arXiv:2302.10451v1 [math.RA] 21 Feb 2023

泛函恒等式及其应用

˘MATEJ BRESAR

Abstract. 本文综述泛函恒等式理论及其应用。阅读本文无需预先了解该理论。

Contents

1. 引言 2 2. FIs 的例子 2 3. 一般理论 12 3.1. d-自由集的定义 12 3.2. 对称分数次数 15 3.3. d-自由素环 21 3.4. 从旧的 d-自由集构造新的集合 28 3.5. d-自由集的刻画 31 3.6. 拟多项式 32 3.7. 广义函数恒等式 35 3.8. 单变量 FIs 的非标准解 37 3.9. 拟恒等式的非标准解 39 3.10. 将 FIs 视为广义多项式恒等式时的非标准解 40 4. 应用 42 4.1. 李映射 42 4.2. 群分次 47 4.3. 泊松代数 49 4.4. 李超同态 50 4.5. 李可容许代数 51 4.6. Jordan 映射 52 4.7. f-同态 54 4.8. 近导子 56

Key words and phrases. 函数恒等式、标准解、 d-自由集、交换函数、双导子、拟多项式、多项式恒等式、广义多项式恒等式、广义函数恒等式、Cayley–Hamilton 多项式、素环、单环、商环、对称分数次数、带对合的环、李理想、李同态、李导子、群分级、泊松代数、李超同态、李可容代数、Jordan 同态、Jordan $*$-导子、 f-同态、近导子、线性保持问题、零乘积决定代数。
2020 *Math. SubJ. Class.* 主要分类：16R60。次要分类：15A86, 16N60, 16R20, 16R50, 16S50, 16S85, 16W10, 16W20, 16W25 16W50, 17B40, 17B60, 17C50。获 ARRS资助项目 P1-0288 资助。

4.9. 线性保持问题 4.10. 零乘积决定代数 57
参考文献 60
62

1. Introduction

函数恒等式（FI）可以粗略地定义为环的某个子集上的恒等关系，其中涉及被视为未知量的任意函数。虽然函数恒等式的概念扩展了多项式恒等式（PI）的概念，但 FI 理论可被视为对 PI 理论的补充，而非推广。该理论始于作者 1990 年的博士论文，此后一直不断发展。推动这一发展的主要动力，是它在数学不同领域诸多问题中的适用性。“函数恒等式”一词于 2010 年被列为数学主题分类中的一个新条目（16R60）。

函数恒等式理论的基础见于作者、M. A. Chebotar 和 W. S. Martindale 3rd 于 2007 年出版的书籍 [53] 。本文旨在综述该书出版前后取得的最重要成果。由于已有充足时间沉淀，如今已能清楚判断哪些早期成果不应在论述中遗漏。所选取的早期成果，加上开辟新研究领域的近期成果，有望展现该理论的完整面貌。

除少数用于说明的例外情况外，本文将省略详细证明。不过，我们会概述若干证明的主要思路。

本文的组织结构如下。第 2 节将介绍各种具体的函数恒等式实例，帮助读者理解一般理论。第 3 节将探讨后者。我们首先介绍由 K. I. Beidar 和 M. A. Chebotar 提出的 d-自由集理论，随后讨论较新的课题，即低维代数中函数恒等式的非标准解。第 4 节专门讨论应用。我们将从最早的应用——Herstein 的李映射猜想的解——谈起，最后讨论最新的应用，即利用函数恒等式研究零积决定代数。

2. Examples of FIs

本文所说的环是结合环，不一定含有单位元，也不一定是交换的。对于交换环而言，函数恒等式理论实际上相当空泛，因此我们真正感兴趣的是非交换环。有时我们会假设环含有单位元，此时称之为含幺环。

本节中，我们始终假设 R 是含幺环 Q 的非零子环。采用后一种记法的原因是，在实际应用中， Q 通常是 R 的商环。不过，在另行通知之前， Q 可以是任意含幺环。一般的函数恒等式考虑的是这样的情形： R 只是一个子集，不一定是

Q 的子环。假设 R 是子环，是为了让本节中的例子更简单。

例 2.1. 设 $F\colon R \to Q$ 是任意函数。函数恒等式的一个极其简单的例子是

$$xF(y) = 0 \tag{2.1}$$

对所有 $x, y \in R$ 均成立。如果 (2.1) 成立， F 的形式是什么？在温和假设下，特别是当 R 是一个含幺子环时（这里指它包含 Q 的单位元），我们可以看到，只需取 $x = 1$， F 就必定为零。因此，我们称 $F = 0$ 为函数恒等式 (2.1) 的标准解。F 的值域中的每个元素 q 都满足 $Rq = \{0\}$。事实上，存在非标准（即非零）解，等价于 Q 含有一个具有此性质的非零元素 q。因此，我们的函数恒等式要么只有标准解，要么 R 具有某种特殊性质。这是研究函数恒等式时的典型结论，也是我们从这样一个琐碎的例子开始的原因。$\Diamond$

例 2.2. 设 F_1、$F_2\colon R \to Q$ 是函数。考虑函数恒等式

$$xF_1(y) + yF_2(x) = 0 \tag{2.2}$$

对所有 x、$y \in R$ 都成立。这显然是 (2.1) 的一种推广。它仍然是一个非常简单的函数恒等式，但与 (2.1) 不同，它并非完全平凡。出于很快就会明了的原因，我们将这个函数恒等式的标准解定义为

$$F_1 = F_2 = 0.$$

注意，只要 R 是交换的，非标准解就存在；事实上，只需例如取

$$F_1(y) = y \quad \text{and} \quad F_2(x) = -x.$$

现在假设 R 不是交换的，并证明在合理的附加假设下，唯一的解就是标准解。任取 x、y、z、$w \in R$，并注意到 (2.2) 意味着

$$\begin{aligned} x(yzF_1(w)) &= -xwF_2(yz) \\ &= y(zF_1(xw)) \\ &= -yx(wF_2(z)) \\ &= yxzF_1(w). \end{aligned}$$

与通常一样，我们用 $[x, y]$ 表示环元素 x 和 y 的交换子（也称为李乘积），即

$$[x, y] = xy - yx.$$

注意，上述恒等式可以写成

$$[x, y]zF_1(w) = 0$$

对所有 x、y、z、$w \in R$。这意味着， R 中值域 F_1 内的每个元素 q 都满足 $Kq = \{0\}$，其中 K 是 R 的交换子理想（即由 R中的所有交换子生成的理想）。因此，例如，如果 Q是非交换整环，或者 R是非交换单一含幺环，那么 $F_1 = 0$（类似地， $F_2 = 0$）。$\Diamond$

设 F是一个域。记 $F\langle X_1、\ X_2、\ \dots\rangle$ 为以不定元X_i为变量的自由代数，即 X_i上的非交换多项式代数。设 R 是 F上的代数。一个非交换多项式

$$f(X_1,\dots,X_n)\in F\langle X_1,X_2,\dots\rangle$$

称为 R 的多项式恒等式，当

$$f(a_1,\dots,a_n)=0$$

对所有 $a_i\in R$ 均成立。如果某个非零非交换多项式是 R 的多项式恒等式，那么我们称 R 为 PI-代数。这些代数将在本文中发挥重要作用，我们也将频繁使用 PI 理论中的相关事实。关于这一主题的详细论述，请参阅书籍 [3, 78, 120]；入门介绍请参阅 [45, 第 6 节和 7]。

例 2.3. 假设 $F_1、\ F_2\colon R\to Q$ 满足

$$[xF_1(y)+yF_2(x),z]=0 \tag{2.3}$$

对所有 $x、\ y、\ z\in R$ 均成立。也就是说，

$$xF_1(y)+yF_2(x)\in C_Q(R)$$

对所有 $x、\ y\in R$ 均成立，其中 $C_Q(R)$ 表示 Q 中 R 的中心化子，即

$$C_Q(R)=\{c\in Q\mid cz=zc \text{ for every } z\in R\}.$$

在 $R=Q$ 的基本情形下，这意味着 $xF_1(y)+yF_2(x)$ 属于 Q 的中心。标准非交换环的中心通常是相对较小的子集。因此，自然会认为 (2.3) 可以用类似于处理 (2.2) 的方式来处理，而 (2.2) 显然是它的特例。不过，这种看法只有在一定程度上成立。我们在上文已经注意到，如果 R 是一个非交换单一含幺环，那么 (2.2) 只有标准解。下面说明 (2.3) 并非如此。

当然，我们将 (2.3) 的标准解定义为 $F_1=F_2=0$。考虑 2×2 矩阵环 $R=M_2(Z)$，其中 Z 是一个域。Cayley-Hamilton 定理指出，对于每个 $x\in R$，$x^2-\mathrm{tr}(x)x$ 都是数量矩阵 $-\det(x)$，因此

$$[xF(x),z]=0 \tag{2.4}$$

对所有 $x、\ z\in R$，其中：$R\to R(=Q)$ 定义为

$$F(x)=x-\mathrm{tr}(x)$$

（此处，我们用标量 λ 表示数量矩阵 $\lambda 1$，其中 1 是单位矩阵。）将 (2.4) 线性化（即，将 (2.4) 中的 x 替换为 $x+y$ 后得到的恒等算子），可得

$$[xF(y)+yF(x),z]=0$$

对所有 $x、\ y、\ z\in R$ 均成立。因此，我们得到了带有以下内容的 (2.3)：

$$F_1=F_2=F\neq 0.$$

这意味着 (2.3) 在非交换单含幺环 $R = M_2(Z)$ 中有一个非标准解。

我们的目标现在是证明， $M_2(Z)$以及一些相关的环，实际上是唯一使得（ 2.3）存在非标准解的非交换单含幺环。因此，从现在起，假设 R 是一个不是域的单含幺环（等价地说，它不是交换的）。

我们先在（2.3）中用 zy 替换 y ，得到

$$[xF_1(zy), z] + [zyF_2(x), z] = 0.$$

由于

$$[zyF_2(x), z] = z[yF_2(x), z] = -z[xF_1(y), z],$$

可知

$$[xF_1(zy), z] - z[xF_1(y), z] = 0.$$

我们可以将其改写为

$$xF_1(zy)z - zx\big(F_1(zy) + F_1(y)z\big) + z^2xF_1(y) = 0. \tag{2.5}$$

假设存在一个 $z \in R$ ，使得元素 1、 z、 z^2 在 R 的中心 Z 上线性无关（因为 R 是单的，所以 Z 是一个域）。那么我们可以利用 Artin-Whaples 定理（见 [45, 推论 5.24]）得到元素 a_i、 $b_i \in R$ ，使得

$$\sum_i a_ib_i = 0, \quad \sum_i a_izb_i = 0, \quad \sum_i a_iz^2b_i = 1.$$

在 (2.5) 中用 x 代替 b_i ，然后从左侧乘以 a_i ，再求和，得到

$$\sum_i a_ib_iF_1(zy)z - \sum_i a_izb_i\big(F_1(y)z + F_1(zy)\big) + \sum_i a_iz^2b_iF_1(y) = 0,$$

根据 a_i、 b_i 的选取，化简为

$$F_1(y) = 0$$

对每个 $y \in R$ 都成立。类似地，我们看到，对每个 $x \in R$， $F_2(x) = 0$ 。因此，在所考虑的情形下，函数恒等式 (2.3) 只有标准解。

因此，我们可以假设，对于每个 $z \in R$，1、 z、 z^2 在 Z 上线性相关。于是 R 是一个 PI-代数，因为例如，

$$\big[[X_1^2, X_2], [X_1, X_2]\big]$$

是 R 的一个多项式恒等式。根据 PI理论 的一个标准结论，单含幺PI代数在其中心 Z 上是有限维的。不过，还可以得出更多结论。由于我们的代数满足一个次数为 5 的多项式恒等式，且不是交换的，唯一的可能性是 $[R : Z]$，即 R 在 Z 上的维数为 4。经典的韦德伯恩定理告诉我们，要么 $R \cong M_2(Z)$，要么 R 是一个 4 维除代数。在后一种情况下，我们可以大致按照 2×2 矩阵情形中的方法，找到 (2.3) 的非标准解（见 [53,推论 C.3]）。

我们可以将所得结论概括如下。若 R 是一个单含幺环，那么 FI (2.3) 有非标准解，当且仅当 R 在其中心上的维数为 1 或 4；更具体地说， R 满足以下三个条件之一：(a) R 是交换的，(b) $R \cong M_2(Z)$，其中 Z 是一个域；(c) R 是其中心上的一个 4 维除代数。$\Diamond$

一个中心为 Z 的单含幺环 R ，要么是 Z 上的无限维代数，要么[R ： 对某个正整数 n， $Z] = n^2$ 。我们已经看到，函数恒等式 (2.3)（分别为 (2.2)）给出了单含幺环中维数不超过 4（分别为 1）的环相对于其中心的刻画（这些单含幺环不一定是其中心上的有限维代数）。如何刻画相对于其中心具有更高有限维数的单含幺环?

例 2.4. 为回答刚才提出的问题，自然要考虑 $n \times n$矩阵代数 $R = M_n(Z)$，其中 Z Z 是一个域。受前一个例子的启发，我们运用凯莱-哈密顿定理，该定理特别指出，存在一个函数 $\phi : R \to R$ ，使得

$$x\phi(x) = \det(x) \tag{2.6}$$

对每个 $x \in R$ 都成立（如上所述，det(x) 表示 det(x)1）。我们称 (2.6) 为凯莱-哈密顿恒等式。当然,

$$\phi(x) = \mathrm{adj}(x),$$

x的伴随矩阵。其形式众所周知，即可表示为 x 的幂和迹的形式。不过，就我们的目的而言，只需注意到 ϕ 是一个（$n-1$）-可加函数的迹。这里的意思是，它可以表示为

$$\phi(x) = \Phi(x, \ldots, x)$$

其中 $\Phi : R^{n-1} \to R$ 是一个对每个变量都可加的函数。由于 $x\phi$(x)总是一个数量矩阵，我们有

$$[x\Phi(x, \ldots, x), z] = 0$$

对所有 x、 $z \in R$都成立。将这个恒等式线性化，可知由 b 定义的 F： $R^{n-1} \to R$ y

$$F(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \Phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}),$$

满足

$$[x_1F(x_2, \ldots, x_n) + x_2F(x_1, x_3, \ldots, x_n) + \cdots + x_nF(x_1, \ldots, x_{n-1}), z] = 0$$

对所有 x_1,... , x_n, $z \in R$都成立。这里对我们而言重要的是，环 $R = M_n(Z)$对某个非零函数 F满足这个函数恒等式。

现在考虑一个更一般的函数恒等式

$$[x_1F_1(x_2,\ldots,x_n) + x_2F_2(x_1,x_3,\ldots,x_n) + \cdots + x_nF_n(x_1,\ldots,x_{n-1})\ z] = 0 \tag{2.7}$$

对所有 x_1,... , x_n, $z \in R$ 均成立，其中 $F_1, \ldots, F_n$： $R^{n-1} \to Q$ 是任意函数。我们也将 (2.7) 写成一个等价但更易读的形式:

$$x_1F_1(x_2, \ldots, x_n) + x_2F_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) + \cdots + x_nF_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C_Q(R)$$

对所有 $x_1, \ldots, x_n \in R$ 均成立。我们将 (2.7) 的标准解定义为

$$F_1 = \cdots = F_n = 0.$$

我们已经证明，当 $R = Q = M_n(Z)$ 时，存在非标准解。现在可以证明，若 $R = Q$ 是任意一个中心为 Z 的单含幺环，则存在非标准解当且仅当 $[R : Z] \leq n^2$。一般情形下 n 的证明在技术上当然比前例中给出的 $n = 2$ 的证明更为复杂。不过，主要思路相同。这里暂且省略细节；下一节中我们将从更一般的框架来考察 (2.7)。◊

以上所有函数恒等式的标准解都只是零函数。下面我们举一个非常简单的函数恒等式为例，其中情况并非如此。

例 2.5。设 E、F： $R \to Q$ 满足函数恒等式

$$E(x)y = xF(y) \tag{2.8}$$

对所有 x、$y \in R$ 均成立。(2.8) 成立的一个显而易见的可能性是，存在一个 $q \in Q$ 使得

$$E(x) = xq \quad \text{and} \quad F(y) = qy$$

对所有 $x, y \in R$ 都成立。若 E 和 F 具有这种形式，那么我们就说它们构成了 (2.8) 的一个标准解。若 R 是含幺的，那么非标准解不可能存在：先在 (2.8) 中令 $y = 1$，再令 $x = 1$，即可看出这一点。非含幺情形则可能有所不同。例如，若 $R = 2\mathbb{Z}, Q = \mathbb{Z}$ 和 E, F 由下式给出

$$E(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{and} \quad F(y) = \frac{1}{2}y,$$

那么它们就构成了 (2.8) 的一个非标准解。不过，若我们用 $Q = \mathbb{Q}$ 代替 $Q = \mathbb{Z}$，那么所有解都是标准解。事实上，我们定义 $q = {}^{F}{}_{(2)\ 2}$。◊

现在，FIs 的标准解是什么，或许已经稍微清楚一些。没有一个通用定义能够涵盖所有可能的情形，但可以把它们看作“显而易见”的解：无论环有什么特殊性质，它们在任何环中都有意义。

例 2.5 表明，商环可能有助于证明所有解都是标准解。事实上，商环贯穿于 FI 理论之中。现在我们将介绍其中一种，其他一些则留待后文讨论。我们将看到，这一定义与函数恒等式 (2.8) 密切相关。

首先回顾一下， R 是素环，当且仅当其中任意两个非零理想的乘积都非零。等价地，对于任意 a， $b \in R$， $aRb = \{0\}$ 蕴含 $a = 0$ 或 $b = 0$。素环构成了一个相当大的环类，其中尤其包括单环、本原环和整环。函数恒等式理论并不局限于素环，但素环为研究该理论提供了最自然的背景。需要指出的是，在例 2.3 和 2.4 中，我们仅为简便起见而将讨论限制在单含幺环上。处理更为一般的素环并不会使讨论冗长太多，但我们将不得不引用一些不那么初等的结果。特别是，在素环中研究 FIs 时，不可避免地要涉及某些商环。下一个定义中的商环实际上是

不太适合用于发展一般理论的商环，但它比其他商环稍简单，也适合我们当前的用途。

我们假设 R 是一个素环。

定义 2.6。如果环 $Q = Q_s(R)$ 满足以下条件，则称其为 R 的对称 Martindale 商环：

(a) R 是 Q 的子环。(b) 对于每个 $q \in Q$，存在 R 的非零理想 I，使得 $Iq + qI \subseteq R$。(c) 对于每个非零 $q \in Q$ 以及 R 的每个非零理想 J，$Jq \neq \{0\}$ 且 $qJ \neq \{0\}$。(d) 如果 I、J 是 R 的非零理想，且函数 $E\colon I \to R$、$F\colon J \to R$ 满足 $E(x)y = xF(y)$（即（2.8））对所有 $x \in I$ 和所有 $y \in J$ 成立，则存在一个 $q \in Q$，使得对所有 $x \in I$，$E(x) = xq$，并且对所有 $y \in J$，$F(y) = qy$。

注 2.7。条件 (d) 中的函数 E 和 F 通常分别被假设为左、右 R-模同态。我们省略了这一不必要的假设，以指出它们与涉及任意函数的 FIs 之间的联系。证明该假设确实不必要很简单。事实上，取$r \in R$、$x \in I$，并在 $E(x)y = xF(y)$ 中用 rx 替换 x，即可得到

$$E(rx)y = rxF(y) = rE(x)y,$$

因此

$$\big(E(rx) - rE(x)\big)y = 0,$$

由 (c) 可知，这意味着 $E(rx) = rE(x)$。类似地，我们可知 E 是可加的，因此它是左 R-模同态。证明 F 是右 R-模同态的方法类似。

关于 $Q_s(R)$ 的性质和例子，请读者参阅书籍 [30, 89,114]。其基本性质是，对于每个素环 R，$Q_s(R)$ 都存在，且在同构意义下唯一。因此，我们通常称之为对称 Martindale 商环。

$Q_s(R)$的中心称为 R 的扩张中心，通常记作 C。扩张中心是一个域，包含 R 的中心，但它不一定是其分式域。在它的诸多良好性质中，我们指出以下一点：若 a、b 是 R 中的元素，且满足

$$atb = bta \tag{2.9}$$

对每个 $t \in R$都成立，则它们在 C上线性相关。

在继续下一个例子之前，我们回顾一下：从R 到 R 的可加映射 d （或者更一般地，从 R 到一个 R-双模的可加映射）称为导子，如果

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

对所有 x、$y \in R$都成立。例如，对于任意元素 a，$d(x)$中的 $= [a, x]$ 都是一个导子。这样的导子称为内导子。

例 2.8. 若函数 $F\colon R \to R$ 满足以下条件，则称其为可交换的：

$$F(x)x = xF(x) \tag{2.10}$$

对每个 $x \in R$ 都成立。这些函数在 FI 理论中非常重要。

如果不施加某些附加条件，就无法对满足 (2.10) 的函数 F 说太多。很久以前，人们就已证明，诸如自同构或导子这样的函数只有在某些平凡情形下才可交换 [70, 116]。然而，从 FI 理论的角度来看，这些函数过于特殊。

我们只假设 F 是可加的。将 (2.10) 线性化后，我们得到

$$F(x)y + F(y)x = xF(y) + yF(x) \tag{2.11}$$

对所有 x、$y \in R$均成立。实际上，只有在这里才需要假设 F 是可加的；也就是说，从现在起，F 可以是从 R 到 R的任意满足 (2.11) 的函数。因此，我们可以将 (2.11) 视为一个函数恒等式。

我们通过定义函数 $D\colon R \times R \to R$ 来处理 (2.11)：

$$D(x, y) = [F(x), y].$$

注意，D 是关于第二个变量的（内）导子。另一方面，由于根据 (2.11)，

$$D(x, y) = [x, F(y)],$$

D 在第一个变量上也是一个导子。在另行通知之前，我们考虑任意一个函数 $D\colon R \times R \to R$，它在每个变量上都是导子。我们称这样的函数为双导子。

为了描述双导子 D 的形式，我们任取 $x, y, z, w \in R$，并考察 $D(xz, yw)$。由于 D 在第一个变量上是导子，我们有

$$D(xz, yw) = D(x, yw)z + xD(z, yw).$$

利用 D 在第二个变量上是导子这一事实，可得

$$D(xz, yw) = D(x, y)wz + yD(x, w)z + xD(z, y)w + xyD(z, w).$$

另一方面，如果我们反过来，先利用 D 在第二个变量上是导子这一条件，则得到

$$\begin{aligned} D(xz, yw) &= D(xz, y)w + yD(xz, w) \\ &= D(x, y)zw + xD(z, y)w + yD(x, w)z + yxD(z, w). \end{aligned}$$

比较这两个表达式可得

$$D(x, y)[z, w] = [x, y]D(z, w)$$

对所有 $x, y, z, w \in R$ 都成立。将 z 替换为 tz，并利用 $[tz, w] = [t, w]z + t[z, w]$ 和 $D(tz, w) = D(t, w)z + tD(z, w)$，可得

$$D(x, y)t[z, w] = [x, y]tD(z, w) \tag{2.12}$$

对所有 x、y、z、w、$t \in R$。

现在我们可以使用上述涉及恒等式 (2.9) 和扩张中心的结果。因此，假设 R 是一个素环，并且它不是交换的。我们指出，交换的情形确实有所不同；例如，如果 $R = \mathbb{R}[X]$，那么

$$D(f, g) = f'g'$$

这是一个双导子的例子，它不具有我们将在假设 R 是非交换的条件下推导出的形式。在交换环中研究双导子有着不同的目标，参见 [98]。

任取 z、$w \in R$，使得 $[z,w] \neq 0$。对 $x = z$ 和 $y = w$ 使用（2.12），可知存在扩张中心 C of R 中的元素 λ，使得 $D(z,w) = \lambda[z,w]$。因此，（2.12）可写为

$$\big(D(x,y) - \lambda[x,y]\big)t[z,w] = 0$$

对所有 x、$y \in R$ 均成立。也就是说，

$$\big(D(x,y) - \lambda[x,y]\big)J = 0,$$

其中，J 是由 $[z,w]$ 生成的 R 理想。利用定义 2.6 中的条件（c），可得

$$D(x,y) = \lambda[x,y] \tag{2.13}$$

对所有 x、$y \in R$ 均成立。因此，R 的每个双导子都只是变量的李乘积，再乘以扩张中心中的某个元素。

现在我们可以回到函数恒等式（2.11）。由于 $(x,y) \mapsto [F(x)\ y]$ 是一个双导子，因此存在某个 $\lambda \in C$，使得

$$[F(x),y] = \lambda[x,y]$$

对所有 x、$y \in R$，即，

$$[F(x) - \lambda x, y] = 0. \tag{2.14}$$

现在，若 q 是 $Q_s(R)$ 中的一个元素，且它与 R 中任意元素 y 可交换，那么 q 属于 C，也就是说，它与 $Q_s(R)$ 中任意元素 p 可交换。这是因为根据 (b)（见定义 2.6），我们可以选取 R 的一个非零理想 I，使得 $pI \subseteq R$，因此

$$0 = [q,pu] = [q,p]u + p[q,u] = [q,p]u$$

对每个 $u \in I$ 都成立，因此根据 (c) 有 $[q,p] = 0$。因此，(2.14) 意味着 $F(x) - \lambda x \in C$。于是，F 具有如下形式

$$F(x) = \lambda x + \mu(x) \tag{2.15}$$

其中某个 $\lambda \in C$ 和 μ 满足：$R \to C$。最后，若 F 是可加的，那么显然 μ 也是可加的。

回到最初的问题，现在我们可以说，若 R 是一个素环，那么每个可交换加性函数 $F\colon R \to R$ 都具有 (2.15) 的形式，其中 λ 是 C 中的一个元素，而 μ 是一个从 R 到 C 的加性函数。注意，若 R 是交换的，这显然成立，因此不再需要非交换性这一假设。

