arXiv:2302.10333v1 [math.CA] 20 Feb 2023

三角恒等式：从 Hermite 经由 Meijer、Nørlund 和 Braaksma 到 Chu、Johnson 及更广领域

Alexander Dyachenko[a] 和 Dmitrii Karp[b*]

[a]俄罗斯莫斯科 Keldysh应用数学研究所[b]以色列霍隆霍隆理工学院数学系

摘要

三角恒等式早在古希腊时代便已为人所知，如今形式多样、风格纷呈。在这个庞大的家族中，有一类插值型恒等式由 Hermite 发现，近来又在两篇彼此独立的论文中重新受到关注：Wenchang Chu 和 Warren Johnson 分别探讨了 Hermite 结果的多种形式及其推广。受这两篇文章启发，本文有两个目标。首先，补充上述论文参考文献中的一处空缺，并介绍 Meijer、Nørlund 和 Braaksma 于 1940 至 1962 年间发现的各种三角恒等式；这些恒等式涉及 Mellin-Barnes积分的解析延拓，以及广义超几何微分方程不同解之间的关系。其次，本文将 Chu 和 Johnson 的结果与 Meijer 和 Braaksma 的思路相结合，并补充某些求和变换及复分析中的相关事实，从而给出这些结果的一些扩展。我们统一并系统整理了各种已知和新发现的恒等式，并通过大量具体例子展示所得结果。

关键词：三角恒等式、Hermite 余切恒等式、正弦恒等式、部分分式、对称多项式

MSC2020：33B10

1 引言

在一篇评论中 可折纸 [8], Warren Johnson 为该有理函数找到了一个部分分式展开式 io

$$\frac{F(\sin(z),\cos(z))}{\prod_{j=1}^{n}\sin(z-a_j)}, \tag{1}$$

其中 F 是一个具有如下形式的二元多项式

$$F(\sin(z),\cos(z)) = \sum_{\substack{r,s\geq 0\\ r+s\leqslant n}} t_{r,s}(\sin(z))^r(\cos(z))^s$$

他证明了这是 Hermite 的余切恒等式的一个意义深远的推广 [8,定理 1]，并对余切及许多相关三角恒等式的早期历史作了精彩概述。Johnson 的论文发表于《美国数学月刊》2010 年 4 月号，但显然早在那之前就已构思并开始撰写；正如作者所言，“已经

*电子邮箱：A. Dyachenko – *diachenko@sfedu.ru*，D. Karp – *dimkrp@gmail.com*

远远超出了我最初的构想”。这或许可以解释作者为何错过了 Wenchang Chu 的一篇短文 [4]，该文于 2008 年 1 月发表于 AMS 论文集。Chu 研究的基本上是同一个问题，只是采用了稍微更一般的初始函数形式，即

$$\frac{P(e^{iz})}{\prod_{j=1}^{n}\sin(z-a_j)}, \tag{2}$$

其中 $P(w)$ 是关于 w 的 Laurent 多项式，由项 w^k 组成，且 $|k|\leqslant n$。Chu 找到了这个比值的部分分式分解，并列举了其部分分式分解的若干特例，说明这些特例如何直接导出文献中发现的各种恒等式，其中最值得一提的是 [3, 5, 6, 12]。我们指出，令 $\alpha_j=\beta_j+\pi/2$，并代入 [4,(8)]，即可得到 Hermite 的余切恒等式 [8, 定理 1] ——这正是 Johnson 论文的出发点。令人惊讶的是，Chu 的参考文献与 Johnson 的参考文献竟毫无交集！一个引人注目的例子是下面这个恒等式

$$\sum_{t=1}^{m}\frac{\prod_{j=1}^{m}\sin(a_j-b_t)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq t}}^{m}\sin(b_j-b_t)}=\sin(a_1+\cdots+a_m-b_1-\cdots-b_m), \tag{3}$$

据 Johnson [8, (4.2)]，所述，这个恒等式归功于 Hermite [7]。这个恒等式可以看作托勒密定理的推广（以三角形式表述）：对于内接于圆的四边形，其两条对角线长度的乘积等于两对对边长度乘积之和。Chu [4, (9)] 将上述公式归于 Gustafson [6,引理 5.10]。第二作者与 E.G. Prilepkina 合作，在 [9, 推论 3.7]中重新发现了这一结果，其形式为伽马函数恒等式；根据欧拉反射公式，它可化为$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\pi/\sin(\pi z)$。

结果证明，恒等式（2）后来又被重新发现了好几次。Johnson 和 Chu 都遗漏了 Meijer [11], Nørlund [13] 和 Braaksma [2], 的相关文献；这些文献在研究 Mellin-Barnes 围道积分时发现了若干相关的三角恒等式，但仅在 [13] 中以显式形式给出。其中一个恒等式使 E.G. Prilepkina 和第二作者得以简化 Meijer 的某个特例 G-函数的解析延拓过程，见[10]。仔细阅读 [11] 和 [2] 可知，从某种意义上说，他们的工作超越了 Chu 和 Johnson。具体而言，分子多项式 F 在（1）中的次数以及 P 在（2）中的次数均不超过 n ——分母多项式 $\prod_{j=1}^{n}\sin(z-a_j)$ 的次数；而 Meijer 和 Braaksma 则给出了适用于任意次数的展开式。这些作者研究这些恒等式，并非为了恒等式本身，而是将其作为推导 Mellin-Barnes 积分的表示式和展开式的工具之一。这些公式被复杂的记号深深掩盖，他们没有给出明确的例子，并且将某些量隐式地定义为若干有理函数的幂级数系数。

本文的目的有二。首先，在接下来的第2节中，我们将重新审视 Meijer、Nørlund 和 Braaksma 的恒等式，解释其符号，并提供一些具体示例，以展示其一般公式的强大之处。我们还将说明 Meijer 与 Braaksma 的结果之间的关系，并提及它们与 Nørlund 开创性论文中所含公式的联系 [13] 。其次，我们将拓展 Chu 的方法，并在第3节中给出此前提及的各种三角恒等式的推广。

2 重新审视 Braaksma 和 Meijer 的恒等式

设 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_r)$ 和 $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ 是实向量，并记 $\varkappa=r-n$ 为它们长度之差。定义

$$F(z)=\frac{\prod_{j=1}^{r}\sin(a_j-z)}{\prod_{j=1}^{n}\sin(b_j-z)}=\frac{\sin(\mathbf{a}-z)}{\sin(\mathbf{b}-z)}, \tag{4}$$

这里及下文中，$\sin(\mathbf{a}-z)=\prod_{j=1}^{r}\sin(a_j-z)$，且 $\sin(\mathbf{b}-z)=\prod_{j=1}^{n}\sin(b_j-z)$。我们还用 $\mathbf{b}^{[j]}$ 表示删去第 j 个分量后的向量 $\mathbf{b}$：$\mathbf{b}^{[j]}=(b_1,\dots,b_{j-1},b_{j+1},\dots,b_n)$。本节通常沿用 Meijer 和 Braaksma 的记号，但对所有指标 j，将 $\pi a_j\to a_j$ 和 $\pi b_j\to b_j$ 替换为其他记号。为表述 Braaksma 的结果，我们需要先做一些准备，并补充 [2] 中省略的若干细节。设 $r\geq n-1$。对于充分大的正 $\Im(z)$，有

$$F(z)=\sum_{j=0}^{\infty}C_j e^{i\delta_j z},$$

其中 $\delta_0=-\varkappa$, $\delta_j=\delta_0+2j$。事实上，将 $\sin(z)=e^{iz}(1-e^{-2iz})/(2i)$ 展开后，我们有：

$$\begin{aligned}F(z)&=\underbrace{(2i)^{-\varkappa}e^{i(\sum a_j-\sum b_j)}}_{C_0}e^{i\delta_0 z}\frac{\prod_{j=1}^{r}\left(1-e^{-2ia_j}e^{2iz}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-e^{-2ib_j e^{2iz}}\right)}\\&=C_0e^{i\delta_0 z}\left(A_0+A_1e^{2iz}+A_2e^{4iz}+\cdots+A_re^{2irz}\right)\left(B_0+B_1e^{2iz}+B_2e^{4iz}+\cdots\right)\\&=C_0e^{i\delta_0 z}\left(A_0B_0+(A_1+B_1)e^{2iz}+(A_2+A_1B_1+B_2)e^{4iz}+\cdots+e^{2ijz}\sum_{k+l=j}A_kB_l+\cdots\right),\end{aligned}$$

其中 $A_0=B_0=1$,

$$\begin{aligned}A_k&=(-1)^k e_k\left(e^{-2ia_1},\dots,e^{-2ia_r}\right)=(-1)^k\sum\nolimits_{0\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant r}e^{-2i(a_{j_1}+\cdots+a_{j_k})},\\B_k&=h_k\left(e^{-2ib_1},\dots,e^{-2ib_n}\right)=\sum\nolimits_{0\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}e^{-2i(b_{j_1}+\cdots+b_{j_k})},\end{aligned}$$

因此，对于 $k>r$，有 $A_k=0$。这里，e_k 表示第 k 个初等对称多项式，而 h_k 是第 3.1 节中的完全齐次对称多项式 [14, 1]。因此，我们得到

$$C_j=C_0\sum_{k+l=j}A_kB_l=C_0\sum_{k+l=j}(-1)^k e_k\left(e^{-2ia_1},\dots,e^{-2ia_r}\right)h_l\left(e^{-2ib_1},\dots,e^{-2ib_n}\right).\tag{5}$$

