利用囚禁离子对相互作用费米子进行经误差缓解的量子模拟

Wentao Chen，[1,*] *Shuaining Zhang*，[2,1,3,†] *Jialiang Zhang*，[1] *Xiaolu Su*，[1] *Yao Lu*，[4,1] *Kuan Zhang*，[5,1] *Mu Qiao*，[1] *Ying Li*，[6,‡] *Jing-Ning Zhang*，[3,§] 和 *Kihwan Kim*[1,3,7,8,¶]

[1] *State Key Laboratory of Low Dimensional Quantum Physics,Department of Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*[2] *Department of Physics, Renmin University, Beijing 100872, China*

[3] *Beijing Academy of Quantum Information Sciences, Beijing 100193, China*

[4] *Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, SouthernUniversity of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*[5] *MOE Key Laboratory of Fundamental Physical Quantities Measurement, Hubei Key Laboratoryof Gravitation and Quantum Physics, PGMF, Institute for Quantum Science and Engineering,School of Physics, Huazhong University of Science and Technology,Wuhan 430074, China*

[6] *Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing 100193, China*[7] *Hefei National Laboratory, Hefei 230088, P. R. China*[8] *Frontier Science Center for Quantum Information, Beijing 100084, China*

arXiv:2302.10436v1 [quant-ph] 21 Feb 2023

在含噪声中等规模量子计算中，由于需要额外量子资源的量子纠错尚未采用，人们已广泛探索量子误差缓解，以提高量子电路的准确性。在各种误差缓解方案中，概率误差抵消（PEC）已被提出作为一种通用且系统化的协议，可应用于众多硬件平台和量子算法。然而，迄今为止，PEC仅在双量子比特系统和一个超导多量子比特系统中通过学习稀疏误差模型进行了测试。本文使用最多四个囚禁离子量子比特对PEC进行基准测试。为此，我们通过应用多个Trotter步，模拟有自旋或无自旋的相互作用费米子的动力学。通过层析重构误差模型，并结合正概率和对称性约束等其他缓解方法，我们得以提高模拟的保真度，并忠实地观察费米-哈伯德模型的动力学，包括费米子的电荷和自旋所呈现的不同表现。我们的演示可成为进一步将系统化误差缓解方案拓展至实用量子优势的重要一步。

引言

近年来，人们积极发展噪声中等规模量子（NISQ）领域的量子计算，以期在不进行量子纠错的情况下实现实用的量子优势 [1, 2]。在这一方向上，研究人员已在超导系统中展示了利用随机门采样算法实现量子优势的可能性 [3, 4]。人们也认真探索了在解决有用且实际的问题时超越传统经典计算的可能性 [5]。尤其是，人们从理论和实验两方面探索了量子-经典混合方法，以期取得高于单纯使用经典计算机的性能；此类方法结合了经典计算与量子计算的优势，例如变分量子算法（VQA） [6–9]。NISQ 计算面临的关键问题之一，是如何在不进行量子纠错的情况下，从量子设备获得高精度结果 [10, 11]。

人们已提出多种无需额外量子资源进行量子纠错的误差缓解方法，并将其应用于改善量子设备的计算结果 [12–15]。具有代表性的误差缓解方法包括零噪声外推 [12–17], 、概率误差抵消（PEC） [12– 15, 18–21], 、虚拟蒸馏 [22], 等。尤其是，概率误差抵消被认为是一种通用且系统的误差缓解方法：只要对误差进行适当表征，该方法便不依赖于物理实现的具体细节。概率误差抵消包括表征每个量子门的误差，将误差的逆分解为基操作的组合，并按照表征所得的权重对这些操作进行采样。通过这种方式，我们可以无误差地估计目标可观测量的期望值。概率误差抵消已得到详细的理论分析，并被证明在退相位主导噪声情形下具有最优性 [12, 13, 20, 21]。然而，该方法仅在超导电路和囚禁离子的双量子比特系统 [18, 19] 中，以及通过拟合受处理器拓扑启发的稀疏误差模型，在超导电路的多量子比特系统 [23]中进行了实验验证。

像PEC这样的系统性误差缓解方案将大幅提升NISQ时代量子计算的性能。许多重要的量子算法都是基于量子动力学能够在量子计算中高效模拟这一事实而开发的，这也启发了变分量子算法（VQA）的设计 [6–9]。在数字量子模拟中，某个哈密顿量的时间演化通常通过Trotter-Suzuki展开来实现 [24]。除了展开本身的误差外，不完美的基本量子门也会降低量子模拟的保真度，最终导致结果出错。因此，

设计并基准测试兼具系统性和高效性的误差缓解技术，是一项紧迫且重要的任务。费米-哈伯德模型 [25] 是一个特别值得关注的基准测试案例。该模型是描述相互作用电子的基本模型之一，长期以来一直通过经典方法进行广泛研究，包括解析研究 [26–28]和数值研究 [29]。随着实验量子技术的发展，最终可通过对费米-哈伯德模型进行量子模拟，在超越经典计算能力的范围内探索对强关联量子系统和高温超导性的理解与认识 [30] 。该模型已用于多种量子平台的实验演示 [31–34]。最近，研究人员结合多种非PEC方法，提升了模拟性能，并在超导系统中观测到费米-哈伯德模型的动力学 [35]。

本文通过将概率误差抵消（PEC）方法应用于囚禁离子的四量子比特系统 [36, 37]，实验研究了该方法的潜力与局限性。具体而言，我们重点研究了如何通过多个 Trotter 步模拟一维费米-哈伯德模型的动力学。我们发现，采用层析重构误差模型的 PEC 方法显著提高了最多包含三个离子量子比特的模拟保真度。然而，对于四个量子比特，单独使用 PEC 方法所带来的保真度提升远不及两量子比特和三量子比特系统。这是因为对含噪门的层析表征不够精确，无法捕捉时间关联和串扰误差。不过，结合总自旋和粒子数守恒[15, 38, 39] 以及正性约束后，增强的 PEC 方法能够恢复一维自旋费米-哈伯德模型的理想动力学，其中自旋和电荷的表现各不相同。

费米-哈伯德模型及其囚禁离子实验实现

本文考虑扩展费米-哈伯德（eFH）模型，该模型描述了在一维晶格中运动的费米子系统，如图1a和图1b所示，分别对应单组分和双组分费米子。单组分费米子可视为无自旋费米子。其哈密顿量为

$$\hat{H}_{\mathrm{eFH}} = -J\sum_{l,\lambda}\left(\hat{c}^{\dagger}_{l,\lambda}\hat{c}_{l+1,\lambda} + \mathrm{h.c.}\right) + V\sum_{l,\lambda,\lambda'}\hat{n}_{l,\lambda}\hat{n}_{l+1,\lambda'} + U\sum_{l}\hat{n}_{l,\uparrow}\hat{n}_{l,\downarrow}, \quad (1)$$

其中，$\hat{n}_{l,\lambda} \equiv \hat{c}^{\dagger}_{l,\lambda}\hat{c}_{l,\lambda}$，其中 $\hat{c}_{l,\lambda}$ ($\hat{c}^{\dagger}_{l,\lambda}$) 分别湮灭（产生）第 l 个格点上自旋为 λ ($\lambda = \uparrow, \downarrow$) 的费米子。这里， J 为最近邻隧穿强度，而 U 和 V 分别表示格点内相互作用和最近邻相互作用的强度。

我们可以利用Jordan-Wigner变换，将费米子系统映射为量子比特系统，

$$\hat{c}_{l,\uparrow} = \prod_{n=1}^{l-1}\hat{\sigma}^{z}_{n}\hat{\sigma}^{-}_{l}, \quad \hat{n}_{l,\uparrow} = \frac{1}{2}\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{l}\right), \quad (2)$$
$$\hat{c}_{l,\downarrow} = \prod_{n=1}^{L+l-1}\hat{\sigma}^{z}_{n}\hat{\sigma}^{-}_{L+l}, \quad \hat{n}_{l,\downarrow} = \frac{1}{2}\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{L+l}\right),$$

其中$\hat{\sigma}^{\pm}_{n} = \left(\hat{\sigma}^{x}_{n} \pm i\hat{\sigma}^{y}_{n}\right)/2$ 和$\hat{\sigma}^{x,y,z}_{n}$是作用于第 n个量子比特的泡利算符。因此，通常来说，要模拟含 L个格点的费米子链的动力学，需要 $N = 2L$ 个量子比特。

如图1c所示，我们使用 $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ 离子构成量子比特系统。 $^{171}\mathrm{Yb}^{+}$ 离子被囚禁在线性保罗阱中。基态流形中的超精细能级，即 $|F=0, m_F=0\rangle$ 和 $|F=1, m_F=0\rangle$，被编码为量子比特 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$，通过光学抽运可将其初始化为 $|0\rangle$，并通过多通道光电倍增管进行荧光测量，以实现高精度探测 [40]。

量子比特系统哈密顿量变为

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\mathrm{qb}} &= \hat{H}_X + \hat{H}_Y + \hat{H}_Z, \quad (3)\\ \hat{H}_X &= \frac{J}{2}\sum_{l=1}^{L-1}\left(\hat{\sigma}^{x}_{l}\hat{\sigma}^{x}_{l+1} + \hat{\sigma}^{x}_{L+l}\hat{\sigma}^{x}_{L+l+1}\right)\\ \hat{H}_Y &= \frac{J}{2}\sum_{l=1}^{L-1}\left(\hat{\sigma}^{y}_{l}\hat{\sigma}^{y}_{l+1} + \hat{\sigma}^{y}_{L+l}\hat{\sigma}^{y}_{L+l+1}\right)\\ \hat{H}_Z &= \frac{V}{4}\sum_{l=1}^{L-1}\left[\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{l}\right)\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{l+1}\right)\right.\\ &\quad \left.+\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{L+l}\right)\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{L+l+1}\right)\right]\\ &\quad +\frac{U}{4}\sum_{l=1}^{L}\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{l}\right)\left(1-\hat{\sigma}^{z}_{L+l}\right).\end{aligned}$$

请注意，根据泡利算符的取向，我们将量子比特系统哈密顿量 H_{qb} 分为三部分，每部分均包含彼此对易的项。

要提取动力学性质，关键在于利用特定量子计算平台上可用的通用门集，模拟演化算符 $\hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}_{\mathrm{qb}}t\right)$。一种众所周知的方法是使用 Trotter-Suzuki分解。 $U(t)$ 的一阶 Trotter-Suzuki分解为

$$\hat{U}(t) = \left(e^{-i\hat{H}_Z\delta t}e^{-i\hat{H}_Y\delta t}e^{-i\hat{H}_X\delta t}\right)^{M} + \mathcal{O}\left(M\delta t^2\right), \quad (4)$$