值得在此补充一点：即使 R 是含幺的，且其中心 Z 是一个域，λ 和 $\mu(x)$也不一定属于 Z。事实上，考虑下面这个例子。设 V 是一个无限维复向量空间，设 R_0 是从 V 到 V 的所有有限秩 $\mathbb{C}$-线性算子构成的代数，并设 R 是所有形如 $a_0 + t1$的算子构成的代数，其中 $a_0 \in R_0$、$t \in \mathbb{R}$，而 1 是恒等算子

在 V上的算子。注意， R是一个素环，其中心为 $\mathbb{R}(=\mathbb{R}1)$。不难看出， R的扩张中心是 $\mathbb{C}$。定义 $F\colon R\to R$如下：

$$F(a_0+t1)=ia_0.$$

显然， F是一个加性交换函数。注意到， F具有(2.15)的形式，其中 $\lambda=i$和 $\mu(a_0+t1)=-it1$. 然而， F无法表示为带有 $\lambda\in\mathbb{R}$的(2.15)形式。$\Diamond$

例 2.9。在这个最后的例子中，我们再次考虑交换函数 F，但我们不假设其具有可加性，而是假设 F是一个双加性函数的迹，也就是说，存在一个双加性函数 $B\colon R\times R\to R$，使得对于每个 $x\in R$都有 $F(x)=B(x,x)$。因此，我们的假设写作

$$[B(x,x),x]=0 \tag{2.16}$$

对所有 $x\in R$成立。 $B(x,x)$的形式是什么？再次假设 R是一个素环。鉴于前面的例子，自然可以预期

$$B(x,x)=\lambda x^2+\mu(x)x+\nu(x,x) \tag{2.17}$$

对所有 $x\in R$成立，其中 λ是 C中的一个元素， μ是从 R到 C的加性函数，而 ν是从 $R\times R$到 C的双加性函数。在$\mathrm{char}(R)\neq 2$这一温和假设下，事实证明这确实成立。鉴于前一个例子的结果，对该结果进行猜想并不困难，但证明要复杂得多，此处暂不予给出。我们只提及，第一步很简单，即将(2.16)线性化为

$$[B(x,y)+B(y,x),z]+[B(z,x)+B(x,z),y]+[B(y,z)+B(z,y),x]=0 \tag{2.18}$$

对所有 x、y、$z\in R$均成立。这是一个函数恒等式，符合将在下一节讨论的一般理论。

可以进一步考虑一个交换函数 F，它是一个n-可加函数的迹，即其形式为

$$F(x)=B(x,\dots,x)$$

其中 B是一个 n-可加函数。正如人们可能猜想的那样，在适当的温和假设下，可以证明 $F(x)$是以下形式的表达式之和：

$$\lambda_i(x,\dots,x)x^i$$

其中 λ_i是一个从 R^{n-i}到 C的 $(n-i)$-可加函数。 $\Diamond$

函数恒等式理论实际上起源于对交换函数的研究。上述关于可交换加性函数以及双加性函数的交换迹的结果，早在作者 1990 年的博士论文中就已包含，并于几年后发表于 [37] 和 [38]。然而，通过双导子进行研究的思路，是在后来的论文 [56] 中提出的（之后， [75]也独立提出了这一思路）。关于双加性函数的交换迹，最初的结果要求额外的技术性假设，后来这一假设被去除了。关于交换函数，可参阅 [42] 中稍显过时但仍相当全面的综述。另请参阅 [62, 121] ，了解不一定源自多重可加函数的交换函数的相关结果，以及 [69, 76, 77, 102] 中关于迹的相关结果

这些多重可加函数在不对加法封闭的集合上是交换的。我们还要指出，如今双导子主要在李代数中研究，而且通常独立于函数恒等式理论（参见 [65, 74, 85, 103, 127, 129,136]及其中的参考文献）。

3. The general theory

本节将概述一般泛函恒等式理论中最重要的主题。我们将其分为若干小节。

3.1. d-自由集的定义。一般理论以 d-自由集这一概念为基础，因此我们先给出其定义。首先引入一些记号。

设 Q 是一个含幺环，其中心为 C，且 R 是 Q的非空子集。前面例子中 R 为子环的情形尤为重要，但一般理论考虑的是任意子集。

对于任意正整数 k，我们用 R^k 表示 k 个R的笛卡尔积。为方便起见，我们也记作 $R^0 = \{0\}$。设 m 为正整数，令x_1、.....、 $x_m \in R$，并且若 $m > 1$，则令 $1 \le i < j \le m$。我们记

$$\begin{aligned} \overline{x}_m &= (x_1, \dots, x_m) \in R^m, \\ \overline{x}_m^i &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \in R^{m-1}, \\ \overline{x}_m^{ij} = \overline{x}_m^{ji} &= (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1} \dots, x_m) \in R^{m-2}. \end{aligned}$$

设 I、 $J \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$。对于每个 $i \in I$ 和 $j \in J$，令

$$E_i : R^{m-1} \to Q \quad \text{and} \quad F_j : R^{m-1} \to Q$$

为任意函数。若 $m = 1$、 E_i 和 F_j 可视为 Q 中的元素。

一般理论建立在两个基本函数恒等式之上。第一个是

$$\sum_{i \in I} E_i(\overline{x}_m^i) x_i + \sum_{j \in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) = 0 \tag{3.1}$$

对所有 $\overline{x}_m \in R^m$ 均成立，而第二个是

$$\sum_{i \in I} E_i(\overline{x}_m^i) x_i + \sum_{j \in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) \in C \tag{3.2}$$

对所有 $\overline{x}_m \in R^m$ 均成立。显然，(3.1) 蕴含 (3.2)。因此，应将 (3.1) 和 (3.2) 视为相互独立的 FIs，也就是说，满足 (3.1) 的函数与满足 (3.2) 的函数并不相同。例 2.2 和例 2.3 或许能说明，为什么这两个表面上几乎相同的 FIs 都值得分别处理。

当（3.1）成立、因而（3.2）也成立时，一个自然的可能性是存在一些函数

$$\begin{aligned} &p_{ij} : R^{m-2} \to Q, \ \ i \in I, \ j \in J, \ i \ne j, \\ &\lambda_k : R^{m-1} \to C, \ \ k \in I \cup J, \end{aligned}$$

使得

$$
\begin{aligned}
E_i(\overline{x}^i_m) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) + \lambda_i(\overline{x}^i_m), \quad i \in I, \\
F_j(\overline{x}^j_m) &= -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m)x_i - \lambda_j(\overline{x}^j_m), \quad j \in J, \qquad (3.3)\\
&\lambda_k = 0 \quad \text{if} \quad k \notin I \cap J.
\end{aligned}
$$

事实上，直接可验证 (3.3) 蕴含 (3.1)（因此也蕴含 (3.2)）。我们称 (3.3) 为 FIs (3.1) 和 (3.2) 的标准解。

注 3.1. 按照惯例，关于 $\emptyset$ 的和为 0。因此，如果 $m = 1$，则应理解为 $p_{ij} = 0$ 和 λ_k 是 C 中的一个元素。

注 3.2. 注意，如果 E_i 和 F_j 是多线性非交换多项式，那么 (3.1) 就成为一个多重线性多项式恒等式。由于一般多项式恒等式的研究通常可以归约为多重线性多项式恒等式，因此，至少在形式上，可以将函数恒等式视为多项式恒等式的推广。

下面给出两个例子，讨论 (3.1) 和 (3.2) 的特殊情形及其标准解 (3.3)。

例 3.3. 考虑 $m = 3$、 $I = \{1, 2\}$ 和 $J = \{1, 3\}$ 的情形。此时 (3.1) 可写为

$$E_1(x_2, x_3)x_1 + E_2(x_1, x_3)x_2 + x_1F_1(x_2, x_3) + x_3F_3(x_1, x_2) = 0 \qquad (3.4)$$

对所有 x_1、 x_2、 $x_3 \in R$ 均成立。(3.4) 的标准解具有如下形式

$$
\begin{aligned}
E_1(x_2, x_3) &= x_3p_{13}(x_2) + \lambda_1(x_2, x_3),\\
E_2(x_1, x_3) &= x_1p_{21}(x_3) + x_3p_{23}(x_1),\\
F_1(x_2, x_3) &= -p_{21}(x_3)x_2 - \lambda_1(x_2, x_3),\\
F_3(x_1, x_2) &= -p_{13}(x_2)x_1 - p_{23}(x_1)x_2,
\end{aligned}
$$

其中 p_{13}、 p_{21}、 p_{23} 是从 R 到 Q 的任意函数，而 λ_1 是从 R^2 到中心 C 的任意函数。$\Diamond$

例 3.4. 若 $J = \emptyset$，则 (3.1) 和 (3.2) 变为

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}^i_m)x_i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i\in I} E_i(\overline{x}^i_m)x_i \in C,$$

并且根据备注 3.1 中提到的约定，这两个函数恒等式各自的标准解 (3.3) 简单地为 $E_i(\overline{x}^i_m) = 0.$。类似地，

$$\sum_{j\in J} x_jF_j(\overline{x}^j_m) = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{j\in J} x_jF_j(\overline{x}^j_m) \in C$$

其标准解为 $F_j(\overline{x}^i_m) = 0$ （比较例 2.4）。 $\Diamond$

现在我们可以给出基本定义，该定义最初发表于 [20]。

定义 3.5. 设 d 为正整数。集合 R 是 Q 的 d-自由子集，当且仅当对所有 $m \geq 1$ 以及所有 I、$J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$，以下两个条件均成立：

(a) 若 $\max\{|I|, |J|\} \leq d$，则 (3.1) 推出 (3.3)。(b) 若 $\max\{|I|, |J|\} \leq d-1$，则 (3.2) 推出 (3.3)。

因此，若基本 FI (3.1)（分别为 (3.2)）在至多涉及 d（分别为 $d-1$）个函数E_i，以及至多涉及 d（分别为 $d-1$）个函数 F_j 的条件下只有标准解，那么 R 就是 Q 的 d-自由子集。在 $I = J = \{1, \ldots, m\}$ 的基本情形下，我们可以讨论变量的数量，而不是函数的数量。

我们通常清楚所考虑的是哪个环 Q 。此时我们只需说， R 是一个 d-自由集。$R = Q$ 的情形特别值得关注。

定义 3.6. 若含幺环 R 是 d自由子集，则称其为 d自由环。

注 3.7. 根据定义，显然对每个 $d' < d$，“d自由”蕴含“d'自由”。

注 3.8. 根据定义，在 d自由子集上的标准解 (3.3) 是唯一的，当然前提是满足关于 $\max\{|I|, |J|\}$ 的条件。事实上，若

$$E_i(\overline{x}_m^i) = \sum_{\substack{j \in J, \\ j \neq i}} x_j p_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) + \lambda_i(\overline{x}_m^i)$$

并且

$$E_i(\overline{x}_m^i) = \sum_{\substack{j \in J, \\ j \neq i}} x_j p'_{ij}(\overline{x}_m^{ij}) + \lambda'_i(\overline{x}_m^i)$$

对于某些函数

$$p_{ij}, p'_{ij} : R^{m-2} \to Q, \ \ i \in I, \ j \in J, \ i \neq j,$$
$$\lambda_k, \lambda'_k : R^{m-1} \to C, \ \ k \in I \cup J$$

使得若 $\lambda_k = \lambda'_k = 0$，则 $k \notin I \cap J$，那么

$$\sum_{\substack{j \in J, \\ j \neq i}} x_j (p_{ij} - p'_{ij})(\overline{x}_m^{ij}) = (\lambda'_i - \lambda_i)(\overline{x}_m^i) \in C.$$

这是一个具有 $I = \emptyset$ 的 (3.2) 型函数恒等式，因此其标准解由零函数构成。由此很容易得出，在对 $\max\{|I|, |J|\}$、$p_{ij} = p'_{ij}$ 和 $\lambda_i = \lambda'_i$ 作适当假设时，结论成立。只需稍加注意，单独考虑 $i \notin J$ 的情形即可。细节留给读者。

注 3.9. 要证明一个集合 R 是 1-自由的，只需考虑条件 (a)，其中 I 和 J 都至多包含一个元素。例如，如果 R 包含单位元 1，那么它自动就是 1-自由的。证明 R 是 2-自由的这一问题则有趣得多。谈到 d-自由集时，我们通常指的是 $d \geq 2$。不过，在建立一般理论时，没有理由排除 $d = 1$ 这种情况。

注 3.10. 交换环绝不是 2-自由的。从例 2.2（以及例 3.4）可以明显看出这一点。

注 3.11。由于实际应用的需要，（a）和（b）这两个条件都确实不可或缺。它们看起来非常相似，因此人们可能会想知道它们是否真的彼此独立。这个问题实际上并不容易回答。不过，事实证明它们确实彼此独立，也就是说，人们构造出了既不能由（a）推出（b），也不能由（b）推出（a）的例子，见 [41]。

3.2. 对称分数次数。到目前为止，我们只知道，对于 $d \geq 2$，交换环绝不是 d-自由的（注 3.7 和 3.10），并且域上 $n \times n$ 矩阵构成的环不是 $d > n$ 的 d-自由的（例 2.4 和 3.4）。目前尚不清楚是否存在具有 $d \geq 2$ 的 d-自由集。在本小节中，我们暂不提供具体例子，而是给出一个技术条件，在该条件下子环是 d-自由的。

我们沿用上一小节中的记号，但额外假设 R 是一个子环。因此， Q 表示一个中心为 C 的含幺环，而 R 是它的一个（不一定含幺的）子环。上述条件的定义如下。

定义 3.12。元素 $t \in R$ 的对称分数次数（记作 d

$$\text{sf-deg}(t),$$

若大于某个非负整数 n （sf-次数(t) $> n$），则称其为.....，如果存在 a_k、 $b_k \in R$ 使得

$$\sum_k a_k t^i b_k = 0, \ \ i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

and

$$a = \sum_k a_k t^n b_k$$

满足以下条件：

(SF1) 若 $q \in Q$ 满足 $aRq = \{0\}$ 或 $qRa = \{0\}$，则 $q = 0$。

(SF2) 若 U、V： $R \to Q$ 是满足以下条件的函数

$$U(x)ya = axV(y)$$

对所有 x、 $y \in R$，存在一个 $q \in Q$ 使得

$$U(x) = axq, \ \ V(y) = qya$$

对所有 x、 $y \in R$。

我们定义 sf-deg(t) $= n$，若 sf-deg(t) $> n-1$，但 sf-deg(t) $\neq n$。如果对每个正整数 n，都有 sf-deg(t) $> n$，则记作 sf-deg(t) $= \infty$。

注3.13. 应当指出，sf-次数(t) $> n$意味着 sf-次数(t) $> n-1$（否则定义将毫无意义）。事实上，若 a_k、 b_k 是定义中对应于 sf-次数(t) $> n$ 情形的元素，那么 $a_k t$、 b_k 就适用于 sf-次数(t) $> n-1$ 情形。

注3.14. t 的对称分数次数取决于 R 和 Q，因此更恰当的写法应类似于 sf-次数$(t; R, Q)$，而不只是 sf-次数(t)。不过，根据上下文总能清楚地知道我们指的是哪种 R 和 Q。

对称分数次数的概念是对分数次数概念的一种变体，后者曾作为基本工具用于书籍 [53]。为了涵盖 Q 是对称商环之一的情形，它（在稍广泛的框架下）首次见于较近的论文 [46] 。基于分数次数的方法只能得到关于左商环的结果。由于 FIs 具有左右对称性，涉及对称商环似乎更为自然。此外，采用这一方法，我们将为对称闭素环得到一个确定性结果（定理 3.26）。

对称分数次数的定义可能显得相当复杂。为了初步了解这一概念，不妨考虑 $R = Q$ 是除环的情形。此时，每个非零元素 a 都满足 (SF1) 和 (SF2)（后者可通过取 $y = a^{-1}$ 属于 $U(x)ya = axV(y)$轻易推出）；只要 1、t、.....、t^n 关于中心线性无关，根据 Artin-Whaples 定理（我们在例 2.3 中已经用过），就能推出存在具有所需性质的 a_k、b_k。这里只是想说明，定义 3.12 并不像乍看上去那么难以理解。下一小节中我们将考察更一般的情形。

现在我们着重证明：如果 R 满足 $C_Q(R) = C$（即，来自 Q 的中心 C 中的元素，是 Q 中唯一与 R的所有元素交换的元素），那么，存在一个满足 sf-次数$(t) \geq d$ 的元素 $t \in R$，就意味着 R 是 Q的 d-自由子集。我们将给出完整证明，因为这一结果在 FI 理论中具有核心重要性。

我们需要引入一些技术性定义和附加记号。
给定 $t \in R$ 和 $H\colon\ R^p \to Q$，我们记作

$$H(x_i t) \text{ for } H(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i t, x_{i+1}, \ldots, x_p),$$
$$H(x_i t, x_j t) \text{ for } H(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i t, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j t, x_{j+1}, \ldots, x_p), \text{ etc.},$$

类似地，

$$H(t x_i) \text{ for } H(x_1, \ldots, x_{i-1}, t x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p),$$
$$H(t x_i, t x_j) \text{ for } H(x_1, \ldots, x_{i-1}, t x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, t x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p), \text{ etc.}$$

设 $1 \leq r \leq p$。我们定义 $\mathcal{L}_{r,t}(H)\colon\ R^p \to Q$ 为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{r,t}(H)(\overline{x}_p) = & t^{p-1} H(\overline{x}_p) - \sum_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ i \neq r}} t^{p-2} H(t x_i) \\ & + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq p, \\ i,j \neq r}} t^{p-3} H(t x_i, t x_j) \\ & - \sum_{\substack{1 \leq i < j < k \leq p, \\ i,j,k \neq r}} t^{p-4} H(t x_i, t x_j, t x_k)\end{aligned}$$

$$+\cdots+(-1)^{p-1}H(tx_1,\ldots,tx_{r-1},tx_{r+1},\ldots,tx_p).$$

类似地，我们定义 $\mathcal{R}_{s,t}(H)$：$R^p\to Q$，其中 $1\le s\le p$，为

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{s,t}(H)(\overline{x}_p)=&H(\overline{x}_p)t^{p-1}-\sum_{\substack{1\le i\le p,\\ i\neq s}}H(x_it)t^{p-2}\\&+\sum_{\substack{1\le i<j\le p,\\ i,j\neq s}}H(x_it,x_jt)t^{p-3}\\&-\sum_{\substack{1\le i<j<k\le p,\\ i,j,k\neq s}}H(x_it,x_jt,x_kt)t^{p-4}\\&+\cdots+(-1)^{p-1}H(x_1t,\ldots,x_{s-1}t,x_{s+1}t,\ldots,x_pt).\end{aligned}$$

例如，若 $s=2$ 且 $p=4$，则

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{2,t}(H)(x_1,x_2,x_3,x_4)\\&\quad=H(x_1,x_2,x_3,x_4)t^3\\&\quad-H(x_1t,x_2,x_3,x_4)t^2-H(x_1,x_2,x_3t,x_4)t^2-H(x_1,x_2,x_3,x_4t)t^2\\&\quad+H(x_1t,x_2,x_3t,x_4)t+H(x_1t,x_2,x_3,x_4t)t+H(x_1,x_2,x_3t,x_4t)t\\&\quad-H(x_1t,x_2,x_3t,x_4t).\end{aligned}$$

注意

$$\mathcal{L}_{r,t}(H_1+H_2)=\mathcal{L}_{r,t}(H_1)+\mathcal{L}_{r,t}(H_2)$$

and

$$\mathcal{R}_{s,t}(H_1+H_2)=\mathcal{R}_{s,t}(H_1)+\mathcal{R}_{s,t}(H_2).$$

如果存在函数 F：$R^{p-1}\to Q$，使得 H 可称为 $R^p\to Q$ 右 j-函数

$$H(\overline{x}_p)=x_jF(\overline{x}_p^j)$$

对所有 $\overline{x}_p\in R^p$都成立。任何由右 j-函数之和构成的函数都称为右函数。类似地，若存在函数$E:R^{p-1}\to Q$，使得 $K:R^p\to Q$ 是左 i-函数

$$K(\overline{x}_p)=E(\overline{x}_p^i)x_i$$

对所有 $\overline{x}_p\in R^p$都成立，而左函数是左 i-函数之和。我们指出，基本函数恒等式（3.1）考虑的是左函数等于右函数的情形。

下面继续介绍几个简单的引理。前两个无需证明。

引理 3.15。如果 H 是一个右 j-函数，那么 $\mathcal{R}_{s,\ t}(H)$ 也是如此。因此，如果 H 是一个右函数，那么$\mathcal{R}_{s,\ t}(H)$也是如此。

引理 3.16. 如果 H 是左 i-函数，那么$\mathcal{L}_{r,\ t}(H)$也是如此。因此，如果 H 是左函数，那么$\mathcal{L}_{r,\ t}(H)$也是如此。

引理 3.17. 如果 H 是左函数，也就是说，

$$H(\overline{x}_p) = \sum_{i=1}^{p} E_i(\overline{x}_p^i)x_i,$$

于是存在函数 $G_i\colon\ R^{p-1} \to Q$, $i = 0,1,\dots,p-2$，使得

$$\mathcal{R}_{s,t}(H)(\overline{x}_p) = \sum_{i=0}^{p-2} G_i(\overline{x}_p^s)x_s t^i + E_s(\overline{x}_p^s)x_s t^{p-1}$$

对所有 $\overline{x}_p \in R^p$ 均成立。

证明。若 $H(\overline{x}_p) = E_s(\overline{x}_p^s)x_s$，也就是说，若 H 是左 s-函数，则引理显然成立。因此，只需证明 $\mathcal{R}_{s,\,t}(H) = 0$，其中 H 是左 i-函数，且 $i \neq s$。我们将对 $s = 1$ 和 $i = 2$ 证明这一点。其余情形可类似处理。

因此，我们假设 $H(\overline{x}_p) = E(\overline{x}_p^2)x_2$。首先注意，根据 $\mathcal{R}_{1,\,t}(H)(\overline{x}_p)$ 的定义，前两项相互抵消。接下来的项 $-H(x_i t)t^{p-2}$，其中 $i \geq 3$，与下一求和式中的项 $H(x_2 t, x_i t)t^{p-3}$ 相互抵消。接着，项 $H(x_i t, x_j t)t^{p-3}$，其中 $3 \leq i < j \leq p$，与项$-H(x_2 t, x_i t, x_j t)t^{p-4}$相互抵消。如此继续下去，最后注意到，项 $(-1)^{p-2}H(x_3 t, \dots, x_p t)t$ 与 $(-1)^{p-1}H(x_2 t, x_3 t, \dots, x_p t)$ 相互抵消。□

以下引理可用类似方法证明。

引理 3.18. 如果 H 是一个右函数，即:

$$H(\overline{x}_p) = \sum_{j=1}^{p} x_j F_j(\overline{x}_p^j),$$

那么存在函数 $K_j\colon\ R^{p-1} \to Q$, $j = 0,1,\dots,p-2$，使得

$$\mathcal{L}_{r,t}(H)(\overline{x}_p) = \sum_{j=0}^{p-2} t^j x_r K_j(\overline{x}_p^r) + t^{p-1}x_r F_r(\overline{x}_p^r)$$

对所有 $\overline{x}_p \in R^p$ 均成立。

现在我们可以证明此前所述的定理了。

定理 3.19. 设 Q 是一个中心为 C 的含幺环，且设 R 是 Q 的一个子环，使得 $C_Q(R) = C$。设 $d \geq 1$。如果 R 包含一个元素 t，满足 sf-次数$(t) \geq d$，则 R 是 Q 的一个 d-自由子集。

证明。我们的目标是证明定义 3.5 中的条件 (a) 和 (b) 均成立。因此，我们将关注函数恒等式 (3.1) 和 (3.2)。我们指出，对于变量 x_i with $i \in I$ （分别为 x_j with $j \in J$），我们将考察算子 $\mathcal{R}_{s,t}$ （分别为 $\mathcal{L}_{r,t}$）；因此， p 的角色将由 $|I|$ （分别为 $|J|$）承担。事实上，变量 m 的数量可能多于 p，但在处理 $\mathcal{R}_{s,t}$ 和 $\mathcal{L}_{r,t}$ 时，这些额外变量将视为固定不变。

我们先证明 (a)。因此，假设函数 E_i、F_j 满足 (3.1)，且其最大值为 $\{|I|, |J|\} \leq d$。我们要证明它们具有 (3.3) 的形式。

假设 $I \neq \emptyset$。选取 $s \in I$，并将算子 $\mathcal{R}_{s,\ t}$ 作用于函数恒等式 (3.1)。利用引理 3.15 和 3.17，我们可知存在函数 G_i、H_j：$R^{m-1} \to Q$，使得

$$\sum_{i=0}^{|I|-2} G_i(\overline{x}_m^s)x_s t^i + E_s(\overline{x}_m^s)x_s t^{|I|-1} + \sum_{j\in J} x_j H_j(\overline{x}_m^j) = 0 \tag{3.5}$$

对所有 $\overline{x}_m \in R^m$ 均成立。

根据假设，存在 $t \in R$ 和 a_k、$b_k \in R$，使得

$$\sum_k a_k t^i b_k = 0,\ \ i = 0, 1, \ldots, d-2,$$

and

$$a = \sum_k a_k t^{d-1} b_k$$

满足定义 3.12 中的条件 (SF1) 和 (SF2)。在 (3.5) 中用 $x_s a_k$ 替换 x_s，并将所得恒等式右乘 $t^{d-|I|}b_k$（这里用到了 $|I| \leq d$）。对 k 求和，得到

$$E_s(\overline{x}_m^s)x_s a + \sum_{j\in j} x_j L_j(\overline{x}_m^j) = 0 \tag{3.6}$$

