(\bar v')^n,(\bar w')^n,(\bar s')^n)} :$ 在无限多个数字上不同。
  - $(\wp)_3$ 对某个 n，$e3$）中的前提成立，因此 $\cup\{y^{(\bar u^n,\bar v^n,\bar w^n,\bar s^n)} :\ n\in\omega\}$ 和 $\cup\{y^{((\bar u')^n,(\bar v')^n,(\bar w')^n,(\bar s')^n)} :$ 在 $\mathbb{G}_0(\bar{\mathfrak{s}})$ 中不连通。
- 若 $\langle(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i) :\ i\in\omega\rangle$ 且 $\langle((\bar u')^i、(\bar v')^i、(\bar w')^i、(\bar s')^i) :\ i\in\omega\rangle$ 彼此不同、$\sqsubseteq$-递增的 $(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i)$、$((\bar u')^i、(\bar v')^i、(\bar w')^i、(\bar s')^i) \in$ 序列$_{\bar\ell^i}(r_*)$，并且对每个 i，都有 $\bar u^i = (\bar u')^i$、$\bar v^i = (\bar v')^i$，那么要么 $(\wp)1$ 要么 $(\wp)2$ 成立，要么对于某个 n，$\wp_3$（$e3$中的前提）成立；其中必然有 $\xi_n = \varepsilon^\infty_m$ 对于某个 m 成立（因为对每个 i 都有 $\bar v^i = (\bar v')^i$，特别地有 $v^{n+1}_m = (v')^{n+1}_m$），因此 $\cup\{y^{(\bar u^n,\bar v^n,\bar w^n,\bar s^n)} :\ n\in\omega\}$ 且 $\cup\{y^{((\bar u')^n、(\bar v')^n、(\bar w')^n、(\bar s')^n)} :\ n\in\omega\}$至少在两个数字上不同。
- 若 $\langle(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i) :\ i\in\omega\rangle$ 和 $\langle((\bar u')^i,(\bar v')^i,(\bar w')^i,(\bar s')^i) :\ i\in\omega\rangle$ 彼此不同、$\sqsubseteq$-递增，且 $(\bar u^i,\bar v^i,\bar w^i,\bar s^i)$，$((\bar u')^i,(\bar v')^i,(\bar w')^i,(\bar s')^i) \in \mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_*)$，并且对每个 i，都有 $\bar u^i = (\bar u')^i$，$\bar v^i = (\bar v')^i$，$\bar w^i = (\bar w')^i$，则 $(\wp)1$ 或 $(\wp)2$ 成立。

注意，上述断言在传递模型之间是绝对的。

证明。（子断言 2.33）与断言 2.21 的证明类似

(⧫$_1$) 我们将定义满足以下方案要求的序列

$$\begin{aligned}&\langle r_i:\ i<\omega\rangle,\\ &\langle y^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}:\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in \mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_i), i\in\omega\rangle\\ &\langle \mathbf{x}_{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}:\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in \mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_i), i\in\omega\rangle\end{aligned}$$

满足以下方案的要求：

(⊠$_1$) $r_0=r$，并且对每个 i $r_i\in\mathbb{Q}'$，

(⊠$_2$) $\forall i\ r_i\geq_{\bar\ell^i} r_{i+1}$，

(⊠$_3$) 对每个 i：

- $\varphi_a(r_i,\bar y^{*(i)},\bar{\mathbf{x}}^{*(i-1)})$，
- $\varphi_b(r_i,\bar y^{*(i)})$，
- $\varphi_c(r_i,\bar y^{*(i)})$，
- $\varphi_d(r_i,\bar y^{*(i)},\bar{\mathbf{x}}^{*(i-1)})$，
- $\varphi_e(r_i,\bar y^{*(i)},\bar{\mathbf{x}}^{*(i-1)})$，

其中 $\bar y^{*(i)}$ 是序列 $\bar y$ 的一个限制，定义如下：

$$\bar y^{*(i)}=\langle y^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}:\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in\mathbf{seq}_{\bar\ell^k}(r_i), k\leq i\rangle,$$

and

$$\bar{\mathbf{x}}^{*(i-1)}=\langle \mathbf{x}_{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}:\ (\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in\mathbf{seq}_{\bar\ell^k}(r_i),\ k\in i\rangle.$$

同样，构造出 r_i和 $y^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}$后，我们可以令 r_* 为 r_i的一个公共下界，使得对每个 i $r_i\geq_{\bar\ell^i} r_*$ 都成立。于是，对每个 $i<j r_i\geq_{\bar\ell^i} r_j\geq_{\bar\ell^i} r_*$，由观察 2.18 可知，对每个 $j>i$：

$$\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_i)=\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_j)=\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_*),$$

并且，对每个 $(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_i)$，都有

$$r_i^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}\geq r_j^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}\geq r_*^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}.$$

还要注意，由观察 2.29（并回忆 (■$_3$)），若对某个 m有 $\xi_i=\varepsilon^{\mathbb{S}}_m$，且 $(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_{i+1})$，则

$$\begin{aligned}\odot^m_1(r^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}_{i+1})&\iff\odot^m_1(r^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}_{*}),\\ \odot^m_2(r^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}_{i+1})&\iff\odot^m_2(r^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}_{*}).\end{aligned}$$

类似地，对于每个 i，如果存在某个 m 使得 $\xi_i=\varepsilon^\iota_m$，其中 $\iota\in\{\mathbf{1},\infty\}$，并且 $(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)\in\mathbf{seq}_{\bar\ell^i}(r_{i+1})$，那么 $r^{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)i+1}\in D^\iota_{\mathbf{x}_{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}m}(z)$（由 ((⊠$_3$))，回忆子断言 2.33 中 $(.,.)$ 的定义）。因此我们得到（由观察 2.37），

$$\forall r\leq_{\bar\ell^{i+1}} r_{i+1}:\ \ r\in D^{\iota,\mathbf{x}_{(\bar u,\bar v,\bar w,\bar s)}}_m(z).$$

这显然意味着，如果对于每个 i 和 $g\in\{a,b,c,d,e\}$，我们都有 $\varphi_g(r_i,\bar y^{*(i)},\bar{\mathbf{x}}^{*(i-1)})$（或 $\varphi_g(r_i,\bar y^{*(i)})$）成立，那么对于每个 $g\in\{a,b,c,d,e\}$ φ_g，$r_*(\bar y,\bar{\mathbf{x}})$（或 $\varphi_g(r_*,\bar y)$）也成立，正如所需。

(⧫$_2$) 因此，假设我们有集合 $r_0=r$，并且已经定义了

$$r_0\geq_{\bar\ell^0} r_1\geq_{\bar\ell^1} r_2\geq_{\bar\ell^2}\cdots\geq_{\bar\ell^{n-1}} r_n$$

满足 (⊠$_1$)-(⊠$_3$)。

根据 ξ_n 的取值，我们进行如下操作。

(⧫$_3$)(i) 案例 i：$\xi_n=\varepsilon^{\mathbf{0}}_m$ 对于某个 m：

设 $N = |$序列$_{\bar{\ell}^{n+1}}(r_n)|$，并固定一个枚举 $\langle(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j) : \ j < N\rangle$. 然后定义 $\leq_{\bar{\ell}^{n+1}}$-递减序列 $\langle p_j : \ j \leq M\rangle$，其中 $p_0 = r_n$，并且 $p^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}{}_{j+1}$确定

$\ell g\ y^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}{}_{\restriction n}$ $\overset{z_k}{\ }$ $r_{n+1} = p_N$ 2 19 $k =$ 的值（回想观察结果 . 的第一部分），其中 $(\ )$，设置 works。

(♦$_3$)(*ii*) 情形 *ii*: $\xi_n = \varepsilon^{\mathbb{S}}_m$ （对于某个 m）。

(♦$_3$)(*ii*)$_1$ 令 $M = |\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_n)|$，并固定枚举 $\langle(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j) : \ j < M\rangle$. 然后（再次根据观察 2.19）定义 $\leq_{\bar{\ell}^n}$-递减序列$\langle p_j : \ j \leq M\rangle$ 其中 $p_0 = r_n$，并且

$$\odot^m_1(p^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_{j+1}) \vee \odot^m_2(p^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_{j+1})$$

并令 $r^*_n = p_M$ （因此很容易

$$\mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_n) = \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r^*_n), \tag{2.9}$$

and

$$\forall j < M : \ \odot^m_1((r^*_n)^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}) \vee \odot^m_2((r^*_n)^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}). \tag{2.10}$$

(♦$_3$)(*ii*)$_2$ 现在令

$$Y = \{\langle(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}), (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{s}')\rangle : \ (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}), (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{s}') \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^{n+1}}(r^*_n), \ \bar{u} = \bar{u}'\}|,$$

$$N = |Y|,$$

并固定该枚举

$$\big\langle\langle(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j), ((\bar{u}')^j, (\bar{v}')^j, (\bar{w}')^j, (\bar{s}')^j)\rangle : \ j < N\big\rangle \text{ of } Y.$$

我们将构造

- th序列

$$q_0 = r^*_n \geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_1 \geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_2 \geq_{\bar{\ell}^{n+1}} \cdots \geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_N,$$

- 并对每个 $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}) \in$ 序列$_{\bar{\ell}^{n+1}}(r^*_n)$

$$x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_0 \subseteq x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_1 \subseteq \cdots \subseteq x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_N$$

with

(*a*) $x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_k \in {}^{\omega>}2$ $(k \leq N)$,

(*b*) $x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_0$

(*c*) 和 $q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_k \Vdash \check{z} \in [\dot{x}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_k{}_{\restriction n}, \dot{x}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}_k]$,

(*d*), 且对于每个 $k < N$

$$x^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k \subsetneq x^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_{k+1},$$

$$x^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}_k \subsetneq x^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}_{k+1},$$