Trotter 步为 $\delta t = t/M$。图 1d 和 e 展示了用于模拟 3 站点无自旋和 2 站点自旋-1/2 费米子系统动力学的电路示例，其中原生门集包括 Mølmer-Sorensen

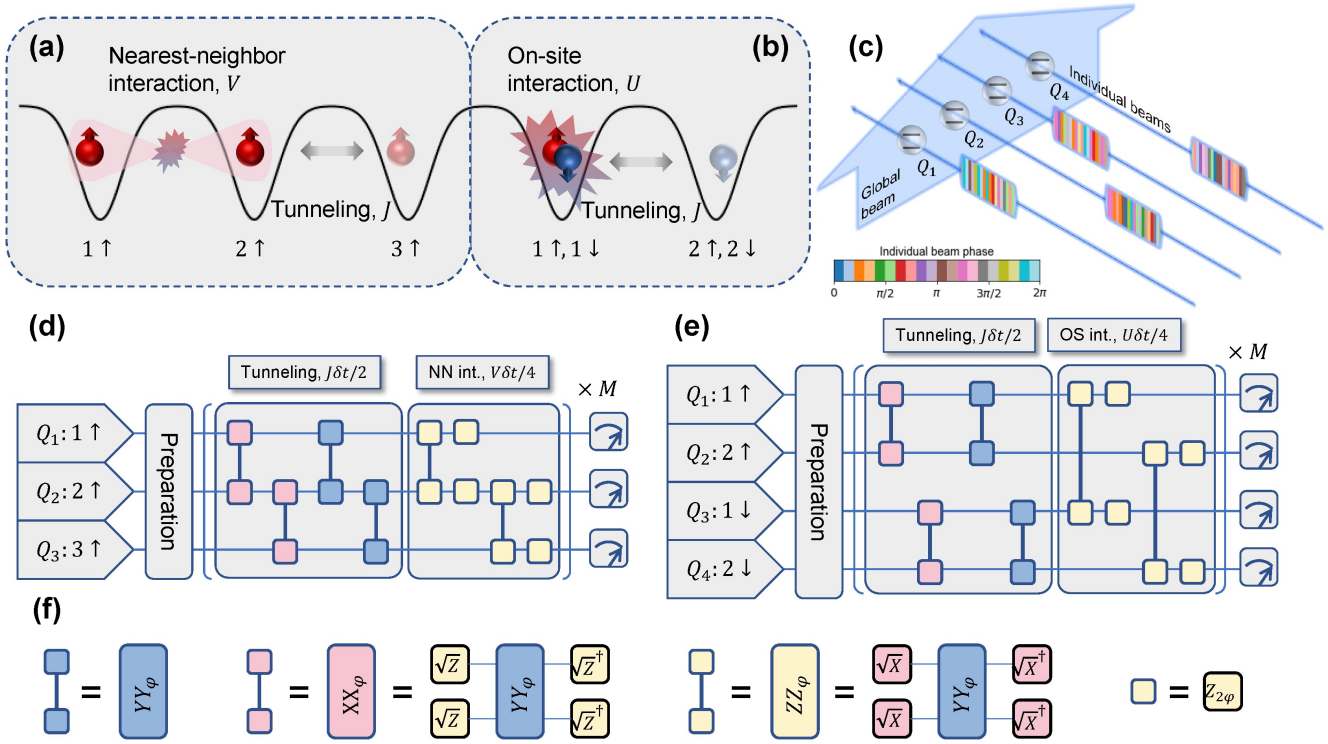


图1。（a）在一维晶格中运动的无自旋费米子和（b）自旋-$\frac{1}{2}$费米子。方程（1）中的扩展费米-哈伯德模型统一描述了系统的动力学，其中 J 表示隧穿强度， U 和 V 分别表示格点内相互作用强度和最近邻相互作用强度。（c）由四个离子量子比特组成的囚禁离子系统。离子构成一维晶体，每个离子代表一个量子比特。拉曼激光束由全局光束和单独光束组成，可操控离子量子比特；前者覆盖整个离子晶体，后者则分别聚焦于单个离子。通过调制单独光束的相位，可以在任意一对量子比特（Q_m， Q_n）之间实现 Mølmer-Sørensen 门 $YY_\varphi(m,\ n) \equiv \exp\left(i\varphi\hat{\sigma}_m^y \otimes \hat{\sigma}_n^y\right)$。（d）用于模拟三位点单组分扩展费米-哈伯德模型动力学的量子电路。通过 Trotter-Suzuki 展开，演化可由 M 个相同步骤近似实现。（e）用于两位点双组分费米-哈伯德模型的量子电路。（f）量子电路编译。囚禁离子系统的原生门集所提供的双量子比特纠缠门为 YY_φ； XX_φ 和 ZZ_φ 则可由 YY_φ 及适当的单量子比特旋转构造，例如 $\sqrt{Z} \equiv \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_z\right)$ 和 $\sqrt{X} \equiv \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\hat{\sigma}_x\right)$。（d、e）中的单量子比特门（黄色方块）是 $\hat{z}$ 旋转，即 $Z_{2\varphi} \equiv \exp\left(-i\varphi\hat{\sigma}_z\right)$。

量子门，即 XX_φ、 YY_φ 和 ZZ_φ，以及单量子比特旋转。通过在所需离子上施加振幅整形的 [41] 全局和单独激光束，并驱动横向运动模 [42, 43], ，我们可以实现原生的 Mølmer-Sørensen YY 量子门（YY_φ）。如图 1f 所示，量子门 XX_φ 和 ZZ_φ 由 YY_φ 及相应的单量子比特旋转组合而成。

在本实验中，我们考虑两种情形：一种是无自旋费米子，另一种是双组分费米子。对于前一种情形，由于费米反对易关系，格点内相互作用强度自然为零，即 $U = 0$。在这种情况下，我们使用 $N = L$ 离子量子比特来模拟具有 L 个格点的无自旋费米子链的动力学。对于后一种情形，我们仅考虑格点内相互作用，因为相互作用强度会随距离增加而减小，因此在大多数情况下 $U \gg V$。

囚禁离子系统中的概率性误差抵消

在此，我们介绍概率误差抵消（PEC）误差缓解方法，该方法利用实验中的含噪门 [14]，系统地恢复目标量子电路的理想期望值。其核心思想是，首先表征实验中的含噪门，然后通过比较理想门和含噪门来识别噪声部分，接着将噪声部分的逆分解为基操作的组合。随后，将目标量子电路中的每个理想门替换为相应的含噪门，并在其后接上根据逆噪声分解得到的概率分布抽样出的基操作。最后，通过对抽样电路的期望值按适当权重求和，即可得到理想期望值。

在电路量子计算中，一个计算任务

可以编译为由单量子比特门和双量子比特门组成的量子电路。在离子阱系统中，双量子比特门的误差大于单量子比特门的误差 [19], ，因此我们只能缓解双量子比特门中的误差。为了表征实验中的含噪门，我们在泡利误差假设下执行量子过程层析（QPT），以获得不同量子比特对上的 Mølmer-SørensenYY门的泡利传输矩阵（PTMs），即 $R_{YY^{\mathrm{ns}\varphi}(m,n)}$，对应于量子比特对（$Q_m$, Q_n）。结合理想 PTMR_{YY_φ}，我们可以为每个含噪门形式化地定义一个误差算符，其 PTM 为

$$R_{\mathcal{E}_\varphi(m,n)} = R_{YY_\varphi^{\mathrm{ns}}(m,n)} R_{YY_\varphi}^{-1}. \tag{5}$$

注意，在泡利误差假设下， $R_{\mathcal{E}}$及其逆 $R_{\mathcal{E}}^{-1}$ 都可以分解为双量子比特泡利算符 $P_i \in \{II, IX, IY, ..., ZZ\}$的泡利传递矩阵的线性叠加。因此，理想的泡利传递矩阵可以用含噪量子门的泡利传递矩阵及相应误差算符表示为:

$$R_{YY_\varphi} = R_{\mathcal{E}_\varphi(m,n)}^{-1} R_{YY_\varphi^{\mathrm{ns}}(m,n)} \tag{6}$$

采用逆误差分解

$$R_{\mathcal{E}_\varphi(m,n)}^{-1} = \sum_{i=0}^{15} q_i(m,n) R_{P_i}. \tag{7}$$

这里，准概率 $q_i(m,\ n)$ 为实数，且满足$\sum_i q_i(m,\ n) = 1$。 $q_i(m,\ n)$ 可能为负，这表明误差的逆并非物理操作，因此无法通过确定性量子操作实现。为消除误差算符的影响，我们将该分解改写如下:

$$R_{\mathcal{E}_\phi(m,n)}^{-1} = C_{YY_\varphi(m,n)} \sum_{i=0}^{15} p_i(m,n) \mathrm{sgn}\left[q_i(m,n)\right] R_{P_i} \tag{8}$$

其中， $p_i(m,\ n) = C_{YY_\varphi(m,\ n)}^{-1} |q_i(m,\ n)|$ 是定义良好的概率，开销为 $C_{YY_\varphi(m,\ n)} = \sum_{i=0}^{15} |q_i(m,\ n)|$，而 sgn(·) 是符号函数。

然后，我们可以使用蒙特卡洛采样来计算 PEC 误差缓解结果。这里考虑一个由 N_g 个双量子比特量子门 $YY_\varphi(m,n)$组成的目标量子电路，其中第 g 个量子门标记为 G_g，每个量子门都经过充分表征，且逆误差分解写作 $R_{G_g} = \sum_i q_{i,g} R_{P_i} R_{G_g^{\mathrm{ns}}}$，其中 $q_{i,g}$ 是双量子比特泡利算符 P_i的准概率。将在实验设备中实现的随机电路全集记为 $\{\mathcal{S}_{\mathbf{i}} :\ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_{N_g})\}$，其中包含 16^{N_g} 个不同的电路，每个电路均通过在 G_g之后添加 P_{i_g} 得到。为获得理想期望值，每个随机电路 $\mathcal{S}_{\mathbf{i}}$ 都被赋予概率 $\propto \prod_g |q_{i_g,g}|$ 和符号 $\mathrm{sgn}_{\mathbf{i}} \equiv \prod_g \mathrm{sgn}(q_{i_g,g})$。由于无法实现所有这些电路，我们使用蒙特卡洛采样来计算随机电路的平均值。具体而言，我们通过从概率分布 $\propto |q_{i_g,g}|$ 中采样 P_{i_g}，生成 N_s 个随机电路，并通过 300 次重复实验，得到电路$\mathcal{S}_{\mathbf{i}}$ 上可观测量 μ 的期望值 $\langle\mu\rangle_{\mathbf{i}}$。理想期望值 $\langle\mu\rangle$ 随后计算如下:

$$\langle\mu\rangle = \frac{C}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \mathrm{sgn}_{\mathbf{i}_s} \langle\mu\rangle_{\mathbf{i}_s}, \tag{9}$$

