arXiv:2302.10415v2 [math.AT] 5 Apr 2023

Bredon上同调计算综述

诺´埃·B´巴尔塞纳斯

Abstract. 我们概述了布雷东上同调的计算方法，尤其关注无限群。

1. Bredon 上同调的不同含义

布雷东上同调是带有群作用的空间最重要的上同调理论之一。

我们将“等变普通上同调”这一概念——按传统理解及本书中的用法——专用于具有紧李群或有限群作用的空间的 Borel 构造的上同调。不过，我们将把布雷东上同调称为一种等变上同调理论，其含义将在下文定义。

从历史上看，布雷东上同调的构造可追溯至公告 [**13**] 及其扩展版本 [**14**], ，并且主要基于 G-CW 复形的概念，我们将在本文中回顾这一概念。

正是这种联系解释了布雷东上同调在研究群上同调中的有限性性质时的用途 [**46**], [**6**]。我们不再深入讨论这一主题，而是请读者参阅出色的综述 [**49**], ，以及 [**54**], ，后者专门讨论了族的 Eilenberg-Ganea 问题；该问题是以族的分类空间的布雷东上同调来表述的。

布雷东上同调的单纯版本由 Br¨ocker 和 Illman[**15**], [**33**], 提出，其结果使得人们能够考虑（豪斯多夫、局部紧）拓扑群的作用。这一做法基于单纯复形的等变版本，模仿了 G-CW 复形的定义。

布雷东上同调的同伦版本（甚至允许在参数化等变情形下进行描述）已在 [**53**] for$Na¨ive\ equivariant$上同调理论中加以阐述，这些理论是从等变同伦理论的意义上定义的。对于取复扭曲表示群作为局部（扭曲）系数的布雷东上同调这一特例，其构造已在 [**8**], 中详尽论述，文中还

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：55N91。次要分类：55P91、55N25、20J05。作者感谢本次会议的组织者邀请其参加2022年3月的美国数学学会联合会议，并感谢DGAPA项目IN100221、DGAPA-UNAM休假计划以及CONACYT通过资助项目CB 217392提供的支持。作者受益于与Mario Vel´asquez关于布雷东上同调及其具体示例 $\mathbb{S}l_3(\mathbb{Z})$的交流与合作。特别感谢Juanita Claribel Santiago绘制图1。

˘ 建立了与 Čech 版本的关系，以便描述 Segal/Atiyah-Hirzebruch 谱序列。

真正的等变 布雷东上同调版本已在等变同伦理论中得到研究 [**43**]。这些理论的经典计算包括 Gaunce Lewis 的开创性工作 [**44**] （据称基于 Stong 未发表的工作），该工作依据相关例子的显式胞腔结构； $RO(G)$-分次 K¨unneth 谱序列和泛系数谱序列 [**45**], ；隐式使用族的分类空间，例如 Tits 建筑； [**4**], 显式使用真子群族的分类空间 [**38**], ；以及近期发展起来的各种工具。人们对这些工具的兴趣可追溯到此类计算在证明 Kervaire 不变量一问题中的作用 [**28**]。

这些方法包括（列举时并不打算面面俱到）基于切片滤过的方法 [**29**], 、同伦不动点谱序列 [**31**], （通常与特设胞腔构造结合使用） [**37**], ，以及参数化同伦论方面的考量 [**16**], 和关于 [**30**] 自由性的概念。此处列出这些方法，是为了分别举出各类方法的一项代表性应用。

最后，例 3.2.16 中基于等变同伦理论定义了一个真正适用于真作用的布雷东上同调版本，其中还讨论了从 $\mathbb{Z}$ 到等变 KO^0-理论的分次扩展与真作用的分类空间之间的关系（其一般性强于 $RO(G)$-分次）。

我们将重点介绍用于计算布雷东上同调朴素版本的方法，尤其关注无限离散群，并通过补充若干参考文献和更多示例来扩展在 AMS 分区会议上所作报告的内容。

Contents

1. Bredon 上同调的不同含义 1 2. 布雷东上同调 2 3. 布雷东上同调作为等变陈特征的接收对象 19 参考文献 23

2. 布雷东上同调

设 G 是一个（可能是无限的）离散群。A G-CW 复形是一个带有 G 作用的 CW 复形，该作用置换各胞腔，并且若某个胞腔被映到自身，则映射必为恒等映射。若 G 作用的所有胞腔稳定子都是 G 的有限子群，则称该作用是适当的。

Definition 2.1. 回顾一下，二元组（X， A）上的 G-CW 复形结构包括对 G-空间 $X = \cup_{-1\leq n}X_n$ 的一个滤过， $X_{-1} = \emptyset$, $X_0 = A$ ，并且其中每个空间 X_n 都通过附加以下形式的推出图中的胞腔，从前一个空间归纳得到

胞腔

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i S^{n-1} \times G/H_i & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_i D^n \times G/H_i & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

我们称一个真 G-CW 复形是有限的，如果它由有限个胞腔 $G/H \times D^n$（或胞腔轨道）组成。

EXAMPLE 2.2. [G-CW 分解示例]

- 等变三角剖分定理的一个推论是：对于带有李群 [**34**], [**35**] 的真光滑作用的光滑流形，存在等变三角剖分。这种三角剖分产生一个 G-单纯复形。

  这一概念在 [**35**], 第 5 节中被描述为轨道空间 X/G 的一个三角剖分，并且相对于商映射 π 满足一个额外的相容条件 $X \to X/G$，即：在 X/G 上，一个 n维单形 Δ_n 的逆像是一个 标准等变单形，记作 ($\Delta_n, H_0, \ldots, H_n$)，它是一个自由 G-轨道与标准 n维单形 $\Delta_n \times G$ 的乘积的商空间；若对于每个 $k = 0, \ldots, n$，元素 x 属于 Δ_n 中某个 k维单形的边界，且紧子群 H_k gH_k 和 $g^{'}H_k$ 的陪集相同，并且紧子群序列满足 $H_{i+1} \subset H_i$，则成对的 (x, g) 和 $(x, g^{'})$ 被视为相同。

  请注意，通过这一识别所提供的数据等价于从 i 维单形的轨道 $G/H_i \times \Delta_i \to X$ 出发的 G-等变映射；其中，标准单形的包含映射 $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ 在相差一个 G-共轭 $H_{i+1} \subset H_i$的意义下彼此相容。

  这样的映射 $\Delta_i \times G/H_i \to X$ 可以识别为一个胞腔。完整细节见 [**35**], 第 170 页的命题 11.5。

- 具有李群（或更一般地，局部紧群）适当作用的 G-绝对邻域收缩子（G-ANR），具有 G-CW 复形的同伦型。这是切片定理[**56**]的推论。

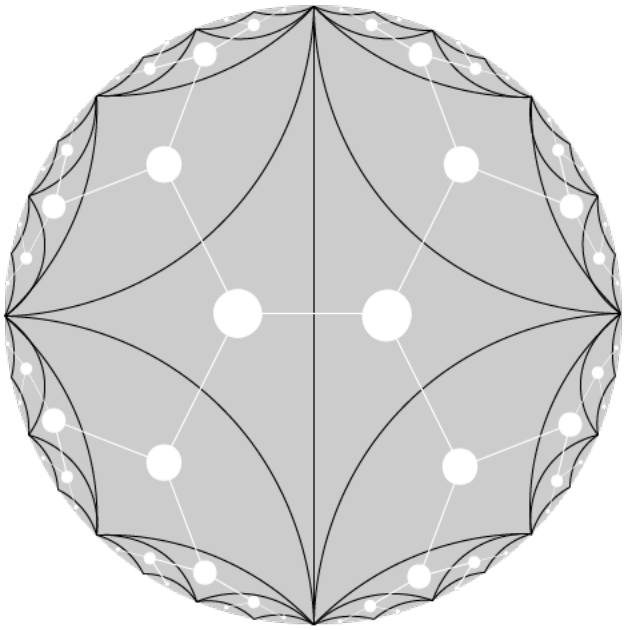
- 双曲平面上 $Sl_2(\mathbb{Z})$ 的作用的等变胞腔分解，以及一维变形收缩。

  群 $Sl_2(\mathbb{Z})$通过等距变换作用于双曲平面。Farey 铺砌的对偶给出了一个一维G-CW 复形的例子（ $Sl_2(\mathbb{Z})$ 的 Bass-Serre 树），它由两个零维胞腔轨道（类型分别为 C_4、 C_6）和一个一维胞腔（类型为C_2）组成。见图 1。

  更一般地，Li、L¨uck 和 Kasprovski 在 [**36**] 上为一个群 G 构造了一个 G-CW 结构，该群是作为图乘积给出的旗复形的关联群（例如包括直角阿廷群和直角 Coxeter 群）。

- $Sl_3(\mathbb{Z})$ 在齐性空间 $Sl_3(\mathbb{R})/SO_3$上的作用的等变胞腔分解。其商空间存在一个三角剖分

FIGURE 1. Farey三角剖分的对偶。



这一齐性空间的等变变形收缩，如 [**65**], 中所述，也见于 [**59**], ，这是计算 [**9**], [**10**]中的扭曲等变 K-理论和 K-同调的主要依据。

令 Q 为实正定 3×3阶方阵。正标量乘法定义了一个作用，其商空间$Q/\mathbb{R}^+$ 与商空间 $Sl_3(\mathbb{R})/SO_3/SL_3(\mathbb{Z})$同伦等价。