类似地，对于绝对值足够大的负数 $\Im(z)$，可以验证

$$F(z)=\sum_{j=-\infty}^{\varkappa}D_j e^{i\delta_j z},$$

其中 $\delta_\varkappa=-\delta_0=\delta_0+2\varkappa=\varkappa$, $\delta_j=\delta_0+2j=-\delta_\varkappa+2j$。为了计算系数，我们利用 $\sin(z)=-e^{-iz}(1-e^{2iz})/(2i)$ 展开：

$$\begin{aligned}F(z)&=\underbrace{(-2i)^{-\varkappa}e^{i(\sum b_j-\sum a_j)}}_{D_\varkappa}e^{i\delta_\varkappa z}\frac{\prod_{j=1}^{r}\left(1-e^{2ia_j}e^{-2iz}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-e^{2ib_j e^{-2iz}}\right)}\\&=D_\varkappa e^{i\delta_\varkappa z}\left(\hat{A}_0+\hat{A}_1e^{-2iz}+\hat{A}_2e^{-4iz}+\cdots+\hat{A}_re^{-2irz}\right)\left(\hat{B}_0+\hat{B}_1e^{-2iz}+\hat{B}_2e^{-4iz}+\cdots\right)\\&=D_\varkappa e^{i\delta_\varkappa z}\left(\hat{A}_0\hat{B}_0+(\hat{A}_1+\hat{B}_1)e^{-2iz}+(\hat{A}_2+\hat{A}_1\hat{B}_1+\hat{B}_2)e^{-4iz}+\cdots+e^{-2imz}\sum_{k+l=m}\hat{A}_k\hat{B}_l+\cdots\right),\end{aligned}$$

^^其中 $A_0=B_0=1$,

$$\hat{A}_k=(-1)^k e_k\left(e^{2ia_1},\dots,e^{2ia_r}\right),\quad \hat{B}_k=h_k\left(e^{2ib_1},\dots,e^{2ib_n}\right)$$

ˆ且对于 $k>r$， $A_k=0$。因此，

$$D_{\varkappa-j}=D_{\varkappa}\sum_{k+l=\varkappa-j}\hat{A}_k\hat{B}_l=D_{\varkappa}\sum_{k+l=\varkappa-j}(-1)^k e_k\left(e^{2ia_1},\dots,e^{2ia_r}\right)h_l\left(e^{2ib_1},\dots,e^{2ib_n}\right). \tag{6}$$

我们将在下面的第 C_j 小节中，更仔细地考察类似于 D_j 和我们在推论 2 中3.2 的系数。下面的结果是 [2, 引理 10] 的一部分（更正了 [2, （11.14）] 中的一个错误并对记号作了略微修改 $D_j\to -D_j$）：

定理 1。 设 $k\in\mathbb{Z}$为任意数，且数 $b_1,\dots,b_n$模 π互异。那么对于 F 在 (4)中定义的 z 以及除所涉及函数的极点外的所有复数:

$$F(z)=\sum_{j=0}^{k-1}C_j e^{i\delta_j z}+\sum_{j=k}^{\varkappa}D_j e^{i\delta_j z}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_j)e^{i(\varkappa+1-2k)(b_j-z)}}{\sin(\mathbf{b}_{[j]}-b_j)\sin(b_j-z)}. \tag{7}$$

约定下限大于上限的和等于零。数C_j、 D_j 分别定义于 (5)和 (6)中。

一些特殊情形 如下。回顾一下， $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_r)$、$\mathbf{b}=(b_1,\dots,b_n)$， 并记 te

$$\nu=\sum\nolimits_{j=1}^{r}a_j-\sum\nolimits_{j=1}^{n}b_j. \tag{8}$$

如果 $\varkappa=r-n=-1$ 和 $k=0$，则我们简单地得到

$$F(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_j)}{\sin(\mathbf{b}_{[j]}-b_j)\sin(b_j-z)}.$$

该公式此前由 Meijer（详见本节下文）和 Nørlund 发现 [13, （3.32）]。如果 $\varkappa=r-n=0$ 且 $k=0$ 我们得到

$$F(z)=e^{-i\nu}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_j)e^{i(b_j-z)}}{\sin(\mathbf{b}_{[j]}-b_j)\sin(b_j-z)}$$

其中 w 这也早先由 Nørlund [13, （3.41）]发现。如果 $\varkappa=r-n=1$ 且 $k=1$ 我们有 e

$$F(z)=\sin(\nu-z)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_j)}{\sin(\mathbf{b}_{[j]}-b_j)\sin(b_j-z)}. \tag{9}$$

进一步注意，对于任意奇数 $\varkappa$ 且 $k=(\varkappa+1)/2$，我们可以将其中的项配对

$$\sum_{j=0}^{k-1}C_j e^{i\delta_j z}+\sum_{j=k}^{\varkappa}D_j e^{i\delta_j z}$$

从而得到正弦函数之和。事实上， $\delta_{\varkappa}=-\delta_0=\varkappa$、 $\delta_{\varkappa-1}=-\delta_1=\varkappa-2$、.....、 $\delta_k=-\delta_{k-1}=1$以及

$$(2i)^{\varkappa}C_0=e^{i\nu}=-\frac{1}{(2i)^{\varkappa}D_{\varkappa}},$$

（回想一下， $\varkappa$ 是奇函数。）由此可得

$$C_0e^{i\delta_0 z}+D_{\varkappa}e^{i\delta_{\varkappa}z}=\frac{1}{(2i)^{\varkappa-1}}\sin\left(\nu+\delta_0 z\right).$$

接下来,

$$\begin{aligned}(2i)^{\varkappa}C_1 =&e^{i\nu}\left(e^{-2ib_1}+\cdots+e^{-2ib_n}-e^{-2ia_1}-\cdots-e^{-2ia_r}\right),\\ (2i)^{\varkappa}D_{\varkappa-1} =&-e^{-i\nu}\left(e^{2ib_1}+\cdots+e^{2ib_n}-e^{2ia_1}-\cdots-e^{2ia_r}\right).\end{aligned}$$

因此,

$$C_1e^{i\delta_1 z}+D_{\varkappa-1}e^{i\delta_{\varkappa-1}z}=\frac{1}{(2i)^{\varkappa-1}}\sum_{j=1}^{n}\sin\left(\nu-2b_j+\delta_1 z\right)-\frac{1}{(2i)^{\varkappa-1}}\sum_{j=1}^{r}\sin\left(\nu-2a_j+\delta_1 z\right).$$

此外,

$$\begin{aligned}(2i)^{\varkappa}e^{-i\nu}C_2=&\sum_{1\leqslant j<l\leqslant r}e^{-2i(a_j+a_l)}-\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}e^{-2i(a_j+b_l)}+\sum_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant n}e^{-2i(b_j+b_l)},\\ -(2i)^{\varkappa}e^{i\nu}D_{\varkappa-2}=&\sum_{1\leqslant j<l\leqslant r}e^{2i(a_j+a_l)}-\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}e^{2i(a_j+b_l)}+\sum_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant n}e^{2i(b_j+b_l)}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}C_2e^{i\delta_2 z}+D_{\varkappa-2}e^{i\delta_{\varkappa-2}z}=&\frac{1}{(2i)^{\varkappa-1}}\Bigg\{\sum_{1\leqslant j<l\leqslant r}\sin\left(\nu-2a_j-2a_l+\delta_2 z\right)\\ &-\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}\sin\left(\nu-2a_j-2b_l+\delta_2 z\right)+\sum_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant n}\sin\left(\nu-2b_j-2b_l+\delta_2 z\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

一般来说，每个单项式

$$(2i)^{\varkappa}C_j=e^{i\nu}\sum_{k+l=j}(-1)^k e_k\left(e^{-2ia_1},\ldots,e^{-2ia_r}\right)h_l\left(e^{-2ib_1},\ldots,e^{-2ib_n}\right)$$

的形式为 $e^{i\alpha}$ ，且在.....中的对应项形式为 $-e^{-i\alpha}$

$$(2i)^{\varkappa}D_{\varkappa-j}=-e^{-i\nu}\sum_{k+l=j}(-1)^k e_k\left(e^{2ia_1},\ldots,e^{2ia_r}\right)h_l\left(e^{2ib_1},\ldots,e^{2ib_n}\right),$$

因此

$$C_je^{i\delta_j z}+D_{\varkappa-j}e^{i\delta_{\varkappa-j}z}$$

必然是有限个正弦函数之和。例如，对于 $\varkappa=3, k=2$ ，我们得到

$$\begin{aligned}F(z)=-\frac{1}{4}\sin(\nu-3z)-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\sin(\nu-2b_j-z)+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{r}\sin(\nu-2a_j-z)\\ +\sum_{j=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_j)}{\sin(\mathbf{b}_{[j]}-b_j)\sin(b_j-z)}.\end{aligned}\tag{10}$$

接下来，我们将注意力转向 Meijer 恒等式。根据 [11, 引理 3] 对于任意整数 k我们有

$$(2i)^{\varkappa+1}\sum_{t=1}^{n}e^{(-\varkappa+2k)ib_t}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_t)}{\sin(\mathbf{b}_{[t]}-b_t)}=e^{\nu i}\bar{\Omega}_{\varkappa-k}-(-1)^{\varkappa}e^{-\nu i}\Omega_k,\tag{11}$$

其中，数值 $\Omega_m = \Omega_m(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ 和 $\bar{\Omega}_m = \bar{\Omega}_m(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ 可由以下幂级数展开求得：

$$\frac{\prod_{j=1}^{r}(1 - ze^{2ia_j})}{\prod_{j=1}^{n}(1 - ze^{2ib_j})} = \sum_m \Omega_m z^m \quad \text{and} \quad \frac{\prod_{j=1}^{r}(1 - ze^{-2ia_j})}{\prod_{j=1}^{n}(1 - ze^{-2ib_j})} = \sum_m \bar{\Omega}_m z^m.$$

注意 $\Omega_m = \bar{\Omega}_m = 0$ 对于 $m < 0$。此外，与（5）和（6）比较可知

$$\Omega_m = \frac{D_{\varkappa - m}}{D_\varkappa} \quad \text{and} \quad \bar{\Omega}_m = \frac{C_m}{C_0}.$$

不难发现定理 1 中的 Braaksma 恒等式与 Mejer 恒等式（11）之间存在联系。将 $n \mapsto n-1$ 平移（使得 $\varkappa \mapsto \varkappa+1$），作变换 $k \mapsto \varkappa+1-k$并令 $z = b_n$，Braaksma 恒等式便转化为

$$\frac{\sin(\mathbf{a} - b_n)}{\prod_{j=1}^{n-1}\sin(b_n - b_j)} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin(\mathbf{a} - b_j)e^{i(\varkappa+2-2\varkappa-2+2k)(b_j - b_n)}}{\prod_{\substack{m=1 \\ m\neq j}}^{n-1}\sin(b_m - b_j)\cdot\sin(b_n - b_j)} = \sum_{j=0}^{\varkappa-k} \widetilde{C}_j e^{i\widetilde{\delta}_j b_n} + \sum_{j=\varkappa+1-k}^{\varkappa+1} \widetilde{D}_j e^{i\widetilde{\delta}_j b_n} \quad (12)$$

