arXiv:2302.10231v1 [physics.class-ph] 1 Feb 2023

具有辐射损耗的圆柱弹性介质中的例外点

Kei Matsushima，* Yuki Noguchi，和 Takayuki Yamada
Department of Mechanical Engineering,
Graduate School of Engineering, the University of Tokyo
2-11-16 Yayoi, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan（日期：2023年2月22日）

例外点（EP）是参数空间中的奇异点，在这些点上，某些特征值（散射极点）及其对应的特征模态会合并。本研究展示了具有辐射损耗的圆柱弹性系统中二阶和三阶例外点的存在。我们考虑置于背景弹性或声学介质中的多层圆柱形固体，并假设其满足平面应变条件。在背景介质中传播的弹性波和声波会受到辐射损耗的影响。我们优化多层固体的半径和材料常数，使某些散射极点在复频率平面上合并。我们进行了若干数值实验，以确认这种合并源自例外点。我们预期，本研究将为提升机械传感器性能提供一种新方法。

I. 引言

例外点（EP）是参数空间中的奇点，在这些点上，特征值和特征模态会同时合并 [1–3]。这种同步简并是非厄米系统所特有的现象。与厄米系统不同，非厄米系统具有复特征值，其虚部表示共振随时间指数衰减或发散的速率。在例外点附近，两个（或更多）特征值彼此关联，并在参数空间上绘制出多值根函数的黎曼曲面。通过在例外点周围连续改变参数并追踪相应的特征值，可以观察到这种特殊结构，这称为例外点环绕 [4]。由于根式行为会提高特征值分裂的灵敏度，非厄米简并的一项重要应用前景是提升光学和机械传感器的性能 [5–11]。

宇称-时间（PT）对称性是实现例外点最成功的方法之一 [12–15]。如果系统中的增益和损耗以相同的量在空间上对称分布，则称该系统具有PT对称性。由于存在这些增益和损耗，PT对称系统是非厄米的，并且可能出现例外点。若系统具有PT对称性，非厄米简并会发生在PT相变点；通过调节增益和损耗的大小，便可轻松找到这些相变点 [16]。

尽管在讨论非厄米物理时，PT对称性是一项重要性质，但例外点本身广泛存在于各种非厄米系统中。例如，通过调节介电常数和/或系统几何结构，介电微腔无需增益便可产生非厄米简并 [17]。Kullig等人最近展示了二维多层微盘腔中二阶和三阶例外点的存在 [18]。他们优化了分层腔体的半径和折射率，使得两个或三个回音壁模式在同一个复频率处合并。Bulgakov等人证明，回转椭球体中存在二阶例外点 [19]。Abdrabou和Lu研究了二维多重散射系统中出现的例外点[20]。与此同时，Gwak等人通过使圆形微腔发生形变，实现了稳态例外点 [21]。光子晶体板中也存在无需材料增益的例外点 [22–26]。

在声学和弹性系统中也可以观察到例外点。如前所述，PT对称性为讨论非厄米效应对声波和弹性波传播的影响提供了便利的平台。近期研究表明，PT对称系统中广为人知的异常现象（如相变、非对称反射率、激射/反激射、负折射和增强灵敏度）也会出现在这类系统中 [27–41]。然而，除开放周期系统外[42]，二维和三维无源弹性系统中是否存在例外点仍不确定。

在本研究中，我们通过数值方法表明，无需增益，圆柱弹性介质中也存在二阶和三阶例外点。该系统由多层圆柱固体以及背景弹性或声学介质构成。背景介质在空间中无限延伸，并因径向辐射而导致能量损耗。固体-固体和固体-流体耦合问题通过亥姆霍兹分解和圆柱函数求解。随后 [18], 我们优化半径和材料常数，使两个或三个特征值（散射极点）在复频率平面上合并。接着，在优化后的参数附近进行例外点环绕，以确认这种合并源于非厄米简并。此外，我们表明，简并极点在例外点附近表现为多值根函数，这是增强机械传感器性能的一项重要特性。

* matsushima@mech.t.u-tokyo.ac.jp

II. 模型

我们考虑如图1所示，嵌入背景弹性或声学介质中的多层固体的时间谐波振荡。每个固体层以整数 $l = 1$、…、N编号（从最内层到最外层），是具有质量密度 $\rho^{(l)}$ 和拉梅常数（$\lambda^{(l)}$，$\mu^{(l)}$）的线性、均匀、各向同性弹性介质。我们还假设固体处于平面应变条件下。面内位移 u 和应力 σ 满足以下二维纳维–柯西方程：

$$\nabla \cdot \sigma + \rho^{(l)} \omega^2 u = 0, \tag{1}$$

其中 ω 为角频率。应力张量 σ与位移 u 之间满足以下线性关系：

$$\sigma_{ij} = \lambda^{(l)} (\nabla \cdot u) \delta_{ij} + 2\mu^{(l)} \varepsilon_{ij}, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{3}$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克δ。固–固界面上的位移 u 和应力法向分量 $\sigma \cdot n$ 连续，其中 n 为单位法向量。

下文假设固体为圆柱体，即第 l 层的横截面 $\Omega^{(l)}$ 由 $\Omega^{(l)} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid R^{(l-1)} < |x| < R^{(l)}\}$ 给出，其外半径为 $R^{(l)}$ ($R^{(0)} = 0$)。

Navier–Cauchy 方程 (1) 的解可通过定义如下的 Lam´e 势函数 $\phi^{(l)}$ 和 $\psi^{(l)}$ 求得

$$u_i = \frac{\partial \phi^{(l)}}{\partial x_i} + e_{3ij} \frac{\partial \psi^{(l)}}{\partial x_j} \quad \text{in } \Omega^{(l)}, \tag{4}$$

其中，e_{ijk} 为列维-奇维塔符号 [43]。势函数将纳维-柯西方程 (1) 分解为以下亥姆霍兹方程：

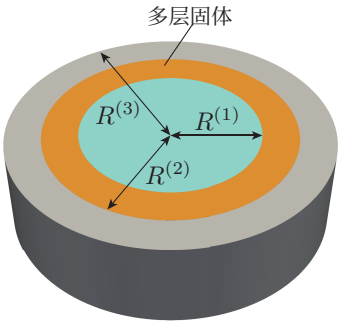

图1. 嵌入弹性介质或声学介质中的多层弹性固体。该图展示了 $N = 3$ 的情形。

亥姆霍兹方程：

$$\nabla^2 \phi^{(l)} + \left(\omega / c_{\mathrm{L}}^{(l)} \right)^2 \phi^{(l)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(l)}, \tag{5}$$

$$\nabla^2 \psi^{(l)} + \left(\omega / c_{\mathrm{T}}^{(l)} \right)^2 \psi^{(l)} = 0 \quad \text{in } \Omega^{(l)}, \tag{6}$$