我们来描述其轨道空间。令 C 为 $\mathbb{R}^3$ 的截角立方体，中心为 (0，0，0)，边长为 2，并在顶点 (1，1，−1)，(1，−1，1)，(−1，1，1) 和 (−1，−1，−1) 处沿对应边的中点截去。正如 [**65**],所述，每个矩阵 A 都存在一个形如以下形式的代表元

$$\begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}$$

它可以对应于截角立方体内部的相应点（x，y，z）。我们引入以下记号表示立方体的顶点:

$$\begin{array}{cc} O = (0,0,0) & Q = (1,0,0) \\ M = (1,1,1) & N = (1,1,1/2) \\ M^{'} = (1,1,0) & N^{'} = (1,1/2,-1/2) \\ P = (2/3,2/3,-2/3) & \end{array}$$

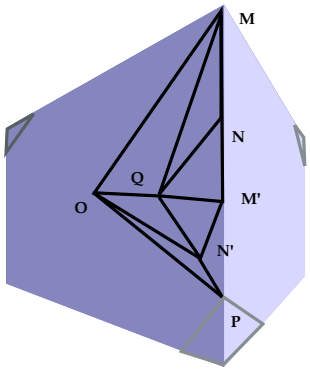
设 E 为 C 的子空间，由满足以下条件的点（x， y， z）组成：

$$|z|\geq y\geq 1$$

$$z-x-y+2\geq 2.$$

我们将描述空间 E 的等变三角剖分。

FIGURE 2. 基本区域的三角剖分。



注意， $Sl_3\mathbb{Z}$ 的元素

$$q_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\ q_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

将三角形 $(M,\ N,\ Q)$ 映射到三角形 $(M^{'},\ N^{'}Q)$ 和四边形

$(N,\ N^{'},\ M^{'},\ Q)$ 到 $(N^{'},\ N,\ M^{'},\ Q)$。因此，必须在商空间中进行以下识别：$M\cong M^{'}$, $N\cong N^{'}$, $QM\cong QM^{'}$,$QN\cong QN^{'}$, $MN\cong M^{'}N^{'}\cong M^{'}N$和 $QMN\cong QM^{'}N\cong QM^{'}N^{'}$。

接下来， [**59**] 我们描述胞腔轨道及其对应的稳定子。这也可见于 Soul´e 的文章 [**65**] 定理 2 中（不过我们使用的是胞腔结构，而非单纯复形结构）。我们更改了所选的生成元。我们将相关信息汇总于表**1**。我们使用以下记号：$\{1\}$ 表示平凡群，C_n 表示含有 n 个元素的循环群， D_n 表示含有 $2n$ 个元素的二面体群，而 S_n 表示作用在 n 个对象上的置换所构成的对称群。

第一列列举了胞腔等价类；第二列列出每个等价类的一个代表元；第三列给出了所给代表元的稳定子的生成元；而

顶点				2-胞腔			
v_1	O	g_2, g_3	S_4	t_1	OQM	g_2	C_2
v_2	Q	g_4, g_5	D_6	t_2	$QM'N$	g_1	$\{1\}$
v_3	M	g_6, g_7	S_4	t_3	$MN'P$	g_{12}, g_{14}	$C_2 \times C_2$
v_4	N	g_6, g_8	D_4	t_4	$OQN'P$	g_5	C_2
v_5	P	g_5, g_9	S_4	t_5	$OMM'P$	g_6	C_2
边				3-胞腔			
e_1	OQ	g_2, g_5	$C_2 \times C_2$	T_1	g_1	$\{1\}$	
e_2	OM	g_6, g_{10}	D_3				
e_3	OP	g_6, g_5	D_3				
e_4	QM	g_2	C_2				
e_5	QN'	g_5	C_2				
e_6	MN	g_6, g_{11}	$C_2 \times C_2$				
e_7	$M'P$	g_6, g_{12}	D_4				
e_8	$N'P$	g_5, g_{13}	D_4				

TABLE 1. 在 $Sl_3(\mathbb{Z})$-作用下各胞腔的稳定子群。

最后一列给出稳定子的同构类型。上文提到的生成元为

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad g_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad g_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad g_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad g_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad g_{14} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

我们固定一个定向；也就是说，顶点的排序 $O < Q < M < M' < N < N' < P$ 在 E 中以及在商空间 $BSl_3\mathbb{Z} = E/\equiv$ 中诱导出一个定向。胞腔的上边界由 [**9**] 第 5 节确定，其中包括表示的限制，以及由上述指定定向所产生的符号。至此，作用的胞腔结构便构造完成。

布雷东上同调可以用依赖于群的轨道范畴的函子来描述。

类似于 2.2 第 1 部分的讨论，子群之间的次共轭关系，例如通过 G 中的一个元素将 H 映到 K，记作 g，满足 $gHg^{-1} = H' \subset K$，其结果是存在一个 G-等变映射 $G/H \to G/K$，该映射将陪集 $g'H$ 指派给陪集 $gg'g^{-1}K$。

将这类等变映射视为 G-CW 结构中内在给定数据的一部分时，它们能够确定几何信息。特别是，这些映射会以这样的方式产生胞腔轨道的包含映射：维数最低的胞腔对应于在包含关系（模去 G 共轭作用）意义下最大的群。

有两个与群相关的重要范畴，它们与编码 G 子群之间这类关系有关：轨道范畴和共轭同态范畴。本节余下部分中，我们假设群 G 是离散的。

Definition 2.3（轨道范畴）。记 G 的轨道范畴为 $\mathcal{O}_G$；该范畴对每个子群 $H \subseteq G$ 都有一个对象 G/H，其态射由 G-等变映射给出。当且仅当 H 在 G 中共轭于 K的某个子群时，才存在态射 $\phi : G/H \to G/K$。更一般地，给定一个关于交与共轭封闭的子群族 $\mathcal{F}$，我们可以构造全子范畴 $\mathcal{O}_G^{\mathcal{F}}$，其中对象形如 G/H，且 H 属于 $\mathcal{F}$。

Definition 2.4（共轭同态范畴）。给定一个群 G，共轭同态范畴 $\mathcal{S}_G$ 是这样一个范畴：其对象为 G的子群；对于两个对象 H 和 K，它们之间的态射集合是集合 conhom(H, K) 的商空间，记为 Conhom(H, K)/Inn(K)，其中 conhom(H, K) 由满足以下条件的群同态 $\varphi : H \to K$ 组成：存在元素 $g \in G$，使得 φ由 g的共轭作用给出；内自同构群 Inn(K)作用于复合。

存在一个投影函子 pr：$\mathcal{O}_G \to \mathcal{S}_G$，它将每个轨道$G/H$ 对应到子群 H，并将一个 G-映射 $f: G/H \to G/K$ 对应到同态$H \to K$，该同态定义为由满足 $gHg^{-1} \cong H' \leq K$ 的元素 g 所作的共轭作用。

Remark 2.5. 集合 Mor$_{\mathcal{S}_G}(H, K)$ 同构于子群 H 在 G 中的中心化子对集合 G-等变映射 Mor$_{\mathcal{O}_G}$(G/H, G/K) 的作用所对应的商空间；对所有 $h \in H$ }， $C_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg$。其中，中心化子 $g \in C_G(H)$ 的元素通过与右乘$R_{g^{-1}}$：$G/H \to G/H$, $g'H \mapsto g'g^{-1}H$ 复合来作用。

考虑这个范畴的主要优点在于，有限群 H 的自同构群是有限的。

在轨道范畴中，对象 G/H 的自同构群是 G 中的正规化子子群除以子群 $H \cdot C_H(G)$所得的商空间，其中该子群由形如 hc的元素组成，其中 $h \in H$，而 c 是 G 中 H 的中心化子中的一个元素。我们将此群记为 $W_G(H) = N_G(H)/H \cdot C_H(G)$。

轨道范畴和共轭同态范畴都是 EI- 范畴，也就是说，对象的每个自同态都是可逆的。

Example 2.6. [无限群的轨道范畴]

- 群 $Sl_2(\mathbb{Z})$的有限子群族的轨道范畴有三个对象： $Sl_2(\mathbb{Z})/C_6$、 $Sl_2(\mathbb{Z})/C_4$ 和 $Sl_2(\mathbb{Z})/C_2$。存在

两个 G-等变映射 $Sl_2(\mathbb{Z})/C_2 \to Sl_2(\mathbb{Z})/C_6$ 和 $Sl_2(\mathbb{Z})/C_2 \to Sl_2(\mathbb{Z})/C_4$。

- 在 2.2 节第 4 部分中构造并讨论的空间上，$Sl_3(\mathbb{Z})$ 的作用之商空间的三角剖分，完整描述了群中有限稳定子子群的轨道范畴：存在八个极大有限子群，它们是零维胞腔的稳定子；它们之间的态射数量与以顶点为边的三角剖分中的一维胞腔数量相同；这类态射两两复合的关系由二维胞腔给出的显然规则决定；最后，在 $Sl_3(\mathbb{Z})$ 的有限各向同性子群的轨道范畴中，存在唯一一个长度为三的复合。参见上一节末尾的表格。

DEFINITION 2.7（与 G-CW 复形相关的 $\mathcal{O}_G$-链复形）。设 X 是一个 G-CW 复形。记 CHCOM 为环 R 上的链复形范畴，其态射由链映射给出。

反变函子 $C_*(X) : \mathcal{O}_G \to \mathbb{Z} - \text{CHCOM}$ 将每个对象 G/H 映射为关于胞腔边界映射 ∂_* 的 H-不动点复形 $C_*(X^H) \cong C_*(\text{Map}_G(G/H, X))$ 的胞腔 $\mathbb{Z}$-链复形。

我们将使用同调代数来定义 Bredon同调和上同调函子。

逆变Bredon模是一个反变函子 $N : \mathcal{O}_G^{\mathcal{F}} \to \mathbb{Z}\text{–MODULES}$，其中 $\mathcal{F}_G$ 是 G, $\mathcal{O}_G$ 的轨道范畴的全子范畴，由子群族 $H \in \mathcal{F}_G$ 对象 G/H 生成。