$\widetilde{C}_j$ 和 $\widetilde{D}_j$，分别等于 C_j 和 D_j（参数经过平移），且对于 $\delta_0 = -\varkappa - 1$，$\delta_j = \delta_0 + 2j$。同时，对于

$$\sum_{l=0}^{\infty} x^l h_l(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = (1 - x\gamma_n)^{-1} \prod_{l=1}^{n-1}(1 - x\gamma_l)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l \sum_{j=0}^{l} h_{l-j}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1})\gamma_n^j,$$

因此

$$h_l\left(e^{-2ib_1}, \ldots, e^{-2ib_n}\right) = \sum_{j=0}^{l} h_{l-j}\left(e^{-2ib_1}, \ldots, e^{-2ib_{n-1}}\right) e^{-2ijb_n}.$$

将此恒等式连同 $\widetilde{C}_0^{-1}e^{ib_n} = (2i)^{\varkappa+1}e^{-i(\sum a_j - \sum_{j<n} b_j)}e^{ib_n} = (2i)^{\varkappa+1}e^{-i\nu}$ 代入（5），得到

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_k = \frac{C_k}{C_0} &= \sum_{l=0}^{k}(-1)^{k-l} e_{k-l}\left(e^{-2ia_1}, \ldots, e^{-2ia_r}\right) \sum_{j=0}^{l} h_{l-j}\left(e^{-2ib_1}, \ldots, e^{-2ib_{n-1}}\right) e^{-2ijb_n} \\
&= \sum\nolimits_{j=0}^{k} e^{-2ijb_n} \sum\nolimits_{l=j}^{k} (-1)^{k-l} e_{k-l}\left(e^{-2ia_1}, \ldots, e^{-2ia_r}\right) h_{l-j}\left(e^{-2ib_1}, \ldots, e^{-2ib_{n-1}}\right) \\
&= \sum\nolimits_{j=0}^{k} e^{(-2j)ib_n} \widetilde{C}_{k-j}\widetilde{C}_0^{-1} = \widetilde{C}_0^{-1} \sum\nolimits_{j=0}^{k} e^{(\varkappa+1+\widetilde{\delta}_j - 2k)ib_n} \widetilde{C}_j \\
&= (2i)^{\varkappa+1} e^{-i\nu} e^{i(\varkappa-2k)b_n} \sum\nolimits_{j=0}^{k} e^{i\widetilde{\delta}_j b_n} \widetilde{C}_j
\end{aligned}$$

因此，

$$e^{i\nu}\bar{\Omega}_{\varkappa-k} = (2i)^{\varkappa+1} e^{i(-\varkappa+2k)b_n} \sum\nolimits_{j=0}^{\varkappa-k} e^{i\widetilde{\delta}_j b_n} \widetilde{C}_j.$$

由（6）同理可得

$$\Omega_k = \frac{D_{\varkappa-k}}{D_\varkappa} = \sum_{j=0}^{k} e^{(2j)ib_n} \frac{\widetilde{D}_{\varkappa+1-k+j}}{\widetilde{D}_{\varkappa+1}} = \widetilde{D}_{\varkappa+1}^{-1} \sum\nolimits_{j=\varkappa+1-k}^{\varkappa+1} e^{(2j-2\varkappa-2+2k)ib_n} \widetilde{D}_j,$$

因此，由于 $\widetilde{D}_{\varkappa+1}^{-1}e^{-ib_n} = (-2i)^{\varkappa+1}e^{i(\sum a_j - \sum_{j<n} b_j)}e^{ib_n} = (-2i)^{\varkappa+1}e^{i\nu}$，

$$-(-1)^{\varkappa}e^{-\nu i}\Omega_k = (2i)^{\varkappa+1} \sum_{j=\varkappa+1-k}^{\varkappa+1} e^{(\widetilde{\delta}_j + \varkappa + 1 - 2\varkappa - 1 + 2k)ib_n} \widetilde{D}_j = (2i)^{\varkappa+1} e^{(-\varkappa+2k)ib_n} \sum_{j=\varkappa+1-k}^{\varkappa+1} e^{i\widetilde{\delta}_j b_n} \widetilde{D}_j.$$

等式左端的各项（12）可以合并为一个和，因此（12）乘以 $(2i)^{\varkappa+1}e^{(-\varkappa+2k)ib_n}$ 与（11）完全相同:

$$(2i)^{\varkappa+1}\sum_{t=1}^{n}e^{(-\varkappa+2k)ib_t}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_t)}{\sin(\mathbf{b}_{[t]}-b_t)}=(2i)^{\varkappa+1}e^{(-\varkappa+2k)ib_n}\left(\sum_{j=0}^{k}\widetilde{C}_j e^{i\widetilde{\delta}_j b_n}+\sum_{j=k+1}^{\varkappa+1}\widetilde{D}_j e^{i\widetilde{\delta}_j b_n}\right)$$
$$=\left(e^{\nu i}\bar{\Omega}_{\varkappa-k}-(-1)^{\varkappa}e^{-\nu i}\Omega_k\right).$$

特别地，当 $\varkappa=k=0$ 公式 (11) 得到 (3)。若 $\varkappa=1$ $(r=n+1)$ 且 $k=0$ 则可得

$$\sum_{t=1}^{n}e^{-ib_t}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_t)}{\sin(\mathbf{b}_{[t]}-b_t)}=\frac{1}{4}e^{\nu i}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n+1}e^{-2ia_j}-\sum\nolimits_{j=1}^{n}e^{-2ib_j}\right)-\frac{1}{4}e^{-\nu i}.$$

若 $\varkappa=2$ $(r=n+2)$ 且 $k=1$，则

$$(2i)^3\sum_{t=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_t)}{\sin(\mathbf{b}_{[t]}-b_t)}=e^{\nu i}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}e^{-2ib_j}-\sum\nolimits_{j=1}^{n+2}e^{-2ia_j}\right)$$
$$-e^{-\nu i}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}e^{2ib_j}-\sum\nolimits_{j=1}^{n+2}e^{2ia_j}\right)=2i\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sin(\nu-b_j)-\sum\nolimits_{j=1}^{n+2}\sin(\nu-a_j)\right)$$

or

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_t)}{\sin(\mathbf{b}_{[t]}-b_t)}=\frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n+2}\sin(\nu-a_j)-\frac{1}{4}\sum\nolimits_{j=1}^{n}\sin(\nu-b_j).$$

(11的一个推论表述为 [11, 引理 4]；此外，用稍有不同的记号也可表述为 [11,引理 5],，它断言对于 $r\geq 0$，$m\geq 1$，$\varkappa\leqslant -1$ 以及 $0\leqslant k\leqslant -\varkappa-1$，有

$$\sum_{t=1}^{n}e^{(\varkappa+2k+1)i(z-b_t)}\frac{\sin(\mathbf{a}-b_t)}{\sin(\mathbf{b}_{[t]}-b_t)\sin(z-b_t)}=-\frac{\sin(\mathbf{a}-z)}{\sin(\mathbf{b}-z)}\tag{13}$$

在条件 $z-b_t$，$b_j-b_t\notin\mathbb{Z}$ 对所有 $j\neq t$成立时。代入 $k\mapsto k-\varkappa-1$后，最后一个公式便化为定理1的一个特例。

在定理 1 及由此得到的恒等式中，我们要求数 $b_1,\ldots,b_n$ 模 π两两不同。若该集合中有一部分数值相等（或模 π相等），Nørlund [13, (3.36) 和 (3.49)] 针对非正 $\varkappa$的情形，推导出了上述某些恒等式的推广。

3 扩展 Chu 的公式

3.1 部分分式分解

Chu 的主要展开式 [4, p.231] 为

$$\frac{P(w)w^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}=c_{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^n}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}\left(\frac{P(\gamma_k)}{w-\gamma_k}+(-1)^n\frac{P(-\gamma_k)}{w+\gamma_k}\right),\tag{14}$$

其中 $P(w)=c_{n+1}w^{n+1}+c_nw^n+\cdots+c_{-n-1}w^{-n-1}$ 是 Laurent 多项式，且数值 γ_k互不相同。根据 Chu [4, p.231]，我们可以写成（其中 $w=e^{iz}$ 和 $\gamma_k=e^{i\beta_k}$）：

$$R(z)=\frac{P(e^{iz})}{\prod_{k=0}^{n}\sin(z-\beta_k)}=(2i)^{n+1}e^{\mathcal{B}i}\frac{P(w)w^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)},$$

其中 $\mathcal{B}=\sum_{k=0}^{n}\beta_k$ 且此公式对 $P(w)$ 的任意次数均成立。结合 (14)，Chu 得到了 $R(z)$ 的展开式。不过请注意，公式 (14) 成立的条件是多项式 $P(w)w^{n+1}$ 的次数不超过 $2n+2$，也就是分母中多项式的次数。下面我们的目标是将 Chu 恒等式推广到任意次数的 Laurent 多项式 $P(w)$。为此，我们先从以下引理所阐述的单项式情形入手。

引理 1. 给定两个整数 $m,n\geq 0$，取任意一个与 $m+n$ 奇偶性相同的整数 $\vartheta\leqslant m+n$。则有如下展开式：

$$\frac{w^{m+n}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}=\sum_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1}h_j(\gamma_0^2,\dots,\gamma_n^2)w^{m-n-2-2j}+\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^{m+n-\vartheta}w^{\vartheta}}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)(w^2-\gamma_k^2)},\tag{15}$$

其中 h_j 表示第 j 个完全齐次对称多项式。

证明。一方面，给定整数 $m\geq 0$，公式

$$\frac{w^{m+n}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}=\frac{w^{m-n-2}}{\prod_{k=0}^{n}\left(1-\gamma_k^2/w^2\right)}=w^{m-n-2}\sum_{j=0}^{\infty}h_j(\gamma_0^2,\dots,\gamma_n^2)w^{-2j}$$

在 $|w|$ 充分大时成立。另一方面，如果 $m+n-\vartheta$ 是非负偶数，则差

$$\frac{w^{m+n-\vartheta}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}-\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^{m+n-\vartheta}}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)(w^2-\gamma_k^2)}$$