其中，$c^{(l)}{}_{\mathrm{L}} = \sqrt{(\lambda^{(l)} + 2\mu^{(l)})/\rho^{(l)}}$ 和 $c^{(l)}{}_{\mathrm{T}} = \sqrt{\mu^{(l)}/\rho^{(l)}}$分别是 $\Omega^{(l)}$ 中纵波和横波的相速度。对于每个方位角指标 $m \in \mathbb{Z}$，解 $(\phi^{(l)}, \psi^{(l)})$ 可写为：

$$\begin{aligned} \phi^{(l)} &= A_{\mathrm{L}}^{(l)} J_m(\omega r / c_{\mathrm{L}}^{(l)}) \exp(\mathrm{i}m\theta) \\ &\quad + B_{\mathrm{L}}^{(l)} H_m^{(1)}(\omega r / c_{\mathrm{L}}^{(l)}) \exp(\mathrm{i}m\theta), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \psi^{(l)} &= A_{\mathrm{T}}^{(l)} J_m(\omega r / c_{\mathrm{T}}^{(l)}) \exp(\mathrm{i}m\theta) \\ &\quad + B_{\mathrm{T}}^{(l)} H_m^{(1)}(\omega r / c_{\mathrm{T}}^{(l)}) \exp(\mathrm{i}m\theta), \end{aligned} \tag{8}$$

其中，$(r\ \theta\ l =,)$ 是极坐标系；对于 $1, N-1$，界面处的连续性将未知系数 $A^{(l)} = R^{(l)}{}_{\mathrm{L}}$、$A^{(l)}{}_{\mathrm{T}}$、$B^{(l)}{}_{\mathrm{L}}$ 和$B^{(l)}{}_{\mathrm{T}}$ 关联如下：

$$M^{(l+1)}(R^{(l)}) \begin{pmatrix} A_{\mathrm{L}}^{(l+1)} \\ A_{\mathrm{T}}^{(l+1)} \\ B_{\mathrm{L}}^{(l+1)} \\ B_{\mathrm{T}}^{(l+1)} \end{pmatrix} = M^{(l)}(R^{(l)}) \begin{pmatrix} A_{\mathrm{L}}^{(l)} \\ A_{\mathrm{T}}^{(l)} \\ B_{\mathrm{L}}^{(l)} \\ B_{\mathrm{T}}^{(l)} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中，矩阵 $M^{(l)}(R) \in \mathbb{C}^{4\times4}$ 取决于频率 ω、方位角指标 m 和材料常数$\rho^{(l)}, \lambda^{(l)}, \mu^{(l)}$。$M^{(l)}(R)$ 的显式形式见附录A。任何解都应在 $r = 0$ 处有界；因此，我们有 $B^{(1)}{}_{\mathrm{L}} = B^{(1)}{}_{\mathrm{T}} = 0$。据此，我们可以定义一个 4×2 矩阵 X，它给出

$$X \begin{pmatrix} A_{\mathrm{L}}^{(1)} \\ A_{\mathrm{T}}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{L}}^{(N)} \\ A_{\mathrm{T}}^{(N)} \\ B_{\mathrm{L}}^{(N)} \\ B_{\mathrm{T}}^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

A. 固体背景

首先，我们在背景介质 $r > R^{(N)}$中构建辐射行为。当背景介质为弹性介质，质量密度为 ρ，拉梅常数为 (λ, μ) 时，我们以类似的方式定义两个势函数 ϕ 和 ψ 如下：

$$u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + e_{3ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad r > R^{(N)}. \tag{11}$$

我们关注的是不存在入射波的辐射场；因此，势函数 ϕ 和 ψ 写作

$$\phi = B_{\mathrm{L}} H_m^{(1)}(\omega r / c_{\mathrm{L}}) \exp(\mathrm{i}m\theta), \tag{12}$$

$$\psi = B_{\mathrm{T}} H_m^{(1)}(\omega r / c_{\mathrm{T}}) \exp(\mathrm{i}m\theta), \tag{13}$$

其中， B_{L} 和 B_{T} 为常数， c_{L} 和 c_{T} 分别由 $c_{\mathrm{L}}=\sqrt{(}$ $\lambda+2\mu)/\rho$ 和 $c_{\mathrm{T}}=\sqrt{\mu/\rho}$定义。与式 (9) 类似，在 $r=R^{(N)}$处的连续性条件使各系数满足

$$Y_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}B_{\mathrm{L}}\\B_{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=Z_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}A_{\mathrm{L}}^{(N)}\\A_{\mathrm{T}}^{(N)}\\B_{\mathrm{L}}^{(N)}\\B_{\mathrm{T}}^{(N)}\end{pmatrix},\tag{14}$$

其中，4×2 矩阵 Y_{s} 定义于附录A中，且 $Z_{\mathrm{s}}=M^{(N)}($ $R^{(N)})$。方程（10）和（14）给出以下线性方程：

$$\begin{bmatrix}Z_{\mathrm{s}}X & -Y_{\mathrm{s}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{\mathrm{L}}^{(1)}\\A_{\mathrm{T}}^{(1)}\\B_{\mathrm{L}}\\B_{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.\tag{15}$$

B. 流体背景

流体背景可以采用类似的方式进行建模。令 p 为满足以下条件的压力场

$$\nabla^2 p+(\omega/c)^2 p=0,\quad r>R^{(N)},\tag{16}$$

其中，声速 c 由背景流体的质量密度 ρ和体积模量 κ 给出，即 $c=\sqrt{\kappa/\rho}$。类比弹性情形，压力 p 具有如下形式的解，其中常数为 B:

$$p=BH_m^{(1)}(\omega r/c)\exp(\mathrm{i}m\theta),\quad r>R^{(N)}.\tag{17}$$

弹性–声学耦合通过位移和牵引力在 $r=R^{(N)}$处的连续性建立:

$$\sigma\cdot n=-pn,\tag{18}$$

$$u\cdot n=\frac{1}{\rho\omega^2}\nabla p\cdot n.\tag{19}$$

使用极坐标系，这些条件可转化为

$$Y_{\mathrm{f}}B=Z_{\mathrm{f}}\begin{pmatrix}A_{\mathrm{L}}^{(N)}\\A_{\mathrm{T}}^{(N)}\\B_{\mathrm{L}}^{(N)}\\B_{\mathrm{T}}^{(N)}\end{pmatrix},\tag{20}$$

其中，3×1 矩阵 Y_{f} 和 3×4 矩阵 Z_{f} 见附录A。

最后，我们利用方程 (10) 和 (20) 得到

$$\begin{bmatrix}Z_{\mathrm{f}}X & -Y_{\mathrm{f}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A_{\mathrm{L}}^{(1)}\\A_{\mathrm{T}}^{(1)}\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.\tag{21}$$