其中开销由 $C \equiv \prod_{g=1}^{N_g} C_g$ 给出，第 g 个量子门的开销为 $C_g \equiv \sum_{i_g=0}^{15} |q_{i_g,\ g}|$。

误差缓解与两个无自旋费米子模态的模拟

现在我们讨论两个无自旋费米子模态的模拟，此时式（3）中的量子比特系统哈密顿量可化简为

$$H = \frac{J}{2}\left(\hat{\sigma}_1^x \hat{\sigma}_2^x + \hat{\sigma}_1^y \hat{\sigma}_2^y\right) + \frac{V}{4}\left(\hat{\sigma}_1^z \hat{\sigma}_2^z + \hat{\sigma}_1^z + \hat{\sigma}_2^z\right). \tag{10}$$

利用式（4）的 Trotter-Suzuki展开，可以通过图2a所示的特定量子电路，在实验上实现两个无自旋费米子模态的哈密顿量演化。对于两个格点之一上的单占据费米子，最近邻隧穿会使费米子在两个格点之间振荡。对于双占据费米子，由于费米子的泡利不相容原理，不会发生动力学。我们应用$M = 8$ 个 Trotter 步，每一步包含三个 YY_φ量子门和十个单量子比特旋转。整个量子电路包含二十四个双量子比特门和八十一个单量子比特门，其中额外的一个用于初始态制备。我们将最近邻隧穿和相互作用强度设为 $V = 2J$。

随着 Trotter 步数量增加，量子门不完美性导致的误差会不断累积，演化动力学的保真度也会降低。我们对误差进行缓解，改善了动力学结果。由于这是一个双量子比特系统，只需对一个本征 $YY_{\pi/4}$ 量子门进行误差缓解。在泡利误差假设下，理想的 $YY_{\pi/4}$ 量子门可分解为 $R_{YY_{\pi/4}} = \sum_{i=0}^{15} q_i R_{P_i} R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/4}}$，如图 2b 所示。通过量子过程层析（QPT）表征实验中的 $YY_{\mathrm{ns}\pi/4}$ 量子门。图 2c 和 d 展示了实验测得的 $YY_{\mathrm{ns}\pi/4}$ 量子门的泡利转移矩阵（PTM），以及通过 $R_{YY^{\mathrm{ns}}{}_{\pi/4}} - R_{YY_{\pi/4}}$得到的矩阵与理想矩阵之间的偏差；其中 $R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/4}}$的平均门保真度为 0.9811 ± 0.0047 [44, 45]。这里，我们假设初始态制备是完美的，并对测量结果应用探测误差校正方法 [46] ，从而使态制备与测量（SPAM）误差可以忽略。准概率，即双量子比特泡利算符的系数 q_i

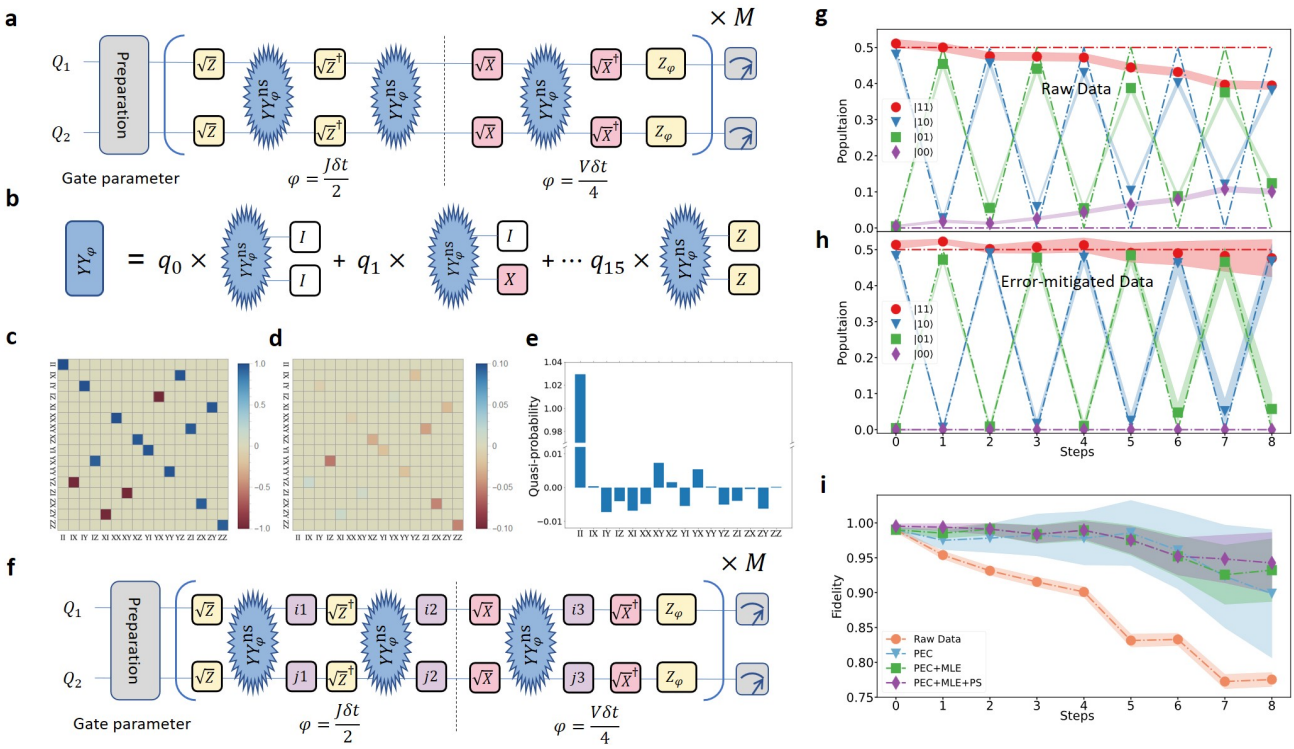


图2. **(a)** 用于模拟两个无自旋费米子动力学的Trotter展开量子电路。两个量子比特在态制备后初始化为$(|11\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$，随后我们施加 M 个Trotter步，每步由三个双量子比特门 YY_{ns} 组成，这些门并非完美。这里， J 和 V 分别表示最近邻隧穿和最近邻相互作用的强度。**(b)** 概率误差抵消（PEC）方案。门 $YY_{\mathrm{ns}\varphi}$ 的缺陷可由作用于理想门的误差通道描述。通过纳入误差通道的逆操作，可以实现理想门 YY_{φ}；该逆操作可分解为基操作的组合，并具有相应的准概率。在泡利误差假设下，共有16种基操作，其列表见**(c)**,**(d)**,**(e)**。**(c)** 通过QPT表征的泡利转移矩阵，以及**(d)** 实验 $YY_{\mathrm{ns}\varphi}$ 门的偏差。**(e)** 实验 $YY_{\mathrm{ns}\varphi}$ 门的逆误差操作分解中的准概率。**(f)** 通过PEC实现的误差缓解量子电路。我们按照准概率的归一化概率进行采样，以实现逆误差操作，记为 $p_i = |q_i|/\sum_{i=0}^{15}|q_i|$；其中， i 表示其对应的基操作编号。**(g)** $V = 2J$的实验数据，以及**(h)** 误差缓解数据。实心点表示实验测得的态布居，以及应用PEC、MLE和投影方法后得到的误差缓解数据。点划线表示仅包含Trotter误差的理想数值模拟数据，相同颜色对应相同的实验数据点。数据点周围的阴影表示误差棒。**(i)** 实验数据和误差缓解数据的布居保真度。保真度按$|\sum_k \sqrt{P_{k,\mathrm{ideal}}}P_k|^2$计算，其中 k 表示态基。图中给出了采用各误差缓解方法后得到的布居保真度。(g)-(i)中的所有阴影均表示使用自助法从原始实验数据生成的1000个样本的标准差。

算符 P_i 在 $R_{\mathcal{E}}^{-1}$ 分解中的系数如图 2e 所示。利用准概率 q_i的数值，我们得到 $R_{YY^{\mathrm{ns}}\pi/4}$的开销 $C_{YY_{\pi/4}} = 1.083$。

随后，我们通过蒙特卡洛采样生成 $N_s = 1000$随机电路，如图2f所示。利用式（9）所述的方法，我们得到 $P_{|ab\rangle}$ 两个无自旋费米子模态的态布居随时间的演化，其中可观测量 $\mu = |ab\rangle\langle ab|$分别对应每个模式中存在占据费米子 $a(b) = 1$ 或不存在占据费米子$a(b) = 0$ 的情形。经过概率误差抵消（PEC）后，误差缓解后的态布居可能为负值，这在物理上是不合理的。我们通过施加基于概率一般性质的约束来解决这一问题，即$0 \leq P_{|ab\rangle} \leq 1$ 和$\sum_{a,b} P_{|ab\rangle} = 1$，并由此得到符合物理规律的态布居——我们通过最大似然估计（MLE）得到符合物理规律的态布居。具体而言，我们最小化物理布居与经过PEC误差缓解后的布居之间的范数距离。在PEC和MLE的基础上，我们还根据模型哈密顿量的对称性约束进行后选择（PS），即利用费米子数守恒定律。为展示每种误差缓解技术（即PEC、MLE和PS）的效果，我们逐步应用这些方法，并在每一步后得到一组经过误差缓解的态布居。

费米子动力学的实验结果分别展示在图2g和h中，分别对应未进行和进行了误差缓解的情况。我们使用初始的两个

量子比特态 $(|11\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$，其中包含两个占据费米子与一个占据费米子的叠加态。初始态同时展现了单个和两个费米子的时间演化，因为这两种动力学之间不存在干涉。如图2g和h所示，状态 $|11\rangle$ 和 $|00\rangle$保持不变，而状态 $|01\rangle$ 和 $|10\rangle$之间发生振荡，这是费米子动力学的标志 [32]。可以看出，未进行误差缓解时，如图2g所示，与采用 Trotter 步进行的数值模拟（空心点）相比，实验布居（实心点）之间的对比度明显衰减；而如图2h所示，误差缓解结果更接近理想数值模拟。图2i展示了未采用误差缓解以及采用三种误差缓解方案时，布居保真度随 Trotter 步数的变化。通过对数据进行指数拟合，得到量子门在未进行和进行误差缓解时的保真度分别为 0.9895 ± 0.0021和 0.9975 ± 0.0009。