对于每个 $k < N$，若 s^k，则 $(e)_m \neq (s')^k_m$ 以及 $\odot^m_2((p_k)_{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)})$（来自子断言 2.28）成立，则对于某个

$$j \geq \ell g(x^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k), \ell g(x^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}_k)$$

$$x^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_{k+1}(j) \neq x^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}_{k+1}(j).$$

在构造 q_k 的（$k \leq N$）和 $x^{(u,v,w,s)}_k$ 的（$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}) \in$ 序列$_{\bar{\ell}^{n+1}}(r^*_n)$）之前

（$\blacklozenge_3$）（ii）$_3$ 我们先说明为何设定

$r_{n+1} = q_N$，$y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}}{}_{=)}$ $\{x \in {}^{\omega>}2$ 中的极大元素：　$q^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}}{}_{)\,N}$　　$\Vdash x \in \dot{z}\}$（$\supseteq x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}}{}_{)\,N}$）

适用于我们的目的（即满足 ($\boxtimes_2$)、($\boxtimes_3$)）：

首先回顾一下，$r_{n+1} \leq r_0 \Vdash \dot{z} \notin V$，因此上面的极大元素确实存在，而 $y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 是定义良好的有限序列。

首先，(d) 显然蕴含 $\varphi_b(r_{n+1}, \bar{y}^{*(n+1)})$。其次，由于 $p_0 = r_n \geq_{\bar{\ell}^n} p_M = r_n^* \geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_N = r_{n+1}$ 回想观察 2.18，显然成立 $\mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_n^*) = \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_{n+1})$。回想 ($\blacklozenge_3$)($ii$)$_1$ 对于每个 $j < M$，要么

$$\odot_1^m((p_{j+1})^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}),\ \text{or}\ \odot_2^m\ ((p_{j+1})^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})$$

（其中 $(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)$ 表示 ($\blacklozenge_3$)(ii)$_1$ 中列表的第 j 项）。现在（由 $p_k \geq_{\bar{\ell}^n} p_M = r_n^* \geq_{\bar{\ell}^n} r_{n+1}$）显然要么

$$\odot_1^m((r_{n+1})^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}),\ \text{or}\ \odot_2^m\ ((r_{n+1})^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})$$

成立，并且可得 $\varphi_d(r_{n+1}, \bar{y}^{*(n+1)})$。最后，对于 $\varphi_e(r_{n+1}, \bar{y}^{*(n+1)})$，我们需要检查条件 e2)，也就是说，当没有理由认为 $y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$ 和 $y^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}$ 不同，那么这两者相同；这可由下一个断言推出（适用于 $r_{n+1} = q_N$），因此 ($\boxtimes_3$) 成立，确实如此：

子断言 2.34。假设 $p \in \mathbb{Q}'$、$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s})$、$(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{s}') \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^{n+1}}(p)$，使得 $\bar{u} = \bar{u}'$，并且对于任意 $k \leq n$

- *if* $\xi_k = \varepsilon_m^\iota$, *for some* $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$ *and* $m \in \omega$, *then* $p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction k} \in D_m^{\iota,\mathbf{eq}}(\dot{z})$,
- *if* $\xi_k = \varepsilon_m^{\mathbb{S}}$, *for some* $m \in \omega$, *then* $\odot_1^m(p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction k})$,

那么对于每个 $x \in {}^{\omega>}2$

$$p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \Vdash \dot{z} \in [x] \iff p^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')} \Vdash \dot{z} \in [x].$$

证明。固定 $x \in {}^{\omega>}2$，并令

- $(\bar{u}_*^0, \bar{v}_*^0, \bar{w}_*^0, \bar{s}_*^0) = (\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{s}') \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^{n+1}}(p)$,
- $t^0 = t^{(\bar{u}_*^0,\bar{v}_*^0,\bar{w}_*^0,\bar{s}_*^0)}$,
- $(\bar{u}_*^{n+1}, \bar{v}_*^{n+1}, \bar{w}_*^{n+1}, \bar{s}_*^{n+1}) = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^{n+1}}(p)$,
- $t^{n+1} = t^{(\bar{u}_*^{n+1},\bar{v}_*^{n+1},\bar{w}_*^{n+1},\bar{s}_*^{n+1})}$,

如定义 2.31 中的 2) 所定义。现在令

$$\bar{t}^k = \bar{t}^{(\bar{u}_*^{n+1},\bar{v}_*^{n+1},\bar{w}_*^{n+1},\bar{s}_*^{n+1})}\restriction[0,k)\ \cup\ (\bar{t}^{(\bar{u}_*^0,\bar{v}_*^0,\bar{w}_*^0,\bar{s}_*^0)}\restriction[k,n+1)\ \ (k \leq n+1),$$

并令

$$(\bar{u}_*^k, \bar{v}_*^k, \bar{w}_*^k, \bar{s}_*^k) = \mathbf{qp}(p, \bar{t}^k)$$

(由观察 2.32 的子句 a 可知其存在)。令 $p_k = p^{(\bar{u}_*^k,\bar{v}_*^k,\bar{w}_*^k,\bar{s}_*^k)}$ 对于 $k \leq n+1$，注意到 $p^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} = p_{n+1}$, $p^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')} = p_0$。我们断言

$$\text{for each } k \leq n:\ p_k \Vdash \dot{z} \in [x] \iff p_{k+1} \Vdash \dot{z} \in [x], \tag{2.11}$$

这将完成子断言 2.34 的证明。

固定 $k \leq n+1$，注意到 $\bar{t}^k$ 与 $\bar{t}^{k+1}$ 最多相差一位数字；若 $t_k^k \neq t_k^{k+1}$，则根据

子断言的假设，对于某个 ，有 $_1\ p^{(\bar{u}^k_*,\bar{v}^k_*,\bar{w}^k_*,\bar{s}^k_*}$ ，且 。因此，观察 2.32 中的条款 (b) 表明存在 $p'_k \leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1} p^{(\bar{u}^k_*,\bar{v}^k_*,\bar{w}^k_*,\bar{s}^k_*)\restriction k}$，并且

$$\{(p'_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}, (p'_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}\} = \{p_k, p_{k+1}\}.$$

但根据我们的构造，$(\bar{u}^k_*, \bar{v}^k_*, \bar{w}^k_*, \bar{s}^k_*)\restriction k = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s})\restriction k$，因此由该子断言的条件 $p^{(\bar{u}^k_*,\bar{v}^k_*,\bar{w}^k_*,\bar{s}^k_*)\restriction k} \in D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(z)$ 可知。这表明，根据事实 2.27 中的 2，$p'_k \in D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(z)$。因此，根据属于 $D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(z)$ 的定义，我们得到

$$(p'_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \Vdash z \in [x] \iff (p'_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)} \Vdash z \in [x],$$

因此，(2.11) 确实成立。

$\square_{\text{Subclaim}2.34}$

现在只剩下构造 $(\blacklozenge_3)(ii)_2$ 中所承诺的序列。假设$k < N$，并且已经选定了 $r^*_n \geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_k$。回想一下， $m \in \omega$ 的定义使得 $\xi_n = \varepsilon^{\mathbb{S}}_m$。 r^*_n 的性质意味着

$$\odot^m_1(q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)\restriction n}_k) \ \vee\ \odot^m_2(q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)\restriction n}_k),$$

so

$$\odot^m_1(q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k) \ \vee\ \odot^m_2(q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k).$$

首先，假设 $\odot^m_1(q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k}{}_k)$。那么只需令 $q_{k+1} \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_k$，使得 $q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k}{}_{k+1}$ 和 $q^{((\bar{u}')^k,\ (\bar{v}')^k,\ (\bar{w}')^k,\ (\bar{s}')^k)}{}_{k+1}$ 决定前几个

$$\ell g(x^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k) + \ell g(x^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}_k) + 1$$

数字 z，确保来自 $(\blacklozenge_3)(ii)_2$ 的 (a)-(e) 中相关部分成立。

因此我们根据这个性质，存在 $q_* \leq q^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k$ 和 $j \in \omega$，使得 $q^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},\ (\langle 0\rangle)}_* \Vdash z_j = i_0$, $q^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},\ (\langle 1\rangle)}_* \Vdash z_j = i_1$ 对某个 $i_0 \neq i_1$ （不失一般性，我们可以假设

$$j \geq \ell g(x^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}_k) + \ell g(x^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}_k) + 1).$$

不失一般性，对每个 $l \in \omega$， $q_*(\varepsilon^\infty_l)^{(w^k_l)} = q_k(\varepsilon^\infty_l)^{(w^k_l)}$，因此由观察 2.19，存在某个 $q^*_k \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_k$，使得 $(q^*_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)} = q_*$，于是

$$((q^*_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)} \Vdash z_j = i_0, \tag{2.12}$$

$$((q^*_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 1\rangle)} \Vdash z_j = i_1. \tag{2.13}$$

对于一个合适的扩张 $q_+ \leq (q^*_k)^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}$

$$q_+ \Vdash z_j = i_* \text{ for some } i_* \in \{0,1\}. \tag{2.14}$$

我们需要以下这个简单事实，它只用到这样一点：若 p 是一个萨克斯条件，那么将 p 替换为 $q \leq_1 p$ 时， $p^{(\langle 0\rangle)}$ 和 $p^{(\langle 1\rangle)}$ 可以分别独立处理。

事实 2.35. 若 $r \in \mathbb{Q}'$， $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{s})$， $(\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}', \bar{s}') \in \mathsf{seq}_{n+1}(r)$， $r_+ \leq r^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}$（其中我们还要求 $r_+(\varepsilon^\infty_l)^{(w'_l)} \leq r(\varepsilon^\infty_l)^{(w'_l)}$ 对每个 $l \in \omega$ 均成立），且 $s_m \neq s'_m$，则存在 $r' \leq_{\bar{\ell}} r$ 使得