给定一个逆变Bredon模 M，Bredon 上链复形 $C_G^*(X; M)$ 定义为轨道范畴 $C_*(X) \to M$ 上函子的自然变换所构成的阿贝尔群。用符号表示，

$$C_G^n(X; M) = Hom_{\mathcal{F}_G}(\underline{C}_n(X), M)$$

其中 $\mathcal{F}_G$ 是包含 X 的各向同性群的子范畴。

给定 G-CW 复形 X 的 n-胞腔的 $\{e_\lambda\}$ 个轨道代表元，以及胞腔的各向同性子群 S_λ e_λ，根据米田引理可直接得到，阿贝尔群 $C_G^n(X, M)$ 满足：

$$C_G^n(X, M) = \bigoplus_\lambda Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[e_\lambda], M(G/S_\lambda))$$

其中每个轨道代表元 e_λ 对应一个直和项。它们具有如下微分δ^n： $C_G^n(X, M) \to C_G^{n-1}(X, M)$, 该微分由 ∂_* 以及对于态射 ϕ： $G/S_\lambda \to G/S_\mu$ 的映射 $M(\phi)$: $M(G/S_\mu) \to M(G/S_\lambda)$ 确定。

对于协变函子

$$N : \mathcal{F}_G \to \mathbb{Z} - \text{MODULES},$$

链复形

$$C_*^{\mathcal{O}_G} = \underline{C}^n(X) \underset{\mathcal{F}_G}{\otimes} N = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[e_\lambda] \otimes N(G/S_\lambda)$$

对于 $\mathcal{F}_G$ 中的态射 ϕ： $G/S_\lambda \to G/S_\mu$，允许使用微分 $\delta_* = \partial_* \otimes N(\phi)$。

Definition 2.8（Bredon同调）。以 N 为系数的 Bredon同调群记为 $H_*^{\mathcal{O}_G}(X,\ N)$，其定义为链复形 $\left(C_*^{\mathcal{O}_G}(X,\ N)\ \delta_*\right)$ 的同调群

Definition 2.9（布雷东上同调）。以 M 为系数的布雷东上同调群，记作 $H^*_{\mathcal{O}_G}(X,\ M)$，是上链复形 $\left(C^*_G(X,\ M)\,\delta^*\right)$ 的上同调群。

Remark 2.10（用共轭同态范畴描述布雷东上同调）。设 X 是一个具有有限胞腔稳定子的 G-CW复形。设 R 是一个环，且 M 是一个取值于 R-模的逆变Bredon模。

我们将考虑定义在共轭同态范畴 $\mathcal{S}_G$ 上、取值于链复形范畴的反变函子；该函子将子群 H 对应到商空间 $X^H/C_G(H)$ 的胞腔链复形。我们将所得函子记作 $C_*^{\mathcal{S}_G}$，并对每个定义在 $\mathcal{S}_G$ 上且取值于 R-模范畴的反变函子，将从 $C_*^{\mathcal{S}_G}$ 到 M 的自然变换上链复形定义为 $Hom_{\mathcal{S}_G}(C_*^{\mathcal{S}_G},\ M)$。我们可以对胞腔上链映射应用上同调函子，并将所得的模记作 $H^n_{\mathcal{S}_G}(C_*^{\mathcal{S}_G},\ M)$。

作为注2.5的推论，投影函子 $\mathrm{pr}:\ \mathcal{O}_G \to \mathcal{S}_G$ 对定义在共轭同构范畴上、取值于 R-模的每个反变函子 M 诱导一对双射自然变换

$$pr^*:\mathrm{pr}^*M \to M,$$

它们分别连接函子的复合与

$$pr_*:C_*^{\mathcal{O}_G} \to C_*^{\mathcal{S}_G}$$

链复形之间，并在上同调群层面诱导一个同构

$$H^n_{\mathcal{O}_G}(X,\mathrm{pr}^*M) \cong H^n_{\mathcal{S}_G}(C_*^{\mathcal{S}_G},M)$$

Example 2.11（Bredon 模的例子）。现在我们列举一些重要的 Bredon 模的例子。

（1）常系数。给定一个固定的 R-模 M，我们考虑一个常函子，其在每个轨道上的取值均为 M。（2）自由 Bredon 函子。定义在轨道范畴上的反变函子称为自由的，如果它是可表逆变函子的直和；也就是说，存在若干对象 G/H_α，使得该函子表示为

$$\bigoplus_{G/H_\alpha} R[\mathrm{Mor}(\quad, G/H_\alpha)].$$

与 G-CW 复形相关联的链复形给出了自由反变 Bredon 模的例子。

(3) 作为 Bredon 模的复表示环。

我们将范围限定在可能是无限群 G 的有限子群族，并将轨道范畴 G/H 中具有有限子群 H 的对象与复表示环 $R_{\mathbb{C}}(H)$ 相关联。回想一下，其底层阿贝尔群在 H 的共轭类集合上是自由的，

但作为轨道范畴上的函子，它并不像上例中定义的那样是自由的。

在复表示环上，我们可以考虑一种协变结构：对一个 G-映射 $G/H \to G/K$ 赋予如下构造的诱导同态$R_{\mathbb{C}}(H) \to R_{\mathbb{C}}(K)$。设 $H' \leq K$ 是K 的一个子群，且与 H共轭。

现在设 V 是 H的一个表示，并将其视为一个 H'-表示。现在考虑 K-表示 $V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(K)$。

表示环上存在一种反变结构，其定义为：对态射 $G/H \to G/K$ 赋予同态$R_{\mathbb{C}}(K) \to R_{\mathbb{C}}(H') \cong R_{\mathbb{C}}(H)$，该同态由限制给出。

（4）扭曲复表示环

设 H 是一个有限群， V 是一个复向量空间。给定一个余循环 $\alpha: H \times H \to S^1$，它代表 $H^2(H, S^1) \cong H^3(H, \mathbb{Z})$中的一个类，则一个 α-扭曲表示是满足以下条件的函数 $P: H \to Gl(V)$:

$$P(e) = 1$$

$$P(x)P(y) = \alpha(x, y)P(xy)$$

一个 α扭曲表示的同构类型仅取决于 $H^2(H, S^1)$ 中的上同调类。

Bredon 模结构与前一个例子中的类似。

Definition 2.12. 设 H 为有限群，且 $\alpha: H \times H \to S^1$ 是一个余循环，表示 $H^2(H, S^1) \cong H^3(H, \mathbb{Z})$ 中的一个类。 α扭曲表示群 H，记作 ${}^{\alpha}\mathcal{R}(H)$，是复 α扭曲表示同构类在以直和为二元运算下构成的 Grothendieck 群。

设 H 为有限群。给定一个余循环 $\alpha \in H^2(H, S^1)$，它表示一个阶为 n的挠类，规范化过程给出一个与 α 上同调的余循环 β，使得 $\beta: H \times H \to S^1$ 的取值落在由一个本原 n次单位根 η生成的子群$\mathbb{Z}/n \subset S^1$ 中。与规范化余循环相对应，存在一个中心扩张

$$1 \to \mathbb{Z}/n \to H^* \to H \to 1$$

具有这样的性质： H 的任意扭曲表示都是 H^*的线性表示，并且 $\mathbb{Z}/n$ 通过与 η相乘来作用。这样的群称为 H的 Schur 覆盖群。

(5) Burnside 环。我们再次将轨道范畴中对象的各向同性限制在有限群这一族。给定一个有限群 H，Burnside 环 $A(H)$定义为有限集（带有 H作用）的同构类集合所对应的 Grothendieck 环。

与表示环类似，Burnside 环上存在两种结构：一种是由作用的归纳给出的协变结构，另一种是由限制定义的逆变结构。

Example 2.13（从定义计算 $Sl_2(\mathbb{Z})$ 的 Bredon同调。）我们将复表示环视为 Bredon 模。这里我们将范围限制在有限子群族上。直接由一维

胞腔结构（即 Farey 三角剖分的对偶所给出的 Bass–Serre 图）可得一个计算 Bredon同调的链复形，其中所示映射为 d_1。

$$0 \to \mathcal{R}(C_2) \xrightarrow{\left(\mathrm{ind}_{C_2}^{C_6}\right),-\mathrm{ind}_{C_2}^{C_4}\right)} \mathcal{R}(C_6) \oplus \mathcal{R}(C_4) \to 0.$$

注意，左侧阿贝尔群的秩为 2，右侧群的秩为 6+4=10，且该映射是内射的。

因此，若我们将所得的 1 维 $Sl_2(\mathbb{Z})$-复形记为 T。

$$H_0^{\mathcal{O}_{Sl_2(\mathbb{Z})}}(T, \mathcal{R}) = \mathbb{Z}^8,$$

所有其他 Bredon同调群均为零。

Remark 2.14（低维的更多实例）。为便于参考，我们列举以下布雷东上同调低维计算的示例：[**24**], [**23**]。

Remark 2.15（基于 G-CW 分解的 $SL_3(\mathbb{Z})$ 计算。）Soul´e 提出的三角剖分已被广泛用于布雷东上同调的计算。

首次计算布雷东链复形和上链复形是在 [**59**] 中完成的。具体而言，稳定子的确定、共轭关系以及微分被用作输入，用于计算以复表示为系数的布雷东上同调（见 [**59**], ）、以扭曲表示为系数的布雷东上同调（见 [**9**], [**10**], ），以及最近以等变实 K-理论的系数计算的布雷东上同调（见 [**32**]）。

