arXiv:2302.10334v1 [math.AC] 20 Feb 2023

wsq-元主超理想在 Krasner (m,n)-超环中

M. ANBARLOEI

Abstract. 本文提出一类新的超理想，称为弱强拟主超理想（简称 wsq-主超理想）。为此，我们首先需要引入拟主超理想和强拟主超理想的概念。在给出定义并对其进行研究后，我们进一步引入并研究弱强拟主超理想。若 Krasner (m,n)-超环 R 的真超理想P 满足：对于每个 $r_1^n \in R$，只要 $0 \neq g(r_1^n) \in P$，就有 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$ 或 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathrm{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中某个 $1 \leq i \leq n$ 存在，则称其为 n 元弱强拟主超理想。本文还介绍了这一概念的若干性质和刻画，并研究了这一新概念在各种超环论构造下的稳定性。

1. Introduction

素理想和主理想是极其重要的结构。交换环 R 的真理想称为拟主理想，如果其根是素理想。Fuchs 在 [9] 中引入了这一概念。文献 [16] 介绍了拟主理想上的一些运算，例如饱和和理想化。文献 [17] 给出了作为拟主理想推广的 2-吸收拟主理想概念。Koc 等人在 [11] 中引入并研究了一类介于主初等理想和拟主理想之间的理想，称为强拟主理想。此外，他们基于零因子图构造了理想的一个子图，用于刻画强拟主理想，并确定了两个图相等的条件。在 [18], 中，Ugurlu 等人定义并研究了弱强拟主理想的概念。交换环 R 的真理想 I 称为弱强拟主理想，如果对于某些 x、$y \in R$，$0 \neq xy \in I$ 蕴含 $x^2 \in I$ 或 $y \in \sqrt{I}$。

Krasner 超环是代数超结构中的一类重要结构。在该结构中，加法是超运算，而乘法是普通的二元运算。这一结构的推广是（m,n）-超环的一个子类，于 [12]中定义。它称为 Krasner（m,n）-超环。 [12] （R,f,g），或简称为 R，称为 Krasner（m,n）-超环，当且仅当：(1)（R,f）是一个典范的 m元超群；(2)（R,g）是一个 n元半群；(3) n元运算 g 关于 m元超运算 f 具有分配性，即对于任意的 a_1^{i-1}、a_{i+1}^n、 $x_1^m \in R$和$1 \leq i \leq n$,

$$g\left(a_1^{i-1}, f(x_1^m), a_{i+1}^n\right) = f\left(g(a_1^{i-1}, x_1, a_{i+1}^n), ..., g(a_1^{i-1}, x_m, a_{i+1}^n)\right);$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 20N20, 16Y99.*Key words and phrases.* n元 q准素超理想，(k,n)-吸收 q准素超理想，n元 sq准素超理想， n元 wsq准素超理想。

（4）0 是 n元运算 g的零元（吸收元），即对于任意的$x_2^n \in R$、 g，有$0, a_2^n) = g(a_2, 0, x_3^n) = ... = g(a_2^n, 0) = 0$。 S的非空子集称为 R的子超环，如果（S, f, g）是一个 Krasner（m, n）-超环。(R, f, g) 的非空子集 I称为超理想，如果（I, f）是（R, f）的一个 m元子超群，并且对于任意的 $a_1^n \in R$和 $1 \leq i \leq n$， $g(a_1^{i-1}, I, a_{i+1}^n) \subseteq I$。注意， a_i^j表示序列 a_i、 a_{i+1}、 ...、 a_j。当 $j < i$时， a_i^j是空符号。使用该记号， $f(a_1, ..., a_i, b_{i+1}, ..., b_j, c_{j+1}, ..., c_n)$ 将写作 $f(a_1^i, b_{i+1}^j, c_{j+1}^n)$。该表达式将写成 $f(a_1^i, b^{(j-i)}, c_{j+1}^n)$的形式，其中 $b_{i+1} = ... = b_j = b$。对于 R的非空子集 H_1^n，定义 $f(H_1^n) = \bigcup\{f(a_1^n) \mid a_i \in H_i, \ 1 \leq i \leq n\}$. 。Krasner（$m, n$）-超环中的一些重要超理想，例如幂零根、Jacobson根、 n元素超理想和主超理想，于 [1]中引入。若对于 R的每个超理想 N，$M \subseteq N \subseteq R$蕴含 $N = M$或 $N = R$，则称 R的超理想 M为极大超理想。Krasner（m, n）-超环R的 Jacobson根是 R的所有极大超理想的交，记为 $J_{(m,n)}(R)$。如果 R没有任何极大超理想，则令 $J_{(m,n)}(R) = R$。Krasner（m, n）-超环 R的真超理想 P称为素超理想，如果对于 R的超理想 A_1^n， $g(A_1^n) \subseteq P$蕴含 $A_1 \subseteq P$或 $A_2 \subseteq P$或 $\cdots$或 $A_n \subseteq P$。根据 [1], 中的引理4.5，Krasner（m, n）-超环 R的真超理想 P是素超理想，当且仅当对于所有$a_1^n \in R$、 g，$a_1^n \in P$蕴含 $a_1 \in P$或 $\cdots$或 $a_n \in P$。设 R是带有标量单位元的 Krasner（m, n）-超环中的一个超理想。 I的根记为 $\mathbf{r^{(m,n)}}(I)$，定义为包含 I的所有素超理想 P的交。如果包含 I的所有素超理想的集合为空，则 $\mathbf{r^{(m,n)}}(I) = R$。已证明，如果 $a \in \mathbf{r^{(m,n)}}(I)$，则存在 $s \in \mathbb{N}$，使得对于 $s \leq n$， $g(a^{(s)}, 1_R^{(n-s)}) \in I$，或者对于 $s = l(n-1)+1$， $g_{(l)}(a^{(s)}) \in I$。带有标量单位元 1_R 的 Krasner（m, n）-超环 R 的真超理想 I称为主超理想，如果$g(a_1^n) \in I$且 $a_i \notin I$蕴含对于某个 $1 \leq i \leq n$，$g(a_1^{i-1}, 1_R, a_{i+1}^n) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(I)$。根据 [1], 中的定理4.28，如果 I 是带有标量单位元 1_R 的 Krasner（m, n）-超环 R 中的主超理想，则 $\mathbf{r^{(m,n)}}(I)$ 是 R 的素超理想。

Hila 等人研究了(k, n)-吸收（准素）超理想的概念[10]。Norouzi 等人提出了 Krasner[13] 中正规超理想的新定义。Asadi 和 Ameri 研究了 Krasner (m, n)-超环范畴中直接系统的直接极限 [6]。Dongsheng 在交换环中定义了 δ-主理想的概念，其中 δ 是一个函数，它将每个理想 I 映射为同一环 [7]的一个理想 $\delta(I)$。此外，他和同事提出了 2-吸收δ-主理想的概念，该概念统一了[8]中的 2-吸收理想和 2-吸收主理想。Ozel Ay 等人将 δ-主理想的概念推广到了 Krasner 超环 [15]。文献 [3]提出了 Krasner (m, n)-超环中 δ-准素超理想的概念，该概念将素超理想和准素超理想统一在同一框架下。

本文在介绍 Krasner (m, n)-超环中的两类超理想后，提出了弱强拟主超理想的概念。本文始终只研究具有非零单位元 1 的交换 Krasner (m, n)-超环。 R 将是一个交换 Krasner (m, n)-超环。本文安排如下：在第 2 节中，我们首先定义 R 的 n元拟主（简称 q-主）超理想的概念，随后引入(k, n)-吸收拟主超理想的概念，作为拟主超理想的推广。定义(k, n)-吸收拟主（简称(k, n)-吸收q-主）超理想后，我们将展示其主要性质。第 3 节致力于