对于某些函数 $L_j : R^{m-1} \to Q$。

若 $J = \emptyset$，则由 (3.6) 可知 $E_s = 0$，因为 a 满足 (SF1)。这意味着在此情形下 (3.3) 成立。因此，我们可以假设 $J \neq \emptyset$，并且类似地，假设 $I \neq \emptyset$。此外，这也表明现在只需证明函数 E_i 具有 (3.3) 的形式。事实上，假设这一点成立，我们可以将 (3.1) 写为

$$\sum_{j\in J} x_j \Big(F_j(\overline{x}_m^j) + \sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} p_{ij}(\overline{x}_m^{ij})x_i + \lambda_j(\overline{x}_m^j) \Big) = 0,$$

这是一个具有 $I = \emptyset$ 的 (3.1) 型函数恒等式，这意味着

$$F_j(\overline{x}_m^j) + \sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} p_{ij}(\overline{x}_m^{ij})x_i + \lambda_j(\overline{x}_m^j) = 0;$$

这意味着函数 F_j 具有所需的形式。

取 $r \in J$ 并将 $\mathcal{L}_{r,\ t}$ 应用于 (3.6)。利用引理 3.16 和 3.18，可知存在函数 $\widehat{E}$，$K_j : R^{m-1} \to Q$，使得

$$\widehat{E}(\overline{x}_m^s)x_s a + \sum_{j=0}^{|J|-2} t^j x_r K_j(\overline{x}_m^r) + t^{|J|-1} x_r L_r(\overline{x}_m^r) = 0.$$

将 x_r 替换为 $b_k x_r$，从左侧乘以 $a_k t^{d-|J|}$，并对 k 求和，我们得到

$$\widetilde{E}(\overline{x}_m^s)x_s a = -a x_r L_r(\overline{x}_m^r) \tag{3.7}$$

对于某个函数 $\widetilde{E}\colon\ R^{m-1}\to Q$。如果 $r\neq s$，那么我们可以使用 (SF2)（其中除 x_s 和 x_r 之外的所有变量均视为固定变量）。因此，存在一个 $p_{sr}(\overline{x}_m^{sr})\in Q$，使得

$$-L_r(\overline{x}_m^r)=p_{sr}(\overline{x}_m^{sr})x_sa.$$

如果 $s\in J$ 且 $r=s$，那么我们在（3.7）中用 y_sx_s 替换 x_s，得到

$$\big(\widetilde{E}(\overline{x}_m^s)y_s\big)x_sa=ay_s\big(-x_sL_s(\overline{x}_m^s)\big).$$

注意，我们再次可以使用（SF2）。因此，特别地，存在一个 $\lambda_s(\overline{x}_m^s)\in Q$，使得

$$-x_sL_s(\overline{x}_m^s)=\lambda_s(\overline{x}_m^s)x_sa.$$

因此，

$$y_s\lambda_s(\overline{x}_m^s)x_sa=-y_sx_sL_s(\overline{x}_m^s)=\lambda_s(\overline{x}_m^s)(y_sx_s)a.$$

这意味着

$$[y_s,\lambda_s(\overline{x}_m^s)]x_sa=0.$$

利用（SF1），我们看到 $\lambda_s(\overline{x}_m^s)$ 属于 $C_Q(R)$，而根据我们的假设，这等于 C。若 $s\notin J$，令 $\lambda_s(\overline{x}_m^s)=0$，于是我们看到（3.6）可以写成

$$\Big(E_s(\overline{x}_m^s)-\sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq s}}x_jp_{sj}(\overline{x}_m^{sj})-\lambda_s(\overline{x}_m^s)\Big)x_sa=0.$$

再次应用 (SF1)，可得 E_s 具有 (3.3) 的形式。至此，(a) 的证明完成。

下面证明 (b)。因此，假设

$$\mu(\overline{x}_m)=\sum_{i\in I}E_i(\overline{x}_m^i)x_i+\sum_{j\in J}x_jF_j(\overline{x}_m^j)\in C \tag{3.8}$$

and $\max\{|I|,|J|\}\leq d-1$. 由于 (a) 成立，只需证明 $\mu(\overline{x}_m)=0$

取 $s\in I$ 并将 $\mathcal{R}_{s,\,t}$ 应用于（3.8）。利用引理 3.15 和 3.17，我们看到存在函数 G_i、$H_j\colon\ R^{m-1}\to Q$ 以及 $\mu_i\colon\ R^m\to C$，满足

$$\mu(\overline{x}_m)t^{|I|-1}+\sum_{i=0}^{|I|-2}\mu_i(\overline{x}_m)t^i=\sum_{i=0}^{|I|-1}G_i(\overline{x}_m^s)x_st^i+\sum_{j\in J}x_jH_j(\overline{x}_m^j). \tag{3.9}$$

设 t 如上，并将 x_s 替换为 x_st。这给出

$$\sum_{i=0}^{|I|-1}\mu_i'(\overline{x}_m)t^i=\Big(\sum_{i=0}^{|I|-1}G_i(\overline{x}_m^s)x_st^i\Big)t+\sum_{j\in J}x_jH_j'(\overline{x}_m^j)$$

对于某些函数 $H_j'\colon\ R^{m-1}\to Q$ 和 $\mu_i'\colon\ R^m\to C$。利用（3.9）可以改写右端的第一项求和，从而得到

$$\mu(\overline{x}_m)t^{|I|}+\sum_{i=0}^{|I|-1}\mu_i''(\overline{x}_m)t^i=\sum_{j\in J}x_jL_j(\overline{x}_m^j) \tag{3.10}$$

其中 $L_j\colon\ R^{m-1}\to Q$ 以及 $\mu_i''\colon\ R^m\to C$。

取 $r \in J$ 并将 $\mathcal{L}_r$, t 应用于（3.10）。根据引理 3.18，右侧变为

$$\sum_{j=0}^{|J|-2} t^j x_r K_j(\overline{x}_m^r) + t^{|J|-1} x_r L_r(\overline{x}_m^r), \tag{3.11}$$

而左侧由来自 Ct^i 的项构成。因此，表达式 (3.11) 与 t可交换，从而得到

$$t^{|J|} x_r L_r(\overline{x}_m^r) + \sum_{j=0}^{|J|-1} t^j x_r M_j(\overline{x}_m^r) = 0$$

对某些函数 M_j： $R^{m-1} \to Q$。令 a_k, b_k 为 sf-次数(*t*) 定义中的元素。将 x_r 替换为 $b_k x_r$，从左侧乘以 $a_k t^{d-|J|-1}$ （这里用到 $d - |J| - 1 \geq 0$），并对 k 求和，得到

$$a x_r L_r(\overline{x}_m^r) = 0,$$

由 (SF1) 可得 $L_r(\overline{x}_m^r) = 0$。因此，(3.10) 的右侧为零，左侧也就为零。从左侧乘以

$$\mu(\overline{x}_m) t^{|I|} + \sum_{i=0}^{|I|-1} \mu_i''(\overline{x}_m) t^i = 0$$

从左侧乘以 $a_k t^{d-|I|-1}$，从右侧乘以 b_k，并对 k 求和，得到$\mu(\overline{x}_m)a = 0$。再次使用 (SF1)，最终得到 $\mu(\overline{x}_m) = 0$。□

3.3. *d*-自由素环。我们的目标现在是证明定理 3.19 适用于素环。从一个素环 R 出发，自然需要找到一个合适的环 Q ，以便计算 R 中元素的对称分式可除度。为此，我们将定义极大对称商环，该概念由 [90]引入并加以研究。

我们首先回顾，环 R 的左理想 L 是稠密的，当且仅当对于任意满足$x_1 \neq 0$ 的 x_1、$x_2 \in R$，都存在一个 $r \in R$，使得 $rx_1 \neq 0$ 且 $rx_2 \in L$。稠密右理想T 的定义类似，即对于任意满足 $x_1 \neq 0$ 的 x_1、 $x_2 \in R$，都存在一个 $s \in R$，使得 $x_1 s \neq 0$ 且 $x_2 s \in T$。

定义 3.20。设 R 是一个环。若环 $Q = Q_{ms}(R)$ 满足以下条件，则称其为 R 的极大对称商环：

(a') R 是 Q的子环。(b') 对每个 $q \in Q$ ，都存在 R 的稠密左理想 L 和 R 的稠密右理想 T，使得 $Lq \subseteq R$ 和 $qT \subseteq R$。(c') 对每个非零的 $q \in Q$、 R的每个稠密左理想 L 以及 R的每个稠密右理想 T，都有 $Lq \neq \{0\}$ 和 $qT \neq \{0\}$。(d') 若 L 是 R的稠密左理想， T是 R的稠密右理想，且 $E : L \to R$、$F : T \to R$ 是满足对所有 $x \in L$ 和所有$y \in T$都有 $E(x)y = xF(y)$的函数，则存在一个 $q \in Q$ ，使得对所有 $x \in L$ 都有 $E(x) = xq$ ，且对所有 $y \in T$都有$F(y) = qy$。

与定义 2.6 中一样，我们没有假设 (d) 中的 E 和 F 分别是左、右 R-模同态。证明这一假设是不必要的，其思路与注 2.7 中给出的证明基本相同。

我们只关注 R 为素环的情形，因此不妨作此假设。于是，极大对称商环 $Q_{ms}(R)$ 存在，且在同构意义下唯一，并包含对称 Martindale 商环 $Q_s(R)$ 作为子环。另一方面， $Q_{ms}(R)$ 包含于极大左商环 $Q_{ml}(R)$ 中；关于后者的定义和性质，见 [30] 或 [89]。所有环 $Q_s(R)$、 $Q_{ms}(R)$ 和 $Q_{ml}(R)$ 的中心相同，即扩张中心 C。此外，若 Q 是这三个环中的任意一个，则

$$C_Q(R) = C \tag{3.12}$$

（见 [30, 注 2.3。1]）。 $Q_{ms}(R)$ 的另一个重要性质是，与 $Q_s(\cdot)$ 不同， $Q_{ms}(\cdot)$ 是一个闭包运算 [90],，即

$$Q_{ms}(Q_{ms}(R)) = Q_{ms}(R). \tag{3.13}$$

以下引理对于计算素环 R 中元素相对于 $Q = Q_{ms}(R)$ 的对称分数次数至关重要。

引理 3.21. 设 R 是一个素环。若 a、 b 是 R 中的非零元素，且U、V: $R \to Q_{ms}(R)$ 是满足下列条件的函数

$$U(x)ya = bxV(y) \tag{3.14}$$

对所有 x、 $y \in R$ 均成立，则存在一个 $q \in Q_{ms}(R)$，使得

$$U(x) = bxq, \ \ V(y) = qya$$

对所有 x、 $y \in R$ 均成立。

证明。将 $x + x'$ 代入 (3.14) 中的 x，我们推得

$$\big(U(x + x') - U(x) - U(x')\big)ya = 0$$

对所有 x、 x'、 $y \in R$ 均成立。也就是说，

$$\big(U(x + x') - U(x) - U(x')\big)I = \{0\}$$

其中 I 是由 a 生成的 R 的理想。注意，素环的每个非零理想都是稠密的右理想（或左理想）。因此，(c') 蕴含

$$U(x + x') = U(x) + U(x')$$

对所有的 $x, x' \in R$。

接下来，对所有的 $x, y, z \in R$，我们有

$$bxU(y)za = bx(byV(z)) = b(xby)V(z) = U(xby)za.$$

因此，

$$\big(U(xby) - bxU(y)\big)za = 0,$$

这如上所述意味着

$$U(xby) = bxU(y) \tag{3.15}$$

对所有 $x, y \in R$。

对 $Q_{ms}(R)$，记 Q。我们断言， $L = QbR$ 是 Q的一个稠密左理想。为证明这一点，取满足 $y_1 \neq 0$的 $y_1, y_2 \in Q$。根据 (b')，存在 R的一个稠密左理想 L'，使得 $L'y_2 \subseteq R$ 成立。由 (c')，存在一个 $u' \in L'$ 使得 $u'y_1 \neq 0$。由于 L包含 RbR，而后者是 R 的一个非零理想，因此也是 R的一个稠密左理想，(c') 还推出，对于某个 $u \in L$，有 $u(u'y_1) \neq 0$。因此，元素 $q = uu'$ 满足 $qy_1 \neq 0$ 和 $qy_2 \in L$。这就证明了我们的断言。

令 $E : L \to Q$ 定义如下：

$$E\Big(\sum_i q_i b y_i\Big) = \sum_i q_i U(y_i).$$

我们必须证明 E 定义良好。因此，假设 $\sum_i q_i b y_i = 0$。根据 (b')，对于每个 i，我们都可以选取 R 的一个稠密左理想 L_i，使得 $L_i q_i \subseteq R$。注意到，$L = \bigcap_i L_i$ 也是 R的一个稠密左理想，并且对于每个i，都有 $Lq_i \subseteq R$。取 $y \in L$。由于 $yq_i \in R$ 且 U 是一个加性函数，因此我们有

$$\sum_i U(yq_i b y_i) = U\Big(y \cdot \sum_i q_i b y_i\Big) = 0. \tag{3.16}$$

由 (3.15)，$U(yq_i b y_i) = byq_i U(y_i)$。因此，由 (3.16) 可得

$$I\widehat{L}\Big(\sum_i q_i U(y_i)\Big) = \{0\},$$

其中 I 是由 b生成的 R 的理想。由于 I 和 L 都是稠密左理想，由 (c') 可得 $\sum_i q_i U(y_i) = 0$。这证明了 E 定义良好。

对上述论证作显而易见的修改，可以证明 $T = RaQ$是 Q 的一个稠密右理想，并且 V 是一个满足下式的加性函数

$$V(xay) = V(x)ya$$

对于所有 $x, y \in R$，由此我们推得 $F : T \to Q$ 由下式给出

$$F\Big(\sum_j z_j a s_j\Big) = \sum_j V(z_j) s_j$$

是一个定义良好的函数。

利用 (3.14)，我们看到函数 E 和 F 之间的关系如下：

$$\begin{aligned} E\Big(\sum_i q_i b y_i\Big)\Big(\sum_j z_j a s_j\Big) &= \sum_{i,j} q_i U(y_i) z_j a s_j \\ &= \sum_{i,j} q_i b y_i V(z_j) s_j = \Big(\sum_i q_i b y_i\Big) F\Big(\sum_j z_j a s_j\Big). \end{aligned}$$

因此，我们可以利用 (d') 得到一个元素 $q \in Q_{ms}(Q)$，使得对于所有 $u \in L$， $E(u) = uq$；并且对于所有 $v \in T$， $F(v) = qv$。因此，

$$U(x) = E(bx) = bxq$$

对于所有 $x \in R$，并且

$$V(y) = F(ya) = qya$$

对于所有 $y \in R$。最后，(3.13) 告诉我们， q 实际上属于 Q。证明至此完成。□

现在我们可以将强分数次数与以下较为熟悉的概念联系起来。对于素环 R 中的元素 t 和正整数 n，我们记作

$$\deg(t) = n$$

如果 t 在扩张中心 C 上是次数为 n 的代数元。若 t 在 C 上不是代数元，则记 $\deg(t) = \infty$。

引理 3.22. 设 R 为素环，且 $Q = Q_{ms}(R)$。那么对每个 $t \in R$，都有 sf-次数$(t) = \deg(t)$。

证明。假设 $\deg(t) > n$。那么 $1, t, \dots, t^n$ 在 C 上线性无关，因此存在 $a_k, b_k \in R$ 使得 $\sum_k a_k t^i b_k = 0$, $i = 0, 1 \dots, n-1$, 且$a = \sum_k a_k t^n b_k \neq 0$ [30, 定理 2.3.3]。引理 3.21 （对于 $b = a$ ）表明 a 满足条件 (SF2)。 R 的素性意味着 a 也满足条件 (SF1)。因此，sf-次数$(t) > n$。

反过来，sf-$\deg(t) > n$ 意味着 $\deg(t) > n$。这是因为，只有在 t^n 不属于 $1, t, \dots, t^{n-1}$ 的线性张成时， $\sum_k a_k t^i b_k = 0$,$i = 0, 1, \dots, n-1$ 才能与 $\sum_k a_k t^n b_k \neq 0$ 同时成立。□

对于任意素环 R，我们定义

$$\deg(R) = \sup\{\deg(t) \mid t \in R\}.$$

众所周知，$\deg(R) \leq n < \infty$ 当且仅当 R 满足 s_{2n}，即次数为 $2n$ 的标准多项式恒等式。等价地， R 可以嵌入到域上的$n \times n$ 阶矩阵环中（更准确地说， R的中心商环是一个维数至多为 n^2的中心单代数）。

现在我们可以证明基本定理了。

定理 3.23. 设 R 是一个素环，且设 $d \geq 1$。那么， R 是 $Q = Q_{ms}(R)$ 的 d-自由子集，当且仅当 $\deg(R) \geq d$。

证明。假设 $\deg(R) \geq d$。取 $t \in R$, 使得 $\deg(t) \geq d$。由引理 3.22，sf-$\deg(t) \geq d$, 因此定理 3.19 表明， R 是 Q的一个 d-自由子集。

若 $\deg(R) < d$，则 R 可嵌入到 $M_{d-1}(Z)$中，其中 Z 是一个域；我们基本上可以重复例 2.4 中的论证，以证明 R 不是 Q的一个 d-自由子集；详情见 [53, 推论 4.21 和定理 C。2] □

定理 3.23 摘自笔者的论文 [46], ，但无论如何都应归功于 Beidar [12] （他推广了笔者此前得到的 $d = 2$ 情形的一个版本 [39]） 。事实上，Beidar 定理涉及的是 $Q_{ml}(A)$，而非 $Q_{ms}(A)$，但这只是一个技术性问题。

在定理 3.23 中，不能用 $Q_s(R)$ 代替 $Q_{ms}(R)$；反例见 [46, 推论 4.3] 。主要障碍在于 $Q_s(\cdot)$ 不是一个闭包运算。因此，自然的做法是将讨论限制在满足 $Q_s(R) = R$ 的素环 R 上。它们称为对称闭素环。

对引理 3.21 的证明作一些相当明显的修改（实际上是简化），即可证明以下结论。

引理 3.24. 设 R 是对称闭素环。若 a、b 是 R 中的非零元素，且 U、V：$R \to R$ 是满足下式的函数

$$U(x)ya = bxV(y)$$

对所有 x、$y \in R$ 均成立，则存在一个 $q \in R$ 使得

$$U(x) = bxq, \ V(y) = qya$$

对所有 x、$y \in R$ 均成立。

由此立即得到引理 3.22 的如下版本。

引理 3.25. 设 $R = Q$ 是对称闭素环。则对于每个 $t \in R$，sf-次数(t) $=$ deg(t)。

重复定理 3.23 的证明，但将引理 3.22 换成引理 3.25，我们得到以下定理。

定理 3.26. 设 R 是一个对称闭素环，且设 $d \geq 1$。那么 R 是一个 d-自由环，当且仅当 deg(R) $\geq d$。

我们指出，[46, 推论 4.2] 表明，在定理 3.26 中不能用“中心闭”替换“对称闭”。

与定理 3.23 相比，定理 3.26 的明显优点是它不涉及比 R 更大的环。另一方面，它考察的环类要小得多。尽管如此，这一类仍包含一些重要的例子。首先，单含幺环显然是对称闭的，因此有以下推论。

推论 3.27. 设 R 是一个单含幺环，且设 $d \geq 1$。那么 R 是一个 d-自由环，当且仅当 R 在其中心上的维数至少为 d^2。

因此，若 R 关于其中心是无限维的，则对于每个 $d \geq 1$，它都是 d-自由的。推论 3.27 中最简单但也最重要的情形如下。

推论 3.28. 设 F 是一个域。环 $M_d(F)$ 是 d-自由的，但不是 $(d+1)$-自由的。

事实上，关于单含幺环 R，还可以说得更多。也就是说，涉及值域属于任意含幺 R-双模的函数的 FIs，可以用大致相同的方法处理；见 [53,推论 2.21]。

另一个重要的对称闭素环例子是非交换自由代数 [86, 113]。

推论 3.29. 设 F是一个域。至少含有两个不定元的自由代数 $F\langle X_1, X_2, \dots \rangle$，对于每个 $d \geq 1$ 都是一个 d-自由环。

本小节和前一小节中给出的证明，基于一种直接建立 d-自由性的方法。书籍 [53]，中处处使用的更标准方法，则基于更一般的（$t; d$）-自由性概念。它稍微复杂一些（尤其是在记号方面），因此我们决定不

在这篇介绍性论文中详细讨论这一方法。接下来的几段中，我们只给出一些基本信息。

我们首先介绍必要的记号。与本节开头一样，设 Q 是一个以 C 为中心的含幺环，设 R 是 Q 的非空子集，设 m 是一个正整数，并设 I 和 J 是 $\{1,\dots,m\}$ 的子集。此外，设 a、b 为非负整数，并且对于所有 $i\in I$、$0\le u\le a$ 以及 $j\in J$、$0\le v\le b$，令

$$E_{iu}:R^{m-1}\to Q \quad\text{and}\quad F_{jv}:R^{m-1}\to Q$$

为任意函数。

固定一个元素 $t\in Q$，并考虑以下恒等式：

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a}E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_it^u+\sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b}t^vx_jF_{jv}(\overline{x}_m^j)=0 \tag{3.17}$$

对所有 $\overline{x}_m\in R$，以及

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a}E_{iu}(\overline{x}_m^i)x_it^u+\sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b}t^vx_jF_{jv}(\overline{x}_m^j)\in C \tag{3.18}$$

对所有 $\overline{x}_m\in R$。注意，如果存在函数，则（3.17）成立，从而（3.18）也成立

$$\begin{aligned}&p_{iujv}:R^{m-2}\to Q,\ \ i\in I,\ j\in J,\ i\ne j,\ 0\le u\le a,\ 0\le v\le b,\\&\lambda_{kuv}:R^{m-1}\to C,\ \ k\in I\cup J,\ 0\le u\le a,\ 0\le v\le b,\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}E_{iu}(\overline{x}_m^i) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ j\ne i}}\sum_{v=0}^{b}t^vx_jp_{iujv}(\overline{x}_m^{ij})+\sum_{v=0}^{b}\lambda_{iuv}(\overline{x}_m^i)t^v,\\ F_{jv}(\overline{x}_m^j) &= -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\ne j}}\sum_{u=0}^{a}p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij})x_it^u-\sum_{u=0}^{a}\lambda_{juv}(\overline{x}_m^j)t^u,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\lambda_{kuv}=0 \quad\text{if}\quad k\notin I\cap J$$

对所有 $\overline{x}_m\in R$, $i\in I$, $j\in J$, $0\le u\le a$, $0\le v\le b$ 均成立。我们称 (3.19) 为 (3.17) 以及 (3.18) 的标准解。

定义 3.30. 设 d 为一个正整数，且设 $t\in Q$。如果对所有 $m\ge 1$、所有 $I,J\subseteq\{1,2,\dots,m\}$ 以及所有 $a,b\ge 0$，以下两个条件均成立，则称集合 R 为 Q 的 $(t;d)$-自由子集：

(a) 若 $\max\{|I|+a,|J|+b\}\le d$，则 (3.17) 推出 (3.19)。(b) 若 $\max\{|I|+a,|J|+b\}\le d-1$，则 (3.18) 推出 (3.19)。

注意，当 $a=b=0$ 时，(3.17) 化简为 (3.1)，(3.18) 化简为 (3.2)，而 (3.19) 化简为 (3.3)。因此，以下结论成立：

R 是 Q 的一个（t；d）-自由子集，其中某个 $t\implies R$ 是 Q的一个 d-自由子集。

事实上，证明一个集合是 d-自由集的一种常见方法，是证明它对于某个 t是（t；d）-自由的。在具体情形中，“d-自由”和“对于某个 t是（t；d）-自由的”之间并没有太大区别。不过，下面的定理 3.38 和 3.39 表明，更一般的（t；d）-自由集有助于发现 d-自由集的新例子。

众所周知，若$t \in R$ 满足 $\deg(t) \geq d$ [53, 定理 5.11]，则素环 R 是 $Q_{ml}(R)$的一个$(t;d)$-自由子集。在此陈述中，我们可以用 $Q_{ms}(R)$替换$Q_{ml}(R)$。

定理 3.31. 设 R 为一个素环，且 $d \geq 1$。若 $t \in R$ 满足 $\deg(t) \geq d$，则 R 是 $Q_{ms}(R)$的一个$(t;d)$-自由子集。