结果是，Atiyah-Hirzebruch 型谱序列退化，而计算归结为计算 Baum-Connes 猜想的左侧。

Remark 2.16（ G-CW 复形上的等变障碍理论与布雷东上同调。）布雷东上同调最早的成功应用之一，是等变障碍理论的发展。考虑等变版本的障碍问题：给定 G-CW 复形 X 和 Y，以及一个定义在 $n-1$-骨架上的 G-映射 $f\colon X_{n-1} \to Y$，主定理指出，如果某个障碍类消失，那么 f 可以重新定义为在 $n-2$ 骨架上与 G 同伦的映射，并且该映射可延拓到一个胞腔 $G/H \times D^{n+1}$ 的 $n+1$ 维附加轨道上

$$\mathfrak{o}(f) \in H^n_{\mathcal{O}_G}(X, \pi_{n+1}(Y^H)).$$

关于在自由作用这一特定情形下，于组合几何中运用等变障碍理论，请参见 [**14**] 第二章和 [**12**] 。

Remark 2.17（其他事项）。下面列举布雷东上同调近期在相关领域中的一些应用。

- 通过在 [**22**] 中计算 Eilenberg-Maclane 空间的布雷东上同调，得到了其拓扑复杂度的下界。
- 在 [**52**] 中，提出了一个研究作用于布雷东上同调的海克算子的框架，以在比安基群的约化 C^* 代数上得到海克作用。
- 在 [**27**] 中存在一种布雷东上同调的动机版本的计算。

REMARK 2.18（Bredon 模阿贝尔范畴及其对象的代数性质。）在上一个例子中，我们简要提到，按照自由对象的定义，与 G-CW 复形相关联的链复形提供了一个轨道范畴上的自由函子实例。我们将考察模范畴和链范畴的一些代数性质。

在模范畴中，以轨道范畴上的函子为对象的范畴是一个阿贝尔范畴，其中态射是这些函子之间的自然变换。如果一对连续的态射在中间处正合，即在每个对象上都正合，则称其为正合。

投射模和内射模的概念可以像通常那样用 Hom 函子来定义；根据米田引理，自由分解和投射分解均存在。

关于群上同调，尤其是有限性性质方面的 Bredon 同调代数入门，请参见 [**54**]。

REMARK 2.19（布雷东上同调的实际计算）。本文所考虑的系数系统分别给出自由阿贝尔群的链复形和上链复形，并带有优选基，可用于计算布雷东同调和上同调。

注意，如果我们有一个自由阿贝尔群组成的复形

$$\cdots \to \mathbb{Z}^{\oplus n} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}^{\oplus m} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^{\oplus k} \to \cdots$$

对于某个固定基底， f 和 g 由矩阵 A 和 B 表示，则 $\mathbb{Z}^{\oplus m}$ 处的同调为

$$ker(g)/im(f) \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus(m-s-r)},$$

其中 $r = rank(B)$ 和 $d_1, \ldots, d_s$ 是 A的初等因子。

由此可得布雷东同调的无挠判别准则，参见 [**42**]第 1496 页的定理 5.2：若存在一种基变换，使得所有顶点块中的所有子式都属于集合 $\{-1, 0, 1\}$，则零次分次布雷东上同调是无挠的。用于在计算中实现布雷东上同调（主要借助 GAP）的有效方法包括 [**61**], [**57**]。

2.1. 与其他构造的比较。 Illman 在 [**33**], 中比较了单纯版本和胞腔版本的布雷东上同调；对于适当的 G-ANR，Čech 版本与更一般的参数化情形下定理 5.3 中布雷东上同调的朴素同伦版本一致。该定理针对（扭曲的）复表示环这一具体例子表述，但其论证适用于任意布雷东模。

REMARK 2.20（与布雷东上同调的真正等变同伦版本的对比）。通过在等变谱范畴中考虑 Eilenberg–Mac Lane 谱的真正等变版本，可以得到布雷东上同调的若干版本。

这些计算的例子包括 [**45**], [**4**] [**38**] [**28**], [**29**], [**31**] [**37**],[**16**]。

关于朴素分次等变上同调理论扩展为真正的上同调理论的问题，我们参见 [**19**] 中的例 3.2.16；这一结论尤其适用于布雷东上同调。

2.2. 基于麦基函子范畴代数性质的计算。现在我们将根据有关布雷东模中每个对象的自同构群的信息，给出布雷东上同调的一种分解。这一关系对于细化等变上同调陈特征的分解至关重要。

本节的参考资料为 [**64**], [**48**], [**47**], ，本节的全部论证和定义均摘自该资料，并不声称具有原创性。

事实证明，在轨道范畴上的函子范畴中，具有内射性的代数性质与能否按照与对象同构类相关联的稳定子群进行分解密切相关。

为固定记号，考虑轨道范畴中对象 $i_{G/H}$ 到 $G/H \to \mathcal{O}_G$的包含映射，并回顾一下， G/H 的自同构群是$W_H(G)$。

设 R 是一个环，且 M 是一个逆变Bredon模。

存在一个限制函子 i^*，它将 M 限制为 R-模 $i^*(M) = M(G/H)$，并通过将轨道范畴中恰好含有一个对象 G/H 的全子范畴以及 G/H 的自同构作为态射，赋予其一个 $R[W_G(H)]$-模结构。

给定一个 $R[W_H(G)]$-模 M，诱导模 i_*M 是一个 $\mathcal{O}_G$-R 模，其定义为张量积对逆变自由对象取商

$$G/K \mapsto M(G/H) \otimes R[\mathrm{Mor}(G/K, G/H)],$$

其中，我们规定将 $M(G/H)\otimes R[\mathrm{Mor}(G/K,\ G/H)]$ 中由形如 $m \otimes f_*(x) - f^*m \otimes x$ 的元素生成的子模视为零，对所有 $f \in W_G(H)$ 均如此。

给定一个 $R[W_G(H)]$-模 N，余诱导函子将轨道范畴中的对象 G/K （反变地！）赋予 R-模

$$i_{G/H_!} = \mathrm{Hom}_{R[W_H(G)]}(R[\mathrm{mor}_{\mathcal{O}_G}(G/H, G/K)], N)).$$

注意由每一对由一个 $\mathcal{O}_G$-函子 M 和一个 N a$R[W_G(H)]$-模组成的对象所构成的伴随。

$$\hom_{R[W_G(H)]}({i_{G/H}}^* M, N) \cong \hom_{\mathcal{O}_G}(M, {i_{G/H}}_! N)$$

$$\hom_{\mathcal{O}_G}({i_{G/H}}_* N, M) \cong \hom_{R[W_H(G)]}(N, i^*_{G/H}(M)).$$

Definition 2.21（投射与内射分裂函子）。设 G/H 是轨道范畴中的一个对象。

（1）投射分裂函子 $S_{G/H}$ 将定义在轨道范畴上的一个反变函子 M对应到由映射的余核定义的 $R[W_G(H)]$ 模

$$\prod_{\substack{f:G/H\to G/K \\ f \text{ not an isomorphism}}} M(G/K) \to M(G/H).$$

(2) 内射分裂函子 $T_{G/H}$ 将定义在轨道范畴 N上的协变函子与 $R[W_G(H)]$-模对应，该模定义为

映射的核

$$\bigoplus_{\substack{f:G/H\to G/K\\ f \text{ not an isomorphism}}} N(G/H)\to N(G/K).$$

投射分裂函子附带一个典范投影 $M(G/H)\to S_{G/H}(M)$。给定任意一个 $R[W_G(H)]$-截面，对象 G/H到轨道范畴的包含映射会产生一个自然变换 $i_{(G/H)_*}S_{G/H}(M)\to i_{G/H_*}(M)$。对偶地，投射分裂函子附带一个典范单射 $T_{G/H}M\to M(G/H)$，任意一个 $W_G(H)$-收缩 $M(G/H)\to T_{G/H}M$都会产生一个自然变换

$$i_{G/H_!}M(G/H)\to i_{G/H_*}T_{G/H}M.$$

对于范畴 $W_G(H)$ 或 $\mathcal{O}_G$中的任一对象 G/H，对象 G/H 的长度是所有满足以下条件的 l 的上确界：存在一个态射序列 $G/H_0\to G/H_1\to\ldots\to G/H_l$，其中 $G/H_l=G/H$，且其中没有一个态射是同构。对偶地，余长度是所有满足以下条件的 l 的上确界：存在一个序列 $G/H_0\to G/H_1\to\ldots\to G/H_l$，其中 $G/H_0=G/H$，且其中没有一个态射是同构。若一个范畴中的每个对象都具有有限长度或有限余长度，则该范畴分别称为有限长度或有限余长度范畴。

第 1035 页的结构定理 [48], 2.2 如下所述：

Theorem 2.22. *(1)* 假设 $\mathcal{O}_G$ 具有有限余长度，并且 M 是一个协变布雷登函子，满足对于每个对象 G/H， $S_{G/H}M$ 都是一个投射$RW_H(G)$]-模。令 $\sigma_{G/H}$: $S_{G/H}M\to M$ 为典范投影的一个 $R[W_H(G)]$- 截面，并考虑布雷登函子之间的映射

$\mu(M)$:

$$\bigoplus_{G/H\in\mathrm{Iso}(\mathcal{O}_G)} i_{G/H_*}S_{G/H}M \xrightarrow{\bigoplus_{G/H\in\mathrm{Iso}(\mathcal{O}_G)} i_{G/H_*}\sigma_{G/H}M} i_{G/H_*}M(G/H) \xrightarrow{\bigoplus_{G/H\in\mathrm{Iso}(\mathcal{O}_G)}\alpha_{G/H}} M.$$

其中 α:$i_{G/H_*}M(G/H)=i_{G/H_*}i^*_{G/H}M\to M$是恒等映射的伴随。

该映射总是满射。当且仅当 M 是一个投射 *Bredon*模时，它是双射。

(2) 假设 $\mathcal{O}_G$ 具有有限长度。令 M 为一个逆变 $R_{\mathbb{O}_G}$-模，使得对于每个 G/H， $R[W_G(H)]$-模 $M(G/H)$ 都是内射的。令 $\rho_{G/K}$: $M(G/K)\to T_{G/K}M$ 为典范单射 $T_{G/H}M\to M$ 的一个 $R[W_G(H)]$-截面，并考虑自然变换