研究强拟主（简称 sq-主）超理想的概念。在第 4 节中，我们引入弱强拟主（简称 wsq- 主）超理想，并研究这一概念在各种超环论构造下的稳定性。第 5 节为结论。

2. n-ARY q-PRIMARY HYPERIDEALS

本节首先研究 R的 n元拟主超理想的概念，然后将其扩展为 (k,n)-吸收拟主超理想的概念。定义 (k,n)-吸收拟主超理想后，我们将给出其性质。

定义 2.1. 若 R 的真超理想 P 满足 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P)$ 是 R的 n元素超理想，则称其为 n元拟主超理想（简称 q-拟主）。

例 2.2. 设 $\mathbb{Z}_{12}=\{0,1,2,3,\cdots,11\}$ 是整数模 12 的所有同余类组成的集合，$\mathbb{Z}_{12}^{\star}=\{1,5,7,11\}$ 是$\bar{}\ \bar{}\ \bar{}\ \bar{}\ \bar{}\ \bar{}$单位元的乘法子群 $\mathbb{Z}_{12}$。构造 G为 $\mathbb{Z}_{12}/\mathbb{Z}_{12}^{\star}$。于是有 $G=\{0,1,2,3,4,6\}$，其中$\bar{0}=\{0\}$, $\bar{1}=\{1,5,7,11\}$, $\bar{2}=\bar{10}=\{2,10\}$, $\bar{3}=\bar{9}=\{3,9\}$, $\bar{4}=\bar{8}=\{4,8\}$, $\bar{6}=\{6\}$。$\bar{}$考虑 Krasner超环 $(G,\boxplus,\circ)$, 其中对所有 $\bar{a},b\in G$, $\bar{a}\circ b=\overline{ab}$，二元超运算 $\boxplus$ 定义如下:

$\boxplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{2},\bar{4}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{0},\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2},\bar{6}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{2},\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{0},\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1},\bar{3}$	$\bar{2},\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{0},\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

考虑 G 的超理想 $P=\{\bar{0},\bar{4}\}$。那么我们有 $\mathbf{r^{(2,2)}}(P)=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\}$。显然，超理想 P 的根是素的，因此 P 是 q-primary。

设 (R_1,f_1,g_1) 和 (R_2,f_2,g_2) 是两个 Krasner (m,n)-超环，且 1_{R_1}和 1_{R_2} 分别是 R_1 和 R_2 的标量单位元。那么 (m,n)-超环 $(R_1\times R_2,f_1\times f_2,g_1\times g_2)$ 由 m 元超运算 $f=f_1\times f_2$ 和 n 元运算 $g=g_1\times g_2$ 定义如下:

$f_1\times f_2((a_1,b_1)\cdots,(a_m,b_m))=\{(a,b)\mid a\in f_1(a_1^m)\ b\in f_2(b_1^m)\}g_1\times g_2((x_1,y_1)\cdots,(x_n,y_n))=(g_1(x_1^n)\ g_2(y_1^n))$, 对所有 a_1^m、$x_1^n\in R_1$、b_1^m 和 $y_1^n\in R_2$ [2] 均成立。

定理 2.3. 假设 (R_1,f_1,g_1) 和 (R_2,f_2,g_2) 是两个 Krasner (m,n)-超环，且 1_{R_1} 和 1_{R_2} 分别是 R_1 和 R_2 的标量单位元。设 P 是 $R_1\times R_2$ 的真超理想。那么，P 是 $R_1\times R_2$ 的 n-元 q-准素超理想，当且仅当对于某个 n-元 q-准素超理想 P_1（属于 R_1），有 $P=P_1\times R_2$；或者对于某个 n-元 q-准素超理想 P_2（属于 R_2），有 $P=R_1\times P_2$。

证明。$\Longrightarrow$ 令 P 为 $R_1\times R_2$ 的一个 n 元 q 准素超理想。由于 P 是 $R_1\times R_2$ 的真超理想，因此分别存在 R_1和 R_2 的一些超理想 P_1 和 P_2，使得 $P=P_1\times P_2$。由于 P 是 n 元 q 准素的，因此 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P)=\mathbf{r^{(m,n)}}(P_1)\times\mathbf{r^{(m,n)}}(P_2)$ 是 $R_1\times R_2$ 的一个 n 元素超理想。这

意味着 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P_1)$ 是 R_1 的一个 n 元素超理想，且 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P_2) = R_2$ 或 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P_2)$ 是 R_2 的一个 n 元素超理想，并且 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P_1) = R_1$，这意味着$P = P_1 \times R_2$ 或 $P = R_1 \times P_2$，其中 P_1 和 P_2 分别是 R_1 和 R_2 的一些 n 元 q 准素超理想。

$\Longleftarrow$ 这很直接。 □

我们给出由前述定理得到的以下结果。

推论 2.4. 设 (R_i, f_i, g_i) 是 Krasner (m,n)-超环，其中对每个 $1 \leq i \leq t$， 1_{R_i} 是 R_i 的标量单位元。假设 P 是 $R_1 \times \cdots \times R_t$ 的真超理想。那么， P 是 $R_1 \times \cdots \times R_t$ 的 n 元 q- 准素超理想，当且仅当 $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$，使得对于某个 $1 \leq u \leq t$， P_u 是 R_u 的 n 元 q- 准素超理想，并且对所有满足 $k \neq u$ 的 $1 \leq k \leq t$，都有 $P_k = R_k$。

在其论文 [10], 中，Hila 等人介绍了 Krasner (m,n)-超环中 n 元素素超理想的一种推广，并将其定义为 (k,n)-吸收型超理想。设 k 为正整数。若每当 $g(r_1^{kn-k+1}) \in P$ 对于 $r_1^{kn-k+1} \in R$ 成立时，都存在该 $r_{,i}$ 中的 $(k-1)n-k+2$ 个元素，使其 g- 乘积属于 P，则称 R 的真超理想 P 为 (k,n)-吸收型超理想。此外，他们将这一概念推广为 (k,n)-吸收型准素超理想。若对于某个 $r_1^{kn-k+1} \in R$，每当 $g(r_1^{kn-k+1}) \in P$ 成立时， $g(r_1^{(k-1)n-k+2}) \in P$ 成立，或者除$g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，该 $r_{,i}$ 中的 $(k-1)$ $n-k+2$ 个元素的 g-乘积属于 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P)$，则称 R 的真超理想 P 为 (k,n)-吸收型准素超理想。 [10] 中的定理 4.6 表明，(k,n)-吸收型准素超理想的根是 R 的 (k,n)-吸收型超理想。现在，我们旨在研究根为 R 的 (k,n)-吸收型超理想的超理想。

定义 2.5. 若真超理想 P of R 满足 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P)$ 是 R的一个 (k,n)-吸收超理想，则称其为 (k,n)-吸收准素超理想（简称 (k,n)-吸收 q-准素超理想）。

若 P是 R的一个 (k,n)-吸收 q-准素超理想，且 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P) = Q$，则称 P 是 R的一个 Q-(k,n)-吸收 q-准素超理想。

例 2.6. 考虑 Krasner (2, 3)-超环 $(K = [0,1], +, \cdot)$，其中“$\cdot$”是实数上的通常乘法，二元超运算“$+$”定义如下:

$$a + b = \begin{cases} \{max\{a,b\}\}, & \text{if } a \neq b \\ [0,\text{a}], & \text{if } a = b. \end{cases}$$