- $(r')^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')} = r_+$,

- $r'(\varepsilon^{\mathbb{S}}_m)^{(s_m)} = r(\varepsilon^{\mathbb{S}}_m)^{(s_m)}$, *in particular*

$$((r')^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)} \leq (r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)},$$

$$((r')^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 1\rangle)} \leq (r^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 1\rangle)}.$$

将事实应用于 q^*_k 和 q_+，可得到条件 q^{**}_k，其中

$$(q^{**}_k)^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)} = q_+, \tag{2.15}$$

因此

$$(q^{**}_k)^{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)} \Vdash \dot{z}_j = i_*. \tag{2.16}$$

此外，该事实表明

$$(q^{**}_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)} \leq_{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},1} (q^*_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)},$$

因此由 (2.12) 和 (2.13)

$$((q^{**}_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)} \Vdash \dot{z}_j = i_0, \tag{2.17}$$

$$((q^{**}_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 1\rangle)} \Vdash \dot{z}_j = i_1. \tag{2.18}$$

现在，由于 $i_0 \neq i_1$ 要么是 $i_0 \neq i_*$，要么是 $i_1 \neq i_*$，不失一般性，我们可以假设

$$i_0 \neq i_*. \tag{2.19}$$

最后，再次利用观察 2.19，存在 $q^{***}_k \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q^{**}_k$，使得

$$(q^{***}_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)} = (q^{**}_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)})^{\{\varepsilon^{\mathbb{S}}_m\},(\langle 0\rangle)},$$

so

$$(q^{***}_k)^{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)} \Vdash \dot{z}_j \neq i_*. \tag{2.20}$$

这与 (2.16) 一起表明，取 $q_{k+1} = q^{***}_k$ 可行，因为只需将 q^{***}_k 替换为一个 $\leq_{\bar{\ell}^{n+1}}$-扩张，便可不失一般性地使 $(q^{***}_k)_{(\bar{u}^k,\bar{v}^k,\bar{w}^k,\bar{s}^k)}$ 和 $(q^{***}_k)_{((\bar{u}')^k,(\bar{v}')^k,(\bar{w}')^k,(\bar{s}')^k)}$ 都决定 $\dot{z}{\restriction}[0,j]$。

(♦3)(*iii*) 情形 *iii*：对于某个 $\iota \in \{\mathbf{1},\infty\}$，$\xi_n = \varepsilon^\iota_m$（且 m）。

引理 2.36. 设给定 $q_* \in \mathbb{Q}'$、$\Vdash_{\mathbb{Q}'} \dot{z} \in 2^\omega$、$n \in \omega$，并假设 $\iota \in \{\mathbf{1},\infty\}$、$m \in \omega$ 满足 $\xi_n = \varepsilon^\iota_m$。那么存在

(*i*) $r_* \leq_{\bar{\ell}^n} q_*$

(*ii*) $\bar{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} : (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_*)\rangle$

(*iii*) $\bar{x} = \langle x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} : (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^{n+1}}(r_*)\rangle$

满足以下条件。

(⊠) 对于每个 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})$，都有

- $x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in {}^{<\omega}2$，并且
  - $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}{\restriction}n \in$ {乘、等于、唯一}，使得 $r_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}{\restriction}n \in D^\iota$，$\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})_m}{\restriction}n(\dot{z})$，并且每当 $(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}') \neq^*_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$，且 $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}{\restriction}n \neq$ 等于时，则以下情况之一成立

(⊠)$^{(a)}$ $\mathbf{x}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n}$ = 唯一，且此时 $\iota = \mathbf{1}$ 成立，其中满足条件的唯一 k

$$k < \min(\ell g(x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}), \ell g(x^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}))$$
$$x_k^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \neq x_k^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')},$$

我们有

$$x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\restriction k = x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}\restriction k \neq \mathfrak{s}_k$$

（其中 $\bar{\mathfrak{s}}$ 来自 (x$_1$)-(x$_2$)），

(⊠)$_{(b)}$ 或 $\mathbf{x}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})\restriction n} = \mathbf{mul}$，且

$$k_0 < k_1 < \min(\ell g(x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}), \ell g(x^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')})$$
$$x_{k_0}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \neq x_{k_0}^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')},$$
$$x_{k_1}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \neq x_{k_1}^{(\bar{u}',\bar{v}',\bar{w}',\bar{s}')}.$$

观察 2.37. 若 n、 ι、 m 如引理所述，且 r' 满足

$$\forall(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(r') : \ (r')^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in D_m^{\iota,\mathbf{x}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}}(z),$$

那么对于任意 $r'' \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} r'$，相同的结论也成立。

在证明引理之前，注意到

(⧫$_3$)(iii)$_1$ 应用于 $q_* = r_n$ 后得到所需的条件 $r_{n+1} \leq_{\bar{\ell}^n} r_n$、$\mathbf{x}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})}$'s 的 $((\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(r_{n+1})$，并令

- $y^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} =$ 中的最大元素

$$\{x \in {}^{\omega>}2 : \ r_{n+1}^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \Vdash x \in z\}(\supseteq x_N^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})})$$

(⊠$_1$)-(⊠$_3$) 中的要求显然得到满足：只需使用 (⧫$_3$)(ii)$_3$，之后的相同论证即可，从而完成情形 (⧫$_3$)(iii)，(⧫$_1$) 中的归纳法也同样如此。

证明。（引理 2.36）我们将构造 r_*，而不论 $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$ 的具体取值。我们注意到，尽管对于 $\iota = \infty$ 采用更简单的论证也足够，但由于 $\iota = \mathbf{1}$ 本身这一情形需要稍微复杂（且令人痛苦一些）的推理，将两者一起处理反而更容易。首先

(▲)$_1$ 我们选取一个枚举 $\langle(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j) : \ j < M\rangle$，列出来自集合 $\mathrm{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_*)$ 的所有可能四元组 $(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})$。

我们需要以下结论。

(▲)$_2$ 我们将定义 $q_{**} \leq_{\bar{\ell}^n} q_*$，以及序列

$$\bar{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} : \ (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}) \in \mathbf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_*)\rangle,$$

其中 $\mathbf{x}_{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s})} \in \{un,mul,eq\}$ s 满足以下条件。（有时我们将 $\mathbf{x}_j$ 写作 $\mathbf{x}_{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}$）我们希望这些序列具有如下性质：

(a) $\bigcap_{j<M}\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**} : \ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D^{\iota,\ m}{}^{\mathbf{x}_j}(z)\}$ 在 q_{**}下是$\leq_{\bar{\ell}^n}$-稠密的；

(b) 此外，只要 $\mathbf{x}_i = \mathbf{mul}$ 对某个 $i < M$成立，那么对于每个 $p \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**}$

$$p \in \bigcap_{j<i}\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**} : \ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D_m^{\iota,\mathbf{x}_j}(z)\}$$
$$\Rightarrow$$
$$p^{(\bar{u}^i,\bar{v}^i,\bar{w}^i,\bar{s}^i)} \in D_m^{\iota,\mathbf{mul}}(z).$$

子断言 2.38。假设 ι、 m、 n、 q_* 如引理中所述。那么存在$q_{**} \leq_{\bar{\ell}^n} q_*$ 和满足 (▲)$_2$ 中要求的 $\bar{}\mathrm{x}$。

证明。首先，我们定义 q_0，x_0 如下。

(┬)$_1$ 设辅助变量 $q_0 = q_{*0}$。

•$_1$ 首先，假设集合$\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_0\colon\ q(\bar{u}^0,\bar{v}^0,\bar{w}^0,\bar{s}^0) \in D^\iota$,$\mathrm{un}_m(z)\}$在$\leq_{\bar{\ell}^n}$下方是 q_0-稠密的，此时令 $\mathrm{x}_0 = \mathrm{un}$，$q_1 = q_{0}$。•$_2$ 否则，定义$q_0' \leq_{\bar{\ell}^n} q_0$，使得不存在满足 $q(\bar{u}^0,\bar{v}^0,\bar{w}^0,\bar{s}^0) \in D^\iota$,$\mathrm{un}_m(z)$的$q \leq_{\bar{\ell}^n} q_0'$。

•$_3$ 其次，如果集合在 q_0' 以下是$\leq_{\bar{\ell}^n}$-稠密的，那么我们令 $\mathrm{x}_0 = \mathrm{eq}$，并且$\{q q \leq_{\bar{\ell}^n} q_0'\colon\ q^{(\bar{u}^0,\bar{v}^0,\bar{w}^0,\bar{s}^0)} \in D_m^{\iota,\mathbf{eq}}(z)\}$。

•$_4$ 如果情况并非如此，那么存在 $q_0'' \leq_{\bar{\ell}^n} q_0'$，使得不存在满足 $q_{(\bar{u}^0,\bar{v}^0,\bar{w}^0,\bar{s}^0)} \in D^{\iota,\mathbf{eq}m}(z)$ 的 $q \leq_{\bar{\ell}^n} q_0''$。

Then

(┬)$_2$ set $\mathbf{x}_0 = \mathbf{mul}$, and $q_1 = q_0''$,

并注意到，根据定义 2.26

(┬)$_3$ for each $q \leq_{\bar{\ell}^n} q_0'' = q_1$ we have $q^{(\bar{u}^0,\bar{v}^0,\bar{w}^0,\bar{s}^0)} \in D_m^{\iota,\mathbf{mul}}(z)$.