III. 例外点

在没有任何激励的情况下，多层固体的时间谐波振荡由方程 (15) 或 (21) 描述。这些线性方程组总是有一个平凡解（即均匀的 $u=0$），并且当系数矩阵的行列式为零时，对于离散的角频率 $\omega\in\mathbb{C}$ ，还可能存在非平凡解。这些（角）频率通常称为准正规模态频率、复特征值或散射极点。散射极点的虚部表示相应共振寿命的倒数，即辐射引起的时间指数衰减率。

散射极点取决于系统参数，例如分层结构的半径和材料常数。当两个（或更多）散射极点及其对应的共振模态在某些系统参数下同时在复 ω平面上合并时，这些参数被称为参数空间中的例外点。

在本研究中，我们利用优化算法表明多层弹性系统会出现例外点。

为证明这些系统会出现例外点，我们首先通过数值方法求解线性方程组（15）和（21）的非平凡解。系数矩阵关于 ω 呈非线性，因此这是一个关于 ω 的非线性特征值问题。我们使用 Sakurai–Sugiura 方法 [44] 求解该非线性特征值问题。因此，我们将非线性特征值问题形式化地写为$\mathcal{A}(\omega)\xi=0$，其中 $\mathcal{A}$ 是一个矩阵值函数。Sakurai–Sugiura 方法利用围道积分$\int_\gamma W^H\mathcal{A}^{-1}(\omega)$ $V\mathrm{d}\omega$，将非线性特征值问题转化为线性问题，其中 W 和 V 是满秩矩阵。随后使用标准特征值求解器求解该线性问题，从而得到围道 γ 内 $\mathcal{A}$ 的复特征值（矩阵极点）及其对应的右特征向量 ξ。更多详情请参见 [44]。

给定 M散射极点 ω_i（$i=1,$ ……, M），我们求解以下优化问题:

$$\min_{\zeta\in\mathcal{P}}J(\zeta)=\sum_{i\neq j}|\omega_i(\zeta)-\omega_j(\zeta)|^2,\tag{22}$$

其中 $\mathcal{P}$ 表示一个参数空间。如果优化达到 $J=0$（即 $\omega_1=\ldots=\omega_M$），且所有对应的共振模态均相同，则解 ζ 是 $\mathcal{P}$ 中的 M 阶例外点。

IV. 结果

A. 固体背景

在本小节中，我们将证明固体–固体系统存在二阶和三阶例外点。首先，我们考虑嵌入具有（ρ,λ,μ）的背景介质中的双层固体（$N=2$）。类比光学层状系统 [18], ，我们预期

当两个回音廊模式在相同频率处合并时，即可实现非厄米简并。若 $\Omega^{(1)}$ 的折射率大于 $\Omega^{(2)}$ 的折射率，便可实现这一点。下文中，我们仅考虑 $m = \pm 8$ 的情形。所有弹性介质的泊松比 $\nu^{(l)}$ 均为 0.3。

图 2 展示了在 $\rho^{(1)} = 16\rho$, $\rho^{(2)} = 4\rho$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu$ 和 $R^{(2)} = 2R^{(1)} =: R$ 条件下散射极点的分布及其对应的共振模式。结果清楚地表明，多层弹性系统在固体界面附近呈现出回音廊模式。本文重点关注两个相邻的散射极点 $\omega_1 R/c_{\mathrm{T}} = 5.2513 - 0.012416$ i 和 $\omega_2 R/c_{\mathrm{T}} = 5.5130 - 0.026387$i，并在$R^{(1)}$–$\rho^{(1)}$ 参数平面上寻找一个二阶例外点。

我们使用 Nelder–Mead 方法 [45] 进行了双变量优化，找到了最优解 $R^{(1)}/R = 0.34811$ 和 $\rho^{(1)}/\rho = 35.054$。该优化后的系统在 $\omega R/c_{\mathrm{T}} = 5.37067922 - 0.01744497$i $5.37067926 - 0.01744494$i 处有两个散射极点。图 3 (b) 所示的相应共振模式也在这些参数下合并。极点与共振模式同时简并，证明了二阶例外点的存在。

通过在双变量参数空间中环绕二阶例外点，可以确认其独特特征。图 3(a) 在 $R^{(1)}$–$\rho^{(1)}$ 平面上定义了一条闭合椭圆路径。路径中心即为所获得的例外点。沿逆时针方向追踪该路径，我们计算出复数 ω 平面上的两个散射极点，并在图 3(c) 中绘出它们的轨迹。结果表明，尽管参数曲线在 $R^{(1)}$–$\rho^{(1)}$ 平面上构成闭合路径，但单个极点在 ω 平面上并不会形成闭合路径。相反，两个极点共同构成闭合轨迹。换言之，当参数曲线环绕例外点两次时，单个极点才会形成闭合环路。这一特征类似于复平面上的多值平方根函数。

我们通过计算例外点周围各种参数 $R^{(1)}$ 和 $\rho^{(1)}$ 对应的极点对，探讨这种类似平方根的行为。图 4 展示了结果。极点对形成两个交叉曲面，并在例外点处分支。这种结构类似于平方根函数的黎曼曲面。这些结果表明，尽管方程 (15) 中没有明确体现，所获得的例外点仍源自一个复值函数的分支点。

我们现在从以下参数开始，展示三层固体表现出三阶例外点：

- Mass density $\rho^{(1)} = 64\rho$, $\rho^{(2)} = 16\rho$, $\rho^{(3)} = 4\rho$
- Shear modulus $\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \mu^{(3)} = \mu$
- Radii $R^{(1)} = R/4$, $R^{(2)} = R/2$, $R^{(3)} =: R$.