那么，超理想 $S = [0, 0.5]$ 是 K的一个 (2, 2)-吸收 q-准素超理想。

定理 2.7. (1) R 的每个 n元 q-准素超理想都是 $(2,n)$-吸收 q-准素超理想。

（2） R的每个（k， n）-吸收型准素超理想都是（k， n）-吸收型 q-准素。

证明。（1）设 P是 R的一个 n元 q-准素超理想。这意味着 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P)$ 是 R的一个 n元素超理想。因此，$\mathbf{r^{(m,n)}}(P)$ 是 R的一个（2， n）-吸收型超理想。于是， P 是 R的（2， n）-吸收型 q-准素。

(2) 设 P 是 R 的一个 (k,n)-吸收型准素超理想。根据 [10] 中的定理 4.6，$\mathbf{r^{(m,n)}}(P)$ 是 R 的一个 (k,n)-吸收型超理想。这意味着 P 是 R 的一个 (k,n)-吸收型 q-准素超理想。□

定理 2.8. 设对于某个 R 的 (k,n)-吸收型超理想 Q， P_1^t 是 R 的 Q-(k,n)-吸收型 q-准素超理想。则 $P=\cap_{i=1}^t P_i$ 是 R 的一个 Q-(k,n)-吸收型 q-准素超理想。

证明。假设 Q 是 R 的一个（k,n）-吸收超理想，且 P_1^t 是 R 的 Q-（k,n）-吸收 q-准素超理想。我们有 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(\cap_{i=1}^t P_i) = \cap_{i=1}^t \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_i) = Q$，这表明 P 是 R 的一个 Q-（k,n）-吸收 q-准素超理想。□

定理 2.9。设 P 是 R 的一个真超理想。那么， P 是 R 的一个（k,n）-吸收q-准素超理想，当且仅当对于 $r_1^{kn-k+1}\in R$，若 $g(r_1^{kn-k+1})\in P$，则存在 $r,\ i$ 个（$k-1$）$n-k+2$，其 g-重积属于 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。

证明。 $\Longrightarrow$ 令 $g(r_1^{kn-k+1})\in P$，其中 $r_1^{kn-k+1}\in R$。则 $g(r_1^{kn-k+1})\in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。由于 P是 R 的（k,n）-吸收 q-准素超理想，因此 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$ 是 R 的（k,n）-吸收超理想。因此，存在（$k-1$）$n-k+2$ 个$r,\ i$，其 g-乘积属于 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。

$\Longleftarrow$ 假设对于某个 $r_1^{kn-k+1}\in R$，有 $g(r_1^{kn-k+1})\in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，且除 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})$ 外，所有由（$k-1$）$n-k+2$ 个 $r,_i$ 组成的乘积均不属于 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。由于 $g(r_1^{kn-k+1})\in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，因此存在 $s\in\mathbb{N}$，使得若 $s\le n$，则$g(g(r_1^{kn-k+1})^{(s)}, 1^{(n-s)})\in P$；若 $s>n, s=l(n-1)+1$，则 $g_{(l)}(g(r_1^{kn-k+1})^{(s)})\in P$。在前一种情况下，我们得到 $g(g(r_1)^{(s)},\cdots,g(r_{kn-k+1})^{(s)},1^{(n-s)})\in P$。根据假设，我们有

$$g(g(r_1)^{(s)},\cdots,g(r_{(k-1)n-k+2})^{(s)},1^{(n-s)}) = g(g(r_1^{(k-1)n-k+2})^{(s)},1^{(n-s)})\in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P),$$

这意味着 $g(r_1^{(k-1)n-k+2})\in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。这表明 P是 R的 (k,n)-吸收 q-准素超理想。通过类似的论证，我们可以证明另一种情形下的结论。□

定理 2.10. 设 P 是 R的 (k,n)-吸收 q-准素超理想。则对于所有 $u>n$， P都是 R 的 (u,n)- 吸收 q- 准素超理想。

证明。设 P是 R的 (k,n)-吸收 q-准素超理想。则 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$ 是 R的 (k,n)-吸收超理想。根据 [10], 中的定理 3.7，我们得出，对于所有 $u>n$，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$ 是 R 的 (u,n)-吸收超理想。这意味着，对于所有 $u>n$， P是 R 的 (u,n)-吸收 q-准素超理想。□

3. n-ARY sq-PRIMARY HYPERIDEALS

本节旨在定义并研究强拟准素超理想的概念。事实上，这类超理想是主超理想与 q-准素超理想之间的一个中间类别。

定义 3.1. 设 P 是 R的一个真超理想。若 P 满足：当 $r_1^n\in R$ 且 $g(r_1^n)\in P$ 时，$g(r_i^{(2)},1^{(n-2)})\in P$或 $g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n)\in\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中某个 $1\le i\le n$，则称其为一个 n 元强拟准素（简称 sq-准素）超理想。

例 3.2. 考虑 Krasner (3, 3)-超环 $(H=\{0,1,2\},f,g)$，其 3 元超运算 f 和 3 元运算 g 定义如下：

$$f(0^{(3)})=0,\quad f(0^{(2)},1)=1,\quad f(0,1^{(2)})=1,\quad f(1^{(3)})=1,\quad f(1^{(2)},2)=H$$
$$f(0,1,2)=H,\quad f(0^{(2)},2)=2,\quad f(0,a^{(2)})=2,\quad f(1,2^{(2)})=H,\quad f(2^{(3)})=2$$

$$g(1^{(3)}) = 1, \quad g(1^{(2)}, 2) = g(1, 2^{(2)}) = g(2^{(3)}) = 2$$

并且对于 $a_1^2 \in H, g(0, a_1^2) = 0$。那么超理想 $T = \{0, 2\}$ 是 H 的一个 3 元 sq-准素超理想。

定理 3.3. 设 P 是 R的真超理想。若 P 是 R的一个 n元 sq准素超理想，则 P 是 R的一个 n元 q准素超理想。

证明. 设 P 是 R的一个 n元 sq准素超理想。假设对于某个 $r_1^n \in R$，有 $g(r_1^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。那么存在 $s \in \mathbb{N}$，使得若 $s \leq n$，则$g(g(r_1^n)^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in P$。由结合律可得

$$\begin{aligned} & g(r_i^{(s)}, g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-2s)}) \\ & \quad = g(r_i^{(s)}, g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, g(1^{(n)}), 1^{(n-2s-1)}) \\ & \quad = g(g(r_i^{(s)}, 1^{(n-s)}), g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-s)}), 1^{(n-2)}) \\ & \quad \in P. \end{aligned}$$

由于 P 是 sq准素的，因此 $g(g(r_i{}^s, 1^{(n-s)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) = g(r_i{}^s, 1^{(n-2s)}) \in P$ 或$g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-s)})\ 1^{(n-1)}) = g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中 $1 \leq i \leq n$。这意味着 $r_i \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$或 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。在第一种情况下，结论成立。在第二种情况下，我们可以继续这一过程，得到对于某个 $1 \leq j \leq i-1$ 或 $i+1 \leq j \leq n$，有 $r_j \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。如果$s = l(n-1) + 1$，则同理可得结论。因此，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$是 R的一个 n元素超理想。于是 P 是 R的一个 n元 q准素超理想。□

现在，我们确定 R 的 n-元 q-准素超理想何时是 R 的 n-元 sq-准素超理想。

定理 3.4. 设 P 是 R 的真超理想，且 $g(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)^{(2)}, 1^{(n-2)}) \subseteq P$。若 P 是 R 的 n-元 q-准素超理想，则 P 是 R 的 n-元 sq-准素超理想。

证明. 设 P 是 R 的 n-元 q-准素超理想。假设对某个 $r_1^n \in R$，有 $g(r_1^n) \in P$。由于 $P \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，且 P 是 R 的 n-元 q-准素超理想，因此对某个 $1 \leq i \leq n$，有 $r_i \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。由于 $g(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)^{(2)}, 1^{(n-2)}) \subseteq P$，我们有 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$，这意味着 P 是 R 的 n-元 sq-准素超理想。□

回忆一下 [1]，在 Krasner (m, n)-超环 R中，由元素 x 生成的超理想记作 $< x >$，其定义为 $< x >= g(R, x, 1^{(n-2)}) = \{g(r, x, 1^{(n-2)}) \mid r \in R\}$.