(┬)$_4$ 这样我们将定义

• 递减序列 $\leq_{\bar{\ell}^n}$

$$q_* = q^0 \geq_{\bar{\ell}^n} q^1 \geq_{\bar{\ell}^n} \cdots \geq_{\bar{\ell}^n} q^M,$$

• 以及序列 $\bar{}\mathrm{x}$

对 j 进行归纳，使得对每个 $i \leq M$

(┬)$_4^{(a)}$ $\bigcap_{j<i}\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_i\colon\ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D_m^{\iota,\mathbf{x}_j}(z)\}$ is $\leq_{\bar{\ell}^n}$-dense below q_i,

(┬)$_4^{(b)}$而且若 $\mathrm{x}_{i-1} = \mathrm{mul}$，则对任意 $p \leq_{\bar{\ell}^n} q_i$:

$$p \in \bigcap_{j<i-1}\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_i\colon\ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D_m^{\iota,\mathbf{x}_j}(z)\}$$
$$\Rightarrow$$
$$p^{(\bar{u}^{i-1},\bar{v}^{i-1},\bar{w}^{i-1},\bar{s}^{i-1})} \in D_m^{\iota,\mathbf{mul}}(z).$$

注意，若 $\mathrm{x}_0 \in \{\mathrm{un}、\mathrm{eq}\}$，则 q_1 和 x_0 显然满足要求；当 $\mathrm{x}_0 = \mathrm{mul}$ 时也满足要求，此时请回忆 (┬)$_2$, (┬)$_3$。

(┬)$_5$ 假设 $0 < i < M$，且 q_i，并且 x_j 已针对 $j < i$ 定义。

•$_1$ 集合

$$D^* = \bigcap_{j<i}\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_i\colon\ \ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D^\iota,\ {}_m{}^{\mathbf{x}_j}(z)\},$$

在 q_i 下是$\leq_{\bar{\ell}^n}$-稠密的。

•$_2$ 注意到

$$q \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} p \iff (\forall j < M) q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \leq_{\{\varepsilon_m^\iota\},\ 1} p^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})。$$

利用这一观察（回想事实 2.27 中的 2），我们得到

$$(\forall q', q \in \mathbb{Q}')\colon (q' \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q,\ q \in D^*) \to (q' \in D^*). \tag{2.21}$$

再次，按照 q_1 和 x_0, 的定义模式

$\bullet_3$ if

$$\{q \in D^* :\ q \leq_{\bar{\ell}^n} q_i,\ q^{(\bar{u}^i,\bar{v}^i,\bar{w}^i,\bar{s}^i)} \in D^{\iota,\mathbf{un}}_m(\underline{z})\}$$

is $\leq^-_{\ell^n}$-稠密于 q_i 以下，然后我们令 $\mathbf{x}_i = \mathbf{un}$，并且 $q_{i+1} = q_i$,

$\bullet_4$ 否则，令 $q'_i \leq_{\bar{\ell}^n} q_i$ 满足：对任何 $q \leq_{\bar{\ell}^n} q'_i$，都没有 $q^{(\bar{u}^i,\ \bar{v}^i,\ \bar{w}^i,\ \bar{s}^i)} \in D^{\iota,}_{\mathbf{un}m}(\underline{z})$。

$\bullet_5$ If th$^{\text{e 集合}}$

$$\{q \in D^* :\ q \leq_{\bar{\ell}^n} q'_i :\ q^{(\bar{u}^i,\bar{v}^i,\bar{w}^i,\bar{s}^i)} \in D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(\underline{z})\}$$

在 q'_i 以下是 $\leq_{\bar{\ell}^n}$-稠密的，则令 $\mathbf{x}_i = \mathbf{eq}$，并且 $q_{i+1} = q'_i$。

$\bullet_6$ 如果情况并非如此，那么存在 $q''_i \leq_{\bar{\ell}^n} q'_i$，使得

$$\forall q \in D^* :\ (q \leq_{\bar{\ell}^n} q''_i) \ \to\ (q \notin D^{\iota,\mathbf{un}}_m(\underline{z}) \cup D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(\underline{z})).$$

但由 (2.21)，$\bullet_1$ 并根据定义 2.26，我们有

$$\forall q \in D^* :\ (q \leq_{\bar{\ell}^n} q''_i) \ \to\ (q \in D^{\iota,\mathbf{mul}}_m(\underline{z})),$$

and letting $q_{i+1} = q''_i$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{mul}$ we are done, $(\mathsf{T})^{(a)}_4$, $(\mathsf{T})^{(b)}_4$ hold for $i_* = i + 1$.

最后，令 $q_{**} = q_M$，容易验证 q_{**}, $^-\mathbf{x}$ 符合要求。$\square_{\text{Subclaim}2.38}$

子断言 2.39. 假设 $\iota \in \{\mathbf{1}, \infty\}$, l, m, n 如引理 2.36 中所述，$^-\mathbf{x}$，q_{**} 由子断言 2.38 给出（即满足相对于 $\mathsf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_*) = \mathsf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_{**})$ 的固定枚举的 $(\blacktriangle)_2$，中的要求）。那么存在一个序列

$$q_{**} \geq_{\bar{\ell}^n} q_0 \geq_{\bar{\ell}^n} q_1 \geq_{\bar{\ell}^n} \cdots \geq_{\bar{\ell}^n} q_l$$

使得

(1) $(\forall k \leq l)\ q_k \in \bigcap_{j<M}\{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**} :\ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(\underline{z})\}$,

*(2)*或 $\mathrm{eac} \lhd_{h,kj} \lhd l :\quad M$

$$q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_{k+1} \leq (q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)},$$

(3) 并且对于每个 $j < M$，如果 $\mathbf{x}_j = \mathbf{un}$，那么存在 $i^j_0 < i^j_1 < \cdots < i^j_l$（以及 $c^j_k \in \{0,1\}$），使得

$$\begin{aligned} \forall k \leq l :\quad & (q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \ \Vdash\ \underline{z}_{i^j_k} = c^j_k, \\ & (q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)} \ \Vdash\ \underline{z}_{i^j_k} = 1 - c^j_k, \end{aligned}$$

证明。根据（$\blacktriangle$）$_2$，我们可以选取$p_0 \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**}$，使得

$$p_0 \in D_* := \bigcap_{j<M}\{p \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**} :\ p^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(\underline{z})\}. \tag{2.22}$$

这意味着

（‡）$_1$，只要 $j < M$ 满足 $\mathbf{x}_j = \mathbf{un}$，那么就存在某个 $i^j_0 \in \omega$, $c^j_0 \in \{0,1\}$:

$$\begin{aligned} & (p_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \ \Vdash\ \underline{z}_{i^j_0} = c^j_0, \\ & (p_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)} \ \Vdash\ \underline{z}_{i^j_0} = 1 - c^j_0. \end{aligned}$$

现在，对于每个这样的固定 j，存在 $p' \leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1} q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}$，使得 $(p')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}$ 和 $(p')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}$ 都决定 $\underline{z}{\restriction}[0, i^j_0)$（事实上 $q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D^{\iota,}_{m}{}^{\mathbf{un}}(\underline{z})$ 蕴含此时p' 决定该初始片段）。因此,

(‡)$_2$ 存在 $q_0 \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} p_0$，使得

$$\forall j < M:\ q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \parallel \dot{z}\restriction[0,i_0^j), \tag{2.23}$$

并且（由（2.22）自动得到 $q_0 \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} p_0$）

$$q_0 \in D_*. \tag{2.24}$$

现在令 $p_1 \leq_{\bar{\ell}^n} q_0$ 满足

$$\text{for each } j < M:\ p_1^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \leq (q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \tag{2.25}$$

（特别地，$p_1 \not\leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_0$），且 $p_1 \in D_{*\circledcirc}$ 与（‡）$_1$ 和（‡）$_2$ 类似

（‡）$_3$，只要 $j < M$ 满足 $\mathbf{x}_j = \mathsf{un}$，则存在某个 $i_1^j \in \omega$、$c_1^j \in \{0,1\}$:

$$\begin{aligned}(p_1^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} &\Vdash \dot{z}_{i_1^j} = c_1^j,\\ (p_1^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)} &\Vdash \dot{z}_{i_1^j} = 1 - c_1^j,\end{aligned}$$

（‡）$_4$，存在 $q_1 \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} p_1$，使得

$$\forall j < M:\ q_1^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \parallel \dot{z}\restriction[0,i_1^j), \tag{2.26}$$

并且（由 $q_1 \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} p_1$ 自动成立）

$$q_1 \in D_*. \tag{2.27}$$

注意，由 (2.25) 和 (2.23)

(‡)$_5$ 对每个 j: $i_0^j < i_1^j$。

沿着这一模式，我们可以对 $k \leq l$ 使用归纳法来定义该序列。

$\square_{\text{Subclaim}2.39}$

子断言 2.40。设 $\iota \in \{\mathbf{1},\infty\}$、$n$、$m$ 如引理 2.36 中所述，$\bar{\mathbf{x}}$、q_{**}由子断言 2.38 给出（即满足相对于 $\mathsf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_*) = \mathsf{seq}_{\bar{\ell}^n}(q_{**})$ 的固定枚举而言，(▲)$_2$，中的要求）。设

$$q_{**} \geq_{\bar{\ell}^n} q_0 \geq_{\bar{\ell}^n} q_1 \geq_{\bar{\ell}^n} \cdots \geq_{\bar{\ell}^n} q_l$$

使得 q_k 由子断言 2.39 给出，因此

$$(\forall k \leq l)\ q_k \in \bigcap_{j<M} \{q \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**}:\ q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D_m^{\iota,\mathbf{x}_j}(\dot{z})\}, \tag{2.28}$$

此外，

$$\textit{for each } k < l:\ \forall j < M:\ q_{k+1}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \leq (q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \tag{2.29}$$

（特别是，$q_k \not\geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_{k+1}$）。

那么，

（1）存在 $q_{***} \leq_{\bar{\ell}^n} q_0$（事实上，甚至存在 $q_{***} \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_0$），使得

$$\forall j < M,\ \forall \bar{t} \in {}^{k\geq 2}2:\ (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t})} \in D_m^{\iota,\mathbf{x}_j}(\dot{z})\},$$