证明与 [53, 定理 5.11] 的证明有几处细节不同。所需的修改很容易完成。不过，有一点乍看之下可能并不那么明显。它涉及以下情形： U_0、U_1、...、U_n 和 V是从 R 到 $Q = Q_{ms}(R)$的函数，使得

$$U_0(x)y + U_1(x)yt + \cdots + U_n(x)yt^n = bxV(y) \tag{3.20}$$

对所有 x、$y \in R$，其中 b 是 R 和 $n < d$中的一个非零元素。目标是证明存在 q_0、q_1、...、$q_n \in Q$，使得

$$V(y) = q_0y + q_1yt + \cdots + q_nyt^n \tag{3.21}$$

对所有的 $y \in R$。为证明这一点，我们使用 [30, 定理 2.3.3]，找出 $a_k, b_k \in R$，使得 $\sum_k a_k t^i b_k = 0$, $i = 0, 1 \ldots, n-1$，并且 $a = \sum_k a_k t^n b_k \neq 0$。令 ya_k 表示y，将由此得到的关系右乘 b_k，并对 k 求和，得到

$$U_n(x)ya = bx\overline{V}(y)$$

对所有的 $x, y \in R$ 以及某个新的函数 $\overline{V}$。引理 3.21 告诉我们，存在一个$q_n \in Q$，使得特别地，$U_n(x) = bxq_n$ 对所有的 $x \in R$ 都成立。类似地，我们看到$U_i(x) = bxq_i$ 对所有的 $x, y \in R$ 以及某个 $q_i \in Q$ 都成立。因此，(3.20) 变为

$$bx\big(V(y) - q_0y - q_1yt - \cdots - q_nyt^n\big) = 0$$

对所有的 $x, y \in R$。因此，利用 (c') 可得 (3.21)。

有了这些内容，感兴趣的读者应该能够遵循 [53] 中的论证，给出定理 3.31 的完整证明。

最后提一下，对 d-自由性的研究并不局限于素环。特别是，更一般的半素环 [53, 第 5 节 3]，以及冯·诺依曼代数 [1]，的 d- 自由性也已得到充分理解。此外，以下结果是推论 3.28 的推广，值得一提。

T定理 3.32. 若 S 是任意含幺环，则矩阵环 $R = M_d(S)$ 是 d-自由的。

我们指出，环 $R = M_d(S)$ 是素环（分别为半素环）当且仅当 S 是素环（分别为半素环），因此该定理独立于前述结果。此外，与单含幺环的情形一样，我们可以考虑涉及函数的 FIs，这些函数的值域不一定在 R 中，也可以在任意含幺 R-双模中，见 [53, 推论 2.22]。

人们可能会想知道关于三角环能够得出哪些结论。下面这个简单的例子表明，在其 d 自由性方面，我们面临着严重的限制。

例3.33. 设 S 为任意含幺环（可以是域），令 $R = T_n(S)$、$n \geq 2$为所有在 S上的上三角矩阵组成的环。注意，矩阵单位e_{1n} 满足

$$e_{1n}[x_1, x_2] = 0$$

对所有 x_1、$x_2 \in R$。这意味着

$$E : R \to R,\ E(x) = e_{1n}x,$$

是满足以下条件的非零函数

$$E(x_1)x_2 - E(x_2)x_1 = 0$$

对所有 x_1、$x_2 \in R$。因此，R 甚至不是一个 2-自由环（无论 n 如何）。 ♢

尽管如此，文献 [32, 72, 133] 仍成功研究了上三角矩阵环以及更一般的三角环中的一些特殊函数恒等式。

3.4. 从已有的 d-自由集合构造新的集合。现在，我们旨在介绍若干结果，以说明可以从已有的 d-自由集合构造新的集合。与前一小节不同，这些集合不一定是子环。结合上述结果，这将使我们能够给出各种具体的 d-自由集合示例。

我们将在本小节陈述这些结果而不提供证明。这些结果大多自成一体，但论证颇为复杂。除定理 3.37 外，本小节的其他定理均与详细证明一同刊载于书籍 [53]中；定理 3.37 则是较新的结果，出自 2016年论文 [47], 。原始文献如下: [15, 17, 20, 28]。

我们将采用如今已成标准的记号。特别地，Q 表示一个中心为 C的含幺环，R 表示它的非空子集，d 表示一个正整数。

条件“ R 是 d-自由的”表明，从某种意义上说，R 很大。因此，我们的第一个结果十分自然。

定理 3.34. 设 R 是 Q的一个 d-自由子集。若 T 是 Q 的任意子集，且满足$R \subseteq T$，则 T 也是 Q 的一个 d-自由子集。

鉴于陈述本身很简单，证明却不像预想的那样简单。证明基于对 d-自由子集这一概念的某种推广，其中涉及定义在 $R_1 \times \cdots \times R_m$上的函数 E_i、F_j，而 R_i可以是 Q的不同子集。

所有形如以下形式的上三角矩阵的集合

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix},$$

其中，x 和 y 是环 Q中的元素，在标准矩阵˜运算下构成一个环。我们将其记为 Q。

定理 3.35. 设 R 是 Q的一个 d-自由子集。如果 $\delta : R \to Q$ 是任意函数，那么所有形如以下形式的矩阵构成的集合

$$\begin{bmatrix} x & \delta(x) \\ 0 & x \end{bmatrix},$$

~其中 $x \in R$ 是 Q 的一个 d-自由子集。

该定理的动机在于这样一个观察：在假设 R 是一个子环的条件下，映射 δ : $R \to Q$ 是一个导子，当且仅当映射~φ : $R \to Q$,

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} x & \delta(x) \\ 0 & x \end{bmatrix},$$

是一个同态。这使得该定理成为一种有用的工具，可将某些关于导子的问题化归为类似的关于同态的问题。

我们用 Q^{op} 表示环 Q 的逆环。

定理 3.36. 设 R 是 Q 的一个 d-自由子集。那么，集合 $\{(x, x) \mid x \in R\}$ 和 $\{(x, -x) \mid x \in R\}$ 是环 $Q \times Q^{\mathrm{op}}$ 的 d-自由子集。

我们来说明这个定理背后的动机。回顾一下，若映射 $*$ 从环 R 到其自身满足

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad \text{and} \quad (x^*)^* = x$$

对所有 $x, y \in R$均成立，则称其为对合。若元素 $x \in R$ 满足 $x^* = x$，则称其为对称元素；若满足 $x^* = -x$，则称其为斜元素（或斜对称元素）。若 Q 是任意一个环，则我们可以在环 $Q \times Q^{\mathrm{op}}$ 上赋予如下对合：$(x, y)^* = (y, x)$。定理 3.36 中的第一组由关于此对合的所有对称元素构成，第二组则由所有斜元素构成。因此，定理 3.36 表明，只要原集合是 d-自由的，对称元素集和斜元素集（相对于这个特殊对合）就是 d-自由的。

下一个结果涉及张量积。现在假设我们的环 Q 是域上的代数。

定理 3.37。设 Q 和 A是含幺代数。若 A 是有限维的，且R是 Q的一个 d-自由子集，那么 $\{x \otimes a \mid x \in R, a \in A\}$ 是 $Q \otimes A$的一个 d-自由子集。

若 R 是 Q的线性子空间，则由定理 3.37 和定理 3.34 可知， $R \otimes A$ 是 $Q \otimes A$的一个 d-自由子集。特别地，若 $R = Q$ 是一个 d-自由环，则对于任意有限维代数 A， $R \otimes A$ 都是一个 d-自由环。

已有一个例子表明， A 有限维这一假设是必要的。然而，即使 A是无限维的，某些重要的函数恒等式仍可在 $Q \otimes A$ 中处理。参见 [47, 第 5]节。

我们还提及论文 [73, 134] ，这些论文对 A 是上三角矩阵代数这一特殊情形提供了进一步的见解。

接下来的两个定理涉及（t； d）-自由集。第一个定理讨论带对合的环。我们假设， R Q 的子集是一个赋有对合 $*$的子环。用 S 表示 R 中所有对称元素的集合，用 K 表示 R 中所有斜元素的集合。

定理 3.38。设 R 是一个带对合的环。如果对于某个 $t \in S \cup K$， R 是 Q 的（t; $2d+1$）-自由子集，那么 S 和 K 都是 Q 的 d-自由子集。

定理 3.38 是从一个更一般的结果推导而来的，该结果讨论形式为

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=0}^{a} E_{iu}(\overline{x}_m^i)^i x_i t^u \quad + \quad \sum_{j\in J}\sum_{v=0}^{b} t^v x_j F_{jv}^j(\overline{x}_m^j)$$

$$+ \quad \sum_{k\in K}\sum_{w=0}^{c} G_{kw}^k(\overline{x}_m^k) x_k^* t^w + \sum_{l\in L}\sum_{z=0}^{d} t^z x_l^* H_{lz}^l(\overline{x}_m^l) = 0.$$

不过，对于大多数应用而言，定理 3.38 已经足够，因此这里不再陈述这个更一般的结果。有兴趣的读者可在 [53, 第 3.5] 节中找到该结果。不出所料，它的证明相当冗长。

我们已经讨论过李乘积 $[x, y] = xy - yx$。我们还需要约当乘积

$$x \circ y = xy + yx$$

环元素 x 与 y的约当乘积。当然，赋予李乘积的结合环成为李环（这意味着对于所有 x、y、z，都有 $[x, x] = 0$和 $[[x, y], z] + [[z, x], y] +[[y, z], x] = 0$）；赋予约当乘积的结合环则成为约当环（这意味着对于所有 x和 y，都有 $x \circ y = y \circ x$ 和 $((x \circ x) \circ y) \circ x) = (x \circ x) \circ (y \circ x)$）。

定理 3.39。设 R 是 t; $d+1$-自由的 Q 子集，其中 $t \in Q$ 在 C 上的次数不是 1 或 2 的代数的。若 R' 是 R 的非空子集，且 $[t, R] \subseteq R'$ 或 $t \circ R \subseteq R'$，则 R' 是 Q 的 d-自由子集。

为解释该定理的含义，我们回顾一下：环 A 的加法子群 M 若满足 $[M, M] \subseteq M$，则称其为 A 的李子环；李子环 M 的加法子群 L 若满足 $[L, M] \subseteq L$，则称其为 M 的李理想。类似地，我们定义 Jordan 子环及其约当理想。注意，定理 3.39 适用于李理想和约当理想。

结合前两个定理、定理 3.31 以及关于李理想的一些标准事实（详见 [53, 第 5.2] 节），我们得到以下推论，表明素环中的一些重要子集是 d-自由的。我们说明，所谓非中心李理想，是指不包含于所考察环的中心中的李理想。

推论 3.40. 设 R 是一个素环，且 L 是 R 的非中心李理想。若 $\mathrm{char}(R) \neq 2$ 且 $\deg(R) \geq d+1$，则 L 是 $Q_{ms}(R)$ 的 d-自由子集。

如上所述，我们用 S（分别用 K）表示带对合的环 R 中所有对称（分别为斜对称）元素的集合。

推论 3.41. 设 R 是一个带对合的素环。若 $\mathrm{char}(R) \neq 2$ 且 $\deg(R) \geq 2d+1$，则 S 和 K 是 $Q_{ms}(R)$ 的 d- 自由子集。

推论3.42. 设 R 是带对合的素环，且 L是 K的非中心李理想。若 $\mathrm{char}(R) \neq 2$ 且 $\deg(R) \geq 2d+3$，则 L 是$Q_{ms}(R)$ 的 d- 自由子集。

3.5. d-自由集的刻画。现在我们将考虑基本函数恒等式(3.1)和(3.2)的一个更一般的版本。它涉及一个函数

$$\alpha : S \to Q$$

其中， S 是任意非空集合， Q 一如既往是含幺环。 α 的作用不同于函数恒等式中出现的其他函数。我们将 α 视为一个固定给定的函数，目标不是描述它的形式，而是用 α来描述其他函数。我们将写作 x^α ，而不是 $\alpha(x)$；写作 S^α ，而不是 $\alpha(S)$。

设 m、 I、 J和 C 具有通常的含义，并设

$$E_i : S^{m-1} \to Q \quad \text{and} \quad F_j : S^{m-1} \to Q$$

为任意函数。 $\overline{x}_m$、 $\overline{x}^i_m$等的含义与上文相同，只不过现在每个 x_i 都属于 S ，而不是 R。我们关注的函数恒等式为

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}^i_m)x^\alpha_i + \sum_{j\in J} x^\alpha_j F_j(\overline{x}^j_m) = 0 \tag{3.22}$$

对所有 $\overline{x}_m \in S^m$，以及

$$\sum_{i\in I} E_i(\overline{x}^i_m)x^\alpha_i + \sum_{j\in J} x^\alpha_j F_j(\overline{x}^j_m) \in C \tag{3.23}$$

对所有 $\overline{x}_m \in S^m$。如果 $S = R$ 和 α 是恒等函数，那么这就是熟悉的函数恒等式（3.1）和（3.2）。

方程 (3.22) 和 (3.23) 的标准解当然定义如下：存在函数

$$p_{ij} : S^{m-2} \to Q, \ \ i \in I,\ j \in J,\ i \neq j,$$
$$\lambda_k : S^{m-1} \to C, \ \ k \in I \cup J,$$

使得

$$\begin{aligned} E_i(\overline{x}^i_m) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x^\alpha_j p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) + \lambda_i(\overline{x}^i_m), \quad i \in I, \\ F_j(\overline{x}^j_m) &= -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m)x^\alpha_i - \lambda_j(\overline{x}^j_m), \quad j \in J, \\ &\qquad \lambda_k = 0 \quad \text{if} \quad k \notin I \cap J. \end{aligned} \tag{3.24}$$

以下是定义 3.5 的自然推广。

定义 3.43。设 d 是一个正整数。若对所有 $m \geq 1$ 以及所有 I、 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$，以下两个条件均成立，则称有序对 $(S; \alpha)$ 关于 Q 是 d-自由的：

(a) 如果 $\max\{|I|, |J|\} \leq d$，则 (3.22) 推出 (3.24)。(b)
如果 $\max\{|I|, |J|\} \leq d - 1$，则 (3.23) 推出 (3.24)。

如果 α 是从 S 到 Q 的单射函数，因而是从 S 到 $R = S^\alpha$ 的双射函数，那么将 x_i 记作 $y_i^{\alpha^{-1}}$，便很容易看出，条件 $(S;\alpha)$ 关于 Q 是 d-自由的，等价于 R 是 Q 的一个 d-自由子集。下面定理的要点是，即使 α 不是单射，这一结论仍然成立。

定理 3.44。关于 Q，当且仅当 $R = S^\alpha$ 是 Q 的自由子集时，$(S;\alpha)$ 是 d-自由的。

证明见 [20] 和 [53, 第 4 节2]。事实上，其中还给出了该定理的一些更一般的版本，但对于大多数应用而言，我们简化后的版本已足够。FI 理论常用于研究环之间的函数 α 的形式，这些函数与同态具有某些共同性质；此时定理 3.44 至关重要。

3.6. 拟多项式。在 d-自由集上，可以处理比定义中出现的更一般的 FIs。本小节将展示这一点。实际上，我们只会从 [21]和 [53, 第 4], 章所建立的理论中摘取一小部分，只介绍其中几个在应用中被证明极其有用的结果。

我们的总体设定与前一个小节相同。特别地，给定一个函数 $\alpha\colon S \to Q$，它将出现在所考虑的 FIs 中。

下面引入额外的记号。对于每个 $i \in \{1,\dots,m\}$，我们定义$X_i\colon S^m \to Q$ 为

$$X_i(\overline{x}_m) = x_i^\alpha,$$

对于互不相同的 i_1、...、 $i_p \in \{1,\dots,m\}$，我们将单项式函数 $M\colon S^m \to Q$ 定义为逐点乘积

$$M = X_{i_1}\cdots X_{i_p},$$

即,

$$M(\overline{x}_m) = x_{i_1}^\alpha \cdots x_{i_p}^\alpha$$

对所有 $\overline{x}_m \in S^m$。我们记 $\mathsf{dom}(M) = \{i_1,\dots,i_p\}$，并记 $\mathsf{deg}(M) = p$。常值函数 $M(\overline{x}_m) = 1$ 被视为单项式函数，其中 $\mathsf{dom}(M) = \emptyset$ 且 $\mathsf{deg}(M) = 0$。

固定 $n < m$。设 M 和 N 是满足以下条件的单项式函数

$$\mathrm{dom}(M) \cap \mathrm{dom}(N) = \emptyset \quad \text{and} \quad |M| + |N| = m - n,$$

并令 $j_1 < \cdots < j_n$ 满足集合 $\{j_1,\dots,j_n\}$、$\mathsf{dom}(M)$ 和 $\mathsf{dom}(N)$ 构成 $\{1,\dots,m\}$ 的一个划分。此外，给定一个函数 $F_{M,\ N}\colon S^n \to Q$，我们定义 $MF_{M,\ N}N\colon S^m \to Q$ 为

$$(MF_{M,N}N)(\overline{x}_m) = M(\overline{x}_m)F_{M,N}(x_{j_1},\dots,x_{j_n})N(\overline{x}_m).$$

此类函数的和,

$$\sum_{M,N} MF_{M,N}N, \tag{3.25}$$

称为核心函数。

例3.45。设 $m=5$、 $n=2$，并设 F、G、H、K： $S^2\to Q$。将 $\overline{x}_5$ 映射到

$x_1^\alpha x_4^\alpha F(x_2,x_5)x_3^\alpha + x_4^\alpha x_1^\alpha G(x_2,x_5)x_3^\alpha + x_5^\alpha H(x_1,x_4)x_3^\alpha x_2^\alpha + K(x_3,x_5)x_4^\alpha x_1^\alpha x_2^\alpha$是一个核心函数（具有 $F_{X_1X_4,\ X_3}=F$、 $F_{X_4X_1,\ X_3}=G$、 $F_{X_5,\ X_3X_2}=H$ 和 $F_{1,\ X_4X_1X_2}=K$）。◊

例3.46。函数恒等式 (3.22) 和 (3.23) 可以用核心函数表示。事实上，我们可以将 (3.22) 写成

$$\sum_{i\in I} E_{1,X_i}X_i + \sum_{i\in I} X_j F_{X_j,1} = 0.$$

因此，(3.22) 和 (3.23) 的左端是对应于 $n=m-1$ 情形的核心函数。◊

(3.25) 中的函数 $F_{M,\ N}$ 称为中间函数。如果一个中间函数 $F_{M_0,\ N_0}$ 在 $\deg(N) < \deg(N_0)$ 时满足 $F_{M,\ N}=0$ ，则称它为最右中间函数。类似地，我们定义最左中间函数。

例3.47. 例3.45 中核心函数的最右中间函数是 F 和 G，而 K 是最左中间函数。◊

例3.48. 在例3.46中，最右中间函数是 $F_{X_j,\ 1}$ ，最左函数是 $E_{1,\ X_i}$。◊

接下来我们引入拟多项式，它们在 FI 理论中至关重要。非正式地说，它们的定义与核心函数类似，只是n 不是固定的，并且假定中间函数的取值属于 Q 的中心 C（因此它们可以写成最左中间函数，而且每一项只需包含一个单项式函数 M 和 N，而不必包含两个）。我们先从较小的 m开始，此时可以直接给出定义。

例 3.49. (1) 如果 $m=1$，拟多项式是一个形如以下形式的函数 P： $S\to Q$

$$P(x_1)=\lambda x_1^\alpha + \mu(x_1)$$

其中 $\lambda\in C$ 和 μ： $S\to C$。

（2）若 $m=2$，拟多项式是一个形如 $P\colon S^2\to Q$ 的函数

$$P(x_1,x_2)=\lambda_1 x_1^\alpha x_2^\alpha + \lambda_2 x_2^\alpha x_1^\alpha + \mu_1(x_2)x_1^\alpha + \mu_2(x_1)x_2^\alpha + \nu(x_1,x_2)$$

其中 λ_1、$\lambda_2\in C$、 μ_1、 μ_2： $S\to C$，且 ν： $S^2\to C$。

（3）若 $m=3$，拟多项式是一个形如 $P\colon S^3\to Q$ 的函数

$$\begin{aligned}P(x_1,x_2,x_3) = &\sum_{\sigma\in S_3}\lambda_\sigma x_{\sigma(1)}^\alpha x_{\sigma(2)}^\alpha x_{\sigma(3)}^\alpha + \sum_{\sigma\in S_3}\mu_\sigma(x_{\sigma(1)})x_{\sigma(2)}^\alpha x_{\sigma(3)}^\alpha\\ &+\nu_1(x_2,x_3)x_1^\alpha + \nu_2(x_1,x_3)x_2^\alpha + \nu_3(x_1,x_2)x_3^\alpha + \omega(x_1,x_2,x_3)\end{aligned}$$

其中 $\lambda_\sigma\in C$, $\mu_\sigma\colon S\to C$, $\nu_i\colon S^2\to C$，且 $\omega\colon S^3\to C$。 ◊

注意，使用上面引入的记号，(1) 中的 P 可以写成

$$P = \lambda X_1 + \mu,$$

而 (2) 中的 P 可写为

$$P = \lambda_1 X_1 X_2 + \lambda_2 X_2 X_1 + \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \nu.$$

这里应当理解为，例如， $\mu_1 X_1$ 是由 $(x_1, x_2) \mapsto \mu_1(x_2)x_1^\alpha$ 给出的函数。

现在，对于任意的 m，我们将拟多项式定义为具有以下形式的函数

$$P = \sum_M \lambda_M M$$

其中，求和遍历所有满足 $p \leq m$ 的单项式函数 $M = X_{i_1} \dots X_{i_p}$，并且 λ_M 是从 S^{m-p} 到 C 的函数；更准确地说， $\lambda_M M$ 定义为

$$\overline{x}_m \mapsto \lambda_M(x_{j_1}, \dots, x_{j_{m-p}})x_{i_1}^\alpha \dots x_{i_p}^\alpha$$

其中

$$\{j_1, \dots, j_{m-p}\} = \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_p\}$$

and

$$j_1 < \dots < j_{m-p}$$

（如果 $p = m$, λ_M 是 C 中的一个元素）。取中心值的函数 λ_M 称为拟多项式 P 的系数。系数 λ_1 称为中心系数（例如，例 3.49 中的中心系数为：如果 $m = 1$，则为 μ；如果$m = 2$，则为 ν；如果 $m = 3$，则为 ω）。注意，函数恒等式 (3.23) 可以写成

$$\sum_{i \in I} E_{1,X_i} X_i + \sum_{i \in I} X_j F_{X_j,1} = \lambda_1$$

其中 λ_1 是一个仅由其中心系数组成的拟多项式。

下面这个单引理是函数恒等式理论在应用中最常用的结果之一。

引理 3.50. 设 $P = \sum_M \lambda_M M : S^m \to Q$ 是一个拟多项式。令 $R = S^\alpha$，并假设以下两个条件之一成立：

(a) R 是 Q 的一个 $(m+1)$-自由子集，或者

(b) $\lambda_1 = 0$ 且 R 是 Q 的一个 m-自由子集。

那么，仅当每个 $\lambda_M = 0$ 时， $P = 0$ 。

证明很容易。例如，若 $m = 2$ ，且 P 如例3.49(2)所示，则 $P = 0$ 可写为

$$\big(\lambda_2 x_2^\alpha + \mu_1(x_2)\big)x_1^\alpha + \big(\lambda_1 x_1^\alpha + \mu_2(x_1)\big)x_2^\alpha = -\nu(x_1, x_2) \in C.$$

现在我们可以利用定理 3.44 得出：若满足以下任一条件：(a) R 是 Q 的 3-自由子集；或 (b) $\nu = 0$ 和 R 是 Q的 2-自由子集，则 $\lambda_2 x_2^\alpha + \mu_1(x_2) = 0$ 和 $\lambda_1 x_1^\alpha + \mu_2(x_1) = 0$。相同的假设还意味着 $\lambda_2 = \mu_1 = 0$ 和$\lambda_1 = \mu_2 = 0$。一般情形可以用与此非常相似的方式对 m 应用归纳法来处理。

当核心函数$\sum MF_{M,\ N}N$等于拟多项式 P时，可以得出什么结论？这是研究拟多项式的基本问题。我们只陈述一个关于它的定理；事实证明，这一定理最为有用，也最具适用性。

在定理的陈述中，我们将使用上文引入的记号。

定理 3.51. 设 $\sum_{M,N} MF_{M,N}N$: $S^m \to Q$ 是一个核心函数（其中 $F_{M,N}$:$S^n \to Q$, $n < m$），使得对于每个中间函数 $F_{M,N}$，都存在一个元素$c \in C$、一个最左中间函数 F_{M_0,N_0} 以及一个置换 $\sigma \in S_n$，使得

$$F_{M,N}(x_1, \dots, x_n) = cF_{M_0,N_0}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

对于所有 x_1,... , $x_n \in S$。假设存在一个拟多项式 P，其中心系数为 λ_1，使得

$$\sum_{M,N} MF_{M,N}N = P.$$

令 $R = S^\alpha$，并假设以下两个条件之一成立：

(a) R 是 Q 的一个 $(m+1)$-自由子集；(b) $\lambda_1 = 0$，且 R 是 Q 的一个 m-自由子集。

那么所有中间函数 $F_{M,N}$ 都是拟多项式。

在大多数应用中，所有中间函数除相差一个符号和变量置换外都相同。我们还要指出，当然可以在该陈述中用“最右”替换“最左”。

下一节将给出定理 3.51 适用的一些例子。此处我们只提及以下内容。

注 3.52。该定理可用于得到双加性函数 $F(x) = B(x, x)$ 的交换迹的描述，如例 2.9 所示。事实上，我们可以将 (2.18) 视为一个核心函数（对应于 α 为恒等函数的情形），因此该定理蕴含中间函数 $(x, y) \mapsto B(x, y)+B(y, x)$ 是拟多项式，前提是 R 是一个 3-自由子集。假设 R 是一个满足 $\deg(R) \neq 2$ 且 $\operatorname{char}(R) \neq 2$ 的素环，那么由定理 3.23 可知，$F(x)$ 具有 (2.17) 的形式。$\deg(R) \neq 2$ 这一技术性假设实际上是多余的，但证明这一点需要采用不同的方法（见 [59, 63, 91]）。