定理 3.5. 设 $< r >$ 是 R 的一个 n元 sq-准素超理想，其中对所有 $r \in R$均成立。那么 R 的每个真超理想都是一个 n元 sq-准素超理想。

证明. 设 P 是 R的任意超理想。假设对于某个$r_1^n \in R$，有 $g(r_1^n) \in P$。于是有 $g(r_1^n) \in < g(r_1^n) >$。由于 $< g(r_1^n) >$是 R的一个 n元 sq-准素超理想，我们得到 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in < g(r_1^n) >$，或者 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(< g(r_1^n) >)$，其中某个 $1 \leq i \leq n$成立。由于 $< g(r_1^n) > \subseteq P$且 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(< g(r_1^n) >) \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，我们得到 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$，或者 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。因此，$P$是 R的一个n元 sq-准素超理想。□

定理 3.6. 设 P 是 R 的真超理想。若 P 是 R 的一个 n 元 sq-准素超理想，则对 R 的某些超理想 P_1^n，$g(P_1^n) \subseteq P$ 意味着

$g(p^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$ 对所有 $p \in P_i$，或者 $g(P_1^{i-1}, 1, P_{i+1}^n) \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中某个 $1 \leq i \leq n$。

证明。假设 P 是 R的一个 n元 sq-准素超理想。首先，我们证明对于所有 $r \in R$，都有 $< r >\subseteq P_r$ 或 $P_r \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中 $P_r = \{a \in R \mid g(r, a, 1^{(n-2)}) \in P\}$。为证明这一点，我们选取一个元素 $r \in R$。若$g(r^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$，则可得 $< r >\subseteq P_r$。现假设 $g(r^{(2)}, 1^{(n-2)}) \notin P$。任取 $a \in P_r$，于是有 $g(r, a, 1^{(n-2)}) \in P$。由于 P是 R的一个 n元 sq-准素超理想，且 $g(r^{(2)}, 1^{(n-2)}) \notin P$，因此可得 $a = g(a, 1^{(n-1)}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，证毕。现在，假设对于 R的某些超理想 P_1^n，有 $g(P_1^n) \subseteq P$，且对于某个 $1 \leq i \leq n$，$g(P_1^{i-1}, 1, P_{i+1}^n) \nsubseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。因此，对每个 $j \in \{1, \cdots, n\} - \{i\}$，都存在 $p_j \in P_j$，使得 $g(p_1^{i-1}, 1, p_{i+1}^n) \nsubseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。于是，对于每个$p \in P_i$，都有 $g(p_1^{i-1}, p, p_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。由于 $g(p_1^{i-1}, 1, p_{i+1}^n) \in P_p - \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，所以$P_r \nsubseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，从而 $< p >\subseteq P_p$。这意味着 $g(p^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$。□

定理 3.7. 设 P 是 R 的一个 n 元 sq 准素超理想。若 $r \notin P$ 且$< r >=< g(r^{(2)}, 1^{(n-2)}) >$，则 $P_r = \{a \in R \mid g(r, a, 1^{(n-2)}) \in P\}$ 是 R 的一个 n 元 sq 准素超理想。

证明. 假设 P 是 R 的一个 n 元 sq 准素超理想。由于 $r \notin P_r$，于是$< r >\nsubseteq P_r$，因此 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_r)$。设 $g(r_1^n) \in P_r$，其中 $r_1^n \in R$ 满足 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_r)$。因此，我们有 $g(g(r_1^n)\ r, 1^{(n-2)}) = g(r_1^{i-1}, g(r, r_i, 1^{(n-2)})\ r_{i+1}^n) \in P$，且 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \notin \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。于是我们得出 $g(g(r, r_i, 1^{(n-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) = g(g(r^{(2)}, 1^{(n-2)})\ g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)})\ 1^{(n-2)}) \in P$，因为 P 是 R 的一个 n 元 sq 准素超理想。这意味着 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P_{g(r^{(2)}, 1^{(n-2)})} = P_r$，也就是说，$P_r$ 是 R 的一个 n 元 sq 准素超理想。□

定理 3.8. 设 (R_t, f_t, g_t)s 是具有标量单位元1_{R_t}的 Krasner (m, n)-超环，其中 $t = 1$、2 和 P_t s 是 R_t 的超理想。则以下命题等价:

(1) $R \times P_2$ $i^{\text{s 是一个 } n\text{-元 } sq\text{-准素}}$ *imary hyperideal of* $R_1 \times R_2$。(2) P_1 是 R_1 的一个 n-元 sq-准素超理想，并且 $P_2 = R_2$ 或 P_2 是 R_2 的一个 n-元sq-准素超理想，且 $P_1 = R_1$。

证明。(1) $\Longrightarrow$ (2) 设 $P_1 \times P_2$ 是 $R_1 \times R_2$的一个 n-元 sq-准素超理想。则根据定理 3.3，我们有 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1 \times P_2) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1) \times \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_2)$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 n-元素超理想，这意味着 $P_1 = R_1$ 或 $P_2 = R_1$。不妨设 $P_1 = R_1$。假设对于某个 $r_1^n \in R_2$，有 $g_2(r_1^n) \in P_2$。因此有 $g_1 \times g_2((1_{R_1}, r_1) \cdots, (1_{R_1}, r_n)) = (1_{R_1}, g_2(r_1^n)) \in P_1 \times P_2$。由于$P_1 \times P_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 n-元 sq-准素超理想，我们得出 $g_1 \times g_2((1_{R_1}, r_i)^{(2)}, (1_{R_1}, 1_{R_2})^{(n-2)}) = (1_{R_1}, g_2(r_i^{(2)}, 1_R^{(n-2)})) \in P_1 \times P_2$ 或

$$\begin{aligned} & g_1 \times g_2((1_{R_1}, r_1), \cdots, (1_{R_1}, r_{i-1}), (1_{R_1}, 1_{R_2}), (1_{R_1}, r_{i+1}), \cdots, (1_{R_1}, r_n)) \\ &= (1_{R_1}, g_2(r_1^{i-1}, 1_{R_2}, r_{i+1}^n)) \\ &\in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1 \times P_2) \end{aligned}$$

对于某个 $1 \leq i \leq n$。这意味着 $g_2(r_i^{\ 2}, 1_{R_2}^{n-2}) \in P_2$ 或 $g_2(r_1^{i-1}, 1_{R_2}, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_2)$。这表明 P_2 是 R_2的一个 n元 sq准素超理想。

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 P_1 是 R_1 和 $P_2 = R_2$的一个 n元 sq准素超理想。假设对于某些 $r_1^n \in R_1$ 和 $s_1^n \in R_2$，$g_1 \times g_2((r_1, s_1) \cdots, (r_n, s_n)) = (g_1(r_1^n)\ g_2(s_1^n)) \in P_1 \times P_2$。因此，我们有 $g_1(r_1^n) \in P_1$。由于 P_1 是 R_1的一个 n元sq准素超理想，所以 $g_1(r_i^{(2)}, 1_{R_1}^{(n-2)}) \in P_1$或 $g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n) \in$