我们选取了三个散射极点 $\omega R/c_{\mathrm{T}} = 5.2088$ –0.005504i、$5.3657 - 0.016873$i 和 $5.5851 - 0.017023$i，并优化五个参数 $R^{(1)}$、$R^{(2)}$、$\rho^{(1)}$、$\rho^{(2)}$ 和 $\rho^{(3)}$，以寻找一个例外点。

优化后的参数为 $R^{(1)}/R = 0.11969$、$R^{(2)} = 0.38351$、$\rho^{(1)}/\rho = 270.69$、$\rho^{(2)}/\rho = 25.971$ 和 $\rho^{(3)}/\rho = 3.57568$。优化系统有三个极点 $\omega R/c_{\mathrm{T}}$，分别位于 $5.6385 - 0.019254$ i、$5.6387 - 0.019293$i 和 $5.6386 - 0.019242$i，彼此几乎简并。此外，图5 (b) 显示，不仅极点值，而且相应的共振模式也在该点合并。我们通过在 $R^{(2)}$–$\rho^{(2)}$ 参数空间中进行例外点环绕，确认该简并源自一个三阶例外点。具体而言，我们连续改变 $R^{(2)}$ 和 $\rho^{(2)}$ 的值，并计算复数 ω 平面上的极点，同时保持其他参数不变。

图5展示了结果。与前文关于二阶例外点的讨论一样，我们沿图5(a)所示的椭圆路径逆时针移动两个参数。图5(c)绘出了三个极点的轨迹。三条轨迹形成一条单一的闭合曲线，这是三阶例外点众所周知的特征。另一个重要性质是，当参数在三阶例外点处受到扰动时，简并极点的渐近行为。我们将参数 $\rho^{(2)}$ 固定在例外点处，并将另一个参数扰动为 $R^{(2)} = 0.38351R + \Delta_R$，其中 Δ_R 足够小。随着 Δ_R 的值增加，三个极点应偏离简并值。我们将该变化定义为 $\Delta_\omega = \max_{i \neq j} |\omega_i - \omega_j|$，它是 Δ_R 的函数，并在图6中绘出其数值。结果表明，该变化的渐近行为为 $O(\Delta_R^{1/3})$，而二阶例外点表现出平方根行为。这是三阶例外点的另一项特征。

B. 流体背景

当分层固体浸没在流体介质中时，系统会因声波辐射而损失能量。在此，我们采用相同的优化方法，证明固液耦合系统中存在例外点。

在本小节中，我们固定质量密度 $\rho > 0$、体积模量 $\kappa > 0$ 和外半径 $R^{(N)} =: R$。我们首先假设 $N = 2$，并计算 $\rho^{(1)} = 16\rho$、$\rho^{(2)} = 4\rho$、$\mu^{(1)} = \mu^{(2)} = \kappa$ 和 $R^{(1)} = R/2$ 的散射极点。随后，我们选取两个散射极点 $\omega R/c$，分别位于 $6.4436 - 0.029230$i 和 $7.0062 - 0.035093$i 处，并优化参数 $\rho^{(1)}$ 和 $R^{(1)}$。

图7展示了优化和例外点环绕的结果。参数优化成功地使目标函数 J 最小化，并得到两个极点 $\omega R/c$，分别位于$6.5056469 - 0.0240559$i 和 $6.5056469 - 0.0240557$i。简并共振模态绘于图7 (b) 中。如图7 (a) 所示，在 $R^{(1)}$–$\rho^{(1)}$ 平面上环绕得到的参数 $R^{(1)}/R = 0.29400$ 和 $\rho^{(1)}/\rho = 54.145$，我们得到了两个极点在复数 ω平面上的轨迹（图7 (c)），其结构与固体-固体模型的二阶例外点相同。根据这些结果，我们得出结论：参数路径内存在一个二阶例外点。

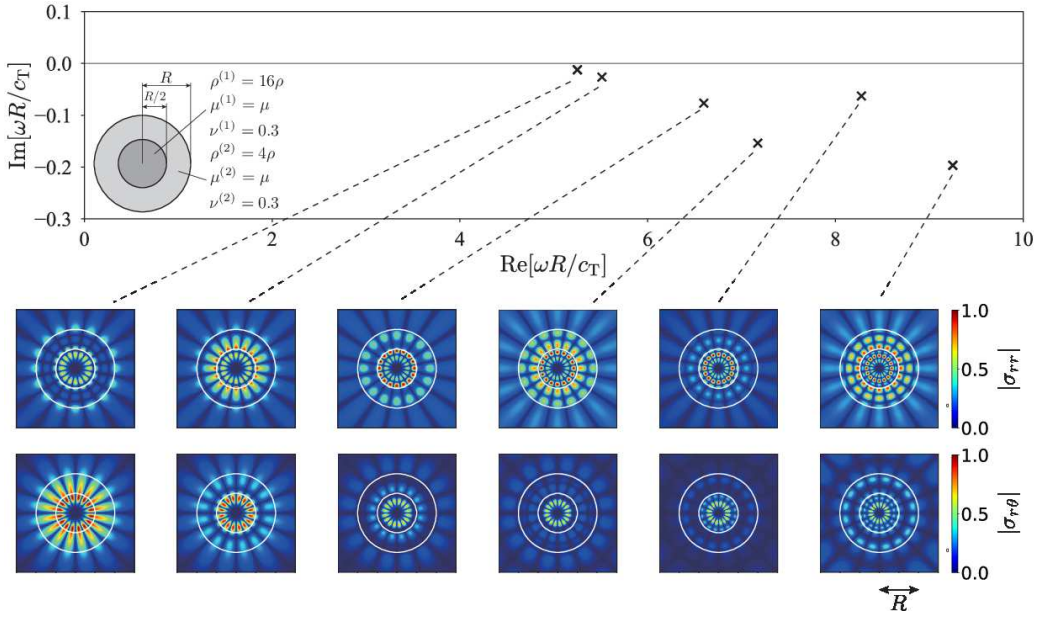

图2。 Scat固体背景中双层的散射极点及其对应的共振模式。

最后，我们将证明三阶例外点的存在。与固体-固体模型一样，我们采用具有以下参数的三层固体 ($N = 3$):

- 质量密度 $\rho_{(1)} = 64\rho$， $\rho_{(2)} = 16\rho$， $\rho_{(3)} = 4\rho$
- 剪切模量 $\mu_{(1)} = \mu_{(2)} = \mu_{(3)} = \kappa$
- 半径 $R_{(1)} = R/4$， $R_{(2)} = R/2$， $R_{(3)} =: R_\circ$

该系统有三个散射极点 $\omega R/c$ 位于 $6.4222 - 0.022268\mathrm{i}$、$6.7600 - 0.025502\mathrm{i}$ 和 $7.2757 - 0.019004\mathrm{i}$。我们在其他参数固定的情况下优化参数 $R^{(1)}$、 $R^{(2)}$、 $\rho^{(1)}$、 $\rho^{(2)}$ 和 $\rho^{(3)}$ 。图8展示了结果。三个极点几乎在$R^{(1)}/R = 0.12678$、$R^{(2)} = 0.40343$、 $\rho^{(1)}/\rho = 200.46$、$\rho^{(2)}/\rho = 19.400$ $\rho^{(3)}/\rho = 2.7136$ $\omega_1 R/c =$ 处合并，且对应于 $7.7966 - 0.094927\mathrm{i}$、$\omega_2 R/c = 7.7971 - 0.094901\mathrm{i}$ 和$\omega_3 R/c = 7.7968 - 0.094903\mathrm{i}$。它们的共振模式也发生简并，如图8(b)所示。通过例外点环绕确认了三阶例外点的存在。图8(a)和(c)展示了例外点环绕的结果。与固体–固体情形（图5）类似，我们在复数 ω平面上观察到三重结构，这表明存在一个三阶例外点。