$\nu(M)$:

$$M \xrightarrow{\prod_{G/K\in \mathrm{Iso}(\mathcal{O}_G)} \beta_{G/K}} \prod_{G/K\in \mathrm{Iso}(\mathcal{O}_G)} i_{G/H_!} M(G/K) \xrightarrow{\prod_{G/K\in \mathrm{Iso}(\mathcal{O}_G)} i_{G/K_!}\rho_{G/K}} i_{G/K_*} T_{G/K} M.$$

该映射总是内射的。如果 M 是一个内射 *Bredon* 模，则它是双射。

在复表示环这一重要例子中，我们注意到，存在一种协变结构和反变结构，它们定义在函子上，并且在对象上的取值相同。

另一方面，定理 2.22 的第二部分给出了一个条件：映射 $\nu_{G/H}$ 为满射，这等价于 Bredon 模是内射的。由此可知，对于反变函子 M，将其与投影函子复合，得到取值于共轭同态范畴 $pr^*(M): \mathcal{S}_\mathcal{G} \to \mathrm{R}-\mathrm{Mod}$ 的函子；该函子在每个对象上的取值都是一个内射 R-模。

以下概念是对这一性质的等价刻画，也是有理计算布雷东上同调最相关的代数工具。

Definition 2.23. 设 FGINJ 为有限生成群及单射群同态构成的范畴。设 M^*, M_* 为到 R-模范畴的双函子；也就是说，它由一对分别为反变函子 M^* 和协变函子 M_* 的函子组成，且二者在对象上的取值相同。我们将协变诱导的同态记为 $\mathrm{ind}f$，将反变诱导的同态记为 $\mathrm{res}f$。对于子群 $H \to G$的包含映射，我们将 res_G^H 和 ind_H^G记为相应的限制映射和诱导映射。

若 M 满足以下条件，则称其为麦基函子：

- 对于内自同构 $c(g): G \to G$，有 $M_*(c_g): M(G) \to M(G)$ 是恒等映射。
- 对于群同构 $f: G \xrightarrow{\cong} H$，复合映射 $\mathrm{res}f \circ \mathrm{ind}f$ 和 $\mathrm{ind}f \circ \mathrm{res}f$ 均为恒等映射。
- 双陪集公式。对于两个子群 H，$K \subset G$,

$$\mathrm{res}_G^K \circ \mathrm{ind}_H^G = \sum_{KgH\in G/H/K} \mathrm{ind}_{c_g: H\cap g^{-1}Kg\to K} \circ \mathrm{res}_H^{H\cap g^{-1}Kg},$$

其中 c_g 表示与 g的共轭作用。

以下结果已在 [48], 第 1046 页的定理 5.2 中证明。

Theorem 2.24（内射性与麦基函子）。 设 G 为一个群，且R 为一个交换环，使得每个有限子群的阶在 R中均可逆。假设 M 是一个麦基函子。

假设对于每个对象， $R[W_G(H)]$-模 $T_{G/H}M$ 作为 $R[W_G(H)]$-模是内射的。那么， M 作为 $\mathcal{S}_G$-模是内射的，并且映射 ν 是双射。

对于以有理表示环的 Green函子上的模为系数的上同调，存在更精细的结构。下面的推论甚至

对于以这类模为系数的布雷东上同调也成立。参见 [**47**], 第 6 节和第 7 节。

以下定理作为关于 Bredon同调的第 6.3 条，发表于 [**47**], 第 221 页

THEOREM 2.25. 设 (X, A) 是一个适当的 G-*CW* 对。设 M 是一个带有有理表示的 *Green*环上的模结构的麦基函子。那么，存在一个分解

$$H_p^{\mathcal{O}_G}(X, A) \cong \bigoplus_{H \in I} H_p(X^H, A^H/C_G(H)) \otimes_{R[W_G(H)]} S_{G/H} M,$$

其中 I 表示有限子群的共轭类集合。

现在我们引用最完整的结果，该结果利用了有理表示环的 Green环上的模结构。此结果作为定理0.2发表于 [**47**]。

THEOREM 2.26. 设 M 是一个在有理表示的 *Green*函子上具有模结构的麦基函子。对于任意群以及任意 G-*CW* 对 (X, A) ，存在一个直和分解

$$H_p^{\mathcal{O}_G}(X, A) \cong \bigoplus_{H \in I} H_p((X^C, A^C)/C_G(H)) \otimes R[W_G(C)]\theta_C^C M).$$

这里 $\theta_C^C M$ 表示与有理表示环中的一个幂等元相乘，其像等于：

$$\operatorname{coker} \bigoplus_{D \subsetneq C} M(D) \overset{\operatorname{ind}_D^C}{\to} M(C).$$

这类幂等元的显式使用在非局部化切尔恩特征[**51**]中发挥作用。

2.3. 基于轨道范畴上初等同调代数的计算。布雷东上同调可以定义为一个Hom构造（极限），由此得到一个上链复形，并像通常那样通过上同调得到布雷东上同调。基于分解的存在性和导出函子的概念，同调代数中的常见构造因此往往可以推广到布雷东版本。

我们介绍这类构造的两个实例： [**9**] 的布雷东上同调的泛系数定理，以及 [**60**]的 K¨unneth 定理。

以下结果见 [**60**], 第 776 页的定理 3.1。其主要假设要求布雷东模的取值是交换环上的自由模。请注意，这并不意味着该函子按照上文定义的意义是自由的。

THEOREM 2.27（K¨布雷东上同调的 Künneth 定理）。 设 X 是一个 G-*CW* 复形， Y 是一个 H-*CW* 复形。设 $\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{F}'$ 分别是 G 和 Y 的子群族，分别包含 X 和 Y 中胞腔的各向同性群。假设 M 和 N 分别是定义在轨道范畴 $\mathcal{O}_G$ 和 $\mathcal{O}_H$ 上的协变*Bredon*函子，并且对于每一对对象 G/G'、 H/H'， $M(G/G')$ 和 $N(H/H')$ 分别是自由模。将乘积群的子群中由 G 和 H 的子群之乘积构成的子群族记为 $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}'$ ，并令 $M \otimes N$ 为此范畴中定义的 *Bredon* 模。

那么，赋予对角作用的乘积 $X \times Y$ 是一个 $G \times H$-CW 复形，并且存在一个短正合序列

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i^{\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}}(X) \otimes H_j^{\mathcal{O}_{\mathfrak{F}'}}(Y) \to H_n^{\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}'}(X \times Y, M \otimes N) \to \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Tor}(H_i^{\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}}(X), H_j^{\mathcal{O}_{\mathfrak{F}'}}(Y)) \to 0.$$

对于布雷登上同调的万能系数定理，除了要求函子在每个对象上的取值是自由的之外，还要求对偶基满足基的相容性；这一要求直接源于复表示环上的弗罗贝尼乌斯互反律，其中特征构成一组基。下面给出定义。

CONDITION 2.28. 设 G 是一个离散群，设 $M_?$ 和 $M^?$ 分别是定义在轨道范畴 $\mathcal{O}$ 的子范畴 $\mathcal{F}_G$ 上的协变函子和反变函子，并且它们在对象上一致。假设

- 对于每个对象 G/H，都存在有限基 $\{\beta_{iH}\}$，使得 $M?(G/H) = M?(G/H)$ 可表示为以 $\{\beta_{iH}\}$ 为基的有限生成自由阿贝尔群，并且存在同构 $a_H\colon M?(G/H) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[\{\beta_{iH}\}] \xleftarrow{\cong} M?(G/H)\colon b_H$。
- 对于协变函子 $\widehat{M} := Hom_{\mathbb{Z}}(M?(\ ), \mathbb{Z})$，$Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[\{\beta_{iH}\}], \mathbb{Z})$ 的对偶基 $\{\widehat{\beta}_{iH}\}$以及同构 a_H和 b_H，下图是交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} M?(G/H) & \xrightarrow{b_H} & \mathbb{Z}[\{\beta_{iH}\}] & \xrightarrow{D_H} & \mathbb{Z}[\{\widehat{\beta}_{iH}\}] & \xrightarrow{\widehat{a_H}} & \widehat{M}(G/H) \\ \downarrow{\scriptstyle M?(\phi)} & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{M}(\phi)} \\ M?(G/K) & \xrightarrow[b_K]{} & \mathbb{Z}[\{\beta_{jK}\}] & \xrightarrow[D_K]{} & \mathbb{Z}[\{\widehat{\beta}_{jK}\}] & \xrightarrow[\widehat{a_K}]{} & \widehat{M}(G/K) \end{array}$$

其中 D_H, D_K 是与基相关联的对偶同构，而 $\phi\colon G/H \to G/K$ 是轨道范畴中的一个态射。

在某些情况下，条件 2.28 得到满足：

- 常系数 $\mathbb{Z}$。
- 定义在有限子群族 $\mathcal{FIN}$ 上的复表示环函子，$\mathcal{R}?$，$\mathcal{R}?$。以特征作为基并运用弗罗贝尼乌斯互反律进行计算，可得条件 2.28。
- 设离散群 G 及一个归一化挠元上循环
$$\alpha \in Z^2(G, S^1),$$
取定义在对象 G/H 上的 α- 和 α^{-1} 扭曲表示环函子 $\mathcal{R}_?^{\alpha}$ $\mathcal{R}_{\alpha}{}^?$，其中 H 属于有限子群族 $\mathcal{FIN}$。对于每个对象 G/H，考虑余循环 $i_H^*(\alpha)$, 其中$i_H : H \to G$ 是包含映射，并且不失一般性地假设它们已归一化，且对应于中心扩张 $1 \to \mathbb{Z}/n_H \to H^* \to H \to 1$ 中的一族 Schur 覆盖群。