$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1)$ 对于某个 $1 \leq i \leq n$。这意味着 $g_1 \times g_2((r_i, s_i)^{(2)}, (1_{R_1}, 1_{R_2})^{(n-2)}) = (g_1(r_i^{(2)}, 1_R^{(n-2)}), g_2(s_i^{(2)}, 1_R^{(n-2)})) \in P_1 \times P_2$ 或

$$\begin{aligned} g_1 \times g_2((r_1, s_1), \cdots, (r_{i-1}, s_{i-1}), (1_{R_1}, 1_{R_2}), (r_{i+1}, s_{i+1}), \cdots, (r_n, s_n)) \\ = (g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n), g_1(s_1^{i-1}, 1_{R_2}, s_{i+1}^n)) \\ \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1 \times P_2). \end{aligned}$$

其他情形类似。因此，$P_1 \times P_2$ 是$R_1 \times R_2$的一个 n元 sq准素超理想。□

4. n-ary wsq-primary hyperideals

本节旨在研究 n元弱强拟主超理想的概念。

定义4.1. 设 R是一个真超理想。若对每个 $r_1^n \in R$，$0 \neq g(r_1^n) \in P$ 均蕴含$g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$或 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中某个 $1 \leq i \leq n$，则称 P 为 R 的一个 n元弱强拟主超理想。“弱强拟主”简称为“wsq主”。

例4.2. R 的每个 sq元 n准素超理想都是一个 R 的 n元 wsq主超理想。

例4.3。如果继续考虑例4.3，那么 $I = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}\}$ 是 wsq-准素 y
超理想 G。

定理4.4。假设 P 是 R的一个 n元 wsq-准素超理想。如果 P 不是 sq-准素的，那么 $g(P^{(2)}, 1^{(n-2)}) =< 0 >$。

证明。令 $g(P^{(2)}, 1^{(n-2)}) \neq< 0 >$。假设对于某个$r_1^n \in R$，$g(r_1^n) \in P$，且 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \notin P$。如果 $0 \neq g(r_1^n)$，那么我们有 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，因为 P 是 R的一个 n元 wsq-准素超理想。我们假设 $g(r_1^n) = 0$。如果$g(r_i, P, 1^{(n-2)}) \neq< 0 >$，那么对于某个 $p \in P$，我们得到 $g(r_i, p, 1^{(n-2)}) \neq 0$，这意味着

$$\begin{aligned} 0 \neq g(r_i, f(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n), p, 0^{(m-2)}), 1^{(n-2)}) \\ = f(g(r_1^n), g(r_i, p, 1^{(n-2)}), 0^{(m-2)}) \\ \subseteq P. \end{aligned}$$

由于 P是 n元 wsq准素超理想，且 R和 $g(r_i, 1^{(n-2)}) \notin P$，我们得到$f(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) p, 0^{(m-2)}) \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，因此 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。假设 $g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) P, 1^{(n-2)}) \neq< 0 >$。那么，对于某个 $p' \in P$，有 $g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) p', 1^{(n-2)}) \neq 0$。因此 $0 \neq g(f(r_i, p', 0^{(m-2)}) g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) 1^{(n-2)}) = f(g(r_1^n) g(r_1^{i-1}, p', r_{i+1}^n) 1^{(n-2)}) 0^{(m-2)}) \subseteq P$。由于 P是 n元 wsq准素超理想，且 R和 $g(f(r_i, p', 0^{(m-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \nsubseteq P$，那么 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。现在假设 $g(r_i, P, 1^{(n-2)}) = g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) P, 1^{(n-2)}) =< 0 >$。由$g(P^{(2)}, 1^{(n-2)}) \neq< 0 >$可知，对于某些 $a, b \in P$，有 $g(a, b, 1^{(n-2)}) \neq 0$。因此

$$\begin{aligned} 0 \neq g(f(r_i, a, 0^{(m-2)}), f(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n), b, 0^{(m-2)}), 1^{(n-2)}) \\ = f(g(r_1^n), g(r_i, b, 1^{(n-2)}), g(r_1^{i-1}, a, r_{i+1}^n), g(a, b, 1^{(n-2)}), 0^{(m-4)}) \\ \subseteq P. \end{aligned}$$

若 $g(f(r_i, a, 0^{(m-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \subseteq P$，则可得

$$f(g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}), g(r_i, a, 1^{(n-2)})^{(2)}, g(a^{(2)}, 1^{(n-2)}), 0^{(m-2)}) \subseteq P$$

这意味着 $g(r_i, 1^{(n-2)}) \in P$，矛盾，因此 $g(f(r_i, a, 0^{(m-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \nsubseteq P$。由于 P 是 n元 wsq-准素的，且 $g(f(r_i, a, 0^{(m-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \nsubseteq P$，我们有

$f(g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n)\ b,0^{(m-2)}) \subseteq \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$，这意味着 $g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$。因此，$P$ 是 n元 sq-准素超理想，与 R 矛盾。因此，$g(P^{(2)},1^{(n-2)}) =< 0 >$。□

作为前一定理的推论，我们给出以下明确结果：

推论 4.5. 假设 P 是 R 的一个 n 元 wsq-主超理想，且不是 sq-主的。那么 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P) = \mathbf{r^{(m,n)}}(0)$。

n 元 wsq-主超理想的交将在下一个定理中讨论。

定理 4.6. 设 $\{P_i\}_{i\in I}$ 是 R 的一族 n 元 wsq-主超理想，且这些超理想都不是 sq-主的。那么 $P = \cap_{i\in I}P_i$ 是 R 的一个 n 元 wsq-主超理想。

证明。由于 $\{P_i\}_{i\in I}$ 是 R 的一族 n 元 wsq 准素超理想，且它们不是 sq 准素的，根据推论 4.5，我们得出 $\mathbf{r^{(m,n)}}(P) = \mathbf{r^{(m,n)}}(\cap_{i\in I}P_i) = \cap_{i\in I}\mathbf{r^{(m,n)}}(P_i) = \mathbf{r^{(m,n)}}(0)$。现在，假设对于某个 $r_1^n \in R$，有 $0 \neq g(r_1^n) \in P$，但 $g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n) \notin \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$。因此，对于每个 $i \in I$，我们有 $0 \neq g(r_1^n) \in P_i$，且 $g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n) \notin \mathbf{r^{(m,n)}}(P_i) = \mathbf{r^{(m,n)}}(0)$。由于 P_i 是 n 元 wsq 准素的，对于所有 $i \in I$，都有 $g(r_i^{(2)},1^{(n-2)}) \in P_i$，这意味着 $g(r_i^{(2)},1^{(n-2)}) \in P$。因此，$P$ 是 R 的一个 n 元 wsq 准素超理想。□

若对于$r_1^n \in R$, $0 \neq g(r_1^n) \in P$，有 $r_i \in P$或 $g(r_1^{i-1},1_R,r_{i+1}^n) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$，且某个$1 \leq i \leq n$满足此条件，则称真超理想 P of R 为 n元弱准素超理想。

定理4.7. 设 P and Q 是 R 的真超理想，且 $P \subseteq Q$。若 P 是 R的 n元弱准素超理想，则 $g(P,Q,1^{(n-2)})$是 R的 n元 wsq准素超理想。

证明。假设对于某个 $r_1^n \in R$，有 $0 \neq g(r_1^n) \in g(P,Q,1^{(n-2)})$。由于 P是 R的n元弱准素超理想，且 $g(P,Q,1^{(n-2)}) \subseteq P$，可得 $r_i \in P$或 $g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$。由 $P \subseteq Q$可知，$f(r_i^{(2)},1^{(n-2)}) \in g(P,Q,1^{(n-2)})$，或 $g(r_1^{i-1},1,r_{i+1}^n) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(P) = \mathbf{r^{(m,n)}}(g(P,Q,1^{(n-2)}))$。因此，$g(P,Q,1^{(n-2)})$是 R的 n元 wsq准素超理想。□