我们注意到，保真度的主要提升来自PEC方法。这是因为我们对量子门的表征能够很好地反映实际量子门。我们通过使用实验构造的泡利转移矩阵R_{YY}，模拟两个无自旋模的动力学，证实了这一点$_{\pi/4}$。使用含噪声的泡利转移矩阵进行模拟的结果与实验数据之间的比较，清楚地验证了泡利误差假设以及所测量结果的准确性R_{YY}（见附录B）$_{\pi/4}$。我们还注意到，最大似然估计会减小PEC后结果的误差棒，这或许可以弥补PEC在方差方面的不足。所有误差棒均通过自助法估算（见附录A）。

三个无自旋费米子模式的模拟

我们按照图1a所示，实现了三个无自旋费米子模式的时间演化。图1d中的量子电路由Trotter-Suzuki展开得到，用于模拟系统的动力学。我们将三量子比特态初始化为$(|101\rangle + |110\rangle)/\sqrt{2}$，其中包含分布在三个格点上的两个费米子。由于最近邻隧穿，费米子会传播至系统的其他格点。受费米子数守恒定律限制，动力学演化将局限于由 $\{|110\rangle、|101\rangle、|011\rangle\}$ 张成的子空间中。

根据是否存在最近邻相互作用，动力学可能与前述两个格点的情况不同。在实验中，我们分别选择 $V = 0$ 和 $V = 2J$ 来对应有无最近邻相互作用的情形。在图3a、b、d 和 e 中，点划线表示理想数值模拟的结果。当 $V = 0$时，由于费米子遵循泡利不相容原理，初始态 $|110\rangle$ 主要演化为态 $|101\rangle$ 。另一方面，初始态 $|101\rangle$ 可以演化为 $|110\rangle$ 态和$|011\rangle$态。因此，在初始阶段，态 $|110\rangle$ 的总布居减少，而态 $|011\rangle$ 的布居增加，如图 3a 和 b 所示。当 $V = 2J$时，可以看到，与 $V = 0$的情况相比，$|110\rangle$ 的布居并未迅速减少，且态 $|101\rangle$ 没有被占据。这是因为在我们的实验中，相互作用有效地表现为吸引作用。

在实验中，对于两种情形，我们将 $\varphi = \frac{J\delta t}{2} = \frac{\pi}{8}$ 设为 YY_φ量子门，并应用 $M = 4$ 个 Trotter 步。对于最近邻相互作用，每个 Trotter 步由六个 YY_φ 量子门和二十次单量子比特旋转组成。整个量子电路由二十五个双量子比特门和八十个单量子比特门组成，其中额外的一个双量子比特门用于初始态制备。随后，我们对两种情形的动态演化应用误差缓解方法。在不同的量子比特对上有两类 YY量子门，即 $YY_{\pi/8}$(1，2) 和 $YY_{\pi/8}$(2，3)，两者都需要进行表征和逆误差分解。在 PEC 方案中，$YY_{\pi/8}$(1，2) 和 $YY_{\pi/8}$(2，3) 量子门分别通过量子过程层析进行表征，并独立地对逆误差进行分解。对于 $R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/8(1,\ 2)}}$，平均门保真度为$0.9779 \pm 0.0088$；对于$R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/8(2,\ 3)}}$，平均门保真度为 0.9748 ± 0.0085（见附录B）。

对于 $V = 0$的情况，图3a和b分别展示了未经误差缓解和经过误差缓解的实验结果。可以看出，经过误差缓解的结果与理想数值模拟更加一致。如图3c所示，未经误差缓解和经过误差缓解时，每个量子门对应的拟合布居保真度分别为 0.9792 ± 0.0161 和 0.9942 ± 0.0067。我们注意到，主要的改进来自PEC方法。这与使用 YY 量子门的含噪过程矩阵进行模拟所得结果和实验数据之间的比较结果一致，表明测得的泡利传递矩阵能够恰当地表征双量子比特门误差（见附录C）。对于具有 $V = 2J$最近邻相互作用的情形，也得到了类似结论，如图3d、e和f所示。未经误差缓解和经过误差缓解时，每个量子门对应的拟合布居保真度分别为 0.9827 ± 0.0142 和0.9889 ± 0.0080。三量子比特系统中的双量子比特门误差大于双量子比特系统中的误差，因此开销更大，如$C_{YY_{\pi/8}(1,\ 2)} = 1.157$和$C_{YY_{\pi/8}(2,\ 3)} = 1.171$所示。因此，我们抽样更多随机电路，即 $N_s = 1500$ ，以减小最终误差缓解结果的误差条。

需要指出的是，PEC 后拟合得到的布居保真度可能不符合物理实际，因为准概率可能为负，且开销可能超过 1。如图3c和f所示，在三费米子实验开始阶段，应用 PEC 后的保真度确实会大于 1。借助基于概率一般性质的最大似然估计法，我们可以使布居保真度符合物理实际且合理，即低于

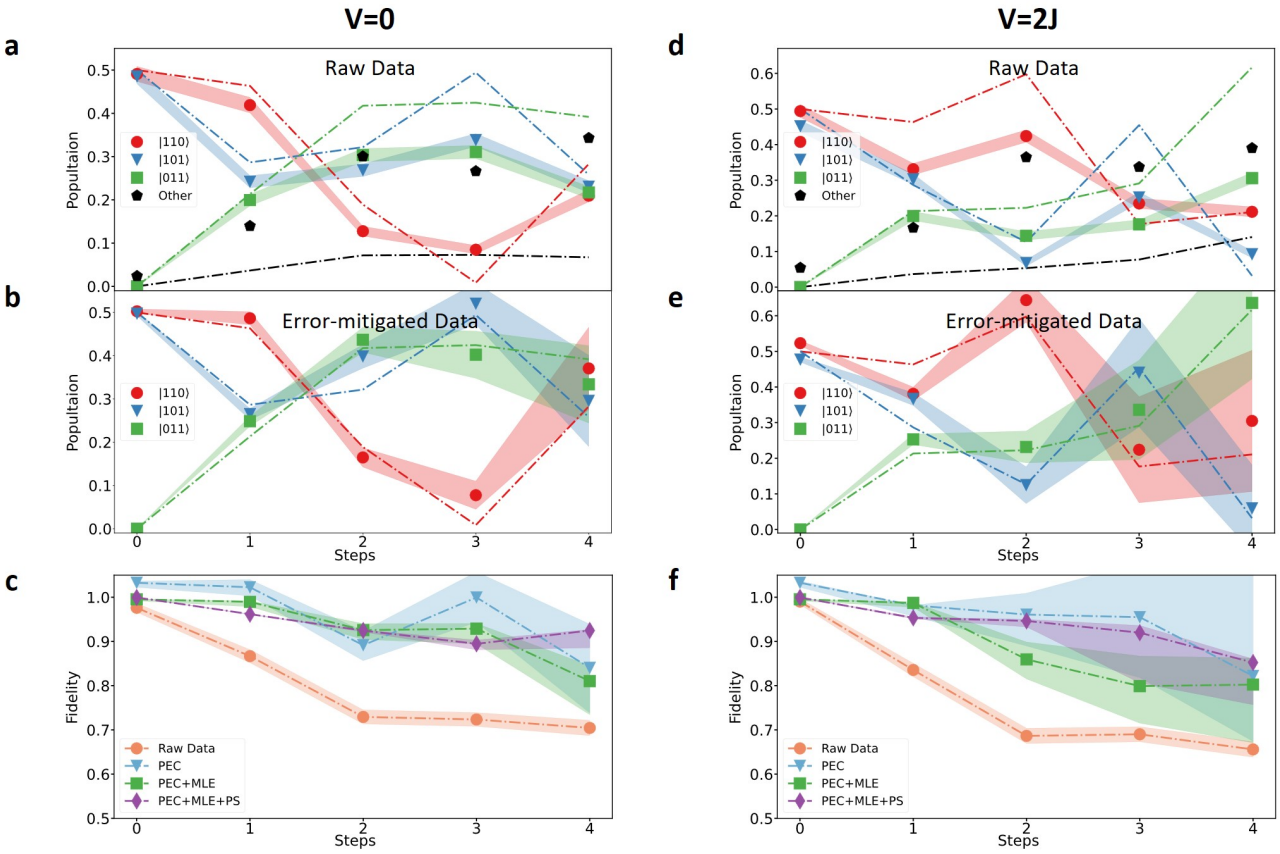


图 3. 初始态为 $(|101\rangle + |110\rangle)/\sqrt{2}$ **(a)-(c)** 时无相互作用下三个无自旋费米子模的动力学$V = 0$以及**(d)-(f)** 下的动力学。**(a),(d)** 未经误差缓解的实验测量布居和**(b),(e)**经误差缓解的实验测量布居。实心点表示实验测量的态布居，点划线表示采用给定 Trotter步的数值模拟。**(c),(f)** 应用 PEC、MLE 和 PS 等误差缓解方法后每个步骤的布居保真度。**(a)-(f)** 中的所有阴影均表示使用自助法从原始实验数据生成的 1000 个样本的标准差。

1，如图3c和f中的绿色圆点所示。此外，最大似然估计降低了 PEC 后结果的误差条，这或许可以弥补 PEC 在方差方面的不足。应用 PEC 后，第四个 Trotter 步的标准差意外地变得很大。不过，在这种情况下，最大似然估计法将标准差抑制了数倍。

四个费米子模式的模拟

我们通过将量子比特 Q_1Q_3 和 Q_2Q_4 编码为两个费米子格点，来实现对具有自旋的四个费米子模式进行模拟；如图 **1b** 所示，每个格点可包含两个自旋不同的费米子模式。我们将四量子比特态初始化为 $(|1001\rangle + |1010\rangle)/\sqrt{2}$，该态对应于图 **1b** 所示的 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ 与 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_1$ 之间的叠加态。最近邻隧穿和格点内相互作用使两个费米子在这四个模式上发生相互作用与交换

在费米子数和自旋守恒的子空间态 $\{|0101\rangle, |0110\rangle, |1001\rangle, |1010\rangle\}$ 上。相应的量子电路如图 **1e** 所示。在此，我们预期自旋与电荷会随同位相互作用强度的不同而呈现不同的动力学行为。费米子的自旋与电荷定义为自旋 $= n_{j,\uparrow} - n_{j,\downarrow}$和电荷 $= n_{j,\uparrow} + n_{j,\downarrow}$，其中 $n_{j,\uparrow(\downarrow)}$ 分别表示第 j 个格点上自旋向上（向下）的费米子数。

为展示自旋与电荷的不同表现，我们考虑两种情形 $U = 0$ 和 $U = 2J$，它们分别对应无格点内相互作用和有格点内相互作用。对于无格点内相互作用的情形，费米子的自旋与电荷应表现出相同的动力学。但如果存在格点内相互作用，自旋与电荷的动力学应表现出不同的行为，这与低能激发中的自旋-电荷分离有关 [35, 47–49]。对于无格点内相互作用的情形，$U = 0$，有自旋费米子的动力学与无自旋费米子的动力学相似，相关讨论见图2g和h。状态 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$（$|1001\rangle$）会与另一个状态 $U = 0$ （$U = 2J$）来回振荡。