基本上以相同的方式，定理 3.51 也适用于描述任意 n 的 n-可加函数的交换迹问题，以及更一般的问题：可加函数 n 的迹 $F(x) = B(x, \dots, x)$ 满足

$$[F(x), x^\alpha] = 0$$

对所有 $x \in S$ 都成立；当然，前提是集合 S 是加法群，且给定的函数 α 是可加的。

3.7. 广义函数恒等式。广义多项式恒等式（简称 GPI）是多项式恒等式（PI）的重要推广。粗略地说，与 PI 不同，广义多项式恒等式涉及来自环的固定元素。

例 3.53. 设 V 是域 F 上的向量空间，并令 $R = \mathrm{End}_F(V)$ 表示 V 的所有自同态构成的环。任取一个秩为一的 $a \in R$。注意，对每个 $x \in R$，都存在一个 $\lambda_x \in F$ 使得 $axa = \lambda_x a$。注意，

$$axayaya = ayaxaya$$

对所有 $x, y \in R$（事实上，两边都等于 $\lambda_x\lambda_y a$）。这是一个简单的广义多项式恒等式示例。我们指出，若 V 是无限维的，则 R 不满足任何非零多项式恒等式。◊

在研究广义多项式恒等式时，我们通常将讨论范围限定在素环上。素环的广义多项式恒等式定义为 $Q_s(R) * C\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 中的一个元素 $f(X_1, \dots, X_n)$；这里，$Q_s(R) * C\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 是对称 Martindale 商环 $Q_s(R)$ 与自由代数 $C\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 在扩张中心 C 上的自由积，并且对所有 $a_i \in R$，都有 $f(a_1, \dots, a_n) = 0$。如果 R 满足一个非零广义多项式恒等式，则称其为广义多项式恒等式环。

我们指出，应用标准的多线性化过程，很容易证明一个素广义多项式恒等式环满足一个多线性广义多项式恒等式，也就是说，

$$\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_{0i}^\sigma x_{\sigma(1)} a_{1i}^\sigma x_{\sigma(2)} a_{2i}^\sigma \dots a_{n-1,i}^\sigma x_{\sigma(n)} a_{ni}^\sigma = 0 \tag{3.26}$$

对所有 x_1、……、$x_n \in R$ 以及某个固定的 $a_{ji}^\sigma \in Q_s(R)$，存在一个置换 σ，使得

$$\sum_{i=1}^{n_\sigma} a_{0i}^\sigma x_{\sigma(1)} a_{1i}^\sigma x_{\sigma(2)} a_{2i}^\sigma \dots a_{n-1,i}^\sigma x_{\sigma(n)} a_{ni}^\sigma \neq 0$$

对某些 x_1、……、$x_n \in R$。

在开创性论文 [4]，中，Amitsur 刻画了本原广义多项式恒等式环 [4]。几年后，Martindale [107] 将 Amitsur 的结果推广到素环，结论如下：非零素环 R 是广义多项式恒等式环，当且仅当 $A = RC$——由 R 生成的 $Q_s(R)$ 的 C-子代数（称为 R 的中心闭包）——是一个包含幂等元 e 的本原环，且 Ae 是 A 的极小左理想，而 eAe 是 C 上的有限维除代数。关于此类环的更多信息，请参见 [30, 第 4 节3]，或 [45, 第 5.4 节和第 7 节7]。

关于广义多项式恒等式理论的完整论述，请参阅 [30]。现在我们转向素环的广义函数恒等式（GFIs）。它们的定义方式使得多线性广义多项式恒等式以及基本函数恒等式（3.1）和（3.2）都是其特殊情形。下面给出其定义。

设 R 是一个素环，且 $Q = Q_{ml}(R)$。按惯例，设 m 是一个正整数，并设 I、J 是 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的子集。此外，对于每个 $i \in I$，设 s_i 是一个正整数，并设 $\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{is_i}\}$ 是 Q 的一个子集，该子集在扩张中心 C 上线性无关。类似地，对于每个 $j \in J$，设 t_j 是一个正整数，并设 $\{b_{j1}, b_{j2} \dots, b_{jt_j}\}$ 是 Q 的一个线性无关子集。最后，设 V 是 Q 的一个有限维向量子空间，并设 E_{iu}、$F_{jv}\colon R^{m-1} \to Q$ 是函数。以下是基本的广义泛函恒等式：

$$\sum_{i\in I}\sum_{u=1}^{s_i} E_{iu}(\overline{x}_m^i) x_i a_{iu} + \sum_{j\in J}\sum_{v=1}^{t_j} b_{jv} x_j F_{jv}(\overline{x}_m^j) \in V \tag{3.27}$$

对所有 $\overline{x}_m \in R^m$ 均成立。注意，若对所有 $i \in I$、 $j \in J$ 均有 $s_i = t_j = 1$、$a_{i1} = b_{j1} = 1$，且 $V = \{0\}$ （分别为 $V = C$），则 (3.27) 变为 (3.1)（分别为 (3.2)）。

(3.27) 的标准解定义如下：存在函数

$$p_{iujv} : R^{m-2} \to Q,\ i \in I,\ j \in J,\ 1 \le u \le s_i,\ 1 \le v \le t_j,$$
$$\lambda_{kuv} : R^{m-1} \to C,\ k \in I \cup J,\ 1 \le u \le s_i,\ 1 \le v \le t_j,$$

使得

$$\begin{aligned} E_{iu}(\overline{x}_m^i) &= \sum_{\substack{j\in J\\ j\neq i}} \sum_{v=1}^{t_j} b_{jv} x_j p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij}) + \sum_{v=1}^{t_i} \lambda_{iuv}(\overline{x}_m^i) b_{iv}, \\ F_{jv}(\overline{x}_m^j) &= -\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} \sum_{u=1}^{s_i} p_{iujv}(\overline{x}_m^{ij}) x_i a_{iu} - \sum_{u=1}^{s_j} \lambda_{juv}(\overline{x}_m^j) a_{ju}, \qquad (3.28) \\ \lambda_{kuv} &= 0 \quad \text{if} \quad k \notin I \cap J. \end{aligned}$$

容易验证，(3.28) 蕴含 (3.27)（其中 $V = \{0\}$）。

下面的定理由 Chebotar [66] 提出（另见 [53, 第 5.5] 节），他推广了作者 [40] 的早期结果；该结果讨论了 $m = 2$ 的情形。

定理 3.54. 设 R 为素环。若广义泛函恒等式 (3.27) 有非标准解，则 R 是广义多项式恒等式环。

另请参见 [13]，其中给出了一个更一般的结果，该结果还涉及自同构、反自同构和导子。

Wang 在 [131] 中提出了普通 FIs 的另一种推广，并将其调整到超代数情形。其中引入了超代数的 d-超自由子集，并建立了一些类似于素环上 d-自由性结果的结论。

3.8. 单变量 FI 的非标准解。由推论 3.27 可知，维数小于 d^2 的中心单代数，特别是满足 $n < d$ 的矩阵代数 $M_n(F)$，不是 d-自由的。在例 2.4 中，我们看到如何从凯莱-哈密顿恒等式导出一个非标准解。所有非标准解是否都是凯莱-哈密顿恒等式的推论?

近年来，我们在与下列学者合著的论文中考察了这一问题：

Spenko[63, 64]、Procesi 和 Spenko [58]。在最后三个小节中，我们将简要概述主要结果，而不解释证明方法。这里只需指出，这些方法与 FI 理论其他地方所使用的方法本质上不同。

这篇论文的大致总结是：对于单变量 FI，我们的问题得到了肯定的答案。为了陈述主要定理的简化版本，我们首先必须解释，在一个（有限维）中心单 F-代数 A 中，我们所说的凯莱-哈密顿恒等式是什么意思。

我们首先将 tr(x) 定义为 x 在 A中的元素的迹，即矩阵$1 \otimes x \in K \otimes A \cong M_n(K)$的迹，其中 K 是 A的分裂域。众所周知，

该定义与 K 的选取无关，且 $\mathrm{tr}(x)$ 属于 F。由于矩阵的特征多项式的系数可以用其幂的迹表示，因此我们可以用一种不言自明的方式定义 $\mathrm{adj}(x) \in A$，即 x的伴随矩阵。此外，我们还可以自然地定义 $\det(x)$，即x的行列式；与矩阵的情形一样，我们得到凯莱-哈密顿恒等式

$$x \operatorname{adj}(x) = \det(x) \in F$$

对于每个 $x \in A$。重复例 2.4 中的论证，我们看到这给出了一个形如 $\sum_{j\in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) \in C$ 的函数恒等式的非标准解。

下面是 [63] 主定理的一个特例。

定理 3.55。设 F 是特征为 $= 0$ 的域，设 A 是一个中心单 F-代数，设 $q_0, q_1, \ldots, q_r \colon A \to A$ 是 d- 线性函数的迹，并设 $q \colon A \to A$ 定义为

$$q(x) = q_0(x)x^r + xq_1(x)x^{r-1} + \cdots + x^r q_r(x).$$

假设对所有 $x \in A$，都有 $q(x) \in F$。那么存在 $(d-1)$-线性函数的迹 $p_0, p_1, \ldots, p_{r-1} \colon A \to A$，以及 d-线性函数的迹 $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{r-1} \colon A \to F$，使得

$$\begin{aligned} q_0(x) &= xp_0(x) + \mu_0(x), \\ q_i(x) &= -p_{i-1}(x)x + xp_i(x) + \mu_i(x), \quad i = 1, \ldots, r-1, \end{aligned}$$

对所有 $x \in A$。此外，若对所有 $x \in A$ 都有 $q(x) = 0$，则

$$q_r(x) = -p_{r-1}(x)x - \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i(x)$$

对所有 $x \in A$，且若对某个 $x \in A$ 有 $q(x) \neq 0$，则 $\dim A = n^2$，其中 $r(n-1) \leq d$，并且存在一个 $(d - r(n-1))$- 线性函数 $\lambda \colon A \to F$ 的迹，使得 $\lambda \neq 0$ 且

$$q_r(x) = \lambda(x)\operatorname{adj}(x^r) - p_{r-1}(x)x - \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i(x)$$

对所有 $x \in A$。

请注意，在 $r = 1$、$q_0 = -q_r$ 和 $q = 0$ 这一特殊情形下，定理的条件可以表述为：q_0 是多线性函数的交换迹（参见例 2.8 和 2.9）。可以证明，在这种情形下，q_0 具有标准形式，即 $q_0(x) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i(x)x^i$，其中每个 λ_i 都是从 A 到 F 的 $(d-i)$- 线性映射的迹。对于无限维代数和维数足够大的代数，这一点已在 [91] 中得到证明。我们还提及论文 [93, 100, 101]，其中在更一般的背景下处理了若干重要的特殊情形。

3.9. 拟恒等式的非标准解。本小节将概述论文 [58]。该文只考虑 $A = M_n(F)$ 的情形，但技术上仍相当复杂。本小节中我们始终假设 $\mathrm{char}(F) = 0$。

我们先修改拟多项式的定义，并将其调整到$n \times n$ 矩阵的情形。现在，拟多项式指如下形式表达式

$$P = \sum_M \lambda_M M$$

其中， M是由非交换不定元 X_1、 X_2、.....构成的单项式，而 λ_M是由交换不定元 $x_{ij}^{(1)}$、 $x_{ij}^{(2)}$、.....构成的普通多项式，其中$1 \le i$、 $j \le n$。更确切地说，记作

$$\mathcal{C} = F[x_{ij}^{(k)} \mid 1 \le i, j \le n, k = 1, 2, \dots],$$

我们的拟多项式是自由 $\mathcal{C}$代数 $\mathcal{C}\langle X_1$、 X_2、 $\dots\rangle$的元素。

此外，我们将通用矩阵 ξ_k 定义为 $M_n(\mathcal{C})$中的矩阵，其元素为$x_{ij}^{(k)}$ 。定义 Φ : $\mathcal{C}\langle X\rangle \to M_n(\mathcal{C})$如下:

$$\Phi\Big(\sum \lambda_{X_{i_1}\dots X_{i_m}} X_{i_1}\dots X_{i_m}\Big) = \lambda_{X_{i_1}\dots X_{i_m}} \xi_{i_1}\dots\xi_{i_m}.$$

对于每个 $P \in \mathcal{C}\langle X_1$、 X_2、 $\dots\rangle$, 令 $\Phi(P)_{ij}$表示 $\Phi(P) \in M_n(\mathcal{C})$的$(i, j)$项。所谓在 $C\langle X_1$、 X_2、 $\dots\rangle$ 中进行代入，是指将 X_k替换为某个 $P_k \in C\langle X_1$、 X_2、 $\dots\rangle$，并同时将 $x_{ij}^{(k)}$ 替换为 $\Phi(P_k)_{ij}$。所谓 $C\langle X_1$、 X_2、 $\dots\rangle$的T-理想，是指在所有此类代入下封闭的理想。

我们定义拟多项式 $P = P(X_1, \dots, X_m)$ 在 m 元组 $a_1, \dots, a_m \in M_n(F)$ 处的求值，记作 $P(a_1, \dots, a_m)$，方法是将 a_k代入 X_k，并将$a_{ij}^{(k)}$ 代入 $x_{ij}^{(k)}$，其中 $a_k = (a_{ij}^{(k)})$。如果对所有 $a_1, \dots, a_m \in M_n(F)$， $P(a_1, \dots, a_m) = 0$，则称 P 是 $M_n(F)$的一个拟恒等式。所有拟恒等式构成的集合显然是 $C\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 的一个 T-理想。

顺便提一下，拟恒等式与文献 [49, 55] 中讨论的局部线性相关的非交换多项式有关。

$M_n(F)$ 的拟恒等式的基本例子是 Cayley–Hamilton 多项式

$$Q_n = Q_n(X_1) = X_1^n + \tau_1(X_1)X_1^{n-1} + \dots + \tau_{n-1}(X_1)X_1 + \tau_n(X_1), \tag{3.29}$$

其中，交换多项式 $\tau_i(X_1)$ 可以表示为 $\mathbb{Q}$-线性组合，组合项为 $\mathrm{tr}(\xi_1^j)$ 的乘积（例如 $Q_2 = X_1^2 - \mathrm{tr}(\xi_1)X_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(\xi_1)^2 - \mathrm{tr}(\xi_1^2))$ 。我们称 $M_n(F)$ 的拟恒等式 P 是 Cayley–Hamilton 恒等式的推论，如果 P 属于由 Cayley–Hamilton 多项式 Q_n 生成的 $C\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 的 T- 理想。

现在可以提出这样一个问题： $M_n(F)$ 的每个拟恒等式是否都是 Cayley–Hamilton 恒等式的推论。这个问题的基本动机是 Procesi [117] 和 Razmyslov [119], 独立得到的著名结果，该结果指出

对于迹恒等式，这个问题的答案是肯定的，因此特别适用于多项式恒等式（也就是说，$M_n(F)$ 的迹恒等式 T-理想由 Cayley-Hamilton 多项式生成，另见 [118, 第 444]页）。

然而，我们的问题通常没有肯定的答案。因此，以下结论成立。

定理 3.56. $M_n(F)$、 $n \geq 2$的拟恒等式并非全都是 Cayley–Hamilton 恒等式的推论。

这一定理正是 [58]的核心主旨。论文的大部分内容实际上都致力于描述一族特定的拟恒等式，它们不属于由 Q_n生成的 T-理想。

我们再陈述 [58] 中的一项结果，它表明另一方面， $M_n(F)$的拟恒等式与 Cayley–Hamilton 恒等式并非相去甚远。回想一下， $M_n(F)$的中心多项式是一个常数项为零的非交换多项式 $c = c(X_1, \ldots, X_m)$，满足对于所有 a_1、...、$a_m \in M_n(F)$， $c(a_1, \ldots, a_m)$都是数量矩阵，并且 c不是多项式恒等式。

定理 3.57. 设 P 是 $M_n(F)$ 的一个拟恒等式。对于 $M_n(F)$ 的每个中心多项式 c，都存在一个正整数 k，使得 $c^k P$ 是 Cayley–Hamilton 恒等式的推论。

定理 3.56 表明，拟恒等式是矩阵代数中一种真正新颖的恒等式类型。我们对它们的理解仍远未完善。

3.10. 将 FIs 视为 GPIs 时的非标准解。在最后这个小节中，我们将介绍 [64] 的主要结果。这些结果考察基本函数恒等式的非标准解

$$\sum_{i \in I} E_i(\overline{x}_m^i) x_i + \sum_{j \in J} x_j F_j(\overline{x}_m^j) = 0 \tag{3.30}$$

在 $M_n(F)$ 上，其中 m、I、J 具有通常的含义，而函数 E_i、F_j 假设为多线性函数。容易看出，每个多线性函数 $F : M_n(F)^{m-1} \to M_n(F)$ 都是以下形式的函数之和

$$(x_1, \ldots, x_{m-1}) \mapsto a_{i_0} x_{j_1} a_{i_1} \ldots a_{i_{m-2}} x_{j_{m-1}} a_{i_{m-1}}$$

其中 $a_{i_u} \in M_n(F)$ 且 $\{j_1, \ldots, j_{m-1}\} = \{1, \ldots, m-1\}$。因此，假设 E_i 和 F_j 是（多线性的）广义多项式并无损失，即它们是自由积 $M_n(F) * F\langle X_1, X_2, \ldots \rangle$ 的元素。相应地，(3.30) 可视为一个多线性广义多项式恒等式。

我们将陈述两个定理。第一个涉及 (3.30) 中 J 为 $\emptyset$ 的情形，第二个则涉及一般情形。

如果 $C \in M_n(F) * F\langle X_1, X_2, \ldots \rangle$ 在 $M_n(F)$ 上的所有求值都是数量矩阵，我们就称它为一个中心广义多项式（在 $M_n(F)$ 上）。一个立刻显现的例子是，取式（3.29）中给出的 Cayley–Hamilton 多项式$Q_n(X_1)$，再减去中心部分 $\tau_n(X_1)$。记

$$\widetilde{Q}_n = \widetilde{Q}_n(X_1, \ldots, X_n)$$

$Q_n(X_1) - \tau_n(X_1)$ 完全线性化后得到的拟多项式为。因此，例如，

$$\widetilde{Q}_2(X_1, X_2) = X_1X_2 + X_2X_2 + \tau_1(X_1)X_2 + \tau_1(X_2)X_1$$

（其中 $\tau_1(X_i) = -\mathrm{tr}(\xi_i)$）。

由于 $Q_n(X_1)-\tau_n(X_1)$ 是一个中心广义多项式，因此 $Q_n(X_1,\dots,X_n)$ 也是中心广义多项式。因此，对任意矩阵 $a_1,\dots,a_{n+1} \in M_n(F)$，我们有

$$[\widetilde{Q}_n(a_1x_1,\dots,a_nx_n), a_{n+1}x_{n+1}] = 0 \tag{3.31}$$

对所有 $x_1,\dots,x_{n+1} \in M_n(F)$ 均成立。注意，这是一个形如 (3.30) 的函数恒等式，其中 $J = \emptyset$。我们的第一个定理指出，每个形如 (3.30) 的函数恒等式都可由 (3.31) 型的函数恒等式推出。

定理 3.58。设 $E_i \in M_n(F)*F\langle X_1, X_2, \dots\rangle, i \in I$ 是多线性广义多项式，且 $P = \sum_{i\in I} E_i(\overline{X}^i_m)X_i$ 是 $M_n(F)$ 的一个广义多项式恒等式。那么 P 可以写成如下形式的广义多项式恒等式之和

$$C \cdot \left[\widetilde{Q}_n(a_1X_{k_1},\dots,a_nX_{k_n}), a_{n+1}X_{k_{n+1}}\right],$$

其中 $a_i \in M_n(F)$，$k_i \neq k_j$ 若 $i \neq j$，且 C 是一个多重线性中心广义多项式（其不定元取自 $\{X_1,\dots,X_m\} \setminus \{X_{k_1},\dots,X_{k_{n+1}}\}$）。

类似的结果当然也适用于广义多项式 $\sum_{j\in J} X_jF_j(\overline{X}^j_m)$，即适用于 $I = \emptyset$ 和 F_j 为多重线性的 FIs (3.30)。因此，我们可以处理“单侧恒等式”。

现在转而讨论“双边恒等式”。如果存在多重线性函数，我们称多重线性函数 E_i、F_j是 (3.30) 模去单侧恒等式的标准解

$$\begin{aligned}
&p_{ij} : M_n(F)^{m-2} \to M_n(F),\ \ i \in I,\ j \in J,\ i \neq j,\\
&\lambda_k : M_n(F)^{m-1} \to F,\ \ k \in I \cup J,\\
&\widehat{E}_i : M_n(F)^{m-1} \to M_n(F),\ i \in I,\\
&\widehat{F}_j : M_n(F)^{m-1} \to M_n(F),\ j \in J,
\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}
E_i(\overline{x}^i_m) &= \sum_{\substack{j\in J,\\ j\neq i}} x_jp_{ij}(\overline{x}^{ij}_m) + \lambda_i(\overline{x}^i_m) + \widehat{E}_i(\overline{x}^i_m), \quad i \in I,\\
F_j(\overline{x}^j_m) &= -\sum_{\substack{i\in I,\\ i\neq j}} p_{ij}(\overline{x}^{ij}_m)x_i - \lambda_j(\overline{x}^j_m) + \widehat{F}_j(\overline{x}^j_m), \quad j \in J,\\
&\lambda_k = 0 \quad \text{if} \quad k \notin I \cap J,
\end{aligned}$$

and

$$\sum_{i\in I} \widehat{E}_i(\overline{x}^i_m)x_i = \sum_{j\in J} x_j\widehat{F}_j(\overline{x}^j_m) = 0$$

对所有 $\overline{x}_m \in R^m$均成立。

现在我们可以陈述本节的最后一个定理。

定理 3.59. 如果 E_i、F_j 是多线性函数，那么 $M_n(F)$ 上 FI (3.30) 的每个解，模去单侧恒等式后都是标准的。

粗略地说，定理 3.58 和 3.59 表明，若将形式为 (3.30) 的 FIs 视为广义多项式恒等式，那么它们都可由凯莱-哈密顿恒等式推出。

4. Applications

一般泛函恒等式理论之所以存在，主要是因为它有广泛的应用。本节旨在介绍其中最重要的应用。

4.1. 李映射。FI 理论的早期发展与 Herstein 关于李映射的长期猜想密切相关。因此，我们先简要回顾这些猜想的解。

首先，简要回顾一下相关历史。从 20 世纪 50 年代到 70 年代，Herstein 及其学生系统地研究了结合环的李结构（以及 Jordan 结构）。他们回答了许多自然问题，但 Herstein 在 1961 年的“美国数学学会 Hour Talk” [82], 中提出的关于李同态和李导子结构的问题仍未解决。更准确地说，其中一些问题已由 Martindale [104, 105, 106, 108], 解决，但前提是环含有（足够多的）非平凡幂等元。能否去掉幂等元这一条件，曾一直悬而未决，直到函数恒等式的发现。借助函数恒等式，所有问题最终都在一系列论文中得到解决，这些论文始于 1993年，终于 2002 年。

第一个突破出现在作者的论文 [38] 中，该论文描述了素环之间李同构的结构。为了陈述这一结果，我们先给出定义并说明所研究的问题。

设 M 和 R 为环，且 L 是 M的李子环。加法映射$\alpha\colon L \to R$，记作 $x \mapsto x^\alpha$，称为李同态，如果

$$[x,y]^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha] \tag{4.1}$$

对所有 x、$y \in L$都成立。也就是说，α是从李环（L，$+$，$[\cdot,\cdot]$）到李环（R，$+$，$[\cdot,\cdot]$）的同态。

暂且将讨论限制在最简单的情形，即 $L = M$。此时，显然的李同态例子是同态以及反同态的负映射（也就是说，满足 $\alpha(xy) = -\alpha(y)\alpha(x)$ 的映射 α，对所有 x、$y \in M$均成立，因此 $-\alpha$ 是反同态）。然而，这并非唯一可能的例子，至少在 $M \neq [M,M]$时并非如此，因为如果 α是李同态，且τ 是从 M 到 R 的中心的加法映射，并且在所有交换子上都为零（即，对所有 x、$y \in M$，$\tau([x,y]) = 0$），那么 $\alpha + \tau$仍是李同态。Herstein提出的问题是：一个李同态是否可以表示为一个同态或一个反同态的负映射与这样一个映射 τ之和?