推论 4.8. 设 P 是 n 元弱准素超理想，且属于 R。则 $g(P^{(2)},1^{(n-2)})$ 是 n 元 wsq-准素超理想，且属于 R。

定理 4.9. 设 P 是 R 的真超理想。则 P 是 n 元 wsq-准素超理想，当且仅当对于每个 $r \in R$、$\langle r\rangle \subseteq P_r$ 或 $P_r \subseteq \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$ 或 $P_r \subseteq A_r$，只要 $P_r = \{a \in R \mid g(r,a,1^{(n-2)}) \in P\}$ 且 $A_r = \{a \in R \mid g(r,a,1^{(n-2)}) = 0\}$。

证明。（$\Longrightarrow$）设 P 是 n 元 wsq-准素超理想，属于 R 且 $r \in R$。若 $g(r^{(2)},1^{(n-2)}) \in P$，则 $\langle r\rangle \subseteq P_r$。设 $g(r^{(2)},1^{(n-2)}) \notin P$。取 $a \in P_r$。因此 $g(r,a,1^{(n-2)}) \in P$。设 $0 \neq g(r,a,1^{(n-2)})$。由于 P 是 n 元 wsq-准素超理想且 $g(r^{(2)},1^{(n-2)}) \notin P$，我们有 $a = g(a,1^{(n-1)}) \in \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$，这意味着 $P_r \subseteq \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$。设 $0 = g(r,a,1^{(n-2)})$。因此 $a \in A_r$，这意味着 $P_r \subseteq A_r$。

（$\Longrightarrow$）令 $0 \neq g(r_1^n) \in P$对于某个 $r_1^n \in R$，使得 $g(r_i^{(2)},1^{(n-2)}) \notin P$对于某个$1 \leq i \leq n$。根据假设，我们有 $P_{r_i} \subseteq A_{r_i}$ 或 $P_{r_i} \subseteq \mathbf{r^{(m,n)}}(P)$。前一种

情况会导致矛盾。在后一种情况下，我们得到 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in P_{r_i} \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$, 如所需。□

下面我们考察 n元 wsq准素超理想与其根之间的关系。

定理 4.10. 假设 R 是一个 Krasner (m,n)-超环，且不含非零幂零元。若 P 是 R 的一个 n元 wsq准素超理想，则 $\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$ 是 R的一个 n元弱素超理想。

证明。设 P是 R的一个 n元 wsq准素超理想。假设对于某个 $r_1^n \in R$，有 $0 \neq g(r_1^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。则存在 $s \in \mathbb{N}$，使得若 $s \leq n$，则$g(g(r_1^n)^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in P$。由于 R不含非零幂零元，我们得出 $0 \neq g(g(r_1^n)^{(s)}, 1^{(n-s)})$。由于 P是 R的一个 n元 wsq准素超理想，并且

$$\begin{aligned} & g(r_i^{(s)}, g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-2s)}) \\ & \quad = g(r_i^{(s)}, g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, g(1^{(n)}), 1^{(n-2s-1)}) \\ & \quad = g(g(r_i^{(s)}, 1^{(n-s)}), g(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-s)}), 1^{(n-2)}) \\ & \quad \in P, \end{aligned}$$

我们有 $g(g(r_i^{\ s}, 1^{(n-s)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) = g(r_i^{\ s}, 1^{(n-2s)}) \in P$，这意味着 $r_i \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$ 或 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n)^{(s)}, 1^{(n-s)}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，这推出对于某个 $1 \leq i \leq n$，有 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。若 $s = l(n-1)+1$，则用类似的论证即可得证。因此，$\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$ 是 R 的一个 n 元弱素超理想。□

回忆一下 [12]，对于某些 Krasner (m,n)-超环 (R_1, f_1, g_1) 和 (R_2, f_2, g_2)，映射 $h: R_1 \longrightarrow R_2$ 称为同态，如果对于所有 $x_1^m \in R_1$ 和 $y_1^n \in R_1$，我们有

(i) $h(1_{R_1}) = 1_{R_2}$, (ii) $h(f_1(x_1, ..., x_m)) = f_2(h(x_1) ..., h(x_m))$, (iii) $h(g_1(y_1, ..., y_n)) = g_2(h(y_1) ..., h(y_n))$。

定理4.11. 假设（R_1, f_1, g_1）和（R_2, f_2, g_2）是两个交换 Krasner（m,n）-超环，且 $h: R_1 \longrightarrow R_2$ 是一个同态。那么：

(1) 如果 h是单态射，且 P_2 是 R_2 的一个 n 元 wsq-准素超理想，那么 $h^{-1}(P_2)$ 是 R_1 的一个 n 元 wsq- 准素超理想。(2) 如果 h 是满同态，且 P_1 是 R_1 的一个 n 元 wsq-准素超理想，并且 $Ker(h) \subseteq P_1$，那么 $h(P_1)$ 是 R_2 的一个 n 元 wsq-准素超理想。

证明。（1）假设对于某个 $r_1^n \in R_1$，$0 \neq g_1(r_1^n) \in h^{-1}(P_2)$。由于 h 是单态射，我们得出 $0 \neq h(g_1(r_1^n)) = g_2(h(r_1) \cdots, h(r_n)) \in P_2$。由于 P_2 是 R_2的一个 n 元 wsq 准素超理想，因此

$$g_2(h(r_i)^{(2)}, 1_{R_2}^{(n-2)}) = h(g_1(r_i^{(2)}, 1_{R_1}^{(n-2)})) \in P_2$$

or

$g_2(h(r_1) \cdots, h(r_{i-1}) 1_{R_2}, h(r_{i+1}) \cdots, h(r_n)) = h(g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n)) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_2)$, 其中 $1 \leq i \leq n$。这意味着 $g_1(r_i^2, 1_{R_1}^{(n-2)}) \in h^{-1}(P_2)$，或者 $g(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n) \in h^{-1}(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_2)) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(h^{-1}(P_2))$。因此，$h^{-1}(P_2)$ 是 R_1 的一个 n 元 wsq 准素超理想。

(2) 令 $0 \neq g_2(t_1^n) \in h(P_1)$，其中 $t_1^n \in R_2$。由于 h 是一个满同态，因此存在 $r_1^n \in R_1$，使得 $h(r_1) = t_1$, ..., $h(r_n) = t_n$。因此，$0 \neq h(g_1(r_1^n)) = g_2(h(r_1) ..., h(r_n)) = g_2(t_1^n) \in h(P_1)$。由于 $Ker(h) \subseteq P_1$，于是我们有 $0 \neq$

$g_1(r_1^n) \in P_1$。由于 P_1 是 R_1 的一个 n 元 wsq 准素超理想，我们得到 $g_1(r_i^{(2)}, 1_{R_1}^{(n-2)}) \in P_1$ 或 $g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1)$。因此

$$h(g_1(r_i^{(2)}, 1_{R_1}^{(n-2)})) = g_2(h(r_i)^{(2)}, 1_{R_2}^{(n-2)}) = g_2(t_i^{(2)}, 1_{R_2}^{(n-2)}) \in h(P_1)$$

or

$$\begin{aligned} h(g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n)) &= g_2(h(r_1), \cdots, h(r_{i-1}), 1_{R_2}, h(r_{i+1}), \cdots, h(r_n)) \\ &= g_2(t_1^{i-1}, 1_{R_2}, t_{i+1}^n) \\ &\in h(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1)) \\ &\subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(h(P_1)) \end{aligned}$$