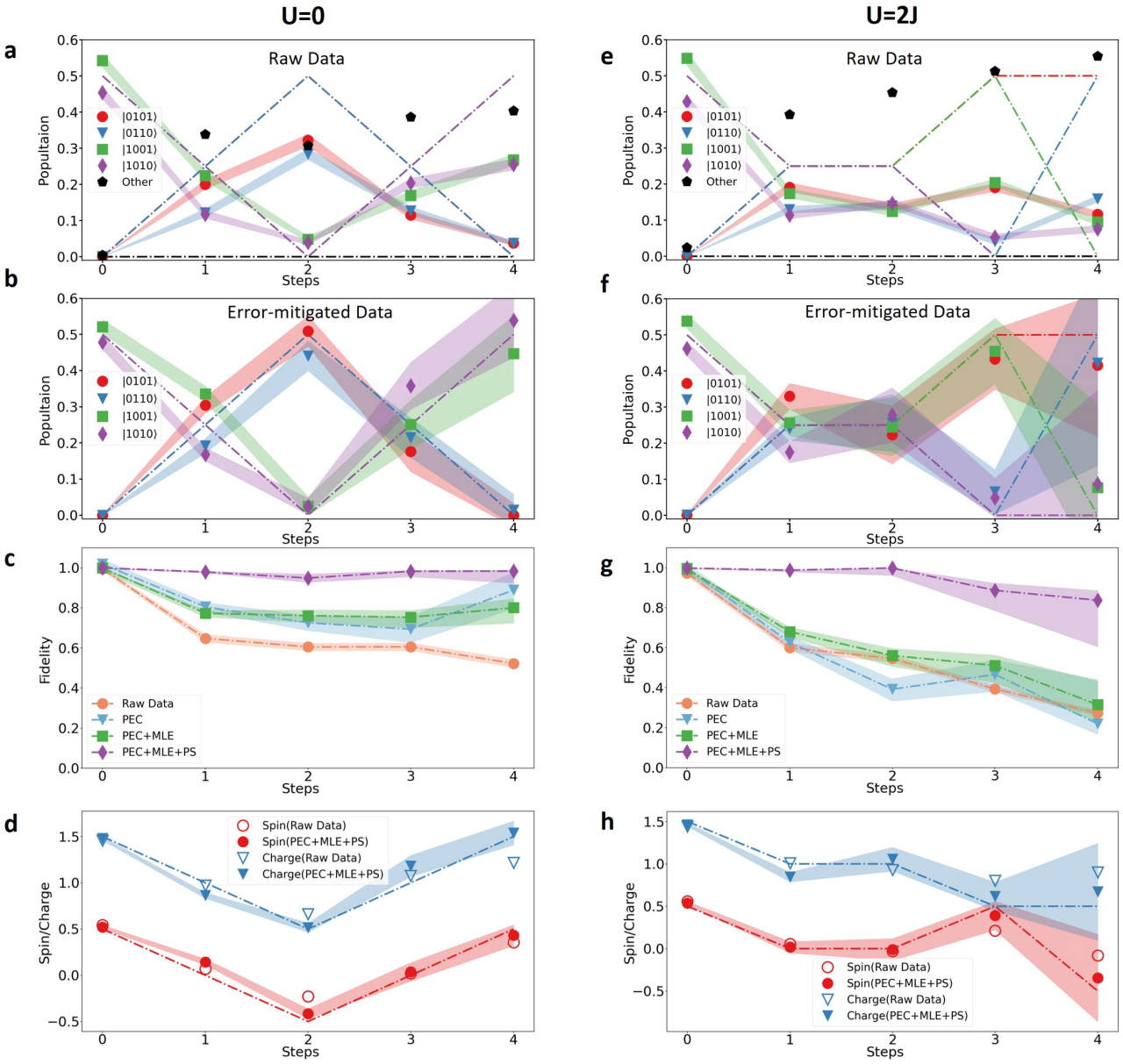


图 4. 初始态为 $(|1001\rangle+|1010\rangle)/\sqrt{2}$ 时，映射到两个费米子格点和自旋上的四个费米子模式的动力学：**(a)-(d)** 无相互作用时，$V=0$ 以及**(e)-(h)** $V=2J$时。**(a),(e)** 未经误差缓解和**(b),(f)** 经误差缓解的实验测量布居。实心点表示实验测得的态布居，点划线表示**(c),(g)** 采用 PEC、最大似然估计和后选择等误差缓解方法后得到的布居保真度。**(d),(h)** 费米子自旋与电荷布居。空心和实心符号分别表示未经和经误差缓解的实验数据。点划线表示包含 Trotter 误差的理想数值模拟。所有阴影均表示使用自助法从原始实验数据生成的 1000 个样本的标准差。

同样，状态 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_1$（$|1010\rangle$）会与另一个状态 $|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_2$（$|0101\rangle$）发生振荡。这会导致每个格点上的电荷和自旋变化量相等。然而，当存在格点内相互作用时，这些费米子态的动力学不再是简单的振荡，而状态 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$不受格点内相互作用的影响，

作用，以及受到格点内相互作用强烈影响的态 $|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_1$，呈现出截然不同的动力学。

在实验中，我们将 $\varphi=\frac{J\delta t}{2}=\frac{\pi}{8}$，并针对两种情形均施加 $M=4$个Trotter步。在存在现场相互作用时，每个Trotter 步由六个 YY_φ 门和二十个单量子比特旋转组成。整个量子电路由二十五个双量子比特门组成，其中额外的一个用于初始态制备，并包含八十个单量子比特门。

为了实施误差缓解，特别是 PEC方案，我们分别表征作用于不同量子比特对上的四类YY门，即 $YY_{\pi/8}$(1、2)、$YY_{\pi/8}$(3、 4)、 $YY_{\pi/8}$(1、3) 和 $YY_{\pi/8}$(2、4)，并分别分解其逆误差。对于 $R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/8}(1、\,2)}$，平均门保真度为 0.9755 ± 0.0096；对于 $R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/8}(3、\,4)}$，为 0.9706 ± 0.0085；对于$R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/8}(1、\,3)}$，为 0.9720 ± 0.0092；对于 $R_{YY^{\mathrm{ns}\,\pi/8}(2、\,4)}$，为 0.9744 ± 0.0091（见附录 B）。

对于 $U = 0$ 的情况，图 4a 和 b 分别展示了未采用和采用误差缓解的实验结果。可以看出，误差缓解结果与数值模拟更加一致。如图 4c 所示，未采用和采用误差缓解时，每个量子门对应的拟合布居保真度分别为 0.9658 ± 0.0426 和 0.9993 ± 0.0053。图 4d 清楚地展示了采用误差缓解后自旋与电荷的相同行为，即在动力学过程中电荷和自旋的变化量相同；图中显示了位点 1 的净电荷和净自旋。对于格点内（$U = 2J$）相互作用的情况，也可以观察到类似的动力学改善，如图 4e 和 f 所示。图 4g 中，未采用和采用误差缓解时，每个量子门对应的拟合布居保真度分别为 0.9551 ± 0.0285 和 0.9925 ± 0.0081。对于格点内相互作用的情况，如图 4h 所示，经过误差缓解后，自旋与电荷的不同行为表现得更加清晰。

值得注意的是，与两个和三个费米子模式的模拟不同，仅采用 PEC 方案无法恢复图 4c 和 g 所示的四个费米子模式的动力学。保真度的主要提升来自基于费米子数守恒假设的后选择方法。原因之一是，四量子比特系统中双量子比特门的实验泡利转移矩阵未能恰当表征这些量子门的缺陷。从采用双量子比特门泡利转移矩阵进行数值模拟所得的数据与实验结果之间的不一致可以看出这一点（见附录 C）。我们的实验泡利转移矩阵无法涵盖量子比特间串扰和时间相关误差造成的保真度损失；也就是说，表征过程中量子门的性能可能与量子模拟中实际量子门的性能不同。还需指出，我们的实验泡利转移矩阵也无法捕捉泡利误差模型假设之外的相干误差，但可部分表征与泡利误差相关的误差。不过，串扰和时间相关误差可能是更重要的因素，因为没有明显理由认为相干误差会随系统规模增大而显著恶化。还需指出，在四量子比特系统中应用 PEC 方法时，采样次数大幅增加。根据测得的保真度，开销增至 $C_{YY_{\pi/8}(1,\ 2)} = 1.211$, $C_{YY_{\pi/8}(3,\ 4)} = 1.228$, $C_{YY_{\pi/8}(1,\ 3)} = 1.228$ 和 $C_{YY_{\pi/8}(2,\ 4)} = 1.223$。实验中的蒙特卡洛采样量 $N_s = 2000$不足，这受到在物理硬件上耗时运行大量随机电路的限制。

讨论与展望

我们采用PEC方法改进了最多使用四个囚禁离子量子比特的相互作用费米子模拟。我们观察到，保真度方面的模拟效果提升了近一个数量级。利用四个量子比特，我们能够观测相互作用费米子的自旋与电荷的不同动力学。

尽管PEC是实验中的基础方法，但人们还开发并应用了其他几种误差迁移方法。其中一种方法采用正概率约束。PEC方法的一个内在问题是，量子态的概率可能为负，并且不一定经过归一化。我们施加约束，使动力学过程中费米子态的概率为正且归一化，并通过最大似然法确定这些概率。该方法保证可观测量在物理上合理，并能够抑制统计误差。

我们还施加了对称性约束，使费米子总数和自旋守恒。在使用四个量子比特进行的模拟中，大部分非保真度来自粒子数守恒态之外的布居。费米子总数守恒约束解决了布居泄漏问题。然而，粒子数守恒约束是否具有可扩展性仍值得质疑，因为随着系统规模和电路深度的增加，泄漏可能会加剧。

从我们的实验演示可以看出，尽管结合约束条件的概率误差抵消（PEC）能够恢复四个囚禁离子量子比特的动力学，但显然，要将该方法大规模应用，我们还需要进一步改进。特别是，激光参数漂移和频谱拥挤会引发关联，导致 PEC 后仍存在误差。正如本研究所示，结合约束方法有助于缓解这一问题。近期已有多项旨在应对关联的方案和实验报道，例如采用稀疏泡利-林德布拉德模型 [23], 基于学习的误差缓解 [50], 矩阵乘积算符表示 [51], 等。将这些技术结合起来后，含噪声中型量子计算机有望达到实际应用所需的精度，从而实现量子优势，例如用于核磁共振（NMR）光谱的模型推断 [52] 以及大电路深度的量子近似优化算法（QAOA） [53]。