通常假设 α 至少是满射，甚至是双射。为了描述 [38], 中的方法，假设 R 是一个特征为 $\neq 2$ 的素环，且α 是双射。令 x^2 在 (4.1) 中表示 y，我们得到

$$[x^\alpha, (x^2)^\alpha] = 0$$

对所有 $x \in M$ 均成立，因此

$$[y, (y^{\alpha^{-1}})^2] = 0$$

对所有 $y \in R$ 均成立。这可以理解为，函数 $F\colon R \to R$ 定义为

$$F(y) = (y^{\alpha^{-1}})^2$$

是一个双加性函数的交换迹。正如我们在例 2.9 中所说，这样的函数具有以下形式

$$F(y) = \lambda y^2 + \mu(y)y + \nu(y, y) \tag{4.2}$$

对所有 $y \in R$ 均成立，其中 λ是扩张中心 C中的一个元素， μ 是从 R 到 C的加性函数，而 ν 是从 $R \times R$ 到 C的双加性函数。现在，我们控制 α 对元素平方的作用，从而控制其对元素约当乘积的作用；与此同时，根据定义，我们也控制 α 对李乘积的作用。因此，我们能够控制 α 对普通乘积 $xy = \frac{1}{2}(x \circ y + [x, y])$的作用，也就不足为奇了。由此可以证明， α具有预期的、前面提到的形式。

证明双加性函数的交换迹具有形式 (4.2)，是 [38] 的一项基本结果，其他结果都由此推导而来。实际上，这一结果是在附加假设 $\deg(R) \neq 2$ 下得到的；后来发现，这一假设并非必要（这一假设对于证明 R 是 $Q_{ms}(R)$的 3-自由子集确实是必要的，但对于证明双加性函数的交换迹具有标准形式则并非必要）。

我们对 [38] 所采用的方法进行了这一简短概述，因为其主要思想具有说明性，即使读者此前未接触过 FIs，也能轻松理解。现在，让我们依据一般泛函恒等式理论，以更大的篇幅介绍一种更为复杂的方法。我们遵循 [53]。

可以将李同态的基本例子结合起来，从而得到新的李同态。我们称 α 是一个同态与一个反同态的负映射的直和，如果存在一个中心幂等元 e ，使得 $x \mapsto ex^\alpha$ 是一个同态，并且 $x \mapsto (1 - e)x^\alpha$ 是一个反同态的负映射。在素环中，这一点并不相关，因为素环不含有不同于 0 和 1 的中心幂等元。不过，我们现在将考虑一般的环。我们的关键假设是，李同态 α 的像是一个 3-自由子集。

定理 4.1. 设 α 是从环 M 到中心为 C 的含幺环 Q 的李同态。如果 M^α 是 Q 的 3- 自由子集，则 $\alpha = \varphi + \tau$，其中 $\alpha\colon M \to Q$ 是一个同态与一个反同态的负映射的直和，而 $\tau\colon M \to C$ 是一个在交换子上为零的加法映射。

证明概要。注意到

$$[xy, z] + [zx, y] + [yz, x] = 0$$

对任意 x、 y、 $z \in M$均成立（这是雅可比恒等式的一个“结合版本”）。因此可得

$$[(xy)^\alpha, z^\alpha] + [(zx)^\alpha, y^\alpha] + [(yz)^\alpha, x^\alpha] = 0.$$

由于 $R = M^\alpha$ 是 Q的一个 3-自由子集，因此我们可以在 $m = 3$、 $n = 2$、 $P = 0$以及每个 $c = \pm 1$的情形下应用定理 3.51。因此，$(xy)^\alpha$ 是一个拟多项式，即，

$$(xy)^\alpha = \lambda_1 x^\alpha y^\alpha + \lambda_2 y^\alpha x^\alpha + \mu_1(y)x^\alpha + \mu_2(x)y^\alpha + \nu(x,y) \tag{4.3}$$

对于某些 λ_1、 $\lambda_2 \in C$、 μ_1、μ_2： $M \to C$，以及 ν： $M^2 \to C$。将这种形式代回 (4.3)，由引理 3.50 很容易推出 $\mu_1 = \mu_2$。该引理还意味着 $\mu = \mu_1$ 是可加的，而 ν 是双可加的（只需将 x 和 y 替换为两个元素之和，并利用 α 是可加的）。

利用 (4.3)，我们可以用两种不同方式计算 $(xyz)^\alpha$ ： 第一种是 $((xy)z)^\alpha$，第二种是 $(x(yz))^\alpha$。比较这两个表达式，我们得到

$$\lambda_1\lambda_2[y^\alpha, [x^\alpha, z^\alpha]] + \xi(x,y)z^\alpha - \xi(y,z)x^\alpha \in C, \tag{4.4}$$

其中 ξ： $M^2 \to C$ 是一个函数，可用 λ_i、 μ、 ν 表示。若 $R = M^\alpha$ 是 4-自由的，则引理 3.50 将推出 $\lambda_1\lambda_2 = 0$。然而，我们这里只假设它是 3-自由的，因此还需要再进一步才能得出这一结论。注意，固定 y 后，我们可以将 (4.4) 理解为

$$E_1(z)x^\alpha + E_2(x)z^\alpha + x^\alpha F_1(z) + z^\alpha F_2(x) \in C$$

对于适当的函数 E_i, F_j。应用定理 3.44 后，利用 E_i, F_j 的精确形式，不难看出 3-自由性足以得出$\lambda_1\lambda_2 = 0$。

接下来，将 (4.3) 应用于

$$(xy)^\alpha - (yx)^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha]$$

我们得到

$$(1 - \lambda_1 + \lambda_2)[x^\alpha, y^\alpha] \in C$$

对所有 $x, y \in M$ 均成立。再由引理 3.50 可得 $1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$。结合$\lambda_1\lambda_2 = 0$，这表明 $e = \lambda_1$ 是一个中心幂等元（且 $\lambda_2 = -(1 - e)$）。

现在我们定义 φ： $M \to Q$ 如下：

$$x^\varphi = x^\alpha - (1 - 2e)\mu(x).$$

使用与上文类似的方法，不难证明 $x \mapsto ex^\varphi$ 是一个同态，$x \mapsto (1 - e)x^\varphi$ 是一个反同态的相反数，而 $\tau(x) = (1 - 2e)\mu(x)$ 是一个可加的映射，它在交换子上取值为零，并映射到 C。□

让我们回到 $R = M^\alpha$ 是素环的情形。令 $Q = Q_{ms}(R)$，由定理 3.23 可知，只要 $\deg(R) \geq 3$ ，我们就可以应用定理 4.1（从而得到 [38] 中的结果）。$\deg(R) = 1$ 的情形，即 R 是交换的情形，显然成立，因此只需考虑 $\deg(R) = 2$ 的情形。此时， R 的结构众所周知，即 R 可以嵌入域上的 2×2 阶矩阵环中。一方面，这使问题变得简单；但另一方面，我们不再能够应用 FI 方法。然而，如上所述，即使在 $\deg(R) = 2$ 的情况下，双加性函数的交换迹形式仍然相同（此外，

char(R) $\neq 2$）。采用本小节开头所述的方法，可以得到定理 4.1 的以下推论。

推论 4.2。设 R 是一个特征为 $R \neq 2$ 的非交换素环。如果 α 是从环 M 到环 R 上的李同构，那么 $\alpha = \varphi + \tau$，其中 φ 是从 M 到 $R+C$ 的同态或反同态的负映射，其中 C 是 R 的扩张中心，并且 $\tau\colon\ M \to C$ 是一个在交换子上为零的加法映射。

结论是 φ 映射到 $R+C$（而不是映射到 R），乍看之下可能显得奇怪，但这是有依据的——参见 [53, 例 6.10]。

我们概述的推论 4.2 的证明很好地体现了 FIs 的应用方式。一般理论在高度一般性的层面上解决了这一问题，但并不涵盖接近低维代数的环。因此，人们不得不将 FIs 与更为经典的方法结合起来。

推论 4.2 解决了 Herstein 关于李同态的问题中最容易的一个。其他问题涉及带对合的环中斜元素构成的李环，而最难的问题则涉及环的李理想以及斜元素的李理想。

现在设 M 是一个带对合的环，并设 K 是 M 中所有斜元素构成的集合。由于 K 是 M 的李子环，我们可以讨论从 K 到另一个环 R 的李同态 α。这里自然要问的是，α 能否扩展为一个从 K 生成的子环到 R 的同态（现在无需涉及反同态的负映射，因为我们可以将 α 与对合 $*$ 的负映射复合；对合本身是 M 上反同构的负映射，并且在 K 上的作用是恒等算子）。

定理 4.1 的证明方法显然行不通，因为 K 不是一个（结合的）子环。不过，斜元素的立方仍然是斜元素，因此 α 满足

$$[x^\alpha, (x^3)^\alpha] = 0$$

对所有 $x \in K$，因此，如果 α 是单射的，

$$[y, (y^{\alpha^{-1}})^3] = 0 \tag{4.5}$$

对所有 $y \in K^\alpha$。由此我们得到了一个三可加函数的交换迹。基于这一观察，Beidar、Martindale 和 Mikhalev [29] 描述了带对合的素环的斜元素之间的李同构。他们证明的主要思路本质上与推论 4.2 的证明相同，但技术挑战更大。另见 [53, 定理 6.15]，其中给出了涉及 d-自由集的抽象版本。我们指出，该证明基于这样一个事实：只要 x、y、$z \in K$，就有 $xyz + zyx \in K$，因此将 α 应用于恒等式

$$[u, xyz + zyx] + [z, uxy + yxu] + [y, zux + xuz] + [x, yzu + uzy] = 0$$

便得到一个比 (4.5) 更为方便的函数恒等式。

在 1993年解决了 Herstein 关于环的问题、并于 1994年解决了关于斜元素的问题之后，数年来，人们仍不清楚该如何处理它们的李理想的李同构。由于它们对某些 n 次幂并不封闭，上述方法并不适用。然而，环 M（例如 $[M, M]$）的李理想，或斜元素 K（例如 $[K, K]$）的李理想，特别值得关注，因为它们通常是单的

李环。更准确地说，经典的 Herstein定理指出，若 M 是中心为 Z 的单环，则 $[M,M]/Z\cap[M,M]$ 是单李环，除非 $\mathrm{char}(M)=2$ 且 $\deg(M)=2$；同样，若 K 是带有对合且中心为 Z 的单环 M 的斜元素集合，那么只要 $\mathrm{char}(M)\neq 2$ 且 $\deg(M)>4$ [82, 83]，$[K,K]/Z\cap[K,K]$ 就是单李环（关于更一般环的李理想的描述，另见 [54]）。因此，考虑模去中心元素后的李理想更为自然。

关于李理想的问题在 21 世纪初已得到彻底解决 [16, 17,18, 23, 24]。证明过程十分复杂，很难用几句话概述其主要思路。证明中用到了许多一般泛函恒等式理论的结果。事实上，关于李理想的问题曾是推动一般理论若干进阶部分发展的主要动因。

我们将讨论较难的斜元素李理想问题。下面陈述 [53] 中的两个结果。首先需要介绍一些记号。对于中心为 C 的含幺环 Q，我们用 $\overline{Q}$ 表示李环 Q/C，并对每个$x\in Q$，用 $\overline{x}$ 表示 $x+C\in\overline{Q}$。相应地，对于 Q 的子集 R，我们记作$\overline{R}=\{\overline{x}\,|\,x\in R\}$。我们用 $\langle L\rangle$ 表示由子集 L 生成的子环。若加法群 G 存在算子 $1\ 2$，使得 $x\mapsto 2x$ 是 G 的自同构，则称该加法群容许此算子。

定理 4.3. 设 K 是带对合的环 M 的斜元素集，L 是 K 的李理想，Q 是中心为 C 的含幺环，且 $\alpha: L\to\overline{Q}$ 是一个李同态。假设 L 和 Q 允许算子 $1\ 2$，并且 C 是加法群 Q 的一个直和项。若存在 Q 的一个 9-自由子集 $\overline{R}$，使得 $\overline{R}=L^{\alpha}$，则存在一个同态 $\varphi:\langle L\rangle\to Q$，使得对每个 $x\in L$ 都有 $x^{\alpha}=\overline{x^{\varphi}}$。

结合定理 4.3 与推论3.42，我们得到以下推论。

推论 4.4. 设 K 是带对合的环 M 的斜元素集，L 是 K 的李理想，R 是带对合的素环，C 是 R 的扩张中心，T 是 R 的斜元素集，U 是 T 的非中心李理想，且 α 是从 L 到$\overline{U}=U/U\cap C$ 的李同态。假设 L 允许算子 $1\ 2$，且 $\mathrm{char}(R)\neq 2$。若 $\deg(R)\geq 21$，则存在一个同态 $\varphi:\langle L\rangle\to C\langle U\rangle+C$，使得对所有 $x\in L$ 都有 $x^{\alpha}=\overline{x^{\varphi}}$。

这个推论解决了 Herstein 关于李代数同态问题中最困难的一题。准确地说，它并未完全解决该问题，而是将其归结为 $\deg(R)\leq 20$ 的情形。结果表明，其中一些低次数情形确实特殊，也就是说，反例表明该推论不适用于这些情形。[18] 中给出了详细分析。其中的证明没有使用 FIs，而是采用了经典方法。

我们以简短讨论李导子来结束本小节。与上文一样，设 L 是环 R的李子环。若加法映射 $\delta:\ L\to R$ 满足

$$[x,y]^{\delta}=[x^{\delta},y]+[x,y^{\delta}] \tag{4.6}$$

对所有 $x, y \in L$均成立，则称其为李导子。显而易见的问题是，证明李导子与导子很接近。

李导子的研究始终与李同态的研究并行。然而，后者通常要求更高。原因之一是，在类导子映射中，我们没有与反同态相对应的类似概念。因此，FIs 可用于用导子来描述李导子，这并不令人意外。

若 L 是一个环，则在（4.6）中令 y 为 x^2，可得

$$[x, (x^2)^\delta - x^\delta x - x x^\delta] = 0$$

对所有 $x \in L$ 均成立。因此，我们再次得到了双加性函数的交换迹。利用这一观察，可以证明以下结果。

定理 4.5. 设 R 是扩张中心为 C 的素环。那么，每个李导子 $\delta\colon R \to R$ 都可表示为 $\delta = d + \tau$，其中 d 是从 R 到 $CR + C$ 的导子，且 $\tau\colon R \to C$ 是一个在交换子上取值为零的加法映射；但当 $\mathrm{deg}(R) = 2$ 且 $\mathrm{char}(R) = 2$ 时例外。

这也已在 [38], 中得到证明，但需要附加假设 $\mathrm{deg}(R) = 2$。此前，这类结果已知适用于含有非平凡幂等元的环（顺便一提，在 [82] Herstein 提到，Kaplansky 曾在一项未发表的工作中证明了这一结果适用于含有 $n \times n$ 矩阵单位且$n \geq 3$的环）。

定理 4.5 是推论 4.2 的一个类似结果。许多其他关于李同态的结果也可以得到类似结论。例如，定理 4.3 的类似结论如下。

定理 4.6. 设 K 为带对合的环 R 的斜元素集，设L 为 K的李理想，设 $Q \supseteq R$ 为中心为 C的含幺环，并设 $\delta\colon L \to \overline{Q}$为一个李导子。假设 L 和 Q 具有算子 $_1$ $_2$，且 C 是加法群 Q的一个直和项。若 L 是 Q的一个 9-自由子集，则存在一个导子 $d\colon \langle L \rangle \to Q$，使得对所有 $x \in L$，都有 $x^\delta = \overline{x^d}$。

鉴于定理 4.3，定理 4.6 并不完全令人惊讶。或许更令人惊讶的是，它实际上可以由定理 4.3 与定理 3.35 结合推出。

有关 FIs 在李导子中的应用的更多细节，请参见 [53] 或原始文献 [17, 24, 38, 124]。

最后还要提到，通过将 FIs 与解析方法结合起来，泛函分析中出现的代数里的李映射也得到了处理 [1, 5, 33,34, 35, 52, 128]。

4.2. 群分次。设 G 为一个群，设 A 为域 F上的非结合的（= 不一定结合的）代数。若存在满足以下条件的线性子空间 A_g、 $g \in G$，使得 A 按 G 分次，则称 A 是按 G 分次的：

$$A = \oplus_{g \in G} A_g \quad \text{and} \quad A_g A_h \subseteq A_{gh}$$

对所有 g、$h \in G$。

李代数的分次尤其令人感兴趣；一般参考资料见 [71] 。如果李代数 L 按群 G 分次， $L = \oplus_{g\in G} L_g$，那么来自分级的支撑 Supp $L = \{g \in G \,|\, L_g \neq \{0\}\}$) 的元素总是彼此交换[115]。因此，将研究范围限制在按阿贝尔群进行的分次上是很自然的。

设 L 是结合代数 A 的李子代数。假设 L 按群 G 分次（作为李代数）。这种分次是否由 A 的分次诱导而来，也就是说， A 是否按 G 分次且 $L_g = A_g \cap L$? 假设可以描述 A 上的分次，那么对这个问题的肯定回答也意味着可以描述 L 上的分次。

我们与 Bahturin 合作的论文 [6], 中提出的解决这一问题的方法，基于以下观察。记群代数 FG 为 H，则线性映射 $\alpha\colon\ L \otimes H \to L \otimes H$ 定义为

$$\alpha(a \otimes h) = \sum_{g\in G} a_g \otimes gh$$

是 $A \otimes H$ 的李子代数 $L \otimes H$ 的李自同构。如果 A 作为代数由 L 生成，并且 α 可以扩展为从 $A \otimes H$ 到其自身的同态 $\overline{\alpha}$，那么我们的问题就有肯定答案。事实上，通过定义

$$A_g = \{a \in A \,|\, \overline{\alpha}(a \otimes 1) = a \otimes g\}$$

我们得到 A 的一个分次，使得对每个 $g \in G$，都有 $L_g = A_g \cap L$ 。

如上所见，将李同态扩张为同态的问题可以借助 FIs 来解决。出现的问题是，即使 A 具有最有利的性质，代数$A \otimes H$ 也可能不是素代数。因此，人们不得不借助涉及 d-自由集的李同态抽象结果。更确切地说，分数次数这一概念已被证明是求解问题的关键。

我们仅陈述一个定理，以说明这一研究思路。我们将不陈述其一般形式 [6, 定理 7.1] ，该形式讨论 A 为中心闭素代数的情形；而只讨论处理中心单代数情形的推论。这里，中心单代数是指不一定有限维的单 F-代数，且其质心为 F。

定理 4.7. 设 F 是一个特征为 $F \neq 2$ 的域，且 A 是一个带对合的中心单 F-代数，并满足 $\dim_F(A) \geq 441$。设 K 是 A 中斜元素构成的李子代数。假设李子代数 $L = [K, K]$ 由阿贝尔群 G 分级；若 A 非幺，则该群有限。于是存在 A 的一个 G 分级，使得对每个 $g \in G$，都有 $L_g = A_g \cap L$ 。

在定理的假设下，条件 $\dim_F(A) \geq 441$ 等价于 $\deg(A) \geq 21$。后一个条件也出现在推论 4.4 中。然而，如上文所述，在定理 4.7 的证明中，推论 4.4 并不能直接应用。

对于李子代数 $[A, A]$ 的分次，类似的结果并不成立。除了由 A 的分次诱导出的分次外，还有同样自然、源自 A 的对合的分次。详情请参见 [6] 。我们指出，作为

这篇论文主要结果的副产品，我们给出了有关经典李代数的已知结果的新证明及推广。

关于结合代数的约旦子代数的分次， [9]中获得了类似的结果。

最后，我们提及论文 [8] ，其中采用了类似但更为复杂的方法，用于描述无限维向量空间上线性变换的单有限型李代数按阿贝尔群的分次。

4.3. 泊松代数。域 F 上的向量空间 A 称为泊松代数，如果其赋有两个乘法 $\cdot$ 和 $\{\cdot,\cdot\}$，满足

(a) A 关于 $\cdot$ 构成结合代数；(b) A 关于 $\{\cdot,\cdot\}$构成李代数；

(c) 对所有 x、 y、 $z \in A$，均有

$\{x\cdot y, z\} = x\cdot\{y,z\} + \{x,z\}\cdot y$。

从交换泊松代数 A 到希尔伯特空间上线性算子代数的李同态称为狄拉克映射。狄拉克问题要求描述狄拉克映射。早在很久以前，人们就开始研究这一问题 [84, 122, 123]。

利用 FIs，我们可以考虑狄拉克问题的一个更一般版本，其中泊松代数不一定是交换的，李同态也不一定映射到希尔伯特空间上的线性算子代数。我们已经从第 4.1 小节得知，从泊松代数到另一个结合代数的李同态（与从任意结合代数出发的情形一样）会产生某些函数恒等式。事实证明，利用泊松代数的其他性质，还可以推导出更多函数恒等式。基于这些函数恒等式，可以证明下面的定理。该定理由 Beidar 和 Chebotar 提出，并作为定理 8.3 收录于书籍 [53]中（此前未在其他地方发表）。

定理 4.8. 设 F 是一个特征为 char(F) $\neq 2$的域， A 是 F上的泊松 F-代数， Q 是一个中心为 F的含幺 F-代数。若 $\alpha: A \to Q$ 是一个线性映射，满足

$$\{x,y\}^\alpha = [x^\alpha, y^\alpha]$$

对于所有的 x、 $y \in A$ 和 A^α，若其为 Q 的 4-自由子集，则存在一个 $\lambda \in F$、线性映射 μ_1、 μ_2: $A \to F$，以及双线性映射 ν: $A^2 \to F$，使得以下情况之一成立:

$$(xy)^\alpha = \lambda x^\alpha y^\alpha + \mu_1(x)y^\alpha + \mu_2(y)x^\alpha + \nu(x,y)$$

or

$$(xy)^\alpha = \lambda y^\alpha x^\alpha + \mu_1(x)y^\alpha + \mu_2(y)x^\alpha + \nu(x,y),$$

and

$$\lambda\nu(x,y) = \mu_1(x)\mu_1(y) - \mu_1(xy) = \mu_2(x)\mu_2(y) - \mu_2(xy)$$

对所有 $x, y \in A$ 都成立。此外，若 A 是交换代数，则 $\lambda = 0$, $\mu_1 = \mu_2$ 和 ν 是对称的。

4.4. 李超同态。多年来，若干作者将 Herstein理论中关于结合环的李结构的部分内容推广到了超代数（参见 [79,87, 88, 112, 138] 及其中的参考文献）。因此，自然会想到将上述关于李同态的结果推广到超代数上。这里是否也适用 FIs 并非一目了然。然而，事实证明它们确实适用，尽管处理方式没那么直接 [7, 10, 130, 132]。我们将仅介绍一项与 Bahturin 和 ˘Spenko 合作撰写的论文中的结果 [10]。其他结果性质相似，但表述更为复杂。

我们先给出必要的定义、记号和术语。本文所说的代数是域 F 上不一定满足结合律的代数，并假设 $\mathrm{char}(F) \neq 2$。超代数是一个 $\mathbb{Z}_2$ 分次代数 A。这意味着 A 包含线性子空间 A_0 和 A_1，使得对于所有 i、$j \in \mathbb{Z}_2$，都有 $A = A_0 \oplus A_1$ 和$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$。注意，映射 $\sigma\colon A \to A$ 由下式给出

$$(a_0 + a_1)^\sigma = a_0 - a_1$$

对于所有 $a_0 \in A_0$ 和 $a_1 \in A_1$，它都是 A 的一个自同构，且满足 $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$。反过来，如果 σ 是 A 的一个自同构，且满足 $\sigma^2 = \mathrm{id}_A$，那么相对于 $A_0 = \{a \in A \mid a^\sigma = a\}$ 和 $A_1 = \{a \in A \mid a^\sigma = -a\}$，$A$ 是一个超代数。事实上，每个 $a \in A$ 都可以写成 $a = a_0 + a_1$，其中 $a_0 = \frac{1}{2}(a + a^\sigma) \in A_0$ 且$a_1 = \frac{1}{2}(a - a^\sigma) \in A_1$。

来自 $A_0 \cup A_1$ 的元素称为齐次元素。更准确地说，来自A_0 的元素是次数为 0 的齐次元素，来自 A_1 的元素是次数为 1 的齐次元素。我们也称 A_0 中的元素为偶元素，称 A_1 中的元素为奇元素。对于齐次元素 a，若 a 为偶元素，我们记作 $|a| = 0$；若 a 为奇元素，则记作 $|a| = 1$。此外，若 $V = V_0 \oplus V_1$，其中 $V_i = A_i \cap V$，则称 A 的线性子空间 V是分次的。若 $V_0^\alpha \subseteq W_0$ 且 $V_1^\alpha \subseteq W_1$，则称从分次空间 V到分次空间 W的线性映射 α 是分次映射。

结合超代数就是作为代数而言是结合的超代数。在结合超代数 A 中，齐次元素 a 和 b 的超交换子为元素

$$[a, b]_s = ab - (-1)^{|a||b|}ba.$$

利用双线性将 $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_s$扩张到 $A \times A$。可以验证，赋予乘积 $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_s$的 A是一个李超代数，这意味着

$$[a, b]_s = -(-1)^{|a||b|}[b, a]_s$$

and

$$(-1)^{|a||c|}[[a, b]_s, c]_s + (-1)^{|c||b|}[[c, a]_s, b]_s + (-1)^{|b||a|}[[b, c]_s, a]_s = 0$$

对于所有齐次元素 a、b、$c \in A$。

若结合超代数 B 到结合超代数 A 的分次线性映射 α 满足

$$([a, b]_s)^\alpha = [a^\alpha, b^\alpha]_s$$

对所有 a、$b \in B$均成立，则称其为李超同态。显然的例子包括超同态，即通常意义下为代数同态的分次线性映射，以及超反同态，即满足以下条件的分次线性映射 β

$$ab^\beta = (-1)^{|a||b|} b^\beta a^\beta$$

对所有齐次元素 a 和 b。

设 A 是一个结合超代数， Z 是它的中心（按通常意义，即 A 中与任意其他元素交换的所有元素的集合）。注意， Z 是一个分次子空间。若 A 是含单位元的，且 $Z_0 = F$，即 Z_0 由单位元的数量倍数组成，则称 A 为中心超代数。

如果一个结合超代数 A 满足 $A^2 \neq \{0\}$ ，且 A 没有非零真分次理想，则称其为单的。同样地，如果 A 中任意两个非零分次理想的乘积总是非零，则称 A 为素的。显然，如果 A 作为代数是单的（分别为素的），那么作为超代数它也同样是单的（分别为素的）。然而，反之并不成立。

论文 [10] 研究素结合超代数之间的李超同构。我们将只介绍单超代数的结果（以及李超自同构的结果），因为该结果明确且易于表述。

定理 4.9. 设 A 是域 F 上的中心单结合超代数。若 $\dim_F A \neq 2, 4$，则每个 A 的李超自同构 α 都具有如下形式： $\alpha = \varphi + \tau$，其中 φ 要么是 A 的超自同构，要么是其超反自同构的负映射；并且 $\tau \colon A \to F$ 是一个在超交换子上取值为零的线性映射。