并且如果 j 满足 $\mathbf{x}_j = \mathsf{un}$，那么对于来自子断言 2.39 的序列 $i_0^j < i_1^j < \cdots < i_l^j$:

$$\begin{aligned}\forall \bar{t} \in {}^{k\geq 2}2\ \exists c, z^*:\quad &(q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} &&\Vdash \dot{z}_{i_k^j} = c,\\ &(q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} &&\Vdash \dot{z}_{i_k^j} = 1 - c,\\ &(q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t})} &&\Vdash \dot{z}\restriction[0,i_k^j) = z^*.\end{aligned} \tag{2.30}$$

（2）此外，如果对于每个 k，“=”在（2.29）中成立，那么 q_{***} 可以选为q_0。

证明。条件 (2.29) 蕴含我们可以定义条件 $q^*_{l-1} \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_{l-1}$，使得

$$(\forall j < M):\ q_l^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} = (q^*_{l-1})^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}$$

$(\circledcirc)_1$ 注意，将 q_{l-1} 替换为 q^*_{l-1} 仍然保持 $q_{l-1} \geq_{\bar{\ell}^n} q_l$，但 $q_{l-1} \not\geq_{\bar{\ell}^* n+1} q_l$，也就是说，$q^*_{l-1} \geq_{\bar{\ell}^n} q^*_l$，但 $q^*_{l-1} \not\geq_{\bar{\ell}^{n+1}} q^*_l$。类似地，对于 $k = l-1$，(2.28) 成立，因为回顾 D^ι_m**y**'s 在 $\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},\,1}$-扩张下是闭的，如果 y $\in$ {un,eq,mul}（来自事实 2.27 的 2）。

对 $k = l-1, l-2, \ldots, 0$ 进行向下归纳，

$(\circledcirc)_2$ 必要时将 q_k 替换为 $q^*_k \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} q_k$，不失一般性，我们可以假设

$$(\forall k < l)(\forall j < M):\ q_{k+1}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} = ((q_k)^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)},$$

并引入

$(\circledcirc)_3$ 记号 $\vec{0}^k$，表示长度为 k 的常数 0 序列，即 $\vec{0}^1 = \langle 0\rangle$, $\vec{0}^{k+1} = \vec{0}^k \frown \langle 0\rangle$,

$$(\forall k < l)(\forall j < M):\ q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} = ((q_0)^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^k)}.$$

Now

$(\circledcirc)_4$ we claim that (assuming $(\circledcirc)_2$) choosing $q_{***} = q_0$ works.

$(\circledcirc)_5$ 固定 $j < M$，我们将证明

$$(\forall \bar{t} \in {}^{l>}2):\ (q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t})} \in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(z),$$

$(\circledcirc)_6$ 首先，我们论证 $(\circledcirc)_5$ 对于满足 $\mathbf{x}_j \in$ {un, eq} 的 j，并证明 (2.30)。

那么固定 j with $\mathbf{x}_j \in$ {un, eq}。若 $\mathbf{x}_j =$ un，则对由子断言 2.39 得到的自然数 i^j_k，对每个 $k \leq l$（并且对某些 c_0, c_1）

$$\begin{aligned} &(q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \Vdash \quad z_{i^j_k} = c_0, \\ &(q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)} \Vdash \quad z_{i^j_k} = c_1, \\ &\qquad \text{where } c_0 \neq c_1, \end{aligned} \tag{2.31}$$

其中我们还有

$$i^j_0 < i^j_1 < \cdots < i^j_l.$$

（为方便起见，若 $\mathbf{x}_j =$ eq，则对每个 $k \leq l$，我们令 $i^j_k = -1$。）注意到这样一个事实：$(q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}{}_k)^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(z)$，其中 $\mathbf{x}_j \in$ {un, eq} 意味着

$$\begin{aligned} &\text{whenever } p \leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1} q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}), \text{ and } a \in \{0,1\}: \\ &(i \neq i^j_k) \to [(p^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)} \Vdash z_i = a \iff p^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)} \Vdash z_i = a]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

$(\circledcirc)_7$ 现在，对于任意 $\bar{t} \in {}^{n>}2$，若 $\mathbf{x}_j =$ un，则令 set $i^j_* = i^j_*(|\bar{t}|) = i^j_{|\bar{t}|}$；否则，若 $\mathbf{x}_j =$ eq，则令 $i^j_* = -1$。只需证明，$\circ_1$ 只要 $i \in \omega$、$i \neq i^j_*$ 和 $r \leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},\,1} q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},\,(\bar{t})}$ 满足条件，使得 $r^{\{\varepsilon^\iota_m\},\,(\langle 0\rangle)}$或 $r^{\{\varepsilon^\iota_m\},\,(\langle 1\rangle)}$ 决定了z_i的值，那么 r也会决定其值，并且

$\circ_2$ if $\mathbf{x}_j = \mathbf{un}$, and so $i^j_* \geq 0$, then

$(q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)}$, and $(q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)}$ force different values to $z_{i^j_*}$.

我们固定 $k \leq l$，并对每个 $\bar{t} \in {}^k2$ 同时论证 $\circ_1$ 和 $\circ_2$。令 $r \leq_{\{\varepsilon^m\},\ k+1} q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)\ 0}$，(所以

$$\forall \bar{t} \in {}^k2: \quad \begin{matrix} r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \leq (q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \\ r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} \leq (q_0^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)}) \end{matrix} \tag{2.33}$$

由对称性，只需证明

$$\forall i \neq i^j_k,\ \forall \bar{t} \in {}^k2: \quad (r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_i = a) \quad \Leftrightarrow \quad (r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_i = a), \tag{2.34}$$

and

$$\forall \bar{t} \in {}^k2: \quad (r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_*} = a) \quad \Leftrightarrow \quad (r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_*} = 1 - a). \tag{2.35}$$

$(\circledcirc)^{(2)}_7$ 我们声称，对于任意 $\bar{t}^* \in {}^{\omega>}2$、$d \leq k$ 和 $a \in \{0,1\}$，如果 $i \neq i^j_d$，那么

$$r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^d{}^\frown\langle 1\rangle^\frown\bar{t}^*)} \Vdash \underset{\sim}{z}_i = a \iff r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^d{}^\frown\langle 0\rangle^\frown\bar{t}^*)} \Vdash \underset{\sim}{z}_i = a, \tag{2.36}$$

and

$$r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^d{}^\frown\langle 1\rangle^\frown\bar{t}^*)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_d} = a \iff r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^d{}^\frown\langle 0\rangle^\frown\bar{t}^*)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_d} = 1 - a, \tag{2.37}$$

在论证 $(\circledcirc)^{(2)}_7$ 之前，我们首先注意到，这将完成 $\circ_1$ 和 $\circ_2$ 的证明：对于任意 $\bar{t} \in {}^k2$ 和 $i \in \omega$（应用 $\circ_1$ $2 \cdot |\{b < k: \quad t_b = 1\}|$ 次），我们得到

$$\forall a \in \{0,1\}: \ r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^k{}^\frown\langle 0\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_l} = a \iff r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_l} = f^{t_l}(a),$$

and

$$\forall a \in \{0,1\}: \ r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^k{}^\frown\langle 1\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_l} = a \iff r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} \Vdash \underset{\sim}{z}_{i^j_l} = f^{t_l}(a),$$

其中 $f(a) = 1 - a$、$f^0 = f^2 = f \circ f = \mathrm{id}$，并且当 $l \geq k$ 时，我们将 t_l 下的值定义为 0。但根据 $(\circledcirc)_2$, (2.33)，我们有 $r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^k)} \leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1} (q^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)\ k})$，这意味着

$$r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^k{}^\frown\langle 0\rangle)} \leq (q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}),$$

$$r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^k{}^\frown\langle 1\rangle)} \leq (q_k^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}).$$

现在，若 $i = i^j_*$，则由此以及 $(\circledcirc)^{(2)}_7$ 中的 (2.31) 和 (2.36) 可推出 (2.35)。类似地，对于 $i \neq i^j_*$，$(\circledcirc)^{(2)}_7$ 中的 (2.32) 和 (2.37) 可推出 (2.34)。因此，只需验证 $(\circledcirc)^{(2)}_7$。

但是，由 (2.33) 和 $(\circledcirc)_2$ 可推出

$$r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^d{}^\frown\langle 0\rangle^\frown\bar{t}^*)} \leq (q_d^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)},$$

$$r^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\vec{0}^d{}^\frown\langle 1\rangle^\frown\bar{t}^*)} \leq (q_d^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle},$$

并且显然，若 $i = i^j_d$，则由 (2.31) 可得 (2.36)；而若 $i \neq i^j_d$，则由 (2.32) 可得 (2.37)。

$(\circledcirc)_8$ 现在假设我们有 $(\circledcirc)_6$, ，我们证明（对 j 作归纳）：

$$\forall j<M,\ \forall \bar t\in {}^{n\geq}2:\ \mathbf{x}_m=\mathbf{mul}\ \to\ (q_0^{(\bar u^j,\bar\nu^j,\bar w^j,\bar s^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar t)}\in D^{\iota,\mathbf{x}_m}_m(\bar z).$$

假设 $j_*<M$ 满足 $\mathbf{x}_{j_*}=\mathbf{mul}$,

$$\forall j<j_*,\ \forall \bar t\in {}^{l\geq}2:\ (q_0^{(\bar u^j,\bar\nu^j,\bar w^j,\bar s^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar t)}\in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(\bar z). \tag{2.38}$$

固定 $\bar t\in {}^{l\geq}2$, 并反设

$$(q_0^{(\bar u^{j_*},\bar\nu^{j_*},\bar w^{j_*},\bar s^{j_*})})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar t)}\notin D^{\iota,\mathbf{mul}}_m(\bar z).$$