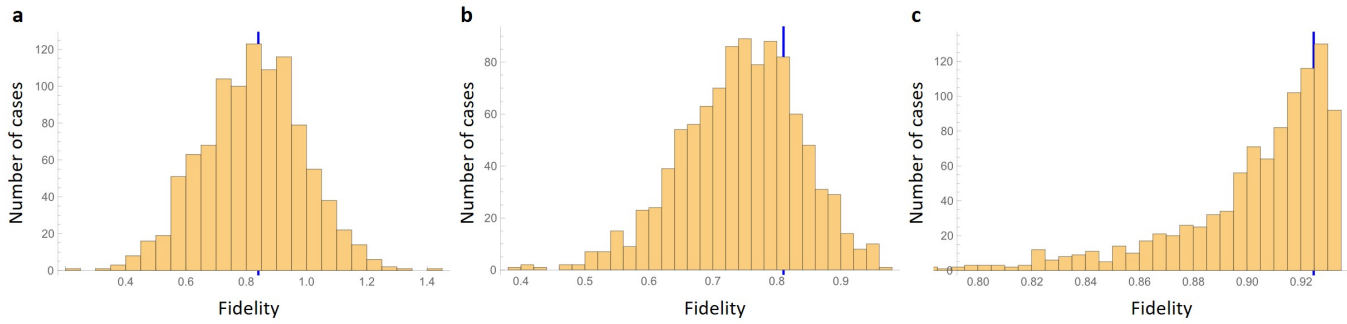


图5. 使用自助法生成的所有样本中，三 个无自旋费米子模拟在第四个 Trotter 步后的保真度分布，分别采用（**a**）概率误差抵消方法、（**b**）最大似然估计法和（**c**）概率抽样法。所有图中的黑线代表原始计算结果。每幅图均包含1000个样本。

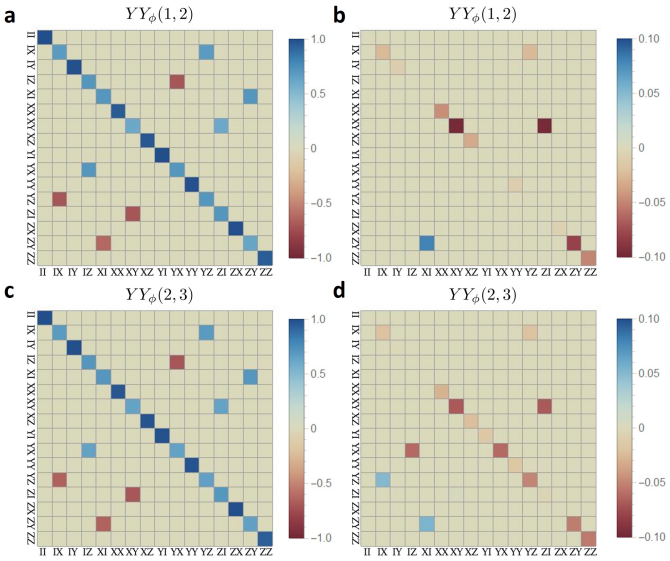


图6. 三个无自旋费米子模拟中，理想 $YY_{\pi/8}$ 量子门的泡利传递矩阵及其偏差： $YY_\varphi(1,\ 2)$对应（**a**）-（**b**）， $YY_\varphi(2,\ 3)$对应（**c**）-（**d**）。

异，我们反复随机地从原始数据中抽取样本，并依次对每个样本应用 PEC、最大似然估计和投影方法，以缓解布居误差。在我们的研究中，样本量与原始数据集的大小相同，每个数据点的样本总数通常设为 1000。随后，我们根据这些样本集计算每一步之后的态布居和布居保真度的标准差。为了避免出现非物理保真度（经最大似然估计和投影方法处理后大于 100% 或小于 0%），我们根据原始数据集的保真度将样本集分为两部分，并分别计算每一侧的标准差，因此得到了不对称的误差条。图 5 展示了每个误差缓解步骤之后的保真度分布（三个无自旋费米子模拟的第 4 步，V=0），表明随着误差缓解步骤的增加，分布与正态分布的偏离程度也随之增大。

致谢

本研究得到量子科学与技术创新计划（项目编号：2021ZD0301602）以及中国国家自然科学基金（项目编号：92065205、11974200、12225507、12088101和12204535）的资助。

附录A：使用自助法估计误差条

我们使用自助法对采用和未采用误差缓解的实验数据的不确定性进行了统计估计。为了估计变

附录B：三个和四个量子比特系统的泡利传递矩阵及准概率

三个位点单组分系统（三个无自旋费米子模式）和四个费米子模式（两位点双组分费米-哈伯德模型）的模拟量子电路如图 1 (d) 和 (e) 所示。在每个 Trotter 步中，最多会应用六个双量子比特 Mølmer-Sørensen 门 YY_φ。我们根据相关的量子比特对对量子门进行分类，并使用量子过程层析法对每种类型的量子门进行基准测试。在泡利误差假设下，我们测量 $R_{YY^{\mathrm{ns}\varphi}}$ 中的 15 个不同分量，以获得每种类型量子门的泡利转移矩阵，如图 6 和图 7 所示。图 8 展示了模拟三个无自旋费米子和两个有自旋的费米子时 YY_φ 量子门的准概率；这些准概率决定了在蒙特卡罗法中选择泡利操作的概率。

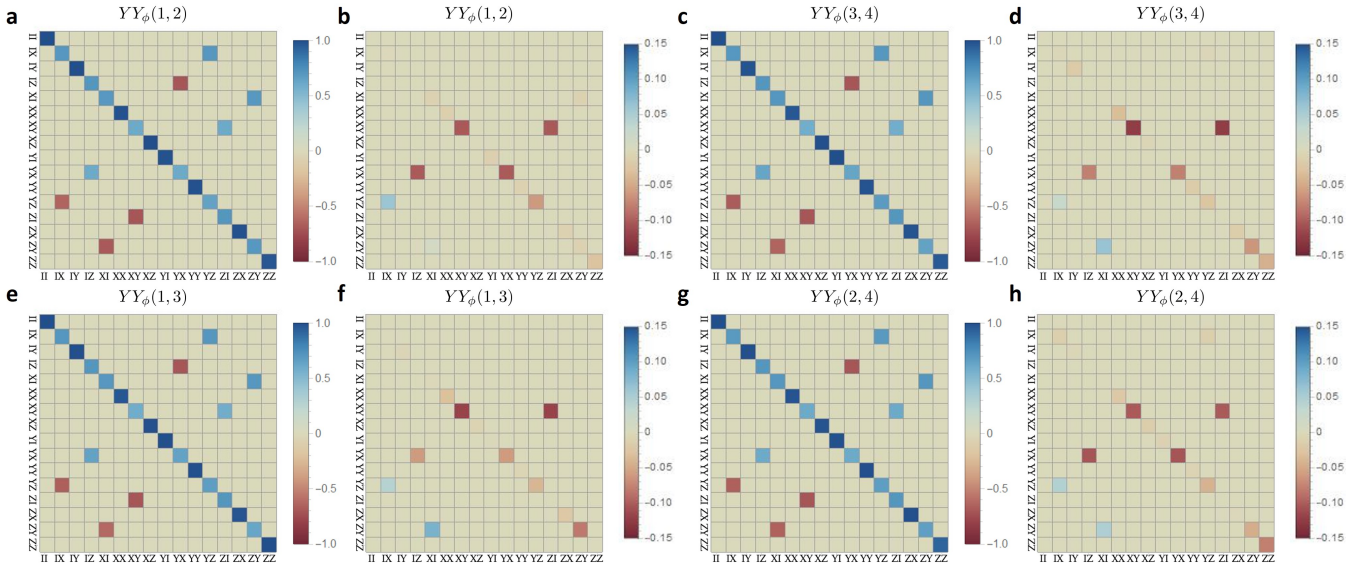


图7. 模拟两个有自旋的费米子时，(a)–(b) $YY_\varphi(1,2)$、(c)–(d) $YY_\varphi(3,4)$、(e)–(f) $YY_\varphi(1,3)$ 和 (g)–(h) $YY_\varphi(2,4)$ 的泡利转移矩阵及其相对于理想 $YY_{\pi/8}$ 量子门的偏差。

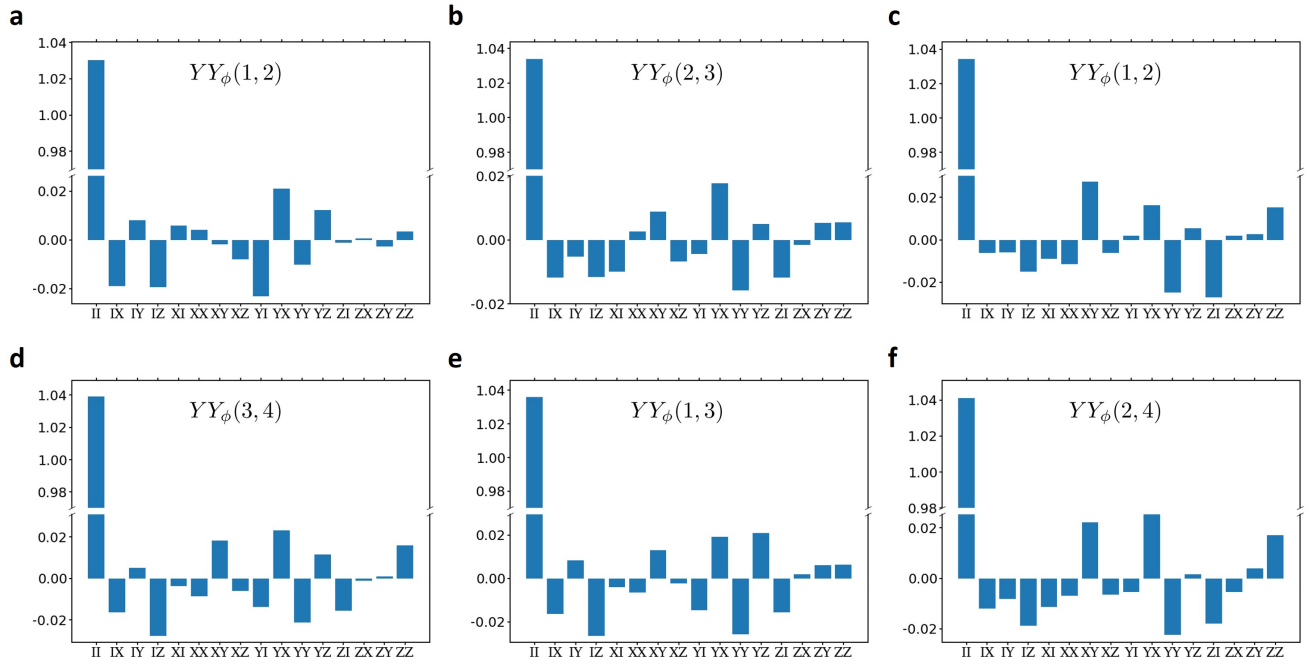


图8. 实验 $YY_{\pi/8}$ 量子门逆误差操作分解中的准概率。(a)–(b) 三个无自旋费米子模拟中的量子门$YY_\varphi(1,2)$ 和 $YY_\varphi(2,3)$。(c)–(f) 模拟两个有自旋的费米子时的量子门 $YY_\varphi(1,2)$、 $YY_\varphi(3,4)$、 $YY_\varphi(1,3)$ 和 $YY_\varphi(2,4)$。