假设 $\dim_F A \neq 2, 4$ 的必要性可由 [10, Examples 3.5 and 5.2] 中的例子说明。

证明分为三部分。其中适用 FIs 的部分讨论诱导 $\mathbb{Z}_2$-分次的自同构 σ 为外自同构的情形。随后，关于来自 [13] 的自同构的 FIs 结果表明它们也适用于此情形。

4.5. 李可容许代数。设 A 是域 F 上的一个非结合代数。与前文不同，我们用 $*$ 表示 A 中的乘法。若 A 的向量空间在如下乘积下构成李代数，则称 A 为李可容代数

$$[\![x, y]\!] = x * y - y * x.$$

通常的问题是在某些附加假设下描述 $*$ 。这可以追溯到 Albert [2] ，他尤其关注同时也是柔性的李可容代数，也就是说，它们满足

$$(x * y) * x = x * (y * x)$$

对所有 x、$y \in A$均成立。

根据庞加莱-伯克霍夫-维特定理，每个李代数都同构于某个结合代数的李子代数。因此，我们假设李可容许代数 A 是结合代数 Q 的李子代数，并且

$$[\![x, y]\!] = x * y - y * x = xy - yx \tag{4.7}$$

对所有 x、$y \in A$，其中 xy 是 Q中 x 与 y 的乘积。我们不假设 A 是柔性的，而只假设 A 是三次幂结合的。这意味着

$$(x * x) * x = x * (x * x)$$

对所有 $x \in A$。将 (4.7) 中的 y 替换为 $x * x$，由此可得

$$x(x * x) = (x * x)x$$

对所有 $x \in A$。这意味着 $x \mapsto x * x$ 是某个双加性函数的交换迹，因此函数恒等式的方法适用。

我们刚才描述的这一思路曾被 Beidar、Chebotar 等人在论文 [22, 25]中采用。他们的结果也在 [53]中进行了综述。我们陈述 [53, 定理 8.2]的一个简化版本。

定理 4.10。设 F 是一个特征为 char(F) $\neq 2$ 的域，并设 Q 是一个中心为 F的含幺 F-代数。设 A 是 Q 的一个线性子空间，它是Q的一个 3-自由子集。假设 A 赋有另一种（非结合）乘法 $*$，使得

$$x * y - y * x = xy - yx$$

对所有 $x, y \in A$。那么，代数 (A, $+$, $*$) 是三次幂结合的，当且仅当存在一个 $\lambda \in F$、一个对称线性映射 $\mu : A \to F$，以及一个对称双线性映射 $\nu : A^2 \to F$，使得

$$x * y = \frac{1}{2}[x, y] + \lambda x \circ y + \mu(x)y + \mu(y)x + \nu(x, y)$$

对所有 x、$y \in A$ 均成立。此外，如果 (A, $+$, $*$) 是柔性的，则对所有 x、$y \in A$ 均有 $\mu([x, y]) = 0 = \nu(x, [x, y])$。

定理 4.10 中 $A = Q = M_n(F)$ 的特殊情形此前已由 Benkart 和 Osborn [31] 得到。

4.6. Jordan 映射。约当同态的定义类似于李同态的定义：如果 M 和 R 是环，且 J 是 M 的 Jordan 子环，那么约当同态是一个可加的映射 $\alpha : J \to R$，满足

$$(x \circ y)^\alpha = x^\alpha \circ y^\alpha \tag{4.8}$$

对所有 x、$y \in J$ 均成立。注意，如果 R 是无 2-挠的（即 $2x = 0$ 蕴含 $x = 0$），则 (4.8) 等价于

$$(x^2)^\alpha = (x^\alpha)^2$$

对所有 $x \in J$ 均成立。

至于李同态，我们可以探讨 Jordan 同态能否用同态和反同态来描述。也可以通过 FIs 来研究这个问题。所得结果与李同态方面的结果相似。不过，对于单环和素环这一经典情形，这些结果并未带来实质性的新信息。原因很简单：在 FIs 引入之前，人们已经回答了最自然的问题。1956年，Herstein 证明，在对特征条件作出较弱假设时，从一个环到一个素环的 Jordan 同态要么是同态

，要么是反同态 [81]。二十多年后，人们运用 Zelmanov [137]发现的强大方法，描述了某些真 Jordan 子环上的 Jordan 同态，例如带对合的环中对称元素所构成的集合 [109, 110] 。

尽管如此，用 FI 方法研究 Jordan 同态仍然很有意义，因为它既能为已知结果提供另一种证明，也能导出涉及 d-自由子集的抽象定理，而这些定理可能适用于不同的情形。下面介绍两个这样的定理，均取自 [53]。第一个定理与定理 4.1 类似。

定理 4.11. 设 α 是从环 M 到含幺环Q的 Jordan 同态，且Q具有算子 $1\,2$。若 M^α是 Q的 4-自由子集，则 α是一个同态与一个反同态的直和。

下面介绍证明思路。根据定义，我们可以控制 α 对约当乘积的作用，因此只需确定 α 对李乘积的作用。于是，自然可以使用恒等式

$$[[u,v],t] = u\circ(v\circ t) - v\circ(u\circ t)$$

该恒等式联系了约当乘积和李乘积。由此恒等式可知， α 满足

$$[[u,v],t]^\alpha = [[u^\alpha, v^\alpha], t^\alpha]$$

对所有 $u,v,t\in M$均成立。因此，对于所有 $x,y,z,w\in M$，一方面有，

$$[[x,y],[z,w]]^\alpha = [[x^\alpha, y^\alpha], [z,w]^\alpha],$$

另一方面，

$$[[x,y],[z,w]]^\alpha = [[x,y]^\alpha, [z^\alpha, w^\alpha]].$$

比较可知， $F(x,y) = [x,y]^\alpha$ 满足

$$[[x^\alpha, y^\alpha], F(z,w)] = [F(x,y), [z^\alpha, w^\alpha]]. \tag{4.9}$$

由于假设 M^α 是 Q 的一个 4-自由子集，因此可以求解这个函数恒等式。由此可确定 α 对李乘积的作用。

第二个结果与定理 4.3 类似。

定理 4.12. 设 S 是带有对合的环 M 的对称元素集， Q 是中心为 C 的含幺环，且 $\alpha: S\to Q$ 是一个约当同态。假设 S 和 Q 都含有算子 $1\ 2$，并且 C 是加法群 Q 的直和项。若 S^α 是 Q 的一个 7- 自由子集，则 α 可扩张为一个从 $\langle S\rangle$（即由 S 生成的子环）到 Q 的同态。

证明基于将映射 β 定义为： $S+[S,S]\to \overline{Q} = Q/C$

$$\Big(s + \sum_i [s_i,t_i]\Big)^\beta = \overline{s^\alpha + \sum_i [s_i^\alpha, t_i^\alpha]}.$$

可以证明， β是一个定义良好的李同态，并且 $S+[S,S]$是环 $\langle S\rangle$的一个李理想。因此，可以应用环的李理想上的李同态的描述（所需的结果并未在第 4.1 小节中明确陈述，但其中给出了足够的信息以了解其要旨）。

Jordan 导子 $\delta : J \to R$ 当然是一个满足以下条件的可加的映射

$$(x \circ y)^\delta = x^\delta \circ y + x \circ y^\delta \tag{4.10}$$

对所有 x、$y \in J$。如果 R 是无 2-挠的，则（4.10）等价于

$$(x^2)^\delta = x^\delta x + x x^\delta$$

对所有 $x \in J$。FI 方法可以类似于处理 Jordan 同态的方式应用于 Jordan 导子及一些相关映射，参见 [53, 92, 94] 及其中的参考文献。因此，我们将略过这一主题，转而讨论另一类表面上相似的映射；然而，这类映射必须以不同的方式处理。

设 R 是一个带对合的环 $*$。若加法映射 $\delta : R \to R$ 满足

$$(x^2)^\delta = x^\delta x^* + x x^\delta$$

对所有 $x \in R$。对于每个 $a \in R$,

$$x \mapsto ax^* - xa \tag{4.11}$$

是一个 Jordan $*$-导子。关于 R 的每个 Jordan $*$-导子是否都具有这种形式的问题，与描述二次泛函 [125, 126] 的问题密切相关。已有多篇论文研究了这一问题，但最深刻的结果由 Lee、Wong 和 Zhou [95, 96] 获得。它们可以概括如下。

定理 4.13. 设 R 是一个带对合 $*$ 的非交换素环。那么，R 的每个 Jordan $*$-导子 δ 都具有 $x^\delta = ax^* - xa$ 的形式，其中 $a \in Q_{ms}(R)$，除非 $\mathrm{char}(R) = 2$ 且 $\deg(R) = 2$。

证明的第一步是证明 Jordan $*$-导子满足某些（并不显而易见的！）带对合的 FIs。之后，应用这类 FIs 的一般理论。其中一个恒等式是

$$\begin{aligned}
&(xw)^\delta z^* y^* + (yz)^\delta w^* x^* + xw(yz)^\delta + yz(xw)^\delta \\
&\quad - x^\delta z^* y^* w^* - (wyz)^\delta x^* - x(wyz)^\delta - wyzx^\delta \\
=&(zxw)^\delta y^* + y^\delta w^* x^* z^* + zxwy^\delta + y(zxw)^\delta \\
&\quad - (zx)^\delta y^* w^* - (wy)^\delta x^* z^* - zx(wy)^\delta - wy(zx)^\delta .
\end{aligned}$$

这是处理 $\mathrm{char}(R) \neq 2$ 情形的关键恒等式。$\mathrm{char}(R) = 2$ 情形则基于另一个 FI。

我们还构造了一个例子，说明当 $\mathrm{char}(R) = 2$ 且 $\deg(R) = 2$ 时，该定理不成立。

4.7. f-同态。设 $f = f(X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{Z}\langle X_1, X_2, \dots \rangle$ 是一个次数为 m 的多线性多项式，即具有如下形式的多项式

$$f = \sum_{\sigma \in S_m} \lambda_\sigma X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(m)}$$

其中 λ_σ 是一些不全为零的整数。从环 M 到环 Q 的可加映射 α 称为 f-同态，如果

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)^\alpha = f(x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_m^\alpha)$$

对所有 x_1、.....、$x_m \in M$ 均成立。若 $f = X_1X_2 - X_2X_1$，则 f-同态显然是李同态；若 $f = X_1X_2 + X_2X_1$，则 f-同态是约当同态。

描述任意 f-同态的形式看似是一个极具雄心的目标。然而，事实证明这是可行的。Beidar 和 Fong [26]，首先注意到了这一点，随后文献 [16, 19] 也有相关论述。我们将沿用文献 [53] 中的阐述。

证明的关键在于找到一个涉及 f-同态的函数恒等式。具体做法如下。由于 f 是多线性的，我们有

$$[f(\overline{x}_m), y] = \sum_{i=1}^{m} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, y], x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

对所有 x_i、$y \in M$ 均成立。特别地，

$$[f(\overline{x}_m), f(\overline{y}_m)] = \sum_{i=1}^{m} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, [x_i, f(\overline{y}_m)], x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

对所有 x_i、$y_j \in M$ 均成立。由于

$$[x_i, f(\overline{y}_m)] = \sum_{j=1}^{m} f(y_1, \ldots, y_{j-1}, [x_i, y_j], y_{j+1}, \ldots, y_m),$$

由此得到

$$\begin{aligned}&[f(\overline{x}_m), f(\overline{y}_m)]\\ =&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(y_1, \ldots, y_{j-1}, [x_i, y_j], y_{j+1}, \ldots, y_m), x_{i+1}, \ldots, x_m).\end{aligned}$$

现在，由于

$$[f(\overline{x}_m), f(\overline{y}_m)] = -[f(\overline{y}_m), f(\overline{x}_m)],$$

我们可以在变号后，将 y_i 代入上述恒等算子右侧的 x_i。因此，

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, f(y_1, \ldots, y_{j-1}, [x_i, y_j], y_{j+1}, \ldots, y_m), x_{i+1}, \ldots, x_m)\\ +&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, f(x_1, \ldots, x_{j-1}, [y_i, x_j], x_{j+1}, \ldots, x_m), y_{i+1}, \ldots, y_m)\\ =&0.\end{aligned}$$

将 f-同态 α 应用于这个恒等算子，我们看到

$$F(x, y) = [x, y]^\alpha$$

满足

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(x_1^\alpha,\dots,x_{i-1}^\alpha, f(y_1^\alpha,\dots,y_{j-1}^\alpha, F(x_i,y_j), y_{j+1}^\alpha,\dots,y_m^\alpha), x_{i+1}^\alpha,\dots,x_m^\alpha)\\ &+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(y_1^\alpha,\dots,y_{i-1}^\alpha, f(x_1^\alpha,\dots,x_{j-1}^\alpha, F(y_i,x_j), x_{j+1}^\alpha,\dots,x_m^\alpha), y_{i+1}^\alpha,\dots,y_m^\alpha)\\ &=0.\end{aligned}$$

这是一个适用定理 3.51 的函数恒等式。假设 M^α 是 Q 的一个 $(2m)$-自由子集，则中间函数 $F(x,y)$ 是一个拟多项式。这使得描述 α 的问题仅比描述李同态的问题稍微复杂一些。采用与定理 4.1 的证明类似的方法，可以证明以下定理。

定理 4.14. 设 $f \in \mathbb{Z}\langle X_1, X_2, \dots\rangle$ 是一个次数为 m 的多线性多项式，且其系数之一为 1。设 α 是从环 M 到含幺环 Q 的一个 f-同态，且其中心 C 是一个域。若 M^α 是 Q 的一个 $(2m)$-自由子集，则对于所有 $x \in M$，都有 $x^\alpha = \lambda x^\varphi + x^\mu$，其中 $\lambda \in C$, $\varphi\colon M \to Q$ 是同态或反同态，而 $\mu\colon M \to C$ 是一个加法映射。

一个特别值得关注的情形是，当 $R = M^\alpha$ 是次数为 $\geq 2m$ 的素环时。注意，某些次数假设是必要的，以排除多项式恒等式。

类似地，可以定义 f-导子。定理 3.35 可用于将描述这类导子的问题归结为描述 f-同态的问题。

4.8. 近导子。设 L 为李代数。我们用 $\mathrm{Der}(L)$ 表示 L 的所有导子组成的李代数。对于任意 $x \in L$，用 $\operatorname{ad} x \in \mathrm{Der}(L)$ 表示内导子 $(\operatorname{ad} x)(y) = [x,y]$。如果存在一个线性映射 $\gamma\colon L \to L$，使得线性映射 $\delta\colon L \to L$ 被称为近导子，则

$$(\operatorname{ad} x)\delta - \gamma(\operatorname{ad} x) \in \mathrm{Der}(L) \tag{4.12}$$

对于每个 $x \in L$ 都成立。有两个基本例子，且二者都出现在 $\gamma = \delta$ 中。它们是导子（满足 $(\operatorname{ad} x)\delta - \delta(\operatorname{ad} x) = -\operatorname{ad} x^\delta$）以及来自 L 的质心的元素（满足 $(\operatorname{ad} x)\delta - \delta(\operatorname{ad} x) = 0$）。此外，从 L 到 L 的中心的每个映射也是近导子（对于 $\gamma = 0$）。

近导子由本文作者在 [44]中引入并加以研究。其主要动机是 Leger 和 Luks 的论文 [97]，该论文研究了类似的映射，作者称之为广义导子。它们通过以下条件定义：

$$(\operatorname{ad} x)\delta - \gamma(\operatorname{ad} x) = \operatorname{ad} x^\sigma$$

对所有 $x \in L$，其中 $\sigma\colon L \to L$ 是另一个线性映射。当然，$\operatorname{ad} x^\sigma \in \mathrm{Der}(L)$，所以近导子的概念比广义导子的概念稍微更一般。不过，这并不是引入近导子的主要原因。[44] 的目的是说明，可以将 FI 理论作为推论，得到与 [97]中的结果类型相同的结果。

如何得到一个涉及近导子 δ的 FI? 注意，(4.12)意味着

$$[x,[y,z]^\delta]-[x,[y,z]]^\gamma=[[x,y^\delta]-[x,y]^\gamma,z]+[y,[x,z^\delta]-[x,z]^\gamma]$$

f对所有 x、 y、 $z\in L$，结合雅可比恒等式所说明的 t

$$[x,[y,z]]^\gamma+[z,[x,y]]^\gamma+[y,[z,x]]^\gamma=0,$$

很快便可推出函数 $F\colon L^2\to L$,

$$F(x,y)=[x,y]^{2\gamma-\delta}-[x^\delta,y]-[x,y^\delta],$$

满足

$$[F(x,y),z]+[F(z,x),y]+[F(y,z),x]=0$$

对所有 x、 y、 $z\in L$均成立。由此，我们便可以运用定理 3.51。在适当的假设下， $F(x,y)$ 因而是一个拟多项式。这是下述定理证明的出发点。

定理 4.15. 设 L 是含幺 F-代数 Q 的李子代数，其中心为 C，且 $\delta\colon L\to L$ 是一个近导子。若 L 是 Q 的 4-自由子集，则存在一个 $\lambda\in C$ 使得

$$[x,y]^\delta-[x^\delta,y]-[x,y^\delta]-\lambda[x,y]\in C$$

对所有 $x,y\in L$ 均成立。此外，如果二阶上同调群 $H^2(L,F)$ 是平凡的，那么存在一个导子 $d\colon L\to Q$、一个元素 $\gamma\in C$，以及一个线性映射$\tau\colon L\to C$，使得 $\delta=d+\ell_\gamma+\tau$（其中 ℓ_γ 表示函数 $x\mapsto\gamma x$）。

在 [44], 中，定理 4.15 起着基本引理的作用，而主要结果则考察了不同的情形，在这些情形下，可以利用它证明 δ 是一个导子、一个来自质心的元素和一个中心映射之和。这里不再详述，因为我们的主要目的只是展示应用 FIs 的方法。

4.9. 线性保持问题。这个标题指的是一系列问题，它们关注代数之间保持某些代数性质的线性映射。目标是描述这些映射的形式。这是一个广阔的研究领域，在算子理论和线性代数中尤为活跃，在纯代数领域也同样如此。

当然，FIs 并不适用于所有线性保持问题。不过，对于适用的问题，FIs 能够得出比以往已知结果更为一般的结论。这是因为它们具有形式化的性质，从而能够对截然不同的对象进行统一处理。

可由 FIs 解决的线性保持问题中，最突出的例子与保持交换性的线性映射有关。我们称线性映射$\alpha\colon B\to A$（其中 A 和 B 是域 F上的代数）保持交换性，若对于所有 $x,y\in B$,

$$[x,y]=0\implies[x^\alpha,y^\alpha]=0.$$

这类映射最初是在域 [135], 上的矩阵代数中研究的，之后又在许多其他更一般的代数中得到研究。关于早期历史的概述，参见 [53, 第 218-219] 页。

李同态显然保持可交换性，因此我们现在面临的问题更加困难。不过，我们可以采用第 4.1 小节开头介绍的相同方法。我们只需利用显然的事实： x与 x^2 可交换，从而得到函数恒等式

$$[x^\alpha, (x^2)^\alpha] = 0$$

对所有 $x \in B$。正如我们在第 4.1 小节中所知，在适当的假设下，这个恒等式可用于描述 α 对元素平方的作用。剩下的问题确实比李同态的情形更难，但如今已经取得突破。

这一思路早已用于 [38] 关于 FIs 应用的开创性论文中。以下定理只是对其中结果在技术层面上的略微推广，这一点是稍后才被注意到的。在陈述定理之前，我们回顾一下：若素含幺 F 代数的扩张中心等于 F，则称其为中心闭的。例如，单含幺环是其中心上的中心闭代数。

定理 4.16。设 A 和 B 是域 F 上的中心闭素含幺代数，且 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，并设 $\alpha : B \to A$ 是双射线性映射。若 $\deg(B) \geq 3$ 且 α 满足 $[x^\alpha, (x^2)^\alpha] = 0$ 对所有 $x \in B$ 均成立（特别地，若 α 保持可交换性），则对所有 $x \in B$， α 均具有如下形式： $x^\alpha = \lambda x^\varphi + \mu(x)$，其中 $\lambda \in F$、 φ 是从 B 到 A 的同构或反同构，而 $\mu : B \to F$ 是线性映射。

我们指出，假设 $\deg(B) \geq 3$ 是必要的。事实上，若 $A = B = M_2(F)$（因此 $\deg(B) = 2$），则 x 与 $y \in B$ 可交换，当且仅当 x、 y 和 1 线性相关。因此，任何将 1 映射为 1 的标量倍数的线性映射都保持可交换性。

在 [38]，交换性保持映射出现之前，人们已在矩阵代数以及泛函分析中出现的代数里研究交换性保持映射。定理 4.16 统一并推广了许多已有结果，并开启了在纯代数中研究可交换性及一些相关线性保持映射的大门。借助 FI 理论中更先进的方法，其各种推广得到了广泛研究（参见 [11, 14, 27, 32, 43, 48, 57, 61, 99]，另见 [53]）。不过，我们在此不作讨论。

现在假设 A 和 B 是带对合的 F代数。若当 x 为正规元素时， x^α 也为正规元素，我们就称映射α 保正规性，也就是说，

$$[x, x^*] = 0 \implies [x^\alpha, (x^\alpha)^*] = 0. \tag{4.13}$$

描述保正规线性映射的问题显然与描述保持交换性的线性映射问题相关，但更加复杂。多年来，这个问题也逐渐引起了一些关注，并且是另一个可以通过 FIs 处理的线性保问题。 [14] 中对此作了证明， [53, 第 7.2]节也对此进行了综述。值得注意的是，这些代数结果后来被用于解决泛函分析中一些看似无关的保问题 [36, 80, 111]。

我们将陈述并评论 [14] 中的一个示例定理。先来谈几点一般性说明。

与定理 4.16 一样，我们假设 A 和 B 是 F上的中心闭素单位代数。此类代数上的对合 $*$ 若是 F-线性的，就称为第一类；否则称为第二类。事实证明，若 A 和 B 上的对合是第二类，那么保持正规性的映射问题可以归结为保交换映射问题。因此，我们只考虑第一类对合。我们还增加一个自然假设：保持正规性的线性映射 $\alpha : B \to A$ 是 $*$-线性的，这意味着

$$(x^*)^\alpha = (x^\alpha)^* \tag{4.14}$$

对每个 $x \in B$ （对于第二类对合，这一点并非必要，因为（4.14）的一个稍弱版本会自动成立）。如果 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，那么这一假设意味着（4.13）等价于以下条件：对于 B 中的每个对称元素 s 和 B 中的每个斜元素 k，

$$[s,k] = 0 \implies [s^\alpha, k^\alpha] = 0. \tag{4.15}$$

这是因为每个 $x \in B$ 都可以写成对称元素 $s = \frac{1}{2}（x + x^*）$ 与斜元素 $k = \frac{1}{2}（x - x^*）$ 之和，因此 $[x, x^*] = 0$ 等价于 $[s,k] = 0$；同样，$[x^\alpha,（x^*）^\alpha] = [x^\alpha,（x^\alpha）^*] = 0$ 等价于 $[s^\alpha, k^\alpha] = 0$。注意，如果 k 是斜元素，则 k^2 是对称的，而 k^3 是斜的。因此，（4.15）意味着

$$[(k^2)^\alpha, k^\alpha] = 0 \quad \text{and} \quad [(k^2)^\alpha, (k^3)^\alpha] = 0 \tag{4.16}$$

对 B 中的每个斜元素 k 都成立。第一个恒等式是一个标准泛函恒等式，我们知道如何处理。利用从这个第一个泛函恒等式推导出的结果，(4.16) 中的第二个恒等式就成为一个符合一般理论的泛函恒等式。由此可得以下定理。

定理 4.17. 设 A 和 B 是域 F 上带第一类对合的中心闭素单位代数。记 A_0（分别为 B_0）为 A（分别为 B）中由 A（分别为 B）中的所有斜元素生成的子代数。设 $\alpha : B \to A$ 是一个保持正规性的双射 $*$-线性映射。若 $\mathrm{char}(F) \neq 2, 3$, $\deg(B) \geq 7$, 且 $\deg(A) \geq 14$，则对所有 $x \in B_0$，α 均具有形式 $x^\alpha = (\lambda_1 x + \lambda_2 x^*)^\varphi + \mu(x)$，其中 λ_1、$\lambda_2 \in F$、$\lambda_1 \neq \pm\lambda_2$、$\varphi$：$B_0 \to A_0$ 是一个 $*$- 线性同构，而 μ：$B_0 \to F$ 是一个在线性映射，在 B_0 中的斜元素上取值为零。

如果 A 和 B 是单代数，那么 $A_0 = A$ 和 $B_0 = B$ [83]。一个例子是 $A = B$ 为两个不定元上的自由代数，这表明一般而言，A_0和 B_0 可能是真子代数。

在解决了保交换映射的问题之后，人们可能会想知道，对于保持反交换性的映射，即对于满足下式的代数（或环）之间的映射α，我们能得出什么结论：

$$x \circ y = 0 \implies x^\alpha \circ y^\alpha = 0.$$

换言之，这些映射保持零 Jordan 乘积。

环中不存在非零反交换元素对的情况并不少见。例如，韦尔代数 [50, Example 3.18], 便是如此，它是单环的一个基本例子。因此，我们不能指望得到类似于

前两个定理的结果也适用于反交换性保持映射。要得到一些有趣的结果，我们必须考虑其他类别的环。

一个具有许多对反交换元素的环的例子，是任意环上的方阵环。以下结果由 [68] 证明（另见 [53,第 7 节3]）。

定理 4.18. 设 S 是一个具有算子 $1\ 2$ 的含幺环，设 $R = M_n(S)$ 且 $n \geq 4$，并设 $\alpha\colon R \to R$ 是一个保持反交换性的满射加法映射。那么存在一个来自 R 中心的元素 λ 以及一个约当同态 $\varphi : R \to R$，使得对所有 $x \in R$，都有 $x^\alpha = \lambda x^\varphi$。