因此，$h(P_1)$ 是 R_2 的一个 n 元 wsq-准素超理想。 □

推论4.12. 设 P 和 Q 是 R 的两个真超理想，且满足 $Q \subseteq P$。

(1) 若 P 是 R 的一个 n 元 wsq-准素超理想，则 P/Q 是 R/Q 的一个 n 元 wsq-准素超理想。(2) 若 Q 是 R 的一个 n 元 wsq-准素超理想，且 P/Q 是 R/Q 的一个 n 元 wsq-准素超理想，则 P 是 R 的一个 n 元 wsq-准素超理想。

证明。(1) 考虑满同态 $\pi: R \longrightarrow R/Q$，其定义为 $r \longrightarrow f(r, Q, 0^{(m-2)})$。现在，利用定理4.11(2)即可得到结论。

(2) 假设对于 $r_1^n \in R$，$0 \neq g(r_1^n) \in P$。如果 $0 \neq g(r_1^n) \in Q$，那么对于某个 $1 \leq i \leq n$，有 $g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in Q \subseteq P$或 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(Q) \subseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，因为 Q 是 n-元 wsq-准素超理想。若 $0 \neq g(r_1^n) \notin Q$，则我们得到

$$0 \neq f(g(r_1^n)\ Q, 0^{(m-2)}) = g(f(r_1, Q, 0^{(m-2)}) \cdots, f(r_n, Q, 0^{(m-2)})) \in P/Q.$$

由于 P/Q 是 R/Q 的 n-元 wsq-准素超理想，我们得到

$$g(f(r_i, Q, 0^{(m-2)})^{(2)}, f(1, Q, 0^{(m-2)})^{(n-2)}) = f(g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)})\ Q, 0^{(m-2)}) \in P/Q$$或

$$\begin{aligned} &g(f(r_1, Q, 0^{(m-2)}), \cdots, f(r_{i-1}, Q, 0^{(m-2)}), f(1, Q, 0^{(m-2)}), f(r_{i+1}, Q, 0^{(m-2)}), \\ &\qquad \cdots, f(r_n, Q, 0^{(m-2)})) \\ &= f(g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n), Q, 0^{(m-2)}) \\ &\in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P/Q) \\ &= \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)/Q. \end{aligned}$$

这意味着 $g(r_i, 1^{(n-2)})^{(2)} \in P$或 $g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。这表明$P$ 是 R的一个 n元 wsq准素超理想。□

定理4.13. 设 H 是 R 的一个子超环，且 P 是 R的真超理想，使得 $H \nsubseteq P$。若 P 是 R的一个 n元 wsq准素超理想，则 $H \cap P$是 H的一个n元 wsq准素超理想。

证明。将定理4.11 (1)应用于单射 $j: H \longrightarrow R$，该单射由对所有 $x \in H$均满足 $j(x) = x$ 所定义，我们得出 $j^{-1}(P) = H \cap P$ 是 H 的一个 n 元 wsq 准素超理想。□

回忆一下，根据 [1]，Krasner (m,n)-超环 R 的非空子集 S 称为 n 元乘法子集，若对于 $s_1, ..., s_n \in S$，有 $g(s_1^n) \in S$。Krasner (m,n)-超环的分式概念在 [5] 中提出。

定理4.14. 假设 R 是一个 Krasner (m,n)-超环，且 S 是 R 的一个 n 元乘法子集，使得 $1 \in S$。若 P 是 R 的一个 n 元 wsq- 准素超理想，且 $P \cap S = \varnothing$，则 $S^{-1}P$ 是 $S^{-1}R$ 的一个 n 元 wsq-准素超理想。

证明. 设 $\frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_n}{s_n} \in S^{-1}R$，其中 $0 \neq G(\frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_n}{s_n}) \in S^{-1}P$。因此 $^{g}(r_1^n)\ g(s_1^n) \in S^{-1}P$。这意味着存在 $v \in S$，使得 $0 \neq g(v, g(r_1^n)\ 1^{(n-2)}) \in P$，从而 $g(r_1^{i-1}, g(v, r_i, 1^{(n-2)})\ r_{i+1}^n) \in I$。不失一般性，可假设 $g(r_1^{n-1}, g(v, r_n, 1^{(n-2)})) \in P$。由于 P 是 R 的一个 n 元 wsq-准素超理想，以下情形至少有一种成立：$g(a_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$；$g(g(v, r_n, 1^{(n-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$；$g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^{n-1}, g(v, r_n, 1^{(n-2)})) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，其中某个 $1 \leq i \leq n-1$；或者 $g(r_1^{n-1}, 1) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$。

若对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，$g(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$，则 $G(\frac{r_i}{s_i}(2), 1\ 1^{(n-2)}) = {}^{g}(r_i^{(2)}, 1^{(n-2)})\ g(s_i^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in S^{-1}P$。若 $g(g(v, r_n, 1^{(n-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in P$，则 $G(\frac{r_n}{s_n}(2), 1\ 1^{(n-2)}) = {}^{g}(r_n^{(2)}, 1^{(n-2)})\ g(s_n^{(2)}, 1^{(n-2)}) = g(g(v^{(2)}, 1^{(n-2)})\ r_n^{(2)}, 1^{(n-3)})\ g(g(v^{(2)}, 1^{(n-2)})\ s_n^{(2)}, 1^{(n-3)}) = {}^{g}(g(v, r_n, 1^{(n-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)})\ g(g(v, s_n, 1^{(n-2)})^{(2)}, 1^{(n-2)}) \in S^{-1}P$。

若对于某个 $1 \leq i \leq n-1$，$g(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^{n-1}, g(v, r_n, 1^{(n-2)})) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，则根据 [5] 中的引理 4.7，有 $G(\frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_{i-1}}{s_{i-1}}, 1\ 1, \frac{r_{i+1}}{s_{i+1}}, ..., \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}, \frac{r_n}{s_n}) = {}^{g}(r_1^{i-1}, v, a_{i+1}^{n-1}, r_n)\ g(s_1^{i-1}, v, s_{i+1}^{n-1}, s_n) = {}^{g}(r_1^{i-1}, 1, r_{i+1}^{n-1}, g(v, r_n, 1^{(n-2)}))\ g(s_1^{i-1}, 1, s_{i+1}^{n-1}, g(v, s_n, 1^{(n-2)})) \in S^{-1}(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(S^{-1}P)$。若 $g(r_1^{n-1}, 1) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)$，则 $G(\frac{r_1}{s_1}, ..., \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}, 1\ 1) = {}^{g}(r_1^{n-1}, 1)\ g(s_1^{n-1}, 1) \in S^{-1}(\mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P)) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(S^{-1}P)$。因此，$S^{-1}P$ 是 $S^{-1}R$ 的 n 元 wsq 准素超理想。□

定理 4.15. 设 (R_1, f_1, g_1) 和 (R_2, f_2, g_2) 是两个标量单位分别为 1_{R_1} 和 1_{R_2} 的 Krasner (m, n)-超环。假设 P_1 是 R_1 的一个真超理想。那么以下条件等价：

(i) $P_1 \times R_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 n 元 wsq-准素超理想。(ii) $P_1 \times R_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 n 元 sq-准素超理想。(iii) P_1 是 R_1 的一个 n 元 sq-准素超理想。

证明. (i)$\Longrightarrow$(ii) 设 $P_1 \times R_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 n 元 wsq-准素超理想。由 $P_1 \times R_2 \nsubseteq \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(0)$，根据推论 4.5 可知，$P_1 \times R_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的一个 n 元 sq-准素超理想。