附录C：用于理解实验误差模型的泡利传递矩阵模拟。

为了表征含噪双量子比特门，我们在泡利误差假设下进行部分量子过程层析，从 144 项测量中选取 15 项。为验证以下假设：

鉴于量子门误差随 Trotter步数的增加而变化，我们使用含噪门的泡利转移矩阵对扩展费米-哈伯德模型进行数值模拟。模拟结果分别见图9–11，对应两个无自旋费米子、三个无自旋费米子和两个有自旋的费米子。对于两个无自旋费米子的模拟，选定子空间之外的其他状态没有额外泄漏，

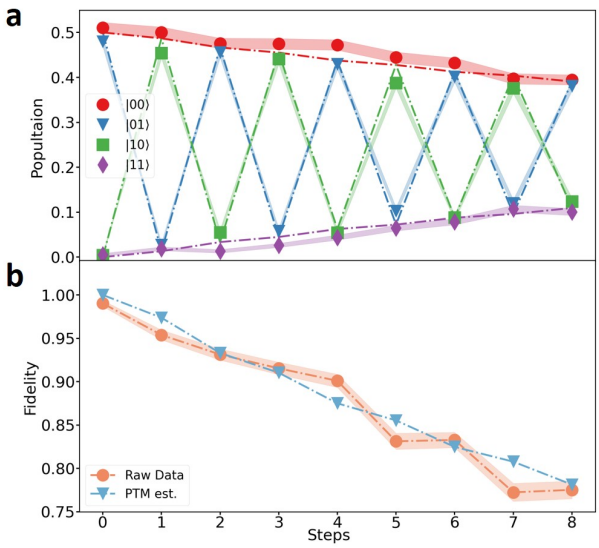


图 9. 两个无自旋费米子的实验原始数据与包含误差的模拟对比。我们使用通过量子过程层析测得的含噪门模拟了动力学。（**a**）实验原始数据与模拟的布居数。实心点表示实验测得的态布居，点划线表示使用含噪门得到的数值模拟数据。（**b**）（a）中实验原始数据与模拟数据的布居保真度。（a）至（b）中的阴影均表示使用自助法从原始实验数据生成的 1000 个样本的标准差。

因此我们可以得到与实验数据一致的模拟结果，这进一步证实了引言中 Trotter误差图2(i)所示的 PEC方法对保真度的显著提升。对于三个无自旋费米子和两个有自旋费米子的模拟结果，Trotter误差会导致理想子空间之外的其他状态出现布居。实验中的含噪门会进一步加剧泄漏，因此需要通过最大似然估计和投影方法来缓解。结果，图10和图11所示的模拟结果与实验数据存在明显偏差，这可以归因于量子门的意外误差，例如串扰误差。

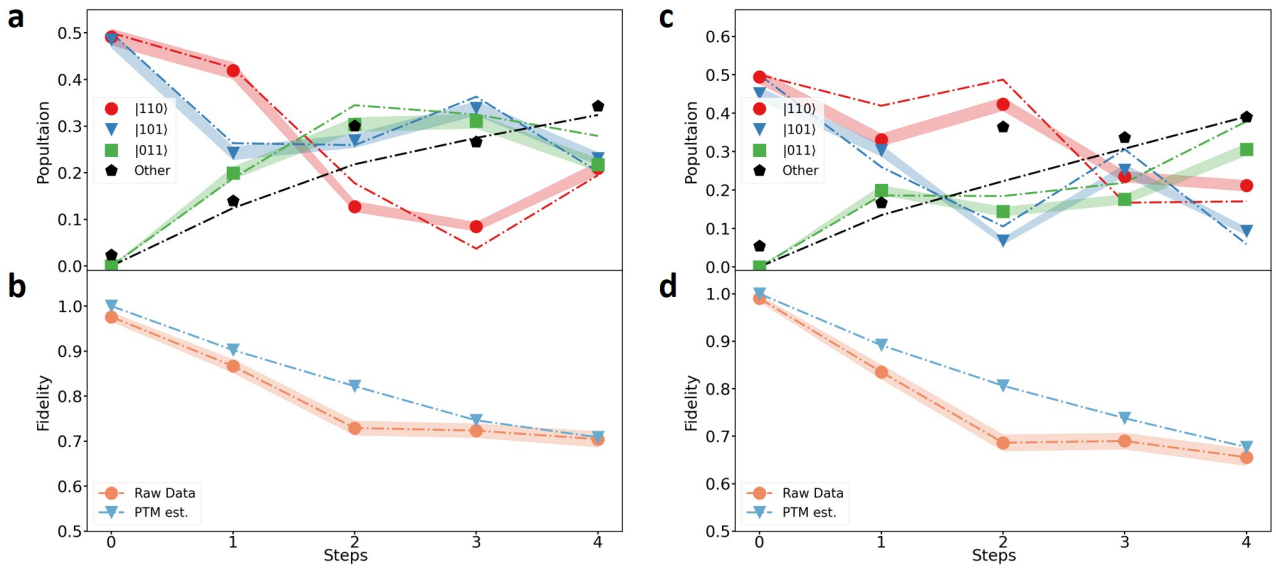


图 10. 三个无自旋费米子的实验原始数据与包含误差的模拟对比。我们使用通过量子过程层析测得的含噪门，模拟了 $V = 0$情形的动力学。(a) 实验原始数据与模拟的布居数。实心点表示实验测得的态布居，点划线表示使用含噪门得到的数值模拟数据。(b) (a) 中所示实验原始数据与模拟数据的布居保真度。(c)-(d) $V = 2J$ 情形的布居和保真度，表示方式与 (a)-(b) 相同。(a)-(d) 中的所有阴影均表示通过自助法从原始实验数据生成的 1000 个样本的标准差。

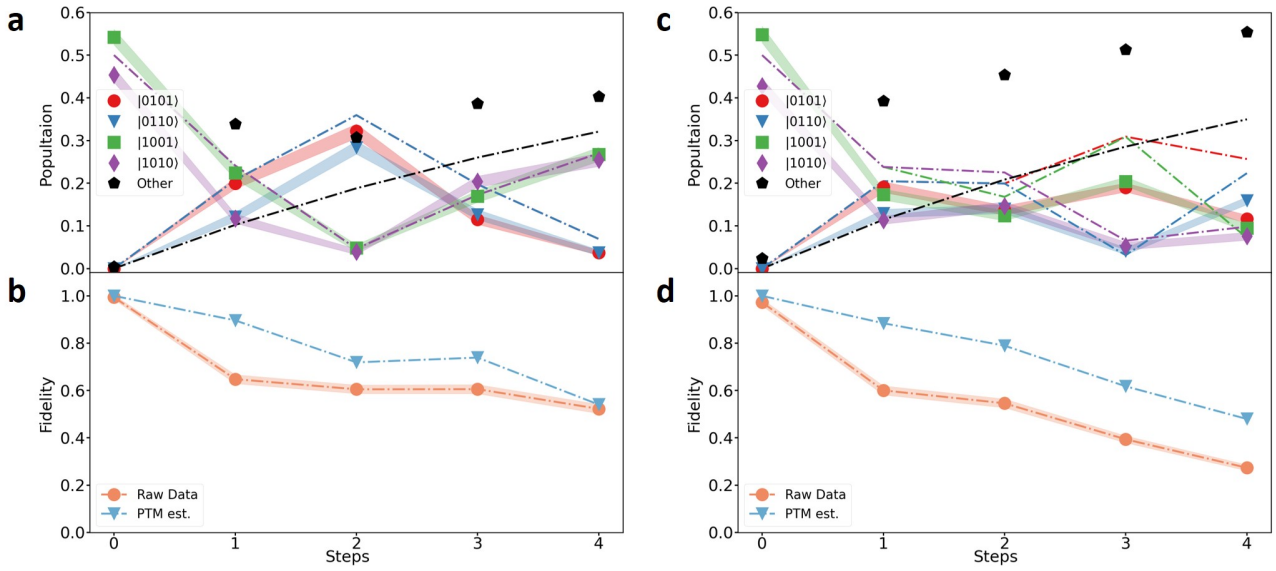


图 11. 两个有自旋的费米子的实验原始数据与包含误差的模拟对比。我们使用通过量子过程层析测得的含噪门，模拟了 $U = 2J$ 情形的动力学。(a) 实验原始数据与模拟的布居数。实心点表示实验测得的态布居，点划线表示使用含噪门得到的数值模拟数据。(b) (a) 中所示实验原始数据与模拟数据的布居保真度。(c)-(d) $U = 2J$ 情形的布居和保真度，表示方式与 (a)-(b) 相同。(a)-(d) 中的所有阴影均表示通过自助法从原始实验数据生成的 1000 个样本的标准差。

* 这两位作者对本研究的贡献相同。† 这两位作者对本研究的贡献相同。；zhangshuaining@ruc.edu.cn ‡ yli@gscaep.ac.cn § zhangjn@baqis.ac.cn ¶ kimkihwan@mail.tsinghua.edu.cn