在整个复平面上解析，因此由刘维尔定理可知

$$\frac{w^{m+n-\vartheta}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}=\sum_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1}h_j(\gamma_0^2,\dots,\gamma_n^2)w^{(m-n-\vartheta)-2-2j}+\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^{m+n-\vartheta}}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)(w^2-\gamma_k^2)}$$

假设当 $m-n-\vartheta<2$时，右侧的第一个和为零。最后一个等式两边乘以 w^{ϑ}，即可得到所需公式。□

在应用此引理时，我们常令 $\vartheta\in\{-1,0,1\}$与 $m+n$具有相同的奇偶性，这对应于 $\vartheta=(m+n)-2\lfloor\frac{m+n}{2}\rfloor$或 $\vartheta=2\lfloor\frac{m+n}{2}\rfloor-(m+n)$。那么，如果 $\vartheta\in\{0,1\}$，我们有

$$2\frac{\gamma_k^{1-\vartheta}w^{\vartheta}}{w^2-\gamma_k^2}=\frac{w+\gamma_k+(-1)^{1-\vartheta}(w-\gamma_k)}{w^2-\gamma_k^2}=\frac{1}{w-\gamma_k}+\frac{(-1)^{1-\vartheta}}{w+\gamma_k}\quad\text{and}\quad(-1)^{1-\vartheta}=(-1)^{m+n-1},$$

而对于 $\vartheta\in\{0,-1\}$，我们有

$$2\frac{\gamma_k^{-\vartheta}w^{1+\vartheta}}{w^2-\gamma_k^2}=\frac{w+\gamma_k+(-1)^{-\vartheta}(w-\gamma_k)}{w^2-\gamma_k^2}=\frac{1}{w-\gamma_k}+\frac{(-1)^{-\vartheta}}{w+\gamma_k}\quad\text{and}\quad(-1)^{-\vartheta}=(-1)^{m+n}.$$

将公式（15）乘以 w 并分别选取上述分解中的第一种和第二种，我们得到：

$$\begin{aligned}\frac{w^{m+n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}=&\sum_{j=0}^{(m-n-|\vartheta|)/2-1}h_j(\gamma_0^2,\dots,\gamma_n^2)w^{m-n-1-2j}\\&+\sum_{k=0}^{n}\frac{w}{2\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}\Big(\frac{\gamma_k^{m+n-1}}{w-\gamma_k}+\frac{(-\gamma_k)^{m+n-1}}{w+\gamma_k}\Big),\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{w^{m+n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)}=&\sum_{j=0}^{(m-n+|\vartheta|)/2-1}h_j(\gamma_0^2,\dots,\gamma_n^2)w^{m-n-1-2j}\\&+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}\Big(\frac{\gamma_k^{m+n}}{w-\gamma_k}+\frac{(-\gamma_k)^{m+n}}{w+\gamma_k}\Big).\end{aligned}\tag{17}$$

代入 $w \mapsto w^{-1}$ 和 $\gamma_k \mapsto \gamma_k^{-1}$ 后，表达式（16）和（17）分别变为

$$\frac{w^{-m+n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = \sum_{j=0}^{(m-n-|\vartheta|)/2-1} \frac{h_j(\gamma_0^{-2},\dots,\gamma_n^{-2})}{\prod_{k=0}^{n}(-\gamma_k^2)} w^{-(m-n-1-2j)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)} \Big(\frac{\gamma_k^{-m+n}}{w-\gamma_k} + \frac{(-\gamma_k)^{-m+n}}{w+\gamma_k} \Big), \tag{18}$$

and

$$\frac{w^{-m+n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = \sum_{j=0}^{(m-n+|\vartheta|)/2-1} \frac{h_j(\gamma_0^{-2},\dots,\gamma_n^{-2})}{\prod_{k=0}^{n}(-\gamma_k^2)} w^{-(m-n-1-2j)} + \sum_{k=0}^{n} \frac{w}{2\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)} \Big(\frac{\gamma_k^{-m+n-1}}{w-\gamma_k} + \frac{(-\gamma_k)^{-m+n-1}}{w+\gamma_k} \Big). \tag{19}$$

现在设

$$P_{n+1}(w) = \sum_{m=-n-1}^{n+1} c_m w^m,$$

那么，将（ c_m 17）和（18）中针对 m =0、.....、$n+1$ 的表达式分别乘以系数并作线性组合，便得到 Chu 恒等式（14）。类似地，对于 $P_{n+2}(w$，其中次数从 w^{-n-2} 到 w^{n+2}，将公式（17）和（18）分别应用于 $m=0$、.....、$n+2$，可得

$$\frac{P_{n+2}(w)w^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = c_{n+2}w + c_{n+1} - \frac{(-1)^n c_{-n-2}}{w\prod_{k=0}^{n}\gamma_k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k^n}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)} \left(\frac{P(\gamma_k)}{w-\gamma_k} + (-1)^n \frac{P(-\gamma_k)}{w+\gamma_k} \right). \tag{20}$$

众所周知，有理函数在所有有限点处的留数和等于其无穷远点留数 [1, (4.1.14)], ，后者是渐近展开（ w^{-1} ）中 $w\to\infty$ 处的系数

$$\frac{P_{n+2}(w)w^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = \frac{c_{n+2}w^{2n+4}+c_{n+1}w^{2n+3}+\cdots}{w^{2n+3}+\alpha w^{2n+1}+\cdots} = c_{n+2}w + c_{n+1} + \frac{c_n-\alpha c_{n+2}}{w} + O\Big(\frac{1}{w^2}\Big). \tag{21}$$

这里 $\alpha = -\sum_{k=}^{n}\gamma_k^2$ 鉴于

$$\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2) = w^{2n+2} - w^{2n}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 + O\big(w^{2n-2}\big) \quad \text{as } w\to\infty.$$

将 将 w^{-1} 处的系数等同于所有有限点处的留数和，便得到恒等式 y

$$c_{n+2}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 + c_n = -\frac{(-1)^n c_{-n-2}}{\prod_{k=0}^{n}\gamma_k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^n(P(\gamma_k)+(-1)^n P(-\gamma_k))}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}. \tag{22}$$

这种直接的方法可以继续使用。对于 $P_{n+3}(w)$，应用（17）和（18），对于 $m=0,\ \dots,\ n+3$ 可得展开式

$$\frac{P_{n+3}(w)w^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = c_{n+3}w^2 + c_{n+2}w + c_{n+1} + c_{n+3}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 + \frac{(-1)^{n+1}c_{-n-2}}{w\prod_{k=0}^{n}\gamma_k^2} + \frac{(-1)^{n+1}c_{-n-3}}{w^2\prod_{k=0}^{n}\gamma_k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^n}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}\left(\frac{P(\gamma_k)}{w-\gamma_k} + (-1)^n\frac{P(-\gamma_k)}{w+\gamma_k}\right). \tag{23}$$

在渐近近似中令 w^{-1} 处的系数相等

$$\frac{P_{n+3}(w)w^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = c_{n+3}w^2 + c_{n+2}w + c_{n+1} + c_{n+3}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 + \Big(c_n + c_{n+2}\sum\nolimits_{k=0}^{n}\gamma_k^2\Big)\frac{1}{w} + O\Big(\frac{1}{w^2}\Big)$$

as $w\to\infty$，对所有有限点处的留数求和，我们再次得到恒等式（22 ）.

分子中含有更高次数的劳朗多项式时，写出相应表达式并不困难，不过表达式会变得越来越繁琐，例如：

$$\begin{aligned}\frac{w^{n+1}P_{n+4}(w)}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} &= c_{n+4}w^3 + c_{n+3}w^2 + \Big(c_{n+2} + c_{n+4}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\Big)w + \Big(c_{n+1} + c_{n+3}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\Big)\\ &+\Big(c_{-n-2}+c_{-n-4}\sum_{j=0}^{n}\gamma_j^{-2}\Big)\frac{1}{w\prod_{k=0}^{n}(-\gamma_k^2)} + \frac{c_{-n-3}w^{-2}}{\prod_{k=0}^{n}(-\gamma_k^2)} + \frac{c_{-n-4}w^{-3}}{\prod_{k=0}^{n}(-\gamma_k^2)}\\ &+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^n}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}\left(\frac{P_{n+4}(\gamma_k)}{w-\gamma_k} + (-1)^n\frac{P_{n+4}(-\gamma_k)}{w+\gamma_k}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

不难验证，当 $w\to\infty$ 时，左侧函数的渐近形式为

$$\frac{w^{n+1}P_{n+4}(w)}{\prod_{k=0}^{n}(w^2-\gamma_k^2)} = p_3(w) + \left(c_n + c_{n+2}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 + c_{n+4}\Big(\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2\Big)^2 - c_{n+4}\sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}(\gamma_j\gamma_k)^2\right)w^{-1} + O(w^{-2}),$$

其中， $p_3(w)$ 是某个三次多项式。令 w^{-1} 处的系数等于所有有限点处的留数和，我们便得到恒等式：

$$\begin{aligned}&c_n + c_{n+2}\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^2 + c_{n+4}\Big(\sum_{k=0}^{n}\gamma_k^4 + \sum_{0\leqslant j<k\leqslant n}(\gamma_j\gamma_k)^2\Big)\\ &\quad= \Big(c_{-n-2} + c_{-n-4}\sum_{j=0}^{n}\gamma_j^{-2}\Big)\frac{(-1)^{n+1}}{\prod_{k=0}^{n}\gamma_k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^n(P_{n+4}(\gamma_k)+(-1)^nP_{n+4}(-\gamma_k))}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)}\end{aligned} \tag{25}$$

对任意项为 w^k、 $k=-n-4$、.....、 $n+4$ 的劳朗多项式 $P_{n+4}(w)$，该式均成立。

3.2 三角恒等式的应用

公式（15）的三角形式见以下推论（请注意，本节中向量 **a** 和 **b** 的索引从零开始，这与 [4], 一致，因此 $\sin(z-\mathbf{b}) = \prod_{j=0}^{n}\sin(z-b_j)$ ）。