(ii)$\Longrightarrow$(iii) 假设对于某个 $r_1^n \in R_1$，有 $g_1(r_1^n) \in P_1$。那么我们有 $g_1 \times g_2((r_1, 1_{R_2}) \cdots, (r_n, 1_{R_2})) = (g_1(r_1^n)\ 1_{R_2}) \in P_1 \times R_2$。由于 $P_1 \times R_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的 n 元 sq-准素超理想，因此我们得到 $g_1 \times g_2((r_i, 1_{R_2})\ 1_{R_2})^{(2)}, (1_{R_1}, 1_{R_2})^{(n-2)}) = (g_1(r_i^2, 1_R^{(n-2)})\ 1_{R_2}) \in P_1 \times R_2$ 或

$$\begin{aligned} g_1 \times g_2^{1}((r_1, 1_{R_2}), \cdots, (r_{i-1}, 1_{R_2}), (1_{R_1}, 1_{R_2}), (r_{i+1}, 1_{R_2}), \cdots, (r_n, 1_{R_2})) \\ = (g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n), 1_{R_2}) \\ \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1 \times R_2) \\ = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1) \times R_2 \end{aligned}$$

对于某个 $1 \leq i \leq n$。这意味着 $g_1(r_i, 1_{R_1}^{n-1}) \in P_1$ 或 $g_1(r_1^{i-1}, 1_{R_1}, r_{i+1}^n) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1)$。因此，$P_1$ 是 R_1 的 n 元 sq-准素超理想。

(iii)$\Longrightarrow$(i) 由定理 3.8 可得。□

推论 4.16. 设 (R_1, f_1, g_1) 和 (R_2, f_2, g_2) 是两个带有标量单位元 1_{R_1} 和 1_{R_2}的 Krasner (m, n)-超环。假设 P_1 是 R_1 的真超理想，且P_2 是 R_2 的真超理想，并且满足 $P_1 \times P_2 \neq < 0 >$。则以下陈述等价：

(i) $P_1 \times P_2$ 是 $R_1 \times R_2$的 n元 wsq准素超理想。(ii) P_1 是 R_1 的 n元 sq 准素超理想，并且 $P_2 = R_2$ 或 P_2 是 R_2 的 n元sq准素超理想，并且 $P_1 = R_1$。

(iii)　$P_1 \times P_2$ 是 $R_1 \times R_2$ 的 n-元 sq-准素超理想。

证明。(i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 $P_1 \times P_2 \neq < 0 >$ 是$R_1 \times R_2$的 n元 wsq准素超理想。我们假设 $P_2 \neq < 0 >$。任取 $0 \neq p_2 \in P_2$。则 $g_1 \times g_2((1_{R_1}, p_2), (0, 1_{R_2})^{(n-1)}) = (0, p_2) \in P_1 \times P_2$。由于 $P_1 \times P_2$是 $R_1 \times R_2$的 n元 wsq准素超理想，并且 $(0,0) \neq g_1 \times g_2((1_{R_1}, p_2), (0, 1_{R_2})^{(n-1)}) \in P_1 \times P_2$，因此我们有 $g_1 \times g_2((1_{R_1}, p_2)^{(2)}, (1_{R_1}, 1_{R_2})^{(n-2)}) = (1_{R_1}, g_2(p_2^{(2)}, 1_{R_2}^{(n-2)})) \in P_1 \times P_2$或 $g_1 \times g_2((1_{R_1}, 1_{R_2}), (0, 1_{R_2})^{(n-1)}) = (0, 1_{R_2}) \in \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1 \times P_2) = \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_1) \times \mathbf{r}^{(\mathbf{m},\mathbf{n})}(P_2)$。由此可得 $1_{R_1} \in P_1$ 或 $1_{R_2} \in P_2$，这意味着 $P_1 = R_1$ 或$P_2 = R_2$。若 $P_1 = R_1$，则根据定理 4.15，P_2 是 R_2 的 n元 sq准素超理想。另一种情况同理。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 由定理 3.8 可知。

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 由于每个 n-元 sq-准素超理想都是 n-元 wsq-准素超理想，因此得证。□

5. Conclusion

本文介绍了 Krasner (m,n)-超环 R 中的 n 元 q-准素、(k,n)-吸收 q-准素、sq-准素和 wsq-准素超理想的结构。本文讨论并证明了这些超理想类中的若干重要结果，并考察了它们之间的关系。此外，还研究了这些概念在某些超环论构造下的稳定性。基于我们的研究，我们向研究者提出一些开放问题：

(1) 引入并研究 (k,n)-吸收 sq-准素超理想。(2) 引入并研究 (k,n)-吸收 wsq-准素超理想。(3) 引入并研究 wsq-δ-准素超理想，其中 δ 是 Krasner (m,n)-超环 R 的一种超理想扩张。

References

[1] R. Ameri、M. Norouzi，Krasner (m n *European* ,)-超 *Journal of Combinatorics* 2013 379 390 环中的素超理想与主超理想，, ( ) - . [2] M. Anbarloei，Krasner (m,n)-超环中的 n元2-吸收超理想与2-吸收主超理想， *Matematicki Vesnik*, 71 (3) (2019) 250-262. [3] M. Anbarloei，在 Krasner (m,n)-超环中将素超理想与主超理想统一于一个框架， *Comm. Algebra*, 49 (2021) 3432-3446. [4] M. Anbarloei，Krasner (m,n)-超环中 n 元素素超理想的一种推广研究， *Afrika Matematika*, 33 (2021) 1021-1032. [5] M. Anbarloei，Krasner (m n *Jordan Journal of Mathematics and* ,)-*Statistic* 分式超环，, 即将出版。[6] A. Asadi，R. Ameri，Krasner (m,n)-超环的直接极限， *Journal of Sciences*, 31 (1) (2020) 75-83. [7] Z. Dongsheng，交换环的 δ-主理想， *Kyungpook Mathematical Journal*, 41 (2001) 17-22. [8] B. Fahid，Z. Dongsheng，交换环的 2 δ *Kyungpook*-吸收-主理想。, ( ) - . [9] L. Fuchs，关于拟主理想， *Acta. Sci. Math. (Szeged)* **11**(1947) 174-183. [10] K. Hila，K. Naka，B. Davvaz，关于 Krasner (m,n)-超环中的(k,n)-吸收超理想， *Quarterly Journal of Mathematics*, 69 (2018) 1035-1046. [11] S. Koc，U. Tekir，G. Ulucak，关于强拟主理想， *Bull. Korean Math. Soc.*, 56 (3) (2019) 729-743. [12] S. Mirvakili，B. Davvaz，Krasner (m,n)-超环上的关系， *European J. Combin.*, 31 2010 790 802 ( ) - . *Mathematical Journal* **57** 2017 193 198

[13] M. Norouzi, R. Ameri, V. Leoreanu-Fotea, Krasner (m,n)-超环中的正规超理想, *An. St. Univ. Ovidius Constanta* **26** (3) (2018) 197-211. [14] S. Ostadhadi-Dehkordi, B. Davvaz, 关于 Krasner (m,n)-超环同构定理的注记, *Arabian Journal of Mathematics*, 5 (2016) 103-115. [15] E. Ozel Ay, G. Yesilot, D. Sonmez, 交换超环上的 δ *Int.* -主超理想, , ( ) *J. Math. and Mathematical Sciences* 2017 5428160, 4 文章编号, 页码。[16] M. Samei, F. Rashedi, H. Fazaeli Moghimi, 关于拟主理想的*43rd Annual* 一些结果 *Iranian Mathematics Conference Iran* 2012 138 140 , , ( ) - . [17] U. Tekir, S. Koc, K.H. Oral, K.P. Shum, 关于交换环中的2-吸收拟主理想, *Commun. Math. Stat.*, DOI: 10.1007/s40304-015-0075-9. [18] E.A. Ugurlu, E.M. Bouba, U. Tekir, S. Koc, 关于 wsq-主理想, *Czech Math J.*, (2023年) DOI: 10.21136/CMJ.2023.0259-21.

Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.*Email address*: m.anbarloei@sci.ikiu.ac.ir