[1] J. Preskill, 《NISQ时代及其之后的量子计算》, Quantum 2, 79 (2018)。 [2] K. Bharti, A. Cervera-Lierta, T. H. Kyaw, T. Haug, S. Alperin-Lea, A. Anand, M. Degroote, H. Heimonen, J. S. Kottmann, T. Menke, *et al.*, 噪声中等规模量子算法, 《现代物理评论》94, 015004 (2022)。 [3] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. Brandao, D. A. Buell, *et al.*, 使用可编程超导处理器实现量子霸权, 《自然》574, 505 (2019)。 [4] Y. Wu, W.-S. Bao, S. Cao, F. Chen, M.-C. Chen, X. Chen, T.-H. Chung, H. Deng, Y. Du, D. Fan, *et al.*, 使用超导量子处理器实现强量子计算优势, 《物理评论快报》127, 180501 (2021)。 [5] A. J. Daley, I. Bloch, C. Kokail, S. Flannigan, N. Pearson, M. Troyer, and P. Zoller, 《量子模拟中的实用量子优势》, 《自然》607, 667 (2022)。 [6] A. Peruzzo, J. McClean, P. Shadbolt, M.-H. Yung, X.-Q. Zhou, P. J. Love, A. Aspuru-Guzik, and J. L. O'Brien, 《光子量子处理器上的变分本征值求解器》, Nat. Commun. 5, 4213 (2014)。 [7] Y. Shen, X. Zhang, S. Zhang, J.-N. Zhang, M.-H. Yung, and K. Kim, 《幺正耦合簇的量子实现：用于分子电子结构模拟》, Phys. Rev. A 95, 020501 (2017)。 [8] M. Cerezo, A. Arrasmith, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, K. Fujii, J. R. McClean, K. Mitarai, X. Yuan, L. Cincio, *et al.*, 变分量子算法, Nature Reviews Physics 3, 625 (2021)。 [9] J. Tilly, H. Chen, S. Cao, D. Picozzi, K. Setia, Y. Li, E. Grant, L. Wossnig, I. Rungger, G. H. Booth, *et al.*, 变分量子本征求解器：方法与最佳实践综述, Physics Reports 986, 1 (2022)。 [10] P. W. Shor, 《降低量子计算机存储器中退相干影响的方案》, Phys. Rev. A 52, R2493 (1995)。 [11] A. M. Steane, 《量子理论中的纠错码》, Phys. Rev. Lett. 77, 793 (1996)。 [12] K. Temme, S. Bravyi, and J. M. Gambetta, 《浅层量子电路的误差缓解》, Phys. Rev. Lett. 119, 180509 (2017)。 [13] Y. Li and S. C. Benjamin, 《融入主动误差最小化的高效变分量子模拟器》, Phys. Rev. X 7, 021050 (2017)。 [14] S. Endo, S. C. Benjamin, and Y. Li, 《面向近期应用的实用量子误差缓解》, Phys. Rev. X 8, 031027 (2018)。 [15] Z. Cai, R. Babbush, S. C. Benjamin, S. Endo, W. J. Huggins, Y. Li, J. R. McClean, and T. E. O'Brien, 《量子误差缓解》, arXiv 预印本 arXiv:2210.00921 (2022)。 [16] A. Kandala, K. Temme, A. D. C´orcoles, A. Mezzacapo, J. M. Chow, and J. M. Gambetta, 《误差缓解扩展了噪声量子处理器的计算能力处理器, 《自然》**567**, 491 (2019). [17] Y. Kim, C. J. Wood, T. J. Yoder, S. T. Merkel, J. M. Gambetta, K. Temme, 和 A. Kandala，面向含噪量子线路的可扩展误差缓解可产生有竞争力的期望值，arXiv 预印本 arXiv:2108.09197 (2021). [18] C. Song, J. Cui, H. Wang, J. Hao, H. Feng, 和 Y. Li，在超导量子处理器上通过通用误差缓解实现量子计算, 《科学进展》**5**, eaaw5686 (2019). [19] S. Zhang, Y. Lu, K. Zhang, W. Chen, Y. Li, J.-N. Zhang, 和 K. Kim，在囚禁离子系统中实现超越物理保真度的误差缓解量子门, 《自然·通讯》**11**, 1 (2020). [20] C. Piveteau, D. Sutter, 和 S. Woerner，降低采样开销的准概率分解，npj《量子信息》**8**, 1 (2022). [21] R. Takagi, S. Endo, S. Minagawa, 和 M. Gu，量子误差缓解的基本极限，arXiv 预印本 arXiv:2109.04457 (2021). [22] W. J. Huggins, S. McArdle, T. E. O'Brien, J. Lee, N. C. Rubin, S. Boixo, K. B. Whaley, R. Babbush, 和 J. R. McClean，量子误差缓解的虚拟蒸馏，《物理评论X》**11**, 041036 (2021). [23] E. v. d. Berg, Z. K. Minev, A. Kandala, 和 K. Temme，在含噪量子处理器上利用稀疏泡利-林德布拉德模型进行概率误差抵消, arXiv 预印本 arXiv:2201.09866 (2022). [24] M. Suzuki，指数算符的分形分解及其在多体理论和蒙特卡洛模拟中的应用, 《物理快报A》**146**, 319 (1990). [25] J. Hubbard，窄能带中的电子关联，Proc. R. Soc. A: Math. Phys. Eng. Sci. **276**, 238 (1963). [26] E. H. Lieb 和 F. Y. Wu，一维短程单能带模型精确解中莫特转变的缺失，《物理评论快报》**20**, 1445 (1968). [27] W. Metzner 和 D. Vollhardt，$d = \infty$ 维中的关联晶格费米子, 《物理评论快报》**62**, 324 (1989). [28] E. M¨uller-Hart mann，高维晶格上的关联费米子，Zeitschrift f¨ur Physik B Condensed Matter **74**, 507 (1989). [29] J. P. F. LeBlanc, A. E. Antipov, F. Becca, I. W. Bulik, G. K.-L. Chan, C.-M. Chung, Y. Deng, M. Ferrero, T. M. Henderson, C. A. Jim´enez-Hoyos, E. Kozik, X.-W. Liu, A. J. Millis, N. V. Prokof'ev, M. Qin, G. E. Scuseria, H. Shi, B. V. Svistunov, L. F. Tocchio, I. S. Tupitsyn, S. R. White, S. Zhang, B.-X. Zheng, Z. Zhu, 和 E. Gull（西蒙斯多电子问题合作项目），二维Hubbard模型的解：来自多种数值算法的基准与结果，《物理评论X》**5**, 041041 (2015). [30] P. A. Lee, N. Nagaosa, 和 X.-G. Wen，掺杂莫特绝缘体：高温超导的物理，《现代物理评论》**78**, 17 (2006). [31] J. Casanova, A. Mezzacapo, L. Lamata, 和 E. Solano，囚禁离子中相互作用费米子晶格模型的量子模拟，《物理评论快报》**108**, 190502 (2012).[32] R. Barends, L. Lamata, J. Kelly, L. Garc´ıa- ´Alvarez, A. G. Fowler, A. Megrant, E. Jeffrey, T. C. White, D. Sank, J. Y. Mutus, *et al.*，利用超导电路对费米子模型进行数字量子模拟,

《自然·通讯》**6**, 1 (2015). [33] A. Mazurenko, C. S. Chiu, G. Ji, M. F. Parsons, M. Kan´asz-Nagy, R. Schmidt, F. Grusdt, E. Demler, D. Greif, 和 M. Greiner，冷原子费米–哈伯德反铁磁体，《自然》**545**, 462 (2017). [34] T. Hensgens, T. Fujita, L. Janssen, X. Li, C. Van Diepen, C. Reichl, W. Wegscheider, S. Das Sarma, 和 L. M. Vandersypen，利用半导体量子点阵列模拟费米–哈伯德模型，《自然》**548**, 70 (2017). [35] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, A. Bengtsson, S. Boixo, M. Broughton, B. B. Buckley, *et al.*，观测到费米-哈伯德模型中电荷与自旋的分离动力学，arXiv 预印本 arXiv:2010.07965 (2020). [36] B. P. Lanyon, C. Hempel, D. Nigg, M. M¨uller, R. Ger-{ } ritsma, F. Z¨ahringer, P. Schindler, J. T. Barreiro, M. Rambach, G. Kirchmair, *et al.*，利用囚禁离子实现通用数字量子模拟，《科学》**334**, 57 (2011). [37] Y. Lu, S. Zhang, K. Zhang, W. Chen, Y. Shen, J. Zhang, J.-N. Zhang, 和 K. Kim，任意离子量子比特上的全局纠缠门，《自然》**572**, 363 (2019). [38] X. Bonet-Monroig, R. Sagastizabal, M. Singh, 和 T. O'Brien，通过对称性验证实现低开销误差缓解，《物理评论A》**98**, 062339 (2018). [39] S. McArdle, X. Yuan, 和 S. Benjamin，误差缓解的数字量子模拟，《物理评论快报》**122**, 180501 2019( ). [40] S. Olmschenk, K. C. Younge, D. L. Moehring, D. N. Mat-sukevich, P. Maunz, 和 C. Monroe，对囚禁的 Yb 超精细量子比特进行操控与探测，《物理评论A》**76**, 052314 (2007). [41] P. Schindler，囚禁离子量子信息处理中的频率合成与脉冲整形，毕业论文，因斯布鲁克大学 (2008). [42] A. Sørensen 和 K. Mølmer，利用处于热运动中的离子，《物理评论快报》**82**, 1971 (1999). [43] K. Kim, M.-S. Chang, R. Islam, S. Korenblit, L.-M. Duan, and C. Monroe，《利用多个横向振动模实现囚禁离子间的纠缠与可调自旋-自旋耦合》，《物理评论快报》**103**, 120502 (2009). [44] M. A. Nielsen，《量子动力学操作平均门保真度的一个简单公式》，Phys. Lett. A **303**, 249 (2002). [45] D. Greenbaum，《量子门集层析简介》，arXiv 预印本 arXiv:1509.02921 (2015). [46] C. Shen and L.-M. Duan，《通过数据处理纠正量子态工程中的探测误差》，New J. Phys. **14**, 053053 (2012). [47] L. Tarruell and L. Sanchez-Palencia，《利用光学晶格中的超冷费米子进行Hubbard模型量子模拟》，C. R. Physique **19**, 365 (2018). [48] J. Vijayan, P. Sompet, G. Salomon, J. Koepsell, S. Hirthe, A. Bohrdt, F. Grusdt, I. Bloch, and C. Gross，《费米子Hubbard链中自旋-电荷解禁闭的时间分辨观测》，《科学》**367**, 186 (2020). [49] R. Senaratne, D. Cavazos-Cavazos, S. Wang, F. He, Y.-T. Chang, A. Kafle, H. Pu, X.-W. Guan, a nd R. G. Hulet，《具有可调相互作用的一维费米气体中的自旋-电荷分离》，《科学》**376**, 1305 (2022). [50] A. Strikis, D. Qin, Y. Chen, S. C. Benjamin, and Y. Li，《基于学习的量子误差缓解》，PRX Quan- tum**2**, 040330 (2021).[51] Y. Guo and S. Yang，《通过矩阵乘积算符实现量子误差缓解》，PRX Quantum **3**, 040313 (2022). [52] D. Sels, H. Dashti, S. Mora, O. Demler, and E. Dem- ler，《用于核磁共振模型推断的量子近似贝叶斯计算》，Nature machine intelligence **2**, 396 (2020). [53] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann，《一种量子近似优化算法》，arXiv预印本 arXiv:1411.4028 (2014).