推论 1. 定义 $\mathcal{B} = \sum_{j=0}^{n} b_j$ 和

$$E_j^{\pm} = (\pm 2i)^{n+1}h_j(e^{\pm 2ib_0},\ldots,e^{\pm 2ib_n})e^{\pm i\mathcal{B}} = (\pm 2i)^{n+1}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_j\leqslant n} e^{\pm 2i(b_{k_1}+\cdots+b_{k_j})\pm i\mathcal{B}}. \tag{26}$$

对于每个与 $m+n$ 具有相同奇偶性的整数 $m\geq 0$ 和整数 $\vartheta\leqslant m+n$，我们有

$$\frac{e^{imz}}{\sin(z-\mathbf{b})} = \sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1} E_j^+ e^{i(m-n-2j-1)z} + \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(m-\vartheta)b_k}e^{i\vartheta z}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}, \tag{27}$$

$$\frac{e^{-imz}}{\sin(z-\mathbf{b})} = \sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1} E_j^- e^{i(n+2j+1-m)z} + \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-i(m-\vartheta)b_k}e^{-i\vartheta z}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}. \tag{28}$$

证明。 将 $w=e^{iz}$ 和 $\gamma_k=e^{ib_k}$ 代入公式（15）后，得到

$$\frac{e^{i(m+n)z}}{\prod_{k=0}^{n}(e^{2iz}-e^{2ib_k})}=\sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1}h_j(e^{2ib_0},\dots,e^{2ib_n})e^{i(m-n-2-2j)z}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(m+n-\vartheta)b_k}e^{i\vartheta z}}{\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(e^{2ib_k}-e^{2ib_j})(e^{2iz}-e^{2ib_k})},$$

因此，由于 $e^{2iz}-e^{2ib_k}=2ie^{iz+ib_k}\sin(z-b_k)$，我们得到

$$\frac{e^{i(m-1)z-i\mathcal{B}}}{\sin(z-\mathbf{b})}=e^{-i\mathcal{B}}\sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1}E_j^{+}e^{i(m-n-2-2j)z}+\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(m-\vartheta)b_k+i(\vartheta-1)z-i\mathcal{B}}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.$$

由此得到（27）。类似地，将 $w=e^{-iz}$ 和 $\gamma_k=e^{-ib_k}$ 代入式（15，即可得到公式（28）。

□

我们首次应用上述推论，便立即得到对 [4,式（10）]的一组推广。对于满足 $m-n\leqslant\vartheta\leqslant m+n$ 且与 $m+n$ 奇偶性相同的每个整数 ϑ，即

$$\vartheta\in\{m-n,m-n+2,\dots,m+n\},$$

含有 $E_j^{\pm}$ 的和在（27）和（28）右侧消失，从而得到

$$\frac{\sin(mz-a)}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(mb_k-a+\vartheta(z-b_k))}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.\tag{29}$$

此外，若 $m\leqslant n$ 取 $\vartheta\in\{m-n,m-n+2,\dots,n-m\}$，则还有 $m-n\leqslant-\vartheta\leqslant n-m$，因此我们可以在公式（27）–（28）之一中用 $-\vartheta$ 代替 ϑ，由此（参见 [4,式（12）–（13）]）

$$\frac{\sin(mz-a)}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(mb_k-a)e^{\pm i\vartheta(z-b_k)}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(mb_k-a)\cos\big(\vartheta(z-b_k)\big)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}$$

第二个等式是通过对第一个等式中“+”和“–”两种情形取算术平均得到的。

回忆一下，$E_j^{\pm}=(\pm2i)^{n+1}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\dots\leqslant k_j\leqslant n}e^{\pm2i(b_{k_1}+\dots+b_{k_j})\pm i\mathcal{B}}$，因此对于整数 $m>n$，有

$$\begin{aligned}G_{j,m}(z)&\stackrel{\text{def}}{=}(2i)^{-1}\left(E_j^{+}e^{-ia}e^{i(m-n-2j-1)z}-E_j^{-}e^{ia}e^{-i(m-n-2j-1)z}\right)\\&=(2i)^{n}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\dots\leqslant k_j\leqslant n}\left(e^{i(2\sum_{l=1}^{j}b_{k_l}+\mathcal{B}-a+(m-n-2j-1)z)}+(-1)^{n}e^{-i(2\sum_{l=1}^{j}b_{k_l}+\mathcal{B}-a+(m-n-2j-1)z)}\right)\\&=\begin{cases}(-4)^{n/2}\,2\displaystyle\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\dots\leqslant k_j\leqslant n}\cos\Big[2\sum_{l=1}^{j}b_{k_l}+\mathcal{B}-a+(m-n-2j-1)z\Big], & \text{if } n \text{ is even;}\\(-4)^{\frac{n+1}{2}}\displaystyle\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\dots\leqslant k_j\leqslant n}\sin\Big[2\sum_{l=1}^{j}b_{k_l}+\mathcal{B}-a+(m-n-2j-1)z\Big], & \text{if } n \text{ is odd.}\end{cases}\end{aligned}$$

特别地，

$$G_{0,m}(z)=\begin{cases}(-4)^{n/2}\,2\cos\big[\mathcal{B}-a+(m-n-1)z\big], & \text{if } n \text{ is even;}\\(-4)^{\frac{n+1}{2}}\sin\big[\mathcal{B}-a+(m-n-1)z\big], & \text{if } n \text{ is odd.}\end{cases}$$

对任意满足以下条件的27）和（28的整数 $\vartheta \leqslant m+n$，且其奇偶性与 $m+n$ 相同，我们将（29）推广为以下形式

$$\begin{aligned}\frac{\sin(mz-a)}{\sin(z-\mathbf{b})} &= \sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1} E_j^{+} e^{-ia} e^{i(m-n-2j-1)z} - \sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1} E_j^{-} e^{ia} e^{-i(m-n-2j-1)z} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{i(mb_k-a)+i\vartheta(z-b_k)} - e^{-i(mb_k-a)-i\vartheta(z-b_k)}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} \\ &= \sum\nolimits_{j=0}^{(m-n-\vartheta)/2-1} G_{j,m}(z) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big(mb_k-a+\vartheta(z-b_k)\big)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}. \end{aligned} \tag{30}$$

例如，在 $m=n+1$ 分别取 $\vartheta=1$ 和 $\vartheta=-1$ 时，最后一个公式给出

$$\begin{aligned}\frac{\sin\big((n+1)z-a\big)}{\sin(z-\mathbf{b})} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big(nb_k-a+z\big)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big((n+2)b_k-a-z\big)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} + \begin{cases} (-4)^{n/2}\cdot 2\cos(\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is even;} \\ (-4)^{(n+1)/2}\cdot \sin(\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}\end{aligned}$$

此外，组合（28）与（27），并选择不同于（ $\vartheta\in\{-1,1\}$ 30）中的取值，也可能很有趣；对于 $m=n+1$ 它们还给出

$$\begin{aligned}\frac{\sin\big((n+1)z-a\big)}{\sin(z-\mathbf{b})} &= (-2i)^n e^{ia-i\mathcal{B}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big((n+1)b_k-a\big)e^{i(z-b_k)}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} \\ &= (2i)^n e^{i\mathcal{B}-ia} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big((n+1)b_k-a\big)e^{i(b_k-z)}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big((n+1)b_k-a\big)\cot(z-b_k)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})} + \begin{cases} (-4)^{n/2}\cdot\cos(\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is even;} \\ -(-4)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\sin(\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}\end{aligned}$$

（30）的其他一些有趣特例包括

$$\frac{\sin\big((n+2)z-a\big)}{\sin(z-\mathbf{b})} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big((n+2)b_k-a\big)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} + \begin{cases} (-4)^{\frac{n}{2}}\cdot 2\cos(z+\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is even;} \\ (-4)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sin(z+\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is odd,} \end{cases}$$

and

$$\frac{\sin\big((n+3)z-a\big)}{\sin(z-\mathbf{b})} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big((n+2)b_k-a+z\big)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)} + \begin{cases} (-4)^{\frac{n}{2}}\cdot 2\cos(2z+\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is even;} \\ (-4)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sin(2z+\mathcal{B}-a), & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

显然，将 a 替换为 $a+\frac{\pi}{2}$ 和/或将 b_k 替换为 $b_k+\frac{\pi}{2}$，便可立即得到上述公式的对应形式，其中左边相应的正弦被余弦取代。

我们还可以将多项式 $P(w)$ 的特定形式代入 (20) 和 (23) 中。例如，遵循 Braaksma 和 Meijer 恒等式 (7) 和 (13) 的结构以及[4] 定义

$$P(e^{iz}) = \prod_{k=0}^{n+1} \sin(z-a_k) =: \sin(z-\mathbf{a}), \tag{31}$$

因此（参见 Chu [4, 第233]页）

$$P(w)=\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+2}w^{n+2}}\prod_{k=0}^{n+1}(w^2-e^{2ia_k})=\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+2}}w^{n+2}+\delta w^n+\cdots+(-1)^{n+2}e^{i\mathcal{A}}\frac{w^{-n-2}}{(2i)^{n+2}},$$

其中 $\mathcal{A}=\sum_{k=0}^{n+1}a_k$ 和 $(-1)^nP(-w)=P(w)$。将其代入（20）即可恢复公式（9）：

$$\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sin(z-\nu)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(z-b_k)\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})},\tag{32}$$

其中

$$\nu=\mathcal{A}-\mathcal{B}=\sum_{k=0}^{n+1}a_k-\sum_{k=0}^{n}b_k.$$

利用 $P(w)$ 在（31）中的结果，代入（22），我们得到如下奇异恒等式

$$4\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(\nu+b_k)}\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}=\sum_{k=0}^{n+1}e^{2ia_k}-\sum_{k=0}^{n}e^{2ib_k}-e^{2i\nu}.$$

将上述恒等式的实部和虚部分离开来，可以得到用余弦和正弦代替指数函数的类似公式。

令 $a=a_{n+1}$ 和 $a_k=b_k-\pi/2$ 对于 $k=0,\ \ldots\ldots,\ n$ 在（32）中，我们得到：

$$\sin(z-a)\cot(z-\mathbf{b})=\sin(z-a+(n+1)\pi/2)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-a)}{\sin(z-b_k)}\cot(b_k-\mathbf{b}_{[k]}).$$