我们选取集合 $\{\beta_H\}$，它是 H^* 的不可约表示的特征集合，其中 $\mathbb{Z}/n_H$ 通过乘以本原

n_H 次单位根作用。给定商映射 $H^* \to H$ 的截面选取后，可以构造同构 $^{i^*}$ (α) $\mathcal{R}(G/H) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[\{\beta_H\}]$。它们的扭曲特征所满足的正交关系和弗罗贝尼乌斯互反律保证条件 2.28 成立。

THEOREM 2.29（布雷登上同调的万能系数定理）。 设X 是一个适当的有限 G-*CW* 复形。设 $M^?$ 和 $M_?$ 是一对满足条件 *2.28* 的函子。则存在阿贝尔群的短正合序列

$$0 \to \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}(H^{\mathcal{O}_G}_{n-1}(X, M_?), \mathbb{Z}) \to H^n_{\mathcal{O}_G}(X, M^?) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^{\mathcal{O}_G}_n(X, M_?), \mathbb{Z}) \to 0$$

2.4. 基于群轨道范畴结构性质的计算。 存在一些关于群的条件的例子，这些条件会影响轨道范畴可能具有的具体形态。

举例来说，考虑一族有限群：其中的群是由一个离散群通过有限循环群作中心扩张得到的，而该离散群由一个以有限循环群为系数的二阶上同调类分类。

在此条件下，中心扩张中的有限子群与原群中有限子群的逆像之间存在双射。

为了计算以扭曲复表示为系数的布雷东上同调，可以通过去扭曲过程 将扭曲系数转化为与扩张群及某一类表示相关的系数。下面回顾所需的定义。

DEFINITION 2.30. 设 $1 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to H \to H \to 1$ 是一个中心扩张。设k 是满足 $0 \le k \le n$的自然数。设 V 是一个复向量空间。 H 的 k-˜ ˜中心表示是一个同态 $H \to \mathsf{GL}(V)$，其中生成元$t \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的作用是乘以 $e^{2\pi i k/n}$。

˜ DEFINITION 2.31. H的 k-中心表示群记作 $R_k(H)$，˜是 H 的 k-中心表示的同构类所构成的 Grothendieck 群。

k-中心表示群是一个逆变系数系统。给定离散群的一个中心扩张 $1 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \tilde{G} \to H \to 1$，我们用 $\mathcal{R}^?$表示函子

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^? : \mathsf{Or}_{\mathcal{FIN}}(\tilde{G}) &\to \mathbb{Z}\text{-}\ \mathsf{MODULES} \\ \tilde{G}/\tilde{H} &\mapsto R_k(\tilde{H}). \end{aligned}$$

以下定理出自 [**10**]第 57 页的定理 4.4。该定理最初是针对真作用的分类空间陈述的，但对任意适当的 G- CW 复形都成立。

这是下文所述离散扭量扭曲的扭曲等变 K-理论中去扭曲论证的主要输入。

THEOREM 2.32. 设 G 为一个离散群，且设 $\alpha \in Z^2(G; S^1)$ 为一个取值于 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subseteq S^1$ 的余循环。考虑与 α 相关联的扩张。

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow G_\alpha \xrightarrow{\rho} G \longrightarrow 1.$$

记 X 为一个 G-*CW* 复形，其胞腔稳定子为有限群。

那么，映射 ρ 给出了 X 的布雷东上同调群与以 α-扭曲表示群为系数的上同调群之间的阿贝尔群同构，以及 X 的 G_α-等变布雷东上同调群与以所谓的1-中心群表示 *Bredon* 模（定义见 *2.31*）为系数的上同调群之间的同构。用符号表示，

$$H^*_{\mathcal{O}_G}(X;\mathcal{R}^G_\alpha) \xrightarrow{\rho^*} H^*_{\mathcal{O}_{G_\alpha}}(X;\mathcal{R}^{G_\alpha}_1)$$

是一个同构。

基于对特定例子的轨道范畴的了解而进行的计算，通常还会进一步表述为某个分类空间模型存在。

这些计算的适用范围更广，适用于任何等变上同调或同调理论，包括布雷登上同调。下面列举一些实例：

- 第 294 页的条件 M 和 NM，在 Fuchs 群、单关系群以及有限 F 在 0 之外自由作用的扩张 $1 \to \mathbb{Z}^n \to G \to F$ 中同时成立。
- 对来自 [**36**] 的图乘积群族的分类空间的等变同调理论的计算。
- 条件 C，其中 [**3**]。

3. 作为等变陈特征接收者的 Bredon 上同调

等变陈特征是等变上同调理论之间的一种自然变换。我们简要回顾一下等变上同调理论的概念。需要强调的是，此处考虑的等变上同调理论是朴素的，并将其交由 [**19**],

Definition 3.1. 设 G 是一个群，并固定一个带单位元的结合环 R。取值于 R-模的 G-上同调理论，是由一组反变函子 $\mathcal{H}^n_G$ 构成的集合，这些函子由整数 $\mathbb{Z}$ 索引，定义在 G-CW 对的范畴上，并配有自然变换 ∂^n_G：$\mathcal{H}^n_G(A) := \mathcal{H}^n_G(A, \emptyset) \to \mathcal{H}^{n+1}_G(X, A)$，且满足以下公理：

(1) 如果 f_0 和 f_1 是 G-同伦映射（X，A）$\to$（Y，B）的 G-CW 对，那么对于所有 n，$\mathcal{H}^n_G$（f_0）$= \mathcal{H}^n_G$（f_1）。（2）给定一对（X，A）G-CW 复形，存在一个长正合序列

$$\ldots \xrightarrow{\mathcal{H}^{n-1}_G(i)} \mathcal{H}^{n-1}_G(A) \xrightarrow{\partial^{n-1}_G} \mathcal{H}^n_G(X,A) \xrightarrow{\mathcal{H}^n_G(j)} \mathcal{H}^n_G(X) \xrightarrow{\mathcal{H}^n_G(i)} \mathcal{H}^n_G(A) \xrightarrow{\partial^n_G} \mathcal{H}^{n+1}_G(X,A) \xrightarrow{\mathcal{H}_{n+1}(j)} \ldots$$

其中 i：$A \to X$ 和 j：$X \to$（X，A）是包含映射。

(3) 设 (X, A) 是一个 G-CW 对，且 f：$A \to B$ 是一个胞腔映射。典范映射 (F, f)：$(X, A) \to (X \cup_f B, B)$ 诱导一个同构

$$\mathcal{H}^n_G(X \cup_f B, B) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^n_G(X, A)$$

(4) 设 $\{X_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ 是一个 G-CW复形族，并记包含映射为 $j_i: X_i \to \coprod_{i\in\mathcal{I}} X_i$。那么映射

$$\Pi_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{H}_G^n(j_i) : \mathcal{H}_G^n(\coprod_i X_i) \xrightarrow{\cong} \Pi_{i\in\mathcal{I}}\mathcal{H}_G^n(X_i)$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都是双射。

若存在自然的、分次交换的 $\cup$-乘积，则称 G-上同调理论具有乘法结构

$$\mathcal{H}_G^n(X,A) \otimes \mathcal{H}_G^m(X,A) \to \mathcal{H}_G^{n+m}(X,A)$$

设 $\alpha : H \to G$ 是一个群同态，且 X 是一个 H-CW 复形。诱导空间 $\mathrm{ind}_\alpha X$, 定义为商空间 $G \times X$，它是由右侧 H-作用 $(g,x)\cdot h = (g\alpha(h)\ h^{-1}x)$定义的 G-CW 复形。

一个等变上同调理论由一族 G-上同调理论 $\mathcal{H}_G^*$ 以及由分次环同态确定的诱导结构组成

$$\mathcal{H}_G^n(\mathrm{ind}_\alpha(X,A)) \to \mathcal{H}_H^n(X,A)$$

对于群同态 $\alpha : H \to G$，若其核在 X 上的作用自由，则这些映射是同构，并满足以下条件:

（1）对于任意 n、$\partial_H^n \circ \mathrm{ind}_\alpha = \mathrm{ind}_\alpha \circ \partial_G^n$。（2）对于任意群同态 $\beta : G \to K$，使得 $\ker\beta\circ\alpha$ 在 X 上自由作用，有 $\mathrm{ind}_{\alpha\circ\beta} = \mathcal{H}_K^n(f_1 \circ \mathrm{ind}_\beta \circ \mathrm{ind}_\alpha)$: $\mathcal{H}_K^n(\mathrm{ind}^{\beta\circ\alpha}(X,\ A)) \to \mathcal{H}_H^n(X,\ A)$，其中 $f_1 :\ \mathrm{ind}^\beta\mathrm{ind}_\alpha \to \mathrm{ind}^{\beta\circ\alpha}$ 是规范的 G- 同胚。

（3）对于任意 $n \in \mathbb{Z}$、任意 $g \in G$，群同态

$$\mathrm{ind}_{c(g):G\to G} : \mathcal{H}_G^n(\mathrm{ind})_{\mathrm{c(g):G\to G}}(\mathrm{X},\mathrm{A})) \to \mathcal{H}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X},\mathrm{A})$$

与映射 $\mathcal{H}_G^n(f_2)$ 一致，其中 $f_2 :\ (X,\ A) \to \mathrm{ind}^{c(g):G\to G}$ 将 x 发送到 $(1,\ g^{-1}x)$，且 $c(g)$ 是 G 中的共轭同构。

Example 3.2（等变上同调理论的例子）。现在我们描述下面计算中将涉及的上同调理论。

(1) 复等变 K理论通过有限真 G-CW复形上的向量丛定义于 [**50**]中。对于任意真轨道 G/H，有

$$KU^*(G/H) = \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathbb{C}}(H) & * = 2k \\ 0 & * = 2k+1 \end{cases}.$$