证明的第一步是证明 α 满足

$$(xyx)^\alpha \circ y^\alpha = (yxy)^\alpha \circ x^\alpha \tag{4.17}$$

对所有 $x, y \in R$ 都成立。对 x 和 y 进行线性化，我们得到一个含四个变量的函数恒等式，定理 3.32 可应用于该恒等式（因为 $n \geq 4$）。从这一步开始，证明便按标准方式进行。然而，如何推出 (4.17)？答案与下一个也是最后一个主题有关。

4.10. 零积决定代数。若一个 F-代数 A 满足以下条件，则称其为零积决定（简称 zpd）：对于每个双线性泛函 $\varphi\colon A^2 \to F$，只要 $xy = 0$ 可写成 $\varphi(x, y) = \tau(xy)$ 的形式，其中 τ 是某个线性泛函，就有 $\varphi(x, y) = 0$。过去 15 年间，零积决定代数理论先是零星发展，后来逐渐形成系统。推动这一发展的主要原因，是该理论在不同数学领域有着多种应用。近期出版的书籍 [50] 对这一理论及其应用作了综述。

该理论分为代数和解析两个分支。解析分支研究巴拿赫代数，在定义中要求泛函 φ 和 τ 连续。事实证明，这一分支内容更加丰富，尤其是因为 zpd 巴拿赫代数的范围确实很广，而具有 zpd 性质的普通代数则范围较窄。

在上述零乘积决定代数的定义中，A 不一定是结合的。不过，A 为结合代数的情形研究得最为深入。另外两个重要情形是：将 A 视为结合代数，并分别在李乘积 $[\cdot, \cdot]$ 下将其视为李代数，或在约当乘积 $\circ$下将其视为约当代数。对于第一种情形，我们称之为零李乘积确定代数（简称 zLpd）；对于第二种情形，我们称之为零约当乘积确定代数（简称 zJpd）。

零乘积决定代数、零李乘积确定代数和零约当乘积确定（结合）代数有哪些基本例子？如果 A 是含幺代数，且作为代数由幂等元生成，那么它是零乘积决定代数 [50, 定理 2.15]；并且，如果特征 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，它也是零约当乘积确定代数 [50, 定理 3.15]。由幂等元生成的含幺代数的一个简单例子是矩阵代数 $A = M_n(S)$，其中 $n \geq 2$，且 S 是任意含幺代数 [50, 推论 2.4]。因此，这种代数是零乘积决定代数；如果特征 $\mathrm{char}(F) \neq 2$，也是零约当乘积确定代数，但不一定是零李乘积确定代数 [50, 例 3.13]。不过，如果 S 是交换的，那么 A 也是零李乘积确定代数 [50, 推论 3.11]。

函数恒等式理论与 zpd 理论在思想和技术层面都存在诸多交集。关于前者，我们提到二者最初都

受到保持交换性的线性映射问题的影响。正如我们在上一小节提到的， [38] 中首次描述了双射交换性保持映射，这也是第一篇提供 FIs 应用的论文。 [60], 中首次描述了有限维中心单代数上不一定是双射的交换性保持映射，这也是首次考察零乘积决定条件某种形式的论文。证明的第一个关键步骤是证明矩阵代数 $M_n(F)$ 按照本文采用的术语是 zLpd。

在一些论文中，尤其是 [48] 和 [51], ，研究了函数恒等式与 zpd 代数之间更直接的联系。不过，这些论文讨论的是巴拿赫代数，因此我们不在这篇代数论文中讨论它们。这里只介绍一个非常简单的（代数）结果，作为函数恒等式与 zpd 代数如何结合的范例。它涉及保持零乘积的线性映射，即满足以下条件的代数间线性映射 α

$$xy = 0 \implies x^\alpha y^\alpha = 0.$$

对这类映射的研究历史悠久，尤其是在泛函分析领域（更多详情和参考文献见[50, 第 114] 页）。

定理 4.19. 设 A 是一个 3-自由代数， B 是一个 zpd 代数。若 $\alpha : B \to A$是一个满射零乘积保持线性映射，则存在一个来自 A 中心的元素 λ，使得对于所有 x, $y \in B$ ，都有 $(xy)^\alpha = \lambda x^\alpha y^\alpha$ （因此 $x \mapsto \lambda x^\alpha$是一个同态）。

证明。定义 Φ： $B \times B \to A$ ，使得 $\Phi(x, y) = x^\alpha y^\alpha$。由于 B 是零积决定的，且 $xy = 0$ 蕴含 $\Phi(x, y) = 0$，因此存在一个线性映射 T： $B \to A$ ，使得

$$\Phi(x, y) = T(xy). \tag{4.18}$$

实际上，定义只告诉我们当 $A = F$ 时这一结论成立。不过很容易看出，当 A 是任意向量空间 [50, 命题 1.3]时，同样的结论也成立。

利用结合律，我们看到 (4.18) 蕴含对所有 $x, y, z \in B$，都有 $\Phi(xy, z) = \Phi(x, yz)$，也就是说，

$$(xy)^\alpha z^\alpha = x^\alpha (yz)^\alpha. \tag{4.19}$$

由于 α 是满射且 A 是 3-自由的，定理 3.51 告诉我们，$(xy)^\alpha$ 是一个拟多项式。因此，记 A的中心为 C，存在 $\lambda, \lambda' \in C$, $\mu, \mu' : B \to C$，以及 ν： $B^2 \to C$ ，使得

$$(xy)^\alpha = \lambda x^\alpha y^\alpha + \lambda' y^\alpha x^\alpha + \mu(y) x^\alpha + \mu'(x) y^\alpha + \nu(x, y) \tag{4.20}$$

对所有的 $x, y \in B$ 均成立。将 (4.20) 代入 (4.19)，得到

$$\begin{aligned} &\lambda' y^\alpha x^\alpha z^\alpha - \lambda' x^\alpha z^\alpha y^\alpha + (\mu - \mu')(y) x^\alpha z^\alpha \\ &\qquad + \mu'(x) y^\alpha z^\alpha - \mu(z) x^\alpha y^\alpha + \nu(x, y) z^\alpha - \nu(y, z) x^\alpha = 0 \end{aligned}$$

对所有 x、 y、 $z \in B$ 均成立。引理 3.50 表明 $\lambda' = \mu = \mu' = \nu = 0$。因此，(4.20) 化简为 $(xy)^\alpha = \lambda x^\alpha y^\alpha$。 □

定理 4.19 可能尚未见诸文献。不过，它并未带来任何本质上的新意；其思想实际上可以追溯到论文 [67]，该论文发表于零乘积决定代数这一概念提出之前。我们的主要目的是介绍证明方法，而非定理本身；与许多其他关于零乘积保持映射的结果相比，这一定理要简单得多。

类似地，可以考虑保持零 Jordan 乘积（即反交换性）的线性映射 $\alpha\colon B \to A$。若 B 是 zJpd 代数，则可得

$$x^\alpha \circ y^\alpha = T(x \circ y)$$

对于某个线性映射 $T\colon B \to A$。由于 $(xyx) \circ y = (yxy) \circ x$，可得（4.17）。这说明了定理 4.18 证明背后的思路。

总结性评论。正如本节中列举的大量例子所展示的，不同领域中的许多问题都会产生某些 FIs，因此可以借助一般理论的工具来解决。推导出一些 FIs 后，通常只需按部就班地处理，就能得到一个解。函数恒等式理论的核心且永恒的问题，是发现隐藏在某些数学问题背后的 FIs。从某种意义上说，这个问题就是寻找适用该理论的问题。作者确信，数学的各个领域中仍有许多这类问题，而函数恒等式理论的潜力远未穷尽。

致谢。作者谨此感谢审稿人提出的宝贵意见。

References

[1] J. Alaminos, M. Breˇsar, A. R. Villena，冯·诺伊曼代数上的李导子和约当导子的强次数与结构，*Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **137** (2004年)，441–463。[2] A. A. Albert，幂结合环，*Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948年)，318–328。[3] E. Aljadeff, A. Giambruno, C. Procesi, A. Regev, *Rings with a Polynomial Identity and Finite Dimensional Representations of Algebras* 2020 ，美国数学学会 Colloq. Publ.，美国数学学会，。[4] S. A. Amitsur，广义多项式恒等式与枢轴恒等式，*Trans. Amer. Math.* ( )，–。[5] P. Ara, *Soc.* **114** 1965 210 226 M. Mathieu, *Local Multipliers of C^*-Algebras*，Springer 数学专著，Springer，2003年。[6] Y. Bahturin, M. Breˇsar，结合代数上的李分次，*J. Algebra* **321** (2009年)，264–283。[7] Y. Bahturin, M. Breˇsar，结合代数上的李超自同构，*Proc. Amer. Math.* ( )，–。 *Soc.* **138** 2010 417 425 [8] Y. Bahturin, M. Breˇsar, M. Kochetov，有限型单Lie代数上的群分次，*International. J. Algebra Comput.* **22** 2012 1250046 ( )，。[9] Y. Bahturin, M. Breˇsar, I. Shestakov，结合代数上的 Jordan 分次，*Algebras Represent. Theory* **14** 2011 113 129 ( )，–。[10] Y. Bahturin, M. Breˇsar, ˇS. ˇSpenko，结合代数上的李超自同构 II，*Algebra Represent. Theory* **15** (2012年)，507–525。[11] R. Banning, M. Mathieu，半素环上的保持交换性映射，*Comm.* ( )，–。[12] K. I. *Algebra* **25** 1997 247 265 Beidar，关于函数恒等式与保交换加性映射，*Comm. Algebra* **26** (1998年)，1819–1850。[13] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar，素环上的广义函数恒等式与（反）自同构及导子，*J. Algebra* **215** (1999年)，644–665。

[14] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar, Y. Fong，将函数恒等式应用于一些线性保持问题，*Pacific J. Math.* **204** (2002年)，257–271。[15] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3rd，带对合的素环上的函数恒等式 II，*Comm. Algebra* **28** (2000年)，3169–3183。[16] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3rd，关于 Herstein 的李映射猜想 I，*Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001年)，4235–4260。[17] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3rd，关于 Herstein 的李映射猜想 II，*J. Algebra* **238** (2001年)，239–264。[18] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3rd，关于 Herstein 的李映射猜想 III，*J. Algebra* **249** (2002年)，59–94。[19] K. I. Beidar, M. Breˇsar, M. A. Chebotar, W. S. Martindale 3rd，某些约当代数上的多项式保持映射，*Israel J. Math.* **141** (2004年)，285–313。[20] K. I. Beidar, M. A. Chebotar，关于环上的

d *Comm.*-自由子集

Algebra **28** 2000 3925 3951
与函数恒等式 I，( )，–。[21] K. I. Beidar, M. A. Chebotar，关于环上的

d *Comm.*-自由子集

Algebra **28** 2000 3953 3972
与函数恒等式 II，( )，–。[22] K. I. Beidar, M. A. Chebotar，关于交换子李代数为素结合代数李子代数的李可容代数，*J. Algebra* **233** (2000年)，675–703。[23] K. I. Beidar, M. A. Chebotar，映到素环李理想上的满射李同态，*Comm. Algebra* **29** (2001年)，4775–4793。[24] K. I. Beidar, M. A. Chebotar，关于素代数李理想上的李导子，

Israel J. ( )，–。

Math. **123** 2001 131 148
[25] K. I. Beidar, M. A. Chebotar, Y. Fong, W.-F. Ke，关于矩阵代数中的某些李可容子代数。*J. Math. Sci.* **131** (2005年)，5939–5947。[26] K. I. Beidar, Y. Fong，保持多项式的素环加法同构，

J. ( )，–。

Algebra **217** 1999 650 667
[27] K. I. Beidar, Y.-F. Lin，保持可交换性的满射线性映射，

Proc. Roy. Soc. ( )，–。

Edinburgh Sect. A **134** 2004 1023 1040
[28] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3rd，带对合的素环上的函数恒等式，*J. Algebra* **203** (1998年)，491–532。[29] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3rd, A. V. Mikhalev，带对合的素环上的李同构，*J. Algebra* **169** (1994年)，304–327。[30] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3rd, A. V. Mikhalev，*Rings with Generalized Identities*，Marcel Dekker，1996年。[31] G. M. Benkart, J. M. Osborn，矩阵上的幂结合乘积，*Hadronic J. Math.* **5** (1982年)，1859–1892。[32] D. Benkoviˇc, D. Eremita，三角代数上的交换迹与保持交换性映射，*J. Algebra* **280** (2004年)，797–824。[33] M. I. Berenguer, A. R. Villena，巴拿赫代数上的李导子的连续性，

Proc. Ed- ( )，–。

inburgh Math. Soc. **41** 1998 625 630
[34] M. I. Berenguer, A. R. Villena，带对合的巴拿赫代数斜元素的李映射的连续性，*Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998年)，2717–2720。[35] M. I. Berenguer, A. R. Villena，巴拿赫代数李同构的连续性，

Bull. ( )，–。

London Math. Soc. **31** 1999 6 10
[36] F. Botelho, L. Molnar, G. Nagy，与 λ-Aluthge 变换交换的冯·诺依曼因子上的线性双射，*Bull. Lond. Math. Soc.* **48** (2016年)，74–84。[37] M. Breˇsar，素环上的中心化映射与导子，*J. Algebra* **156** (1993年)，385–394。[38] M. Breˇsar，双可加映射的交换迹、保持交换性的映射与李映射，*Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993年)，525–546。[39] M. Breˇsar，关于广义双导子及相关映射，*J. Algebra* **172** (1995年)，764–786。[40] M. Breˇsar，二次函数恒等式，*J. Algebra* **172** (1995年)，690–720。[41] M. Breˇsar，关于 d-自由环，*Comm. Algebra* **31** (2003年)，2287–2309。

[42] M. Breˇsar, 《交换映射：综述》， *Taiwanese J. Math.* **8** （2004年），361–397。[43] M. Breˇsar, 《交换性保持映射再探》， *Israel J. Math.* **162** （2007年），317–334。[44] M. Breˇsar, 《李代数中的近导子》， *J. Algebra* **320** （2008年），3765–3772。[45] M. Breˇsar, 《*Introduction to Noncommutative Algebra*》，Universitext，Springer，2014年。[46] M. Breˇsar, 《函数恒等式与商环》， *Algebra Represent. Theory* **19** （2016年），1437–1450。[47] M. Breˇsar, 《代数张量积上的函数恒等式》， *J. Algebra* **455** （2016年），108–136。[48] M. Breˇsar, 《函数恒等式与零李积决定的巴拿赫代数》，

Quart. （），–。

J. Math. **71** 2020 649 665

[49] M. Breˇsar, 《交换子与非交换多项式的像》， *Adv. Math.* **374** （2020），107346。[50] M. Breˇsar, 《 *Zero Product Determined Algebras*》，数学前沿，Birkh¨auser/Sprin-ger，2021年。[51] M. Breˇsar, 《函数恒等式与保持双边零积的映射》， *Algebrasand Polynomials - Algebraic, Number Theoretic, and Topological Aspects of Ring Theory*（会议论文集），Springer，即将出版。[52] M. Breˇsar，M. Cabrera，M. Foˇsner，A. R. Villena，《Jordan-巴拿赫代数上的李三重理想与李三重同构的连续性》， *Studia Math.* **169**（2005年），207–228。[53] M. Breˇsar，M. A. Chebotar，W. S. Martindale 3rd，《 *Functional Identities*》，数学前沿，Birkh¨auser/Springer，2007年。[54] M. Breˇsar，E. Kissin，V. Shulman，《李理想：从纯代数到 C^* *J. Reine*-代数》，

Angew. Math. **623** 2008 73 121

（），–。[55] M. Breˇsar，I. Klep，《非交换多项式线性相关性的局部—整体原理》，*Israel J. Math.* **193**（2013年），71–82。[56] M. Breˇsar，W. S. Martindale 3rd，C. R. Miers，《带对合素环中的中心化映射》， *J. Algebra* **161**（1993年），342–357。[57] M. Breˇsar，C. R. Miers，《冯·诺伊曼代数的交换性保持映射》，*Canad. J. Math.* **45**（1993年），695–708。[58] M. Breˇsar，C. Procesi，ˇS. ˇSpenko，《矩阵上的拟恒等式与 Cayley–Hamilton 多项式》，*Adv. Math.* **280**（2015年），439–471。[59] M. Breˇsar，P. ˇSemrl，《双可加映射的交换迹再探》，*Comm. Algebra* **31**（2003年），381–388。[60] M. Breˇsar，P. ˇSemrl，《关于矩阵上的双线性映射及其在交换性保持映射中的应用》， *J. Algebra* **301**（2006年），803–837。[61] M. Breˇsar，P. ˇSemrl，《Gleason-Kahane-Zelazko定理的推广：解决 Kaplansky问题的一种可能途径》，*Expo. Math.* **26**（2008年），269–277。[62] M. Breˇsar，P. ˇSemrl，《矩阵代数上的连续交换函数》，*Linear Algebra Appl.* **568** 2019 29 38 （），–。

[63] M. Breˇsar，ˇS. ˇSpenko，《单变量函数恒等式》， *J. Algebra* **401**（2014年），234–244。[64] M. Breˇsar，ˇS. ˇSpenko，《矩阵代数上的函数恒等式》，

Algebra Represent. Theory （），–。

18 2015 1337 1356

[65] M. Breˇsar，K. Zhao，《李代数上的双导子与交换线性映射》，

J. Lie Theory （），–。

28 2018 885 900

[66] M. A. Chebotar，《素环中的广义函数恒等式》， *J. Algebra* **202**（1998年），655–670。[67] M. A. Chebotar，W.-F. Ke，P.-H. Lee，《由零积上的作用刻画的映射》，*Pacific J. Math.* **216** 2004 217 228 （），–。

[68] M. A. Chebotar，W.-F. Ke，P.-H. Lee，R. Zhang，《关于保持零 Jordan 乘积的映射》，*Monatsh. Math.* **149**（2006年），91–101。[69] W. L. Chooi，K. H. Kwa，L. Y. Tan，《$\mathbb{F}_2$上可逆三角矩阵的交换映射》， *Linear Algebra Appl.* **583**（2019年），77–101。

[70] N. J. Divinsky, 《关于环的交换自同构》,

Trans. Roy. Soc. Canada Sect. III (), –。

49 1955 19 22
[71] A. Elduque, M. Kochetov, 《 *Gradings on Simple Lie Algebras*》, 数学调查与专著, 美国数学学会, 2013年。[72] D. Eremita, 《三角环中次数为

2 *Linear Multilinear* 的函数恒

Algebra **63** 2015 534 553
等式再探》, (), –。[73] D. Eremita, 《上三角矩阵环中的函数恒等式》, *Linear Algebra Appl.* **493** (2016年), 580–605。[74] D. Eremita, 《流李代数上的双导子与交换线性映射》,

J. Lie Theory (), –。

31 2021 119 126
[75] D. R. Farkas, G. Letzter, 《来自辛几何的环论》,

J. Pure Applied Algebra (), –。

125 1998 155 190
[76] W. Franca, 《秩为k 的矩阵上的交换映射》, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013年), 2813–2815。[77] W. Franca, 《可逆元上多重线性映射的交换迹》,

Comm. Algebra (), –。

46 2018 2890 2898
[78] A. Giambruno, M. Zaicev, 《 *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*》, 数学调查与专著122, 美国数学学会, 2005年。[79] C. G´omez-Ambrosi, I. P. Shestakov, 《带超对合的单超代数的斜元素的李结构》, *J. Algebra* **208** (1998年), 43–71。[80] J. Hamhalter, 《 $*$-同态与 C^*-代数及因子冯·诺伊曼代数上的 Jordan 映射》, *J. Math. Anal. Appl.* **462** (2018年), 1014–1031。[81] I. N. Herstein, 《约当同态》, *Trans. Amer. Math. Soc.* **81** (1956年), 331–341。[82] I. N. Herstein, 《单结合环中的李与 Jordan 结构》,

Bull. Amer. Math. Soc. (), –。

67 1961 517 531
[83] I. N. Herstein, 《 *Topics in Ring Theory*》, 芝加哥大学出版社, 芝加哥, 1969年。[84] A. Joseph, 《李括号的导子与正则量子化》, *Comm. Math. Phys.* **17** (1970年), 210–232。[85] I. Kaygorodov, M. Khrypchenko, 《有限型关联代数上的泊松结构》,

J. Algebra (), –。

578 2021 402 420
[86] V. K. Kharchenko, 《自由代数的不变量代数》, *Algebra i Logika* **17** (1978年), 478–487。[87] J. Laliena, 《带超对合的半素超代数的斜元素的导出超代数》, *J. Algebra* **420** (2014年), 65–85。[88] J. Laliena, S. Sacrist´an, 《带超对合超代数中斜元素与对称元素的正则性条件》, *J. Algebra* **323** (2010年), 2363–2370。[89] T. Y. Lam, 《 *Lectures on Modules and Rings*》, 数学研究生教材, Springer, 1999年。[90] S. Lanning, 《极大对称商环》, *J. Algebra* **179** (1996年), 47–91。[91] P.-H. Lee, J.-S. Lin, R.-J. Wang, T.-L. Wong, 《多加性映射的交换迹》, *J. Algebra* **193** (1997年), 709–723。[92] T.-K. Lee, 《函数恒等式与 Jordan σ-导子》, *Linear Multilinear Algebra* **64** (2016年), 221–234。[93] T.-K. Lee, 《半素环的某些基本函数恒等式》, *Comm. Algebra* **47** (2019年), 17–29。[94] T.-K. Lee, J.-H. Lin, 《特征二素环的 Jordan 导子》, *Appl.* **462** 2014 1 15

Linear Algebra

(), –。[95] T.-K. Lee, T.-L. Wong, Y. Zhou, 《素环的 Jordan

$*$ *Linear*-导子的结

Multilinear Algebra **63** 2015 411 422
构》, (), –。[96] T.-K. Lee, Y. Zhou, 《素环的 Jordan $*$-导子》, *J. Algebra Appl.* **13** (2014年), 1350126。[97] G. F. Leger, E. M. Luks, 《李代数的广义导子》, *J. Algebra* **228** (2000年), 165–203。[98] O. Le´on S´anchez, R. Moosa, 《交换双微分代数》, *J. Algebra* **609** (2022年), 764–791。

[99] Y.-F. Lin，素代数李理想上的保交换映射，
Linear Algebra Appl. **371** 2003 361 368
( )，–。

[100] C.-K. Liu，半素环上的可加 n-交换映射， *Proc. Edinb. Math. Soc.* **63** (2020年)，193–216。[101] C.-K. Liu，Y.-F. Pu，素环李理想上 n-交换可加映射的结构， *Linear Algebra Appl.* **631** (2021年)，328–361。[102] C.-K. Liu，J.-J. Yang，关于可逆矩阵或奇异矩阵的幂交换加性映射，
Linear Algebra Appl. **530** (2017年)，127–149。[103] X. Liu，X. Guo，K. Zhao，块李代数的双导子， *Linear Algebra Appl.* **538** (2018年)，43–55。[104] W. S. Martindale 3rd，本原环的李同构，
Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963年)，909–916。[105] W. S. Martindale 3rd，单环的李同构，
J. London Math. Soc. **44** (1969年)，213–221。[106] W. S. Martindale 3rd，素环的李同构，
Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969年)，437–455。[107] W. S. Martindale
3 *J. Algebra* rd，
12 1969 576 584
满足广义多项式恒等式的素环，( )，–。[108] W. S. Martindale 3rd，带对合的单环的斜元素的李同构， *J. Algebra* **36** (1975年)，408–415。[109] W. S. Martindale
3 *J.* rd，
Algebra **133** 1990 500 511
映到非退化约旦代数上的约当同态，( )，–。[110] K. McCrimmon，关联代数约当同态的 Zelmanov 方法，*J. Algebra* **123** (1989年)，457–477。[111] L. Moln´ar，冯·诺依曼代数中保持最大偏差的可观测量线性映射， *J. Lond. Math. Soc.* **81** (2010年)，161–174。[112] S. Montgomery，由结合分次代数构造单李超代数，*J. Algebra* **195** (1997年)，558–579。[113] D. Passman，计算对称商环， *J. Algebra* **105** (1987年)，207–235。[114] D. Passman，
Infinite Crossed Products，Academic Press, Inc.，1989年。[115] J. Patera，H. Zassenhaus，关于李分次。I， *Linear Algebra Appl.* **112** (1989年)，87–159。[116] E. C. Posner，素环中的导子，
Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957年)，1093–1100。[117] C. Procesi， $n \times n$ 矩阵的不变量理论，
Adv. Math. **19** (1976年)，306–381。[118] C. Procesi，
Lie groups: An approach through invariants and representations，Universitext，Springer，2007年。[119] Yu. P. Razmyslov，特征零域上全矩阵代数中的迹恒等式， *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **38** (1974年) 723–756。[120] L. H. Rowen， *Polynomial Identities in Ring Theory*，Academic Press, Inc.，1980年。[121] Y. Shitov，拓扑域上矩阵的交换函数，
Linear Algebra Appl. ( )，–。
553 2018 362 364
[122] J. M. Souriau，几何量子化， *Comm. Math. Phys.* **1** (1965/1966年)，374–398。[123] R. F. Streater，正则量子化， *Comm. Math. Phys.* **2** (1966年)，354–374。[124] G. A. Swain，带对合的素环斜元素的李导子，
J. Algebra ( )，–。
184 1996 679 704
[125] P. ˇSemrl，二次泛函与约当 $*$-导子， *Studia Math.* **97** (1991年)，157–165。[126] P. ˇSemrl，二次泛函与准二次泛函， *Proc. Amer. Math. Soc.