设

$$P(e^{iz})=\prod_{k=0}^{n+2}\sin(z-a_k)=:\sin(z-\mathbf{a}),\tag{33}$$

从而（参见 Chu [4, 第233]页）

$$P(w)=\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}w^{n+3}}\prod_{k=0}^{n+2}(w^2-e^{2ia_k})=\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}}w^{n+3}-\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}}w^{n+1}\sum_{k=0}^{n+2}e^{2ia_k}+\cdots+(-1)^{n+3}e^{i\mathcal{A}}\frac{w^{-n-3}}{(2i)^{n+3}},$$

其中 $\mathcal{A}=\sum_{k=0}^{n+2}a_k$ 且 $(-1)^nP(-w)=-P(w)$。将其代入 (23)，得到：

$$\begin{aligned}(2i)^{-n-1}e^{-i\mathcal{B}}\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})}&=\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}}w^2+\frac{(-1)^{n+1}}{w^2\prod_{k=0}^{n}\gamma_k^2}\frac{(-1)^{n+3}e^{i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}}\\&\quad+\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}}\sum_{k=0}^{n}e^{2ib_k}-\frac{e^{-i\mathcal{A}}}{(2i)^{n+3}}\sum_{k=0}^{n+2}e^{2ia_k}+\sum_{k=0}^{n}\frac{\gamma_k^{n+1}P(\gamma_k)}{\prod_{j\neq k}(\gamma_k^2-\gamma_j^2)(w^2-\gamma_k^2)},\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})}&=-\frac{1}{2}\cos(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2z)+\frac{e^{i(\mathcal{B}-\mathcal{A})}}{4}\Big(\sum_{k=0}^{n+2}e^{2ia_k}-\sum_{k=0}^{n}e^{2ib_k}\Big)\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{i(b_k-z)}\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(z-b_k)\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}.\end{aligned}\tag{34}$$

分离实部和虚部，可得以下恒等式：

$$\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})} = -\frac{1}{2}\cos(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2z) + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n+2}\cos(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2a_k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\cos(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2b_k) + \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}\cot(z-b_k) \quad (35)$$

and

$$4\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})} = \sum_{k=0}^{n+2}\sin(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2a_k) - \sum_{k=0}^{n}\sin(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2b_k). \quad (36)$$

公式 (22) 在这种情况下化为平凡结果。

类似地，将方程（24）中的 $\sin(z-\mathbf{a}) := \prod_{k=0}^{n+3}\sin(z-a_k)$ 代入，可得公式（10）：

$$\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})} = -\frac{1}{4}\sin(3z+\mathcal{B}-\mathcal{A}) + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n+3}\sin(z+\mathcal{B}-\mathcal{A}+2a_k) - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\sin(z+\mathcal{B}-\mathcal{A}+2b_k) + \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(z-b_k)\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}, \quad (37)$$

而应用公式（25）可得以下恒等式

$$\sum_{0\leqslant j_1<j_2\leqslant n+3} e^{2i(a_{j_1}+a_{j_2})} - \sum_{0\leqslant j\leqslant n+3} e^{2ia_j}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} e^{2ib_k} + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} e^{4ib_k} + \sum_{0\leqslant k_1<k_2\leqslant n} e^{2i(b_{k_1}+b_{k_2})} = e^{2i(\mathcal{A}-\mathcal{B})}\sum_{0\leqslant j\leqslant n+3} e^{-2ia_j} - e^{2i(\mathcal{A}-\mathcal{B})}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} e^{-2ib_k} + 16e^{i(\mathcal{A}-\mathcal{B})}\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ib_k}\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}.$$

分离上述恒等式的实部和虚部，可得到类似的公式，只需用余弦和正弦替代指数函数即可。

在（20）和（23）中也可以使用一般的三角多项式，写作 $w=e^{iz}$ 以及 $\gamma_k = e^{ib_k}$。例如，取 $T(z) = P_{n+3}(e^{iz})$ 经过一些计算后，可将（23）化为以下形式

$$\frac{(2i)^{-n-1}T(z)}{\sin(z-\mathbf{b})} = c_{n+3}e^{2iz+i\mathcal{B}} + (-1)^{n+1}c_{-n-3}e^{-2iz-i\mathcal{B}} + e^{i\mathcal{B}}\Big(c_{n+1} + c_{n+3}\sum_{k=0}^{n}e^{2ib_j}\Big) + c_{n+2}e^{iz+i\mathcal{B}} + (-1)^{n+1}c_{-n-2}e^{-iz-i\mathcal{B}} + \sum_{k=0}^{n}\frac{T(b_k)\cos\frac{z-b_k}{2} + (-1)^n iT(b_k+\pi)\sin\frac{z-b_k}{2}}{(2i)^{n+1}e^{i\frac{z-b_k}{2}}\sin(z-b_k)\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}. \quad (38)$$

我们的下一个目标是将（38）扩展为一个 2π-周期三角多项式 $T(z) = \sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itz}$，其次数任意 m。根据下式，可以将这类多项式分别分解为其 π-周期部分和 π-反周期部分：

$$T_p(z) = \frac{T(z)+T(z+\pi)}{2} = \sum_{-m\leqslant t\leqslant m}^{t\text{ even}} c_t e^{itz} = \sum_{l=-\lfloor m/2\rfloor}^{\lfloor m/2\rfloor} c_{2l}e^{2ilz} \qquad \text{and}$$

$$T_a(z) = \frac{T(z)-T(z+\pi)}{2} = \sum_{-m\leqslant t\leqslant m}^{t\text{ odd}} c_t e^{itz} = \sum_{l=-\lfloor (m+1)/2\rfloor}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor} c_{2l+1}e^{i(2l+1)z},$$

因此 $T(z) = T_p(z) + T_a(z)$。下文中我们采用符号函数的右连续版本，即

$$\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}.$$

定理 2。回忆 $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{n} b_k$ 并定义

$$F_k^{\pm} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m-n-k-1}{2} \rfloor} c_{\pm(2j+k+n+1)} E_j^{\pm}, \quad \textit{where} \quad E_j^{\pm} = (\pm 2i)^{n+1} \sum_{0 \leqslant k_1 \leqslant \cdots \leqslant k_j \leqslant n} e^{\pm 2i(b_{k_1}+\cdots+b_{k_j}) \pm i\mathcal{B}} \tag{39}$$

其含义沿用自 (26)。此处空和均理解为零 (特别地，$F_0^{\pm} = 0$除非 $m > n$)。对于任意指数多项式 $T(z) = \sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itz}$ 以下恒等式成立：

$$\frac{T(z)}{\sin(z-\mathbf{b})} = \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(F_k^+ e^{ikz} + F_k^- e^{-ikz} \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itb_k + i\nu_{t,n}(z-b_k)}}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z-b_k)} \tag{40a}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-n-1} \left(F_k^+ e^{ikz} + F_k^- e^{-ikz} \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itb_k - i\nu_{t,n}(z-b_k)}}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z-b_k)}, \tag{40b}$$

其中 $\nu_{t,\ n} = \textbf{sign}(t) \cdot \big(t + n - 2\lfloor (t+n)/2 \rfloor\big)$。此外，对于偶数 n 我们有 $\qquad e$

$$\frac{T(z)}{\sin(z-\mathbf{b})} = F_0^{\mp} + \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(F_k^+ e^{ikz} + F_k^- e^{-ikz} \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{T_p(b_k) + T_a(b_k) e^{\pm i(z-b_k)}}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z-b_k)}$$

$$= \frac{F_0^+ + F_0^-}{2} + \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(F_k^+ e^{ikz} + F_k^- e^{-ikz} \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{T_p(b_k) + T_a(b_k)\cos(z-b_k)}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z-b_k)}, \tag{41}$$

对于奇数 n，我们有

$$\frac{T(z)}{\sin(z-\mathbf{b})} = F_0^{\mp} + \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(F_k^+ e^{ikz} + F_k^- e^{-ikz} \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{T_p(b_k) e^{\pm i(z-b_k)} + T_a(b_k)}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z-b_k)}$$

$$= \frac{F_0^+ + F_0^-}{2} + \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(F_k^+ e^{ikz} + F_k^- e^{-ikz} \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{T_p(b_k)\cos(z-b_k) + T_a(b_k)}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z-b_k)}. \tag{42}$$

注意，如果 $m - n < 1$，则 $F_0^{\pm} = 0$。

定理 2 的证明。 记

$$\mathcal{E}_j^{\pm} = \begin{cases} E_{j/2}^{\pm}, & \text{if } j \text{ is even;} \\ 0, & \text{if } j \text{ is odd.} \end{cases}$$

于是我们得到

$$\sum_{t=0}^{m} c_t \sum_{j=0}^{\lfloor (t-n)/2 \rfloor - 1} E_j^+ e^{i(t-n-2j-1)z} = \sum_{t=0}^{m-n-2} c_{t+n+2} \sum_{j=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} E_j^+ e^{i(t-2j+1)z}$$

$$= \sum_{t=0}^{m-n-2} c_{t+n+2} \sum_{k=0}^{t} \mathcal{E}_k^+ e^{i(t+1-k)z} = \sum_{t=0}^{m-n-2} \sum_{k=1}^{t+1} c_{t+n+2}\, \mathcal{E}_{t+1-k}^+ e^{ikz} = \sum_{k=1}^{m-n-1} e^{ikz} \sum_{t=k-1}^{m-n-2} c_{t+n+2}\, \mathcal{E}_{t+1-k}^+$$

$$= \sum_{k=1}^{m-n-1} e^{ikz} \sum_{t=0}^{m-n-k-1} c_{t+k+n+1}\, \mathcal{E}_t^+ = \sum_{k=1}^{m-n-1} e^{ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{2j+k+n+1} E_j^+,$$

其中，第一个等式是因为左端含有 $t \leqslant n+1$ 的求和项对该和式没有贡献。类似地，

$$\sum_{t=1}^{m} c_{-t} \sum_{j=0}^{\lfloor (t-n)/2 \rfloor - 1} E_j^- e^{-i(t-n-2j-1)z} = \sum_{k=1}^{m-n-1} e^{-ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{-2j-k-n-1} E_j^- .$$