(2) 复扭曲等变 K理论，其扭曲由 $H^3(BG,\mathbb{Z})$中的挠元给出，定义于 [**21**]中。这是一种等变上同调理论，按照上文所述的 Oliver 和 L¨uck 的意义，它是非扭曲复 K理论上的一个子模。

对于 $H^3(EG\times_G X,\mathbb{Z})$ 中的任意扭曲，扭曲等变 K-理论已在 [**7**] 的 Fredholm 图景中定义。对于任意三阶上同调扭曲，扭曲等变 K-理论的适当公理体系是参数化上同调理论 [**8**]，并且比此处采用的

观点更为一般。然而，在扭曲情形下，等变陈特征并非有理同构。

3.1. 阿蒂亚-赫尔泽布谱序列。等变上同调理论的阿蒂亚-赫尔泽布谱序列由 Davis 和 L¨uck 在 [**17**] 中建立。相关细节的详细推导和介绍见 [**19**],第 108 页，构造 3.214。

THEOREM 3.3. 设 $\mathcal{H}^*$ 是一个等变上同调理论。那么，存在一个谱序列，其 E_2 项为系数取自函子的布雷东上同调

$$\mathcal{H}^q : G/H \mapsto \mathcal{H}^q_G(G/H)$$

$$E_2^{p,q} = H^q_{\mathcal{O}_G}(X, \mathcal{H}^q),$$

它条件收敛到等变上同调理论模

$$\mathcal{H}^*_G(X).$$

等变陈特征的存在意味着，阿蒂亚-赫尔泽布谱序列在有理数上退化。

REMARK 3.4（ RO（G）-分次 Atiyah-Hirzebruch 谱序列）。文献 [**39**] 讨论了一种谱序列，它可从 RO（G）-分次布雷东上同调计算 RO（G）-分次上同代理论。

REMARK 3.5（p-链谱序列）。 [**18**] 给出的 p-链谱序列是 Atiyah-Hirzebruch 谱序列的一种替代方案。该谱序列是在范畴 [**17**] 上的空间这一框架中构造的，因此适用于任何等变上同调理论，尤其是布雷东上同调。

REMARK 3.6（等变复 K-理论的等变 Atiyah-Hirzebruch 谱序列的第三微分）。我们将讨论范围限制在复等变 K-理论上。虽然等变 Atiyah-Hirzebruch 谱序列在有理系数下退化，且对于非等变复 K-理论，存在首个非零微分的闭公式 d_3（甚至还有用次级上同调运算表示的高次微分公式），但截至 2022 年，第三微分仍没有闭公式

$$d_3 : H^p_{\mathcal{O}_G}(X, \mathcal{R}_{\mathbb{C}}) \to H^{p+3}_{\mathcal{O}_G}(X, \mathcal{R}_{\mathbb{C}}).$$

参见 [**20**] ，其中讨论了整系数微分不是同构的情形。

文献中讨论过该谱序列的一些特例（但并未涵盖最一般的闭式公式）。

Uribe 和 G´omez [**26**] 的研究 K提出了这样一种分解：对于具有正规阿贝尔子群 A 且该子群在有限 G-CW 复形 X 上作用平凡的有限群 G ，其（非扭曲）等变复 K-理论可分解为若干扭曲等变 K-理论的直和项，而这些理论对应于若干个扭曲，每个扭曲对应于 A的一个不可约表示。

结果是，在这些额外条件下——而这些条件对有限群 G 在 G-CW 复形 X 上的一般作用并不成立——他们能够将（未扭曲的）等变 Atiyah-Hirzebruch

谱序列的第三微分识别为 [8]中构造的扭曲塞加尔谱序列第三微分的一个特殊情形。

尽管等变阿蒂亚-赫尔泽布谱序列的微分是自然变换，并且即使在参数化情形中，定理 5.7 也从同伦论角度将其识别为布雷东上同调分类谱之间的映射，而且已有构造上同调运算的方法，但至今仍无法为相关的布雷东上同调群之间的上同调运算列出完整的候选清单。

在 $RO(G)$-分次情形中，适当版本的斯廷罗德代数的定义可追溯至 Oru¸c [55], ，而解决确定可能运算这一类似问题的尝试则见于 [58],和 [62]。

3.2. 等变上同调陈特征。Slominska 最先在 [63]中探讨了有限群的等变 K-理论中的等变陈特征。

在 Baum-Connes猜想的背景下，为了将等变 K-同调分解为有限循环群不动点集的信息，人们构造了一种特定的方法，称为 [11], 中的非局部化切尔恩特征；这里所述术语的形式化主要由 L¨uck 在文章 [47], [48] 中完成。

以下结果作为定理 4.2 在 [48] 第 1041 页得到证明。

THEOREM 3.7（等变陈特征）. 设 R 是一个包含有理数的环。设 $\mathcal{H}^*$ 是一个取值于 R-模的适当等变上同调理论。假设对于每个群 G 和每个 $q \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{S}_G$-模 $\mathcal{H}^q \circ \mathrm{pr}$ 都是 $\mathcal{S}_G$-模内射的。那么，我们得到一个适当等变上同调理论之间的变换

$$\mathrm{ch}^n : \mathcal{H}^n_? \longrightarrow \prod_{p+q=n} H^p_{\mathcal{S}_G}(X, \mathcal{H}^q).$$

R-映射对于所有适当的相对有限 G-CW 对 (X, A) 都是双射。如果 $\mathcal{H}^*$ 满足不交并公理，那么 R-映射对于所有适当的 G-CW 对 (X, A) 都是双射。

这个自然变换由 L¨uck 第 1040 页上的八种不同构造复合而成；更多细节请参阅该处。

REMARK 3.8（轨形版本）。Adem 和 Ruan 为离散挠率扭曲引入了扭曲复 K 理论和布雷东上同调的轨形版本。

后者被证明与 [2] 中轨形的陈-阮上同调同构。更详细的阐述请参见第 60 页的 [1], 3.3 和第 77 页的 3.10。

REMARK 3.9（非局部化版本）。在与有理化 Baum-Connes 组装映射相关的语境中，去局部化指的是等变陈特征的修正版本。在几何情形下，可以将其理解为：在对不动点集包含映射的法丛的托姆类求逆之前定义这些版本，[11], 第 9 段。关于这些陈特征版本的精彩讨论，包括它们与此处所介绍的等变陈特征之间的关系，见[51]。

REMARK 3.10（同伦理论精化）。截至 2022 年，陈特征最精细的同伦理论版本见于 [40]。

这些成果始于作者的博士论文，并包括对外部对偶性以及同调表示定理的研究。另见 [**41**]。

参考文献

1. Alejandro Adem、Johann Leida 和 Yongbin Ruan, *Orbifolds and stringy topology*, 《剑桥数学论丛》, 第171卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2007年。MR 2359514 2. Alejandro Adem 和 Yongbin Ruan, *Twisted orbifold K-theory*, 《数学物理通讯》237（ 2003 3, 533 556 1993337 ）, 第–期。MR。Yago Antolín 和 Ramon Flores, *On the classifying space for proper actions of groups with cyclic torsion* **26** 2014 1, 271 294 3176631 , 《数学论坛》（）, 第–期。MR。Gregory Arone、W. G. Dwyer 和 Kathryn Lesh, *p-toral approximations compute Bredon homology* 2021 5, 3822 3865 , 《国际数学研究通知》（）, 第–期。MR5 。Noe Barcenas, *Brown representability and spaces over a category*, 《哥伦比亚数学杂志》48（ 2014 1, 55 77 3230797 ）, 第–期。MR。Noe Barcenas、Dieter Degrijse 和 Irakli Patchkoria, *Stable finiteness properties of infinite discrete groups* **10** 2017 4, 1169 1196 3743073 , 《拓扑学杂志》（）, 第–期。MR。Noe Barcenas、Jesus Espinoza、Michael Joachim 和 Bernardo Uribe, *Universal tensor in equivariant K-theory for proper and discrete actions* 3 **108** 2014 , 《伦敦数学学会会刊》（）（）, 第5期, 1313–1350。MR 3214681 8. No´e B´arcenas、Jes´us Espinoza、Bernardo Uribe 和 Mario Vel´asquez, *Segal's spectral sequencein twisted equivariant K-theory for proper and discrete actions*, 《爱丁堡数学学会会刊》（2） **61** 2018 1, 121 150 3774848 （）, 第–期。MR。Noe Barcenas 和 Mario Velasquez, *Twisted equivariant K-theory and K-homology of* $\mathrm{Sl}_3\mathbb{Z}$, 《代数与几何拓扑》14 3160604 10.2014.2.823.852（）, 第–期。MR。, *Equivariant K-theory of central extensions and twisted equivariant K-theory of* $St_3\mathbb{Z}$ **18** 2016 1, 49 70 , 《Homology Homotopy Appl.》（）, 第–期。MR 3465637 11. Paul Baum 和 Alain Connes, *Chern character for discrete groups*, 《拓扑学盛会》, 学术出版社, 波士顿, 马萨诸塞州, 1988年, 第163–232页。MR 928402 12. Pavle V. M. Blagojevi´c 和 Aleksandra S. Dimitrijevi´c Blagojevi´c, *Using equivariant obstruction theory in combinatorial geometry*, 《Topology Appl.》154（2007）, 第14期, 2635–2655。MR 2340948 13. Glen E. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, 《美国数学学会通报》73（1967）, 266–268。MR 206946 14., *Equivariant cohomology theories*, 《数学讲义》, 第34号, Springer-Verlag, 柏林-纽约, 1967年。MR 0214062 15. Theodor Br¨ocker, *Singuläre Definition der äquivarianten Bredon Homologie*, 《Manuscripta Math.》5 293618 16 1971 91 102（）, –。MR。Steven R. Costenoble、Thomas Hudson 和 Sean Tilson, *The* C_2*-equivariant cohomology of complex projective spaces* **398** 2022 108245, 69 , 《Adv. Math.》（）, 论文编号：。MR 4388953 。James F. Davis 和 Wolfgang Luck, *Spaces over a category and assembly maps in isomorphism conjectures in K- and L-theory* *K* **15** 1998 3, 201 252 , 《K-理论》（）, 第–期。MR 1659969 。, , 《纪念Hyman Bass七十寿辰专辑特刊》第I部分, 第71–104页。MR 2061848 19. Dieter Degrijse、Markus Hausmann、Wolfgang L¨uck、Irakli Patchkoria 和 Stefan Schwede, *Proper equivariant stable homotopy theory*, Arxiv:908.00779v1, 即将在《美国数学学会回忆录》发表, 2019年。20. Dieter Degrijse 和 Ian J. Leary, *Equivariant vector bundles over classifying spaces for proper actions* **17** 2017 1, 131 156 3604375 , 《代数与几何拓扑》（）, 第–期。MR。Christopher Dwyer, *Twisted equivariant K-theory for proper actions of discrete groups*, *K*-理论38 2366557 22 2008 2, 95 111（）, 第–期。MR。Michael Farber、Mark Grant、Gregory Lupton 和 John Oprea, *Bredon cohomology and robot motion planning* **19** 2019 4, 2023 2059 , 《代数与几何拓扑》（）, 第–期。MR 3995023 23 *Bredon homology of wallpaper groups* 2111 14245, 2021 。Ramon Flores, , arXiv: 。。24. Mario Fuentes-Rumi, *The equivariant k- and ko-theory of certain classifying spaces via an equivariant atiyah-hirzebruch spectral sequence*, Arxiv:1905.02972, 2019年。