V. 结论

本研究探讨了存在辐射损耗的圆柱弹性系统中散射极点的非厄米简并。我们首先利用 Lam´e 势函数和圆柱函数构建二维弹性动力学问题。随后对若干系统参数进行优化，使两个或三个散射极点在复频率平面上合并。我们围绕优化后的参数进行例外点环绕，以确认二阶和三阶例外点的存在。我们发现，三阶例外点处简并极点的灵敏度为$O(\Delta^{1/3})$，其中 Δ 是一个系统参数。这种反常灵敏度有助于提升机械传感器的性能，例如压力/应力传感和缺陷检测。

致谢

本研究得到日本学术振兴会科学研究费助成事业资助，项目编号为 JP22K14166。

附录A：矩阵的显式形式

为推导式 (9)，我们利用 u 和$\sigma \cdot n$的连续性，这等价于 u_r、u_θ、 σ_{rr} 和 $\sigma_{r\theta}$的连续性。经过一些计算 [43], ，可得

$$M^{(l)}(r) = \begin{bmatrix} U_1^{(l)}(r) & U_2^{(l)}(r) & \tilde{U}_1^{(l)}(r) & \tilde{U}_2^{(l)}(r) \\ V_1^{(l)}(r) & V_2^{(l)}(r) & \tilde{V}_1^{(l)}(r) & \tilde{V}_2^{(l)}(r) \\ T_{11}^{(l)}(r) & T_{12}^{(l)}(r) & \tilde{T}_{11}^{(l)}(r) & \tilde{T}_{12}^{(l)}(r) \\ T_{41}^{(l)}(r) & T_{42}^{(l)}(r) & \tilde{T}_{41}^{(l)}(r) & \tilde{T}_{42}^{(l)}(r) \end{bmatrix}, \quad \text{(A1)}$$

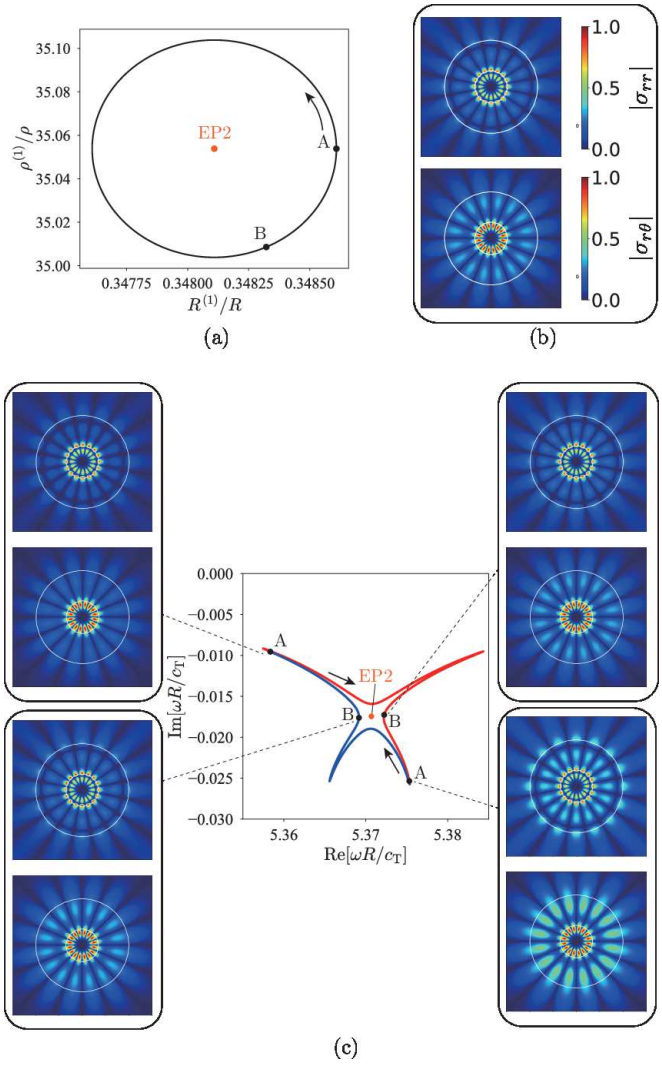

图 3. 在固体–固体系统中环绕一个二阶例外点（EP2）。(a) 参数空间中的环绕路径。(b) EP2 处的简并共振模。(c) 两个散射极点的轨迹。每种颜色对应于 (a) 中所示的一次环绕。

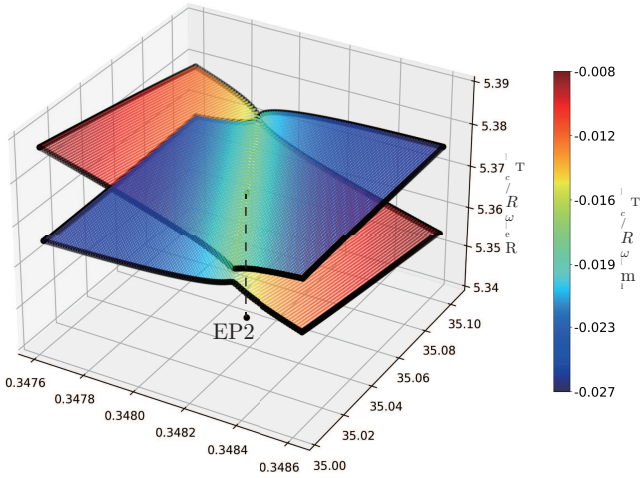

图 4. EP2 附近不同参数 $R^{(1)}$ 和 $\rho^{(1)}$ 对应的散射极点的实部和虚部。

其中

$$T_{11}^{(l)} = \frac{2\mu^{(l)}}{r^2}\Big[(m^2+m-\frac{1}{2}(k_\mathrm{T}^{(l)})^2r^2)J_m(k_\mathrm{L}^{(l)}r) - k_\mathrm{L}^{(l)}rJ_{m-1}(k_\mathrm{L}^{(l)}r)\Big], \quad \text{(A2)}$$

$$T_{12}^{(l)} = \frac{2\mu^{(l)}}{r^2}\big[-\mathrm{i}m\big((m+1)J_m(k_\mathrm{T}^{(l)}r) - k_\mathrm{T}^{(l)}rJ_{m-1}(k_\mathrm{T}^{(l)}r)\big)\big], \quad \text{(A3)}$$

$$T_{41}^{(l)} = \frac{2\mu^{(l)}}{r^2}\big[-\mathrm{i}m\big((m+1)J_m(k_\mathrm{L}^{(l)}r) - k_\mathrm{L}^{(l)}rJ_{m-1}(k_\mathrm{L}^{(l)}r)\big)\big], \quad \text{(A4)}$$