现在，我们将（27）（取 $t \geq 0$）和（28）（取 $t < 0$）应用于（40a）左端中形如以下形式的每一项

$$\frac{c_t e^{itz}}{\sin(z - \mathbf{b})}$$

根据条件 $(t - n - \varepsilon_{t,n})/2 = \lfloor (t-n)/2 \rfloor$，对每个 t 选取 $\vartheta = \varepsilon_{t,n} \in \{0, 1\}$。由此得到等式

$$\frac{\sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itz}}{\sin(z - \mathbf{b})} = \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(e^{ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{2j+k+n+1} E_j^+ + e^{-ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{-2j-k-n-1} E_j^- \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{t=0}^{m} c_t e^{itb_k} e^{i\varepsilon_{t,n}(z-b_k)} + \sum_{t=-1}^{-m} c_t e^{itb_k} e^{-i\varepsilon_{t,n}(z-b_k)}}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z - b_k)},$$

鉴于当 $t \geq 0$ 时 $\nu_{t,n} = \varepsilon_{t,n}$，以及当 $t < 0$ 时 $\nu_{t,n} = -\varepsilon_{t,n}$，这就推出了（40a）。

按照上文进行类似计算，但采用向上取整，可得

$$\sum_{t=1}^{m} c_{\pm t} \sum_{j=0}^{\lfloor (t-n+1)/2 \rfloor - 1} E_j^{\pm} e^{\pm i(t-n-2j-1)z} = \sum_{k=0}^{m-n-1} e^{\pm ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{\pm(2j+k+n+1)} E_j^{\pm} .$$

因此，将（27）（取 $t \geq 0$）和（28）（取 $t < 0$）应用于（40b）左端的每一项，并像上文一样取 $\vartheta = -\varepsilon_{t,n} \in \{0, -1\}$，其中 $\varepsilon_{t,n}$，可得：

$$\frac{\sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itz}}{\sin(z - \mathbf{b})} = \sum_{k=0}^{m-n-1} \left(e^{ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{2j+k+n+1} E_j^+ + e^{-ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{-2j-k-n-1} E_j^- \right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\sum_{t=0}^{m} c_t e^{itb_k} e^{-i\varepsilon_{t,n}(z-b_k)} + \sum_{t=-1}^{-m} c_t e^{itb_k} e^{i\varepsilon_{t,n}(z-b_k)}}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z - b_k)},$$

从而得到（40b）。

为证明（41）和（42），我们对（27）（当 $t \geq 0$ 时）以及（28）（当 $t < 0$ 时）应用 $\vartheta = \nu_{t,\ n}$，并将其用于（41）左端的每一项，得到

$$\frac{\sum_{t=-m}^{m} c_t e^{itz}}{\sin(z - \mathbf{b})} = \sum_{k=1}^{m-n-1} \left(e^{ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{2j+k+n+1} E_j^+ + e^{-ikz} \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1-k)/2 \rfloor} c_{-2j-k-n-1} E_j^- \right) + \sum_{j=0}^{\lfloor (m-n-1)/2 \rfloor} c_{-2j-n-1} E_j^- + \sum_{k=0}^{n} \frac{S_n(k,m)}{\sin(b_k - \mathbf{b}_{[k]}) \sin(z - b_k)}, \quad (43)$$

其中

$$S_n(k,m) = \begin{cases} \sum\limits_{-m \leqslant t \leqslant m}^{t \text{ even}} c_t e^{itb_k} + e^{i(z-b_k)} \sum\limits_{-m \leqslant t \leqslant m}^{t \text{ odd}} c_t e^{itb_k} = T_p(b_k) + e^{i(z-b_k)} T_a(b_k), & n \text{ is even;} \\ \sum\limits_{-m \leqslant t \leqslant m}^{t \text{ odd}} c_t e^{itb_k} + e^{i(z-b_k)} \sum\limits_{-m \leqslant t \leqslant m}^{t \text{ even}} c_t e^{itb_k} = T_a(b_k) + e^{i(z-b_k)} T_p(b_k), & n \text{ is odd.} \end{cases}$$

以类似方式，对 应用（27），对 $t<0$ 应用（28），同时 $\vartheta=-\nu_t,\ n$ 我们得到

$$\frac{\sum_{t=-m}^{m}c_te^{itz}}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sum_{k=1}^{m-n-1}\left(e^{ikz}\sum_{j=0}^{\lfloor(m-n-1-k)/2\rfloor}c_{2j+k+n+1}E_j^{+}+e^{-ikz}\sum_{j=0}^{\lfloor(m-n-1-k)/2\rfloor}c_{-2j-k-n-1}E_j^{-}\right)$$
$$+\sum_{j=0}^{\lfloor(m-n-1)/2\rfloor}c_{2j+n+1}E_j^{+}+\sum_{k=0}^{n}\frac{\hat{S}_n(k,m)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)},\quad(44)$$

其中

$$\hat{S}_n(k,m)=\begin{cases}\sum\limits_{-m\leqslant t\leqslant m}^{t\ \text{even}}c_te^{itb_k}+e^{-i(z-b_k)}\sum\limits_{-m\leqslant t\leqslant m}^{t\ \text{odd}}c_te^{itb_k}=T_p(b_k)+e^{-i(z-b_k)}T_a(b_k),\quad n\text{ is even};\\ \sum\limits_{-m\leqslant t\leqslant m}^{t\ \text{odd}}c_te^{itb_k}+e^{-i(z-b_k)}\sum\limits_{-m\leqslant t\leqslant m}^{t\ \text{even}}c_te^{itb_k}=T_a(b_k)+e^{-i(z-b_k)}T_p(b_k),\quad n\text{ is odd}.\end{cases}$$

根据 n的奇偶性，将恒等式（43）和（44）中相应的情形结合起来，可得到偶数 n 时（41）中的第一个等式，以及奇数 n时（42）中的第一个等式。第二个等式则是对（43）和（44）取算术平均，而不是将它们结合起来得到的。□

定理 2 使我们能够将公式（32）、（34）、（35）、（36）和（37）推广到分子中含任意多个正弦函数的情形。更具体地，定义

$$T(z)=\prod_{t=0}^{r}\sin(z-a_t)=:\sin(z-\mathbf{a}).\quad(45)$$

这个三角多项式在 π为奇数时具有 r 周期性；在 π为偶数时具有 r反周期性。反过来，除相差一个常数因子外，每个具有 π周期性或 π反周期性的三角多项式原则上都可写成形式（45），这可由下文的（47）看出。

推论 2。 设 $T(z)$ 如(45)所示。记 $\mathcal{A}=\sum_{k=0}^{r}a_k$，以及 $\varkappa=r-n$ 和 $\lambda=\lfloor\varkappa/2\rfloor$。若 $\varkappa$ 为奇数，则

$$\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sum_{t=0}^{\lambda}\mathcal{F}_{\varkappa-2t}(z)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\cdot\sin(z-b_k)},$$

其中，只有在 $\varkappa>0$时第一个求和才非空，其各项为（ $F_{\varkappa-2t}^{\pm}$ 其含义与定理2中相同）

$$\mathcal{F}_{\varkappa-2t}(z)=F_{\varkappa-2t}^{+}e^{i(\varkappa-2t)z}+F_{\varkappa-2t}^{-}e^{-i(\varkappa-2t)z}$$
$$=\sum_{m=0}^{t}\frac{(-1)^{\lambda+t-m}}{2^{\varkappa-1}}\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{t-m}\leqslant r\\0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}\sin\Big((\varkappa-2t)z+\mathcal{B}-\mathcal{A}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{t-m}})\Big).$$

对于 $m=0\,(m=t)$，内层求和是对 j_1、……、$j_t\,(k_1$、……、$k_m)$ 进行的，而正弦函数自变量最右侧括号中缺少数字b_{k_l} (a_{j_l})。

同样地，如果 $\varkappa$ 为偶数，那么

$$\frac{\sin(z-\mathbf{a})}{\sin(z-\mathbf{b})}=\mathcal{F}_0^{\pm}+\sum_{t=1}^{\lambda}\mathcal{F}_{\varkappa-2t}(z)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}\cdot\frac{e^{\pm i(z-b_k)}}{\sin(z-b_k)} \tag{46}$$
$$=\sum_{t=0}^{\lambda}\mathcal{F}_{\varkappa-2t}(z)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(b_k-\mathbf{a})}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}\cdot\cot(z-b_k),$$

其中（注意，若 $\lambda<0$，则 $\mathcal{F}_0^{\pm}=\mathcal{F}_0(z)=0$）

$$\mathcal{F}_0^{\pm}=F_0^{\mp}=\frac{e^{\mp i(\mathcal{B}-\mathcal{A})}}{2^{\varkappa}}\sum_{m=0}^{\lambda}(-1)^m\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{\lambda-m}\leqslant r\\0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}e^{\mp 2i\left(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{\lambda-m}}\right)},$$

$$\mathcal{F}_0(z)\equiv\tfrac{1}{2}\left(\mathcal{F}_0^{+}+\mathcal{F}_0^{-}\right)$$
$$=\sum_{m=0}^{\lambda}\frac{(-1)^m}{2^{\varkappa}}\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{\lambda-m}\leqslant r\\0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}\cos\left(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{\lambda-m}})\right),$$

且对于 $t=0,1,\ldots,\lambda-1$,

$$\mathcal{F}_{\varkappa-2t}(z)=F_{\varkappa-2t}^{+}e^{i(\varkappa-2t)z}+F_{\varkappa-2t}^{-}e^{-i(\varkappa-2t)z}$$
$$=\sum_{m=0}^{t}\frac{(-1)^{\lambda+t-m}}{2^{\varkappa-1}}\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{t-m}\leqslant r\\0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}\cos\Big((\varkappa-2t)z+\mathcal{B}-\mathcal{A}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{t-m}})\Big).$$

此外，对于偶数 $\varkappa=2\lambda$，我们还有

$$\sum_{m=0}^{\lambda}\frac{(-1)^m}{4^{\lambda}}\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{\lambda-m}\leqslant n+2\lambda\\0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}\sin\left(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{t-m}})\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\prod_{t=0}^{n+2\lambda}\sin(b_k-a_t)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})}.$$

证明。另一方面，

$$T(z)=(2i)^{-r-1}e^{-i(r+1)z-i\mathcal{A}}\prod\nolimits_{t=0}^{r}(e^{2iz}-e^{2ia_t})=\sum\nolimits_{k=-r-1}^{r+1}c_ke^{ikz}, \tag{47}$$