25. Gr´egory Ginot, *Steenrod $\cup_i$-products on Bredon-Illman cohomology*, 《Topology Appl.》143（2004 1 3, 241 248 2081014），第—期。MR。Jose Manuel Gomez 和 Bernardo Uribe, *A decomposition of equivariant K-theory in twisted equivariant K-theories* **28** 2017 2, 1750016, 23 ，《国际数学杂志》（），第期。MR 3615587 27. Jeremiah Heller、Paul Arne Ostvaer 和 Mircea Voineagu, *Bredon motivic cohomology of thecomplex numbers*, arXiv:2202.12366，2022年。28. M. A. Hill，M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel, *On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one* **184** 2016 2 262 ，《数学年刊》（）（），第1期，1 3505179 29–。MR。Michael A. Hill, *The equivariant slice filtration: a primer*, 《Homology Homotopy Appl.》14（2012 3007090 30 2, 143 166），第–期。MR。, *Freeness and equivariant stable homotopy*, 《拓扑学杂志》15（2022），第2期，359–397。MR 4413504 31. John Holler 和 Igor Kriz, *On G-graded equivariant "ordinary" cohomology where G is a power of $\mathbb{Z}/2$* **17** 2017 2, 741 763 RO(), 《代数与几何拓扑》（），第–期。MR 3623670 32. Sam Hughes, *On the equivariant K- and KO-homology of some special linear groups*, 《代数与几何拓扑》 **21** 2021 7, 3483 3512 4357611 （），第–期。MR。Soren Illman, *Equivariant singular homology and cohomology*, 《美国数学学会通报》79（1973 307220 34 188 192），–。MR。, *Existence and uniqueness of equivariant triangulations of smooth proper G-manifolds with some applications to equivariant Whitehead torsion*, 《纯粹与应用数学杂志》524（2000），129–183。MR 1770606 35., *Existence and uniqueness of equivariant triangulations of smooth proper G-manifolds with some applications to equivariant Whitehead torsion* **524** 2000 ，《纯粹与应用数学杂志》（），129–183。MR 1770606 36. Daniel Kasprowski、Kevin Li 和 Wolfgang L¨uck, *K- and L-theory of graph products of groups* **15** 2021 1, 269 311 4235754 ，《Groups Geom. Dyn.》（），第–期。MR。Igor Kriz 和 Yunze Lu, *On the RO G-graded coefficients of dihedral equivariant cohomology*, 《Math. Res. Lett.》27 4216581 38 2020 4, 1109 1128（），第–期。MR。Sophie Kriz, *Notes on equivariant homology with constant coefficients*, 《Pacific J. Math.》309（2020 2, 381 399 4202017），第–期。MR。William C. Kronholm, *The RO G-graded Serre spectral sequence*, 《Homology Homotopy Appl.》12 2607411 40 2010 1, 75 92（），第–期。MR。Malte Lackmann, *External spanier-whitehead duality and homology representation theoremsfor diagram spaces*, https://arxiv.org/abs/1908.09553，2019年。41. Malte Lackmann 和 Liping Li, *Sufficient and necessary conditions for hereditarity of infinite category algebras* **602** 2022 322 351 ，《J. Algebra》（），–。MR 4404525 42. Jean-Fran¸cois Lafont、Ivonne J. Ortiz、Alexander D. Rahm 和 Rub´en J. S´anchez-Garc´ía, *Equivariant K-homology for hyperbolic reflection groups*, 《Q. J. Math.》69（2018），第4期，1475–1505。MR 3908707 43. G. Lewis、J. P. May 和 J. McClure, *Ordinary RO(G)-graded cohomology*, 《美国数学学会通报》（新系列） **4** 1981 2, 208 212 598689 （），第–期。MR。L. Gaunce Lewis, Jr., *The RO G-graded equivariant ordinary cohomology of complex projec-tive spaces with linear $\mathbb{Z}/p$ actions*, 《代数拓扑与变换群》（G¨ottingen，1987 979507 45 1361，1988，53 122），《数学讲义》，第卷。Springer，柏林，第–页。MR。L. Gaunce Lewis, Jr. 和 Michael A. Mandell, *Equivariant universal coefficient and Künneth spectral sequences* **92** 2006 3 2, 505 544 2205726 ，《伦敦数学学会会刊》（）（），第–期。MR。Wolfgang Luck, *The type of the classifying space for a family of subgroups*, 《纯粹与应用代数杂志》149 1757730 47 2000 2, 177 203（），第–期。MR。Wolfgang Lück, *Chern characters for proper equivariant homology theories and applications to K- and L-theory* **543** 2002 193 234 ，《纯粹与应用数学杂志》（），–。MR 1887884 48., *Equivariant cohomological Chern characters*, 《国际代数与计算杂志》15（2005），第5–6期，1025–1052。MR 2197819 49., *Survey on classifying spaces for families of subgroups*, 《无限群：几何、组合与动力学方面》，《数学进展丛书》，第248卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2005年，第269–322页。MR 2195456 50. Wolfgang Lück, *The completion theorem in K-theory for proper actions of a discrete group* **40** 2001 3, 585 616 1838997 和 Bob Oliver，，《Topology》（），第–期。MR

51. Michel Matthey, *The Baum-Connes assembly map, delocalization and the Chern character*, 《高等数学》 **183** 2004 2, 316 379 2041902 ( ), 第 no. – 。MR 。David Munoz、Jorge Plazas 和 Mario Velasquez, *Hecke operators in bredon (co)homology, k -(co)homology and bianchi groups* , 《拓扑学与分析杂志》在线优先发表。53. Amiya Mukherjee 和 Goutam Mukherjee, *Bredon-Illman cohomology with local coefficients*, 《牛津数学季刊》Oxford Ser. (2 1397938 5447 1996 186, 199 219) ( ), 第 no. – 。MR 。Brita E. A. Nucinkis, *On dimensions in Bredon homology*, Homology Homotopy Appl. **6** (2004 2061566 55 1, 33 47), 第 no. – 。MR 。Melda Yaman Oruc, *The equivariant Steenrod algebra*, Topology Appl. **32** (1989), 第 1 期, 77–108。MR 1003301 56. Richard S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2 126506 5773 1961 295 323) ( ), –。MR 。Alexander Rahm, *An introduction to torsion subcomplex reduction*, arXiv:2101.06947, 2021。58. Nicolas Ricka, *Subalgebras of the $\mathbb{Z}/2$-equivariant Steenrod algebra*, Homology Homotopy Appl. **17** 2015 1, 281 305 3350083 ( ), 第 no. – 。MR 。Ruben Sanchez-Garcıa, *Bredon homology and equivariant K-homology of* SL(3, $\mathbb{Z}$), J. Pure Appl. Algebra **212** 2008 5, 1046 1059 2387584 ( ), 第 no. – 。MR 。Ruben J. Sanchez-Garcıa, *Equivariant K-homology for some Coxeter groups*, J. Lond. Math. Soc. (2 2352735 6175 2007 3, 773 790) ( ), 第 no. – 。MR 。Ruben Jose Sanchez-Garcia, *Equivariant K-homology of the classifying space for proper ac-tions*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2005, 博士论文（Ph.D.）–南安普顿大学（英国）。MR 2715961 62. Krishanu Sankar 和 Dylan Wilson, *On the C_p-equivariant dual Steenrod algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **150** 2022 8, 3635 3647 4439482 ( ), 第 no. – 。MR 。J. Sl ominska, *On the equivariant Chern homomorphism*, Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys. **24** 1976 10, 909 913 461489 ( ), 第 no. – 。MR 。Jolanta Sl ominska, *Homotopy colimits on E-I-categories*, 代数拓扑 Pozna´n 1989, Lecture Notes in Math., 卷 1474, 1991, 273 294 1133907 Springer, 柏林, 第 – 页。65 **17** 1978 22 MR 。Christophe Soule, *The cohomology of* $SL_3(\mathbf{Z})$, Topology ( ), 第 1 期, 1–。MR 470141

Centro de Ciencias Matemáticas. UNAM, Ap.Postal 61-3 Xangari. Morelia, Michoacán MEXICO 58089
Email address: barcenas@matmor.unam.mx