$$T_{42}^{(l)} = \frac{2\mu^{(l)}}{r^2}\Big[-(m^2+m-\frac{1}{2}(k_\mathrm{T}^{(l)})^2r^2)J_m(k_\mathrm{T}^{(l)}r) + k_\mathrm{T}^{(l)}rJ_{m-1}(k_\mathrm{T}^{(l)}r)\Big], \quad \text{(A5)}$$

$$U_1^{(l)} = k_\mathrm{L}^{(l)}J'_m(k_\mathrm{L}^{(l)}r), \quad \text{(A6)}$$

$$U_2^{(l)} = \frac{\mathrm{i}m}{r}J_m(k_\mathrm{T}^{(l)}r), \quad \text{(A7)}$$

$$V_1^{(l)} = \frac{\mathrm{i}m}{r}J_m(k_\mathrm{L}^{(l)}r), \quad \text{(A8)}$$

$$V_2^{(l)} = -k_\mathrm{T}^{(l)}J'_m(k_\mathrm{T}^{(l)}r). \quad \text{(A9)}$$

带波浪号的函数通过将 J_m 替换为 $H_m^{(1)}$ 来定义。

类似地，矩阵 Y_s 定义为

$$Y_\mathrm{s} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_1(R^{(N)}) & \tilde{U}_2(R^{(N)}) \\ \tilde{V}_1(R^{(N)}) & \tilde{V}_2(R^{(N)}) \\ \tilde{T}_{11}(R^{(N)}) & \tilde{T}_{12}(R^{(N)}) \\ \tilde{T}_{41}(R^{(N)}) & \tilde{T}_{42}(R^{(N)}) \end{bmatrix}. \quad \text{(A10)}$$

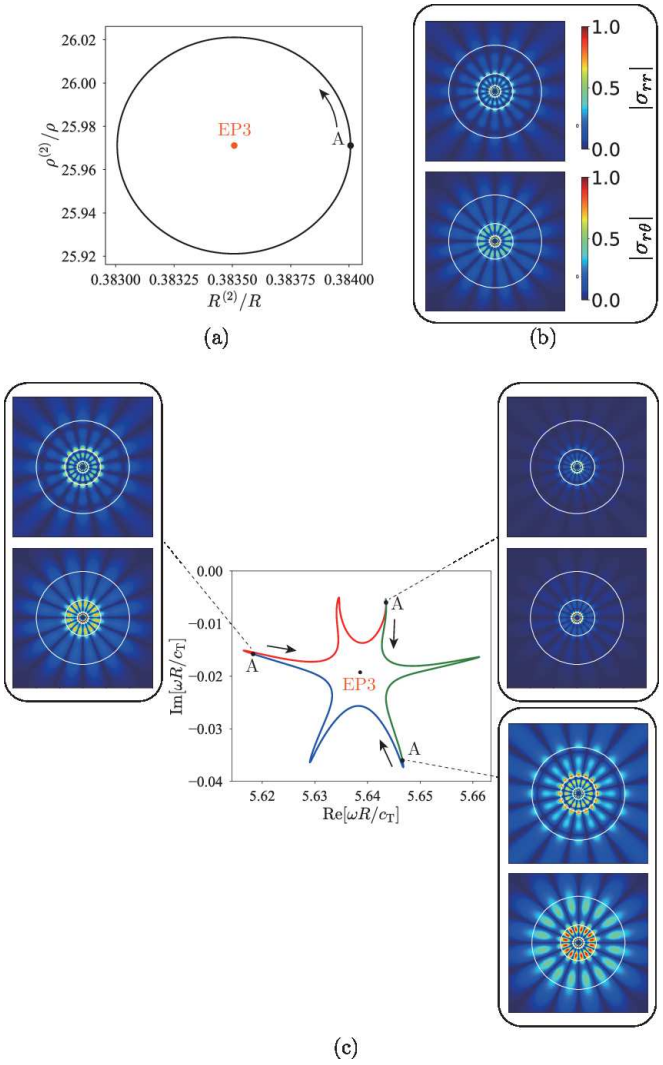

图5. 在固体–固体系统中环绕三阶例外点（EP3）。(a) 参数空间中的环绕路径。(b) EP3 处的简并共振模。(c) 两个散射极点的轨迹。每种颜色对应于(a)中所示的一次环绕。

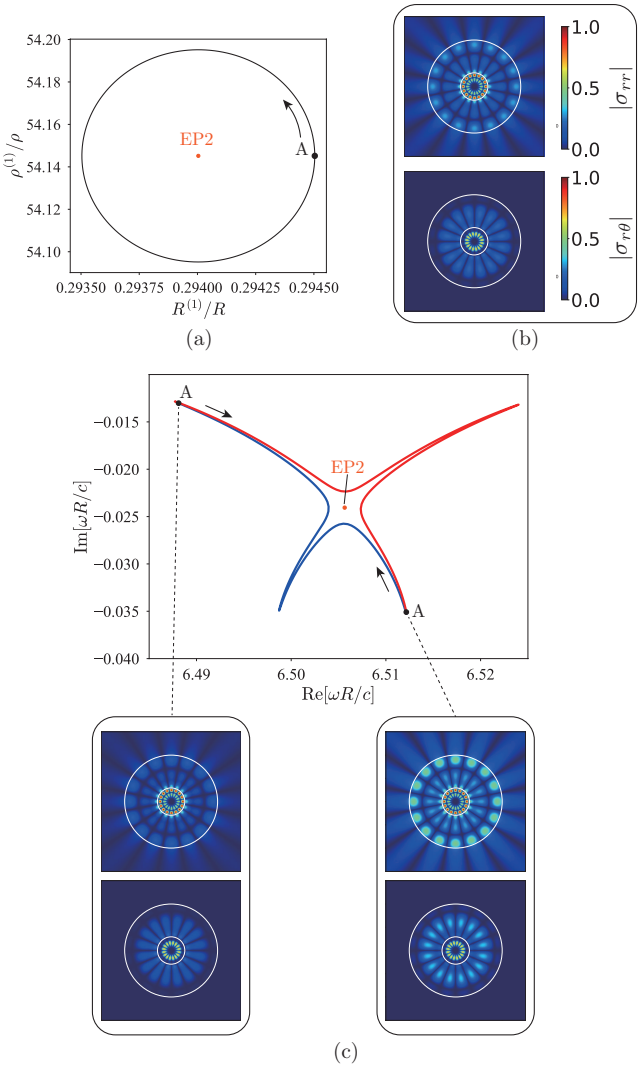

图7. 在固体–流体系统中环绕二阶例外点（EP2）。(a) 参数空间中的环绕路径。(b) EP2 处的简并共振模。(c) 两个散射极点的轨迹。每种颜色对应于(a)中所示的一次环绕。