回顾某个 $p\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},\ 1}(q_0^{(\bar u^{j_*},\bar\nu^{j_*},\bar w^{j_*},\bar s^{j_*})})^{\{\varepsilon^\iota_m\},\ (\bar t)}$的定义 2.26, 可得 $p\in D^{\iota,\ \mathbf{un}}_{\ m}(\bar z)\cup D^{\iota,\ \mathbf{eq}}_{\ m}(\bar z)$。于是存在一个条件 $p'\leq_{\bar\ell^n}q_0$, 使得

$$(p')^{(\bar u^{j_*},\bar\nu^{j_*},\bar w^{j_*},\bar s^{j_*})}\ \in\ (D^{\iota,\mathbf{un}}_m(\bar z)\cup D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(\bar z)), \tag{2.39}$$

and

$$\forall j<M:\ (p')^{(\bar u^j,\bar\nu^j,\bar w^j,\bar s^j)}\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1}(q_0^{(\bar u^j,\bar\nu^j,\bar w^j,\bar s^j)})^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\bar t)},$$

so

$$(p')^{(\bar u^{j_*},\bar\nu^{j_*},\bar w^{j_*},\bar s^{j_*})}\in D^{\iota,\mathbf{un}}_m(\bar z)\cup D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(\bar z), \tag{2.40}$$

并回顾事实 2.27 中的 2, 我们可以由 2.38 推出

$$\forall j<j_*:\ ((p')^{(\bar u^j,\bar\nu^j,\bar w^j,\bar s^j)})\in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(\bar z). \tag{2.41}$$

但现在, 由于 $p'\leq_{\bar\ell^n}q_0\leq_{\bar\ell^n}q_{**}$, $\mathbf{x}_{j_*}=\mathbf{mul}$ 必然

$$(p')^{(\bar u^{j_*},\bar\nu^{j_*},\bar w^{j_*},\bar s^{j_*})}\in D^{\iota,\mathbf{mul}}_m(\bar z),$$

这与 (2.39) 矛盾（因为 $D^{\iota,\ \mathbf{un}}_{\ m}(\bar z)$、 $D^{\iota,\ \mathbf{mul}}_{\ m}(\bar z)$ 和 $D^{\iota,\ \mathbf{eq}}_{\ m}(\bar z)$ 显然两两不相交(3)。$\square_{\rm fascl}$

子断言 2.41. 假设 $\iota\in\{\mathbf{1},\infty\}$, 令条件 q 属于 $D^{\iota,\ \mathbf{mul}}_{\ m}(\bar z)$。那么存在某个 $q'\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},\ 1}q$ 满足以下条件:

存在 $i_*\neq i_{**}\in\omega$、 c_*、 $c_{**}\in\{0,1\}$, 使得

$$\begin{array}{llllllll}(q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}\Vdash & \bar z_{i_*} & = & c_*, & (q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}\Vdash & \bar z_{i_*} & = & 1-c_*\\ (q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}\Vdash & \bar z_{i_{**}} & = & c_{**}, & (q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}\Vdash & \bar z_{i_{**}} & = & 1-c_{**}.\end{array}$$

此外, 可以选择 q' , 使得 $(q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},\ (\langle 0\rangle)}$ 和 $(q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},\ (\langle 1\rangle)}$ 都决定 $\bar z$ 的前 $\max(i_*,i_{**})$ 个 $+1$-数字。

证明。对于每个 $i\in\omega$, 都存在 $q_+\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1}q$, 使得 $q^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}_+$ 和 $q^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}_+$ 都决定了$\bar z_i$。由于 $q\notin D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(\bar z)$, 对于某个 $i_*\in\omega$ 和 $q_+\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1}q$, 条件 $q^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}_+$ 与 $q^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}_+$ 对$\bar z_{i_*}$ 作出了不同的判断。由于 $q_+\notin D^{\iota,\mathbf{eq}}_m(\bar z)$（再次由$q_+\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1}q$ 和定义 2.26 可知）, 存在 $i_{**}\neq i_*$, 使得$q'\leq_{\{\varepsilon^\iota_m\},1}q_+$, 且 $(q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 0\rangle)}$ 和 $(q')^{\{\varepsilon^\iota_m\},(\langle 1\rangle)}$迫使$\bar z_{i_{**}}$取不同的值。$\square_{\rm Subclaim 2.41}$

子断言 2.42. 假设 $\iota\in\{\mathbf{1},\infty\}$、 n、 m、 q_* 如引理 2.36 中所述, q_{**}、 $\bar{\mathbf{x}}^\iota$ 如（▲）中所述; 此外, 不存在满足 $\mathbf{x}_j=\mathbf{un}$ 的 $j<M$。那么, 如果 $r_{**}\leq_{\bar\ell^n}q_{**}$ 满足

$$r_{**}\in\bigcap_{j<M}\{q\leq_{\bar\ell^n}q_{**}:\ q^{(\bar u^j,\bar\nu^j,\bar w^j,\bar s^j)}\in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(\bar z)\},$$

那么就存在一个满足引理 2.36 中（⊠）要求的 $r_*\leq\bar\ell^{n+1}r_{**}$。

证明。注意，除（⊠）$_{(b)}$ 外，所有要求对 r_{**}都成立，因此根据观察 2.19，对任意$_{-}$ $r_* \leq \bar{\ell}^{n+1} r_{**}$ 也成立。现在我们只需调用子断言 2.41 $|\{j < M\colon \mathrm{x}_j = \mathrm{mul}\}|$次。

$\square_{\mathrm{Subclaim}2.42}$

子断言 2.43. 假设 $\iota = \infty$, n, m, q_* 如引理 2.36 中所述，$q_{**} \leq_{\bar{\ell}^n} q_*$,¯x 如 (▲)$_2$，中所述，并假设存在 $j < M$，使得 $\mathrm{x}_j = \mathrm{un}$。则存在 $r_* \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**}$，以及满足引理 2.36 的 (⊠)（其中某个 $\bar{x}$）的 ¯x′，其中

$$\begin{array}{rlll} \forall j < M\colon & \mathbf{x}_j \in \{\mathbf{mul}, \mathbf{eq}\} & \to & \mathbf{x}_j = \mathbf{x}'_j, \\ & \mathbf{x}_j = \mathbf{un} & \to & \mathbf{x}'_j = \mathbf{mul}. \end{array}$$

证明. 首先类似于子断言 2.42 的证明进行，并调用子断言 2.41 $|\{j < M\colon$ 进行 x $_j = \mathrm{mul}\}|$次，因此对于某个 $p_* \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**}$，我们有

$\boxdot_{(a)}$ $\forall j < M\colon p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)} \in D_m^{\iota, \mathbf{x}_j}(\vec{z})$,

$\boxdot_{(b)}$ 如果 $\mathrm{x}_j = \mathrm{mul}$，那么对于某个 $i_j^* \neq i_j^{**}$条件

$$(p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{(\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 0 \rangle))}, (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{(\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 1 \rangle))}$$

对 $\vec{z}_{i_j^*}$ 的判定不同，对 $\vec{z}_{i_j^{**}}$ 的判定也不同。此外，两个条件判定 $\vec{z} \restriction [0, \max(i_j^*, i_j^{**}) + 1]$。

现在选取 $p_{**} \leq_{\bar{\ell}^n} p_*$，使得

$\bigodot_{(a)}$ $\forall j < M\colon p_{**}^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)} \leq (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{(\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 0 \rangle))}$,

$\bigodot_{(b)}$ and $\forall j < M\colon p_{**}^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)} \in D_m^{\iota, \mathbf{x}_j}(\vec{z})$.

因此（用它的一个$\leq_{\bar{\ell}^{n+1}}$-扩张替换 p_* 后），不失一般性，我们可以假设

$$\forall j < M\colon p_{**}^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)} = (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{(\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 0 \rangle))}. \tag{2.42}$$

定义 $r_* \leq_{\bar{\ell}^n} p_*$ 使得

$$\forall j < M\colon (r_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 0 \rangle)} = (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 0,0 \rangle)}, \tag{2.43}$$

类似地,

$$\forall j < M\colon (r_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 1 \rangle)} = (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle 1,1 \rangle)}. \tag{2.44}$$

现在，若 $j < M$ 满足 $\mathrm{x}_j = \mathrm{mul}$，则对于 $a \in \{0, 1\}$

$$(r_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle a \rangle)} \leq (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle a \rangle)},$$

于是 $(r^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)_*})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle a \rangle)} (a \in \{0, 1\})$ 对 $\vec{z}_{i_j^*}$ 和 $\vec{z}_{i_j^{**}}$ 的判断不同（根据 $(\boxdot_{(b)})$）。

若 $j < M$ 满足 $\mathrm{x}_j = \mathrm{eq}$，则由 (2.42)、 $\boxdot_{(a)}$、 $\bigodot_{(b)}$ 以及子断言 2.40 中的 2，可知

$$\forall t_0 \in \{0, 1\}\colon (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle t_0 \rangle)} \in D_m^{\iota, \mathbf{eq}}(\vec{z}),$$

但类似的直接计算表明，对于任何 i 和 $p' \leq_{\{\varepsilon_m^\infty\},}$

$p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j}$ $\bar{t}_0 \neq \bar{t}_1 \in {}^2\{0, 1\}$ p' $^{\{\varepsilon_m^\infty\}}$ $\bar{t}_0$ p' $^{\{\varepsilon_m^\infty\}}$ $\bar{t}_1$ ^{2}), ( ), ( )和 ( ), ( )都不会对 $\vec{z}_i$ 作出不同判断。这显然意味着 $r^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)_*}) \in D^{\iota,}{}_m^{\mathbf{eq}}(\vec{z})$。

最后，如果 j 满足 $\mathrm{x}_j = \mathrm{un}$，那么我们论证 $r^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)_*} \in D^{\iota,}{}_m^{\mathbf{mul}}(\vec{z})$。同样，由 (2.42)、 $\boxdot_{(a)}$、 $\bigodot_{(b)}$ 以及子断言 2.40 中的 2 可推出

$$\forall t_0 \in \{0, 1\}\colon (p_*^{(\bar{u}^j, \bar{v}^j, \bar{w}^j, \bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\}, (\langle t_0 \rangle)} \in D_m^{\iota, \mathbf{un}}(\vec{z}),$$

类似于子断言 2.40 中 $(\circledcirc)_6$ 的论证，存在 $i_0 < i_1$ 和 c_0、$c_1 \in \{0,1\}$，使得

$$\forall \bar{t} = \langle t_0, t_1\rangle \in {}^2\{0,1\}: (p_*^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\},(\langle t_0,t_1\rangle)} \Vdash z_{i_0} = f^{t_0}(c_0) \wedge z_{i_0} = f^{t_1}(c_1),$$

（其中 $f(c) = 1-c$, $f^0 = \mathrm{id}$）。由此我们得到

$$\begin{aligned}(p_*^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\},(\langle 0,0\rangle)} &\Vdash z_{i_0} = c_0 \wedge z_{i_1} = c_1,\\ (p_*^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\infty\},(\langle 1,1\rangle)} &\Vdash z_{i_0} = 1-c_0 \wedge z_{i_1} = 1-c_1,\end{aligned}$$

因此，回想 (2.43)、(2.44)，显然 $r^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)_*} \in D^\infty_{,m}$ **mul**(z)。（并且由于我们总是可以进行 al-ways $\leq_{\bar{\ell}^{n+1}}$ r_* $_*$ $^{\{\varepsilon^\infty\}}$ $^{\langle a\rangle}$ $a \in \{0,1\}$ $z\restriction[0,$ i_0 i_1 $+$-扩展，使得 $(r^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^1_{,()}$ $()$ 决定 max$(,)$），这给出了两个 $(,,,)$ seq$_{\bar{\ell}^{n+1}}()$ 的 $)$，其中 $x^{(\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}}$ $\bar{u}$ $\bar{v}$ $\bar{w}$ $\bar{s}$ $\in$ r_*

$$(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j) \sqsubseteq (\bar{u},\bar{v},\bar{w},\bar{s}).)$$

$\square_{\mathrm{Subclaim}2.43}$

子断言 2.44. 假设 $\iota = \mathbf{1}$、q_*、z、n、m 如引理 2.36 中所述，$q_{**} \leq_{\bar{\ell}^n} q_*$、$\bar{}\mathbf{x}$ 如式 $(\blacktriangle)_2$ 中所述，$l \in \omega$，此外，

$$0 < |\{j < M: \mathbf{x}_j = \mathbf{un}\}| < 2^l. \tag{2.45}$$

假设将子断言 2.39 和 2.40 应用于 q_{**} 和 l，得到 $q_{***} \leq_{\bar{\ell}^n} q_{**}$。那么存在 $\bar{t} \in {}^l2$，使得某个 $r_* \leq_{\bar{\ell}^{n+1}} r_{\bar{t}}$ 满足式 (⊠) 中的要求（其中 $r_{\bar{t}}$ 由等式定义

$$\forall j < M: r_{\bar{t}}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} = (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t})}).$$

证明。固定 $j < M$，使得 $\mathbf{x}_j = \mathbf{un}$，

$$\forall \bar{t} \in {}^l2: (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t})}) \in D_m^{\mathbf{1},\mathbf{un}}(z),$$

并由 (2.30) 得

(1) 存在一些自然数

$$i_0^j < i_1^j < \cdots < i_l^j,$$

使得

$$\forall \bar{t} \in {}^l2,\ \forall a \in \{0,1\}: (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t}^\frown\langle a\rangle)} \parallel z\restriction[0, i_l^j+1).$$

- $\forall \bar{t} \in {}^l2,\ \exists \bar{z}_{\bar{t}}^j \in {}^{i_l^j}2: (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t})}) \Vdash \bar{z}_{\bar{t}}^j \subseteq z$,
- if $\bar{t} \in {}^{l\geq}2,\ i \neq i^j_{|\bar{t}|}$, $r \leq_{\{\varepsilon_m^{\mathbf{1}}\},1} (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t})})$, then

$$r^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \Vdash z_i = a \iff r^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} \Vdash z_i = a\ (\forall a \in \{0,1\}),$$

- if $\bar{t} \in {}^{l\geq}2$, $r \leq_{\{\varepsilon_m^{\mathbf{1}}\},1} (q_{***}^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)})^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t})})$, $a \in \{0,1\}$, then

$$r^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t}^\frown\langle 0\rangle)} \Vdash z_{i^j_{|\bar{t}|}} = a \iff r^{\{\varepsilon_m^\iota\},(\bar{t}^\frown\langle 1\rangle)} \Vdash z_{i^j_{|\bar{t}|}} = 1-a.$$

(2) 注意，如果 $j < M$、$\bar{t} \neq \bar{t}'$，那么 $\bar{z}_{\bar{t}}^j \neq \bar{z}_{\bar{t}'}^j$。

现在对于 (⊠)

(3) 只需选择 $\bar{t} \in {}^{l}2$，并令 $r_* = r_{\bar{t}}$，使得每当 $j < M$ 满足 $\mathrm{x}_j = \mathsf{un}$ 时，

$$\bar{z}^j_{\bar{t}} \neq \mathfrak{s}_{i^j_l}, \tag{2.46}$$

这可由以下事实说明：因为对于任意满足 $\mathrm{x}_j = \mathsf{eq}$ 的 j，显然有 $r^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)}_{\bar{t}} \in D^{\mathbf{1},\ m^{\mathbf{eq}}}$；而如果 $\mathrm{x}_j = \mathsf{mul}$，那么我们可以用由子断言 2.41 给出的某个 $r_{**} \leq_{\{\varepsilon^{\mathbf{1}}_m\},\ 1} r_* = r_{\bar{t}}$ 来替换 r_*，同时保持

$$r_{**} \in \bigcap_{j<M} \{p \in \mathbb{Q}' :\ p^{(\bar{u}^j,\bar{v}^j,\bar{w}^j,\bar{s}^j)} \in D^{\iota,\mathbf{x}_j}_m(\underset{\sim}{z})\}.$$

但是，对于每个满足 $\mathrm{x}_j = \mathsf{un}$ 的 $j < M$，至多只有一个 $\bar{t} \in {}^{i^j_l}2$ 不满足 (2.46)，因此由 (2.45) 可知，存在一个符合我们要求的序列 $\bar{t}$。

$\square_{\mathrm{Subclaim}2.44}$

$\square_{\mathrm{Lemma}2.36}$

$\square_{\mathrm{Subclaim}2.33}$

剩下只需论证 $(\circledast)_4$, ，即可完成定理 2.6 的证明。因此固定

- $\alpha < \lambda_{\mathbf{0}}$, and a $\mathbb{G}_{\mathbf{0}}(\bar{\mathfrak{s}})$-independent tree
$$T_{\mathbf{0}} \in V_{\mathbf{0}} \cap \mathscr{P}({}^{\omega>}2),$$
where $V_{\mathbf{0}} = V^{\mathbb{Q}^{\mathbf{0}}_{\lambda_{\mathbf{0}}\setminus\{\alpha\}} \times \mathbb{Q}^{\mathbf{1}} \times \mathbb{Q}^{\infty} \times \mathbb{Q}^{\mathbb{S}}}$,
- $\beta \in [\lambda_{\mathbf{0}}, \lambda_{\mathbf{1}})$, and a $\mathbb{G}_{\mathbf{1}}$-independent tree
$$T_{\mathbf{1}} \in V_{\mathbf{1}} \cap \mathscr{P}({}^{\omega>}2),$$
where $V_{\mathbf{1}} = V^{\mathbb{Q}^{\mathbf{0}} \times \mathbb{Q}^{\mathbf{1}}_{\lambda_{\mathbf{1}}\setminus\lambda_{\mathbf{0}}\setminus\{\beta\}} \times \mathbb{Q}^{\infty} \times \mathbb{Q}^{\mathbb{S}}}$,
- $\gamma \in [\lambda_{\mathbf{1}}, \lambda_{\infty})$, and an E_0-independent tree
$$T_{\infty} \in V_{\infty} \cap \mathscr{P}({}^{\omega>}2),$$
where $V_{\infty} = V^{\mathbb{Q}^{\mathbf{0}} \times \mathbb{Q}^{\mathbf{1}} \times \mathbb{Q}^{\infty}_{\lambda_{\infty}\setminus\lambda_{\mathbf{1}}\setminus\{\gamma\}} \times \mathbb{Q}^{\mathbb{S}}}$,

并且我们将验证所讨论的泛型实数不属于 $[T_\iota]$ $(\iota \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \infty\})$。反设相反（即 $\neg\,(\circledast)_4$），令 $p_\iota \in \mathbb{P}^\iota$ 满足

$$V_\iota \models \text{“}p \Vdash_{\mathbb{P}^\iota} \underset{\sim}{r} \in [T_\iota]\text{”}, \tag{2.47}$$

其中 $\underset{\sim}{r}$ 是由 $\mathbb{P}^\iota$ 给出的泛型实数（注意 $\mathbb{P}^\iota \in V$，因此在 V_ι 中工作时，我们必须谨慎处理 p，因为该模型中的实数比 V 中的更多）。

根据定义 2.7 和 $p \in \mathbb{P}^\iota$

- 若 $\iota = \mathbf{0}$，则存在 $j \in \omega$ 满足 $p_{2j} = C_{2j}, p_{2j+1} = C_{2j+1}$。不失一般性，我们可以假设 $|p_0| = |p_1| = \cdots = |p_{2j-1}| = 1$，并且若 $p_i = \{t_i\}$ $(i < 2j)$，则令
$$\bar{t}^* = \bar{t}_0 \frown \bar{t}_1 \frown \cdots \frown \bar{t}_{2j-1},$$
- 若 $\iota = \mathbf{1}$，则存在 $j \in \omega$ 使得 $p_j = \{0, 1\}$，且 $|p_0| = |p_1| = \cdots = |p_{2j-1}| = 1$；若 $p_i = \{a_i\}$ $(i < j)$，则令
$$\bar{t}^* = \langle a_i :\ i < j\rangle,$$

- 若 $\iota=\infty$，则存在 $j\in\omega$ 使得

$$p_j=\{\bar t'_j,\bar t''_j\},\tag{2.48}$$

并且 $|p_0|=|p_1|=\cdots=|p_{2j-1}|=1$，且若 $p_i=\{\bar t_i\}$ $(i<j)$，则令

$$\bar t^*=\bar t_0{}^\frown\bar t_1{}^\frown\cdots{}^\frown\bar t_{j-1},$$

Now

- 若 $\iota=\mathbf{0}$，则使用 D1) 选取 $t_{2j}\in p_{2j}$，使得

$$\bar t^{**}:=\bar t^*{}^\frown\bar t_{2j}=\mathfrak{s}_k$$

对于某个 $k\in\omega$。令 $p'\in\mathbb{P}^{\mathbf{0}}$ 表示一个满足 $p'\le p$、$p'_{2j}=\{t_{2j}\}$ 的条件，

- 若 $\iota=\mathbf{0}$，或 ∞，则

$$\bar t^{**}:=\bar t^*,$$

并令 $p'=p$。

显然

$$p'\Vdash\underset{\sim}{\nu}\in[\bar t_{**}],$$

因此我们可以假设 $[t_{**}]\cap[T_\iota]\neq\emptyset$。考虑

- 这些集合

$$T_{\bar t_{**}(0)}=\{\bar t\in{}^{\omega>}2:\ \bar t_{**}{}^\frown\langle 0\rangle{}^\frown\bar t\in T\},$$

and

$$T_{\bar t_{**}(1)}=\{\bar t\in{}^{\omega>}2:\ \bar t_{**}{}^\frown\langle 1\rangle{}^\frown\bar t\in T\},$$

若 $\iota=\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{1}$，

- 而若 $\iota=\infty$，则令

$$T_{\bar t_{**}(0)}=\{\bar t\in{}^{\omega>}2:\ \bar t_{**}{}^\frown\bar t'_j{}^\frown\bar t\in T\},$$

and

$$T_{\bar t_{**}(1)}=\{t\in{}^{\omega>}2:\ \bar t_{**}{}^\frown\bar t''_j{}^\frown\bar t\in T\},$$

（其中 $p'_j=\{\bar t'_j,\bar t''_j\}$，回顾（2.48））。

现在，由于 $[T_{\mathbf{0}}]$（分别为 $[T_{\mathbf{1}}]$、$[T_\infty]$）是 $\mathbb{G}_{\mathbf{0}}(\bar{\mathfrak{s}})$-独立（分别为 $\mathbb{G}_{\mathbf{1}}$-、E_0-独立）的紧集，且满足 $t_{**}\in T$，因此必定存在 $k\in\omega$，使得集合 $T_{\bar t_{**}(0)}\cap{}^k2$ 与 $T_{\bar t_{**}(1)}\cap{}^k2$ 不相交。

现在，若有必要，进一步扩展 p'，即可假设

- (if $\iota=\mathbf{0}$) $|p'_{2j+2}|=|p'_{2j+3}|=\cdots=|p'_{2j+k+1}|=1$, and if $p'_{2j+2+i}=\{\bar t_{2j+2+i}\}$ $(i<k)$, then the sequence

$$\bar t_{***}=\bar t_{2j+2}{}^\frown\bar t_{2j+3}{}^\frown\cdots{}^\frown\bar t_{2j+k+1}\in{}^{\omega>}2$$

显然长度为 $\ge k$。

- （如果 $\iota=\mathbf{1}$）$|p'_{j+2}|=|p'_{j+3}|=\cdots=|p'_{j+k+1}|=1$，并且如果 $p'_{j+2+i}=\{a_{j+2+i}\}$（$i<k$），那么该序列

$$\bar t_{***}=\langle a_{j+2+i}:\ i<k\rangle\in{}^{\omega>}2$$

长度为 k，

- (if $\iota=\infty$) $|p'_{j+2}|=|p'_{j+3}|=\cdots=|p'_{j+k+1}|=1$, and if $p'_{2j+2+i}=\{\bar{t}_{2j+2+i}\}$ $(i<k)$, then the sequence

$$\bar{t}_{***}=\bar{t}_{2j+2}{}^\frown\bar{t}_{2j+3}{}^\frown\cdots{}^\frown\bar{t}_{2j+k+1}\in {}^{\omega_{\geq}}2$$

  is obviously of length $\geq k$.

若 $\iota\in\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$，则令 $a\in\{0,1\}$ 使得 $t_{***}{\restriction}k\in T_{\bar{t}_{**}(a)}$。根据上述观察，$t_{***}{\restriction}k\notin T_{\bar{t}_{**}(1-a)}$，因此

$$\bar{t}_{**}{}^\frown\langle 1-a\rangle{}^\frown\bar{t}_{***}\notin T_\iota. \tag{2.49}$$

将 p' 扩展到 $p''\in\mathbb{Q}$，使得 $p''_{2j+1}=\{\langle 1-a\rangle\}$（若 $\iota=\mathbf{0}$），或 . $p''_{j+1}=\{1-a\}$（若$\iota=\mathbf{1}$），然后

$$p''\Vdash \underset{\sim}{r}\in[\bar{t}_{**}{}^\frown\langle 1-a\rangle{}^\frown\bar{t}_{***}]$$

这与 (2.49) 一起，与 (2.47) 矛盾。在 $\iota=\infty$ 的情况下，我们也可以得到同样的矛盾，只需用 $p_j=\{\bar{t}'_j,\bar{t}''_j\}$ 代替 $\{0,1\}$。

$\square_{\text{Claim}2.23}$

问题 2.45. 在最终模型中，是否存在将康托尔空间划分为 $\lambda_{\mathbf{0}}$ 个 $\mathbb{G}_0$（$\bar{\mathfrak{s}}$）-独立博雷尔集的划分（同时定理 2.6 中的其他断言仍成立）？是否一致地存在将 2^ω 划分为 λ 个 $\mathbb{G}_0$（$\bar{\mathfrak{s}}$）- 独立博雷尔集的划分，其中 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})<\lambda<2^{\aleph_0}$，并且少于 λ 个（或者仅仅是不超过 $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ 个）$\mathbb{G}_0$（$\bar{\mathfrak{s}}$）-独立博雷尔集无法覆盖 2^ω？关于 $\mathbb{G}_1$ 或 E_0 的相应不变量，我们能说些什么?

问题 2.46。定义图

$$\mathbb{G}_n=\{(x,y)\in {}^{[\omega}2]^2:\ |\{j\in\omega:\ x_j\neq y_j\}|\leq n\}$$

对于固定的 $n\in\omega$。我们能否区分 $\mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_n})$ 和 $\mathrm{cov}(I_{\mathbb{G}_{n+1}})$? 能否区分无穷多个 $\mathrm{cov}(T_{\mathbb{G}_j})$?

§ 3. Acknowledgement

第一位署名作者感谢 M. Gaspar 进行了一些有价值的讨论。我们感谢 Shimon Garti 提供的有益建议和意见，这些建议和意见改进了本文。

$\square_{\text{Theorem}2.6}$

References

[AZ18] Francis Adams 和 Jindˇrich Zapletal, *Cardinal invariants of closed graphs*, 《以色列数学杂志》227（2018），第 2 期，861–888。[BG22] Raiean Banerjee 和 Michel Gaspar, *Borel chromatic numbers of locally countable f_σ graphs and forcing with superperfect trees* 2208 07764 2022，arXiv 预印本 arXiv: 。()。[BJ95] Tomek Bartoszy´nski 和 Haim Judah, *Set theory*, A K Peters, Ltd.，美国马萨诸塞州韦尔斯利，1995，《实数直线的结构》。MR 1350295[Ges11] Stefan Geschke, *Weak borel chromatic numbers*, 《数学逻辑季刊》57（2011），第 1 期，5–13。[GG22] Michel Gaspar 和 Stefan Geschke, *Borel chromatic numbers of closed graphs and forcing with uniform trees* 2208 06914 2022，arXiv 预印本 arXiv: 。()。[Kec12] Alexander Kechris, *Classical descriptive set theory*, 第 156 卷，Springer Science & Business Media，2012。[KST99] Alexander S Kechris、Slawomir Solecki 和 Stevo Todorˇcevi´c, *Borel chromatic numbers*, 《数学进展》141（1999），第 1 期，1–44。

[LM08] Dominique Lecomte 和 Benjamin D Miller, *Basis theorems for non-potentially closed sets and graphs of uncountable borel chromatic number*, 《数学逻辑杂志》8（2008），第 02 期, 121–162。[Mil08] Benjamin D Miller, *Measurable chromatic numbers*, 《符号逻辑杂志》73（2008），第 4 期，1139–1157。[She] Saharon Shelah, *[Sh:950] Dependent dreams: recounting types*, arXiv: 1202.5795。[Zap19] Jindˇrich Zapletal, *Hypergraphs and proper forcing*, 《数学逻辑杂志》19（2019），第 02 期，1950007。

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904, Israel,*Email address*: sokmark@gmail.com

Einstein Institute of Mathematics, Edmond J. Safra Campus, Givat Ram, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, 91904, Israel, and, Department of Mathe-matics, Hill Center - Busch Campus, Rutgers, The State University of New Jersey, 110Frelinghuysen Road, Piscataway, NJ 08854-8019 USA

Email address: shelah@math.huji.ac.il

URL: http://shelah.logic.at