其中，若 k 为奇数，则 $c_{r+1-k}=0$，而

$$c_{r+1-k}=c_{r+1-2t}=(2i)^{-r-1}(-1)^t\sum_{0\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant r}e^{2i(a_{j_1}+\cdots+a_{j_t})-i\mathcal{A}}$$

若 $k=:2t$ 为偶数（它 $t=0$，则 $c_{r+1}=(2i)^{-r-1}e^{-i\mathcal{A}}$）。不过，也可以改写为$T(z)=(-2i)^{-r-1}e^{i(r+1)z+i\mathcal{A}}\prod_{t=0}^{r}(e^{-2iz}-e^{-2ia_t})$，因此

$$c_{2t-r-1}=(-2i)^{-r-1}(-1)^t\sum_{0\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant r}e^{-2i(a_{j_1}+\cdots+a_{j_t})+i\mathcal{A}},$$

因此，

$$c_{\pm(r+1-2t)}=(-1)^t(\pm2i)^{-r-1}\sum_{0\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant r}e^{\pm2i(a_{j_1}+\cdots+a_{j_t})\mp i\mathcal{A}}.$$

最后一个公式在 t 依次取 0、1、……、$r+1$ 时成立，不过实际上我们最多只需要这一范围的一半，因为每个系数都出现了两次。

另一方面，由（39）可得

$$F^{\pm}_{\varkappa-k}=(\pm 2i)^{n+1}\sum_{m=0}^{\lfloor k/2\rfloor}c_{\pm(r+1+2m-k)}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}e^{\pm i\left(\mathcal{B}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m})\right)},$$

由此可得 $F^{\pm}_{\varkappa-2t-1}=0$，其中 $0\leqslant 2t\leqslant\varkappa-1$（因为 $c_{\pm(r+1+2m-2t-1)}=0$），以及

$$F^{\pm}_{\varkappa-2t}=2^{-\varkappa}\sum_{m=0}^{t}(-1)^{t-m}\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{t-m}\leqslant r\\ 0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}(\pm i)^{-\varkappa}e^{\pm i\left(\mathcal{B}-\mathcal{A}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{t-m}})\right)}$$

当 $0\leqslant 2t\leqslant\varkappa$ 时。后者意味着

$$F^{\pm}_{\varkappa-2t}e^{\pm i(\varkappa-2t)z}=2^{-\varkappa}\sum_{m=0}^{t}(-1)^{t-m}\sum_{\substack{0\leqslant j_1<\cdots<j_{t-m}\leqslant r\\ 0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n}}e^{\pm i\left((\varkappa-2t)z+\mathcal{B}-\mathcal{A}+2(b_{k_1}+\cdots+b_{k_m}+a_{j_1}+\cdots+a_{j_{t-m}})-\varkappa\pi/2\right)},$$

因此，所需的 $F^{+}_{\varkappa-2t}e^{i(\varkappa-2t)z}+F^{-}_{\varkappa-2t}e^{-i(\varkappa-2t)z}$ 公式成立。现在，将此公式代入偶数 n时的（42）或奇数 n时的（42）中，即可得出推论（最后一项断言除外）。要得到最后一项断言，只需计算公式（46）在 $\varkappa=2\lambda$ 时加号情形与减号情形之差。

□

请注意，特别是，推论 2 给出了如下形式的比值展开式

$$\frac{\sin^p(z-\alpha)\cos^q(z-\gamma)}{\sin(z-\mathbf{b})}$$

通过取 g $r=p+q$，$a_1=\cdots=a_p=\alpha$，$a_{p+1}=\cdots=a_r=\gamma+\pi/2$（参见 [4, 式 (21)–(22)] ）.

推论 3. 设 $T_c(z)=\frac{1}{2}c_0+\sum_{t=0}^{m}c_t\cos(tz)$。令 $\nu_{t,\ n}=$符号$(t)\cdot\big(t+n-2\lfloor(t+n)/2\rfloor\big)$ 如前所述，并保留 $F^{\pm}_k$ 在 (39) 中的定义，令 $c_{-t}:=c_t$。则

$$\frac{T_c(z)}{\sin(z-\mathbf{b})}=\frac{1}{2}\sum\nolimits_{k=1}^{m-n-1}\left(e^{ikz}F^{+}_k+e^{-ikz}F^{-}_k\right)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sum_{t=-m}^{m}c_t\cos\left(tb_k+\nu_{t,n}(z-b_k)\right)}{2\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.$$

类似地，令 $T_s(z)=\sum_{t=1}^{m}c_t\sin(tz)$；则对于 $F^{\pm}_k$ 如 (39) 所示，并令 $c_{-t}:=-c_t$，以下结论成立:

$$\frac{T_s(z)}{\sin(z-\mathbf{b})}=\frac{1}{2i}\sum\nolimits_{k=1}^{m-n-1}\left(e^{ikz}F^{+}_k+e^{-ikz}F^{-}_k\right)+\sum_{k=0}^{n}\frac{\sum_{t=-m}^{m}c_t\sin\left(tb_k+\nu_{t,n}(z-b_k)\right)}{2\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.$$

证明。定义

$$T(z)=\sum_{t=-m}^{m}c_te^{itz},\quad\text{so that } T_c(z)=\frac{1}{4}(T(z)+T(-z)),\quad T_s=\frac{1}{4i}(T(z)-T(-z)).$$

注意到 $E^{\pm}_j$ 替换 $b_k\leftrightarrow-b_k$ 后变为 $(-1)^{n+1}E^{\mp}_j$，因此公式（40a）交换 $z\leftrightarrow-z$ 和 $b_k\leftrightarrow-b_k$ 后变为

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{n+1}T(-z)}{\sin(z-\mathbf{b})}=(-1)^{n+1}\sum\nolimits_{k=1}^{m-n-1}\sum\nolimits_{j=0}^{\lfloor\frac{m-n-k-1}{2}\rfloor}&\left(c_{2j+k+n+1}E^{-}_j\,e^{-ikz}+c_{-(2j+k+n+1)}E^{+}_j\,e^{ikz}\right)\\&+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+1}\sum_{t=-m}^{m}c_te^{-itb_k-i\nu_{t,n}(z-b_k)}}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.\end{aligned}$$

将最后一个恒等式除以（-1）$^{n+1}$ 并加到（40a）上，得到

$$\frac{T(z)+T(-z)}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sum_{k=1}^{m-n-1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-n-k-1}{2}\rfloor}(c_{2j+k+n+1}+c_{-(2j+k+n+1)})(E_j^+e^{ikz}+E_j^-e^{-ikz})$$
$$+2\sum_{k=0}^{n}\frac{\sum_{t=-m}^{m}c_t\cos\left(tb_k+\nu_{t,n}(z-b_k)\right)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.$$

由于 $c_{-t}=c_t$，将最后一个恒等式除以 4，即得推论的第一个断言。类似地，可以得到

$$\frac{T(z)-T(-z)}{\sin(z-\mathbf{b})}=\sum_{k=1}^{m-n-1}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m-n-k-1}{2}\rfloor}(c_{2j+k+n+1}-c_{-(2j+k+n+1)})(E_j^+e^{ikz}-E_j^-e^{-ikz})$$
$$+2i\sum_{k=0}^{n}\frac{\sum_{t=-m}^{m}c_t\sin\left(tb_k+\nu_{t,n}(z-b_k)\right)}{\sin(b_k-\mathbf{b}_{[k]})\sin(z-b_k)}.$$

因此，回想起 $c_t=-c_{-t}$，再除以 $4i$，即可完成第二个断言的证明 . □

参考文献

[1] M.J. Ablowitz 和 A.S.Fokas，《复变数：导论与应用》，第 2 版，剑桥应用数学丛书，剑桥大学出版社，剑桥，2003 年。https://doi.org/10.1017/CBO9780511791246

[2] B.L.J.Braaksma，《Barnes 类积分的渐近展开与解析延拓》，Composito Math. 15，第 3 期（1962–64），239–341 页。http://eudml.org/doc/88877

[3] F. Calogero，《可精确处理的经典多体问题》，《物理学讲义》M66，施普林格出版社（2001），柏林。https://doi.org/10.1007/3-540-44730-X

[4] W. Chu，部分分式分解与三角和恒等式，《美国数学会会刊》第136卷第1期，2008年，229–237页http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-07-09085-5

[5] R.A. Gustafson，普通超几何级数和基本超几何级数的多重求和定理，发表于 $U(n)$，《SIAM数学分析杂志》18（1987），1576–1596页。https://doi.org/10.1137/0518114

[6] R.A.Gustafson，紧李群和李代数上的一些 q-beta 积分与 Mellin-Barnes积分，《美国数学会汇刊》341（1994），69–119页。https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1994-1139492-3

[7] C . Hermite，关于一个三角恒等式，《新数学年刊》4（1885），57–5 9.

[8] W.P. Johnson，三角恒等式 ´仿 Hermite，《美国数学月刊》，第**117**卷，4（2010），311–327。http://dx.doi.org/10.4169/000298910x480784

[9] D. Karp 和 E. Prilepkina，《超几何微分方程与 Nørlund 和 B¨uhring 系数的新恒等式》，SIGMA 12（2016），052，23 页。http://dx.doi.org/10.3842/SIGMA.2016.052[10] D.B. Karp 和 E.G. Prilepkina，论 Meijer G函数$G^{m,\ p}_{p,\ n}$，对于 $m+n=p$，《积分变换与特殊函数》，第 34 卷，第 1 期，2023 年，88–104 页。
https://doi.org/10.1080/10652469.2022.2092730

[11] C.S. Meijer，论 G函数，I–VIII，《荷兰皇家艺术与科学学院学报》A辑 49（1946），227–237、344–356、457–469、632–641、765–772、936–943、1063–1072、1165–1175。[12] M.J. Mohlenkamp，L. Monz´on，三角恒等式与可分函数的和，《数学智者》27:2（2005），65–69。https://doi.org/10.1007/BF02985795[13] N.E. Nørlund，超几何函数，《数学学报》94（1955），289–349。https://doi.org/10.1007/BF02392494[14] V.V. Prasolov，多项式，《数学中的算法与计算》第 11 卷，施普林格，2010 年。
https://doi.org/10.1007/978-3-642-03980-5