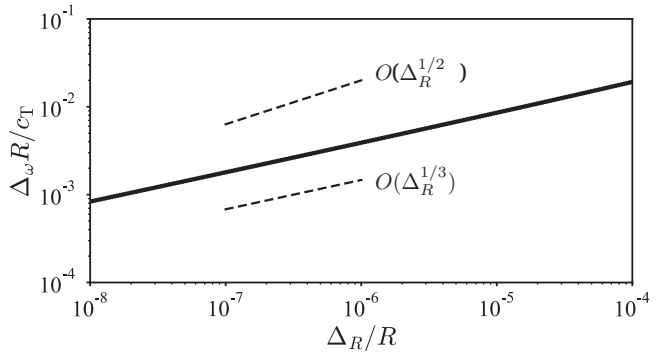

图6. 参数 $R^{(2)}$ 受到扰动时，三阶例外点处简并极点的变化。

固体–流体耦合矩阵写作

$$Z_{\mathrm{f}} = \begin{bmatrix} T_{11}^{(l)}(R^{(N)}) & T_{12}^{(l)}(R^{(N)}) & \tilde{T}_{11}^{(l)}(R^{(N)}) & \tilde{T}_{12}^{(l)}(R^{(N)}) \\ T_{41}^{(l)}(R^{(N)}) & T_{42}^{(l)}(R^{(N)}) & \tilde{T}_{41}^{(l)}(R^{(N)}) & \tilde{T}_{42}^{(l)}(R^{(N)}) \\ U_{1}^{(l)}(R^{(N)}) & U_{2}^{(l)}(R^{(N)}) & \tilde{U}_{1}^{(l)}(R^{(N)}) & \tilde{U}_{2}^{(l)}(R^{(N)}) \end{bmatrix}, \tag{A11}$$

$$Y_{\mathrm{f}} = \begin{bmatrix} -H_n^{(1)}(\omega R^{(N)}/c) \\ 0 \\ \frac{1}{c\rho\omega} H_n^{(1)\prime}(\omega R^{(N)}/c) \end{bmatrix}. \tag{A12}$$

[1] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 《数学经典》，第132卷（Springer，柏林，海德堡，1995年）。

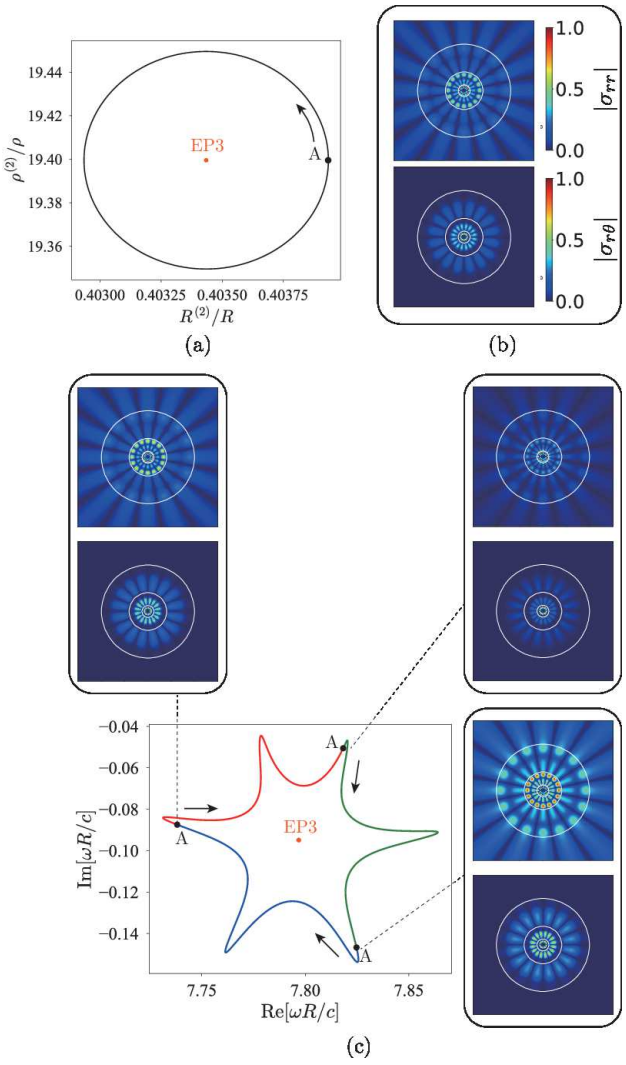

图8. 固体–流体系统中环绕三阶例外点（EP3）。(a) 参数空间中的环绕路径。(b) EP3处的简并共振模。(c) 两个散射极点的轨迹。每种颜色对应于(a)中所示的一次环绕。

和 M. Khajavikhan，《具有增强萨格纳克灵敏度的非厄米环形激光陀螺仪》，《自然》576，70（2019）。[9] T. Xing、Z. Pan、Y. Tao、G. Xing、R. Wang、W. Liu、E. Xing、J. Rong、J. Tang 和 J. Liu，《宇称-时间对称系统例外点附近的超高灵敏度应力传感方法》，《物理学杂志 D：应用物理》53，205102（2020）。[10] D. Yu、M. Humar、K. Meserve、R. C. Bailey、S. N. Chormaic 和 F. Vollmer，《用于生物和物理传感的回音壁模式传感器》，《自然综述：方法导论》1，1（2021）。[11] J. Yuan、L. Geng、J. Huang、Q. Guo、J. Yang、G. Hu 和 X. Zhou，《时变质量诱导例外点以提高缺陷检测灵敏度》，Physical Review Applied 18，064055（2022）。[12] S. Klaiman、U. G¨unther 和 N. Moiseyev，《 $\mathcal{PT}$-对称波导中分支点的可视化》，Physical Review Letters 101，080402（2008）。[13] S. Longhi，《具有 $\mathcal{PT}$对称性的复晶体中的布洛赫振荡》，Physical Review Letters 103，123601（2009）。[14] C. E. R¨uter、K. G. Makris、R. El-Ganainy、D. N. Christodoulides、M. Segev 和 D. Kip，《光学中宇称-时间对称性的观测》，《自然·物理》6，192（2010）。[15]S.. K. ¨Ozdemir、S. Rotter、F. Nori 和 L. Yang，《光子学中的宇称-时间对称性与例外点》，《自然·材料》18，783（2019）。[16] Y. D. Chong、L. Ge 和 A. D. Stone，$\mathcal{PT}$-对称性破缺与光学散射系统中的激光器-吸收器模式，Physical Review Letters 106，093902（2011）。[17] H. Cao 和 J. Wiersig，《介电微腔：波混沌与非厄米物理的模型系统》，《现代物理评论》87，61（2015）。[18] J. Kullig、C.-H. Yi、M. Hentschel 和 J. Wiersig，《层状光学微盘腔中的三阶例外点》，《新物理学杂志》20，083016（2018）。[19] E. Bulgakov、K. Pichugin 和 A. Sadreev，《介电旋转椭球体中的例外点》，《物理评论 A》104，053507（2021）。[20] A. Abdrabou 和 Y. Y. Lu，《平行圆形介电圆柱共振态的例外点》，《美国光学学会杂志 B》36，1659（2019

).

[2] M. Berry，非厄米简并的物理学，《捷克斯洛伐克物理学杂志》54，1039（2004）。[3] W. D. Heiss，例外点的物理学，《物理学A：数学与理论》45，

44016（2012）。

[4]C. Dembowski、H.-D. Gr¨af、H. L. Harney、A. Heine、W. D. Heiss、H. Rehfeld 和 A. Richter，《例外点拓扑结构的实验观测》，Physical Review Letters 86，787（2001）。[5] J. Wiersig，《利用例外点提高频率和能级劈裂检测的灵敏度：在用于单粒子检测的微腔传感器中的应用》，Physical Review Letters 112，203901（2014）。[6] J. Wiersig，《工作于例外点的传感器：一般理论》，Physical Review A 93，033809（2016）。[7] W. Chen、S.. Kaya ¨Ozdemir、G. Zhao、J. Wiersig 和 L. Yang，《例外点提高光学微腔中的传感能力》，《自然》548，192（2017）。[8] M. P. Hokmabadi、A. Schumer、D. N. Christodoulides，

[21] S. Gwak、H. Kim、H.-H. Yu、J. Ryu、C.-M. Kim、C.-H. Yi 和 C.-H. Yi，《变形光学微盘中瑞利散射体诱导的稳定岛模式稳态例外点》，《光学快报》46，2980（2021）。[22] B. Zhen、C. W. Hsu、Y. Igarashi、L. Lu、I. Kaminer、A. Pick、S.-L. Chua、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c，《狄拉克锥中涌现的例外点环》，《自然》525，354（2015）。[23] P. M. Kami´nski、A. Taghizadeh、O. Breinbjerg、J. Mørk 和 S. Arslanagi´c，《光子晶体板中例外点的调控》，《光学快报》42，2866（2017）。[24] A. Abdrabou 和 Y. Y. Lu，《周期性板上共振态的例外点》，《物理评论 A》97，063822（2018）。[25] H. Zhou、C. Peng、Y. Yoon、C. W. Hsu、K. A. Nel-son、L. Fu、J. D. Joannopoulos、M. Solja˘ci´c 和 B. Zhen，《观测到来自成对异常点的体费米弧和偏振半电荷》，《科学》359，1009（2018）。

[26] A.Abdrabou 和 Y. Y. Lu，《介电板上周期性圆柱阵列的布洛赫本征模例外点》，Physica Scripta 95，095507（2020）。[27] X. Zhu、H. Ramezani、C. Shi、J. Zhu 和 X. Zhang，《$\mathcal{PT}$-对称声学》，Physical Review X 4，031042（2014）。[28] R. Fleury、D. Sounas 和 A. Al`u，《基于宇称-时间对称性的隐形声学传感器》，Nature Communications 6，5905（2015）。[29] R. Fleury、D. L. Sounas 和 A. Al`u，《声学中的宇称-时间对称性：理论、器件与潜在应用》，IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics

[30] C. Shi、M. Dubois、Y. Chen、L. Cheng、H. Ra mezani、Y. Wang 和 X. Zhang，获取宇称-时间对称声学中的例外点，Nature Communications 7，11110（2016）。[31] J. Christensen、M. Willatzen、V. R. Velasco 和 M.-H. Lu，宇称-时间合成声子介质，Physical Review Letters 116，207601（2016）。[32] V. Achilleos、G. Theocharis、O. Richoux 和 V. Pagneux，非厄米声学超材料：例外点在吸声中的作用，Physical Review B 95，144303（2017）。[33] Y. Aur´egan 和 V. Pagneux，流动管道声学中的$\mathcal{PT}$-对称散射，Physical Review Letters 118，174301（2017）。[34] Z. Hou、H. Ni 和 B. Assouar，弹性负折射的$\mathcal{PT}$-对称性，Physical Review Applied 10，044071（2018）。[35] Q. Wu、Y. Chen 和 G. Huang，宇称-时间对称超材料梁中弯曲波的非对称散射，The Journal of the Acoustical Society of America 146，85

[36]X. Wang, X. Fang, D. Mao, Y. Jing, and Y. Li, 《例外点处极度非对称的声学超表面镜》，

《物理评论快报》123，214302（2019）。[37] V. Dom´ ınguez-Rocha、R. Thevamaran、F. M. Ellis 和 T. Kottos，《弹性动力学中由环境诱导的例外点》，Physical Review Applied 13，014060（2020）。[38] M. I. N. Rosa、M. Mazzotti 和 M. Ruzzene，《PT 对称连续弹性介质中的例外点与增强灵敏度》，Journal of the Mechanics and Physics of Solids 149，104325（2021）。[39] M. Farhat、P.-Y. Chen、S. Guenneau 和 Y. Wu，《薄弹性板中通过激射与反激射实现的自对偶奇点》，Physical Review B 103，134101（2021）。[40] R. Cai、Y. Jin、Y. Li、T. Rabczuk、Y. Pen-nec、B. Djafari-Rouhani 和 X. Zhuang，《非厄米超材料梁中的例外点与趋肤模》，Physical Review Applied 18，014067（2022）。[41] J. Yi、Z. Ma、R. Xia、M. Negahban、C. Chen 和 Z. Li，《奇偶 - 时间对称弹性超材料中依赖结构周期性的散射行为》，Physical Review B 106，014303（2022）。[42] A. A. Mokhtari、Y. Lu、Q. Zhou、A. V. Amirkhizi 和 A. Srivastava，《超材料界面处面内弹性波的散射》，International Journal of Engineering Science 150，103278（2020）。[43] A. C. Eringen 和 E. S. Suhubi，*Elastodynamics*，*Vol. II*，*Linear Theory* 1975（Academic Press，）。[44] J. Asakura、T. Sakurai、H. Tadano、T. Ikegami 和 K. Kimura，《一种使用围道积分求解非线性特征值问题的数值方法》，JSIAM Letters 1，52（2009）。[45] F. Gao 和 L. Han，《使用自适应参数实现 Nelder-Mead 单纯形算法》，C

22, 121（2016）。

0（2019）。omputational Optimizati在一个d Applicati **51** 259（2012）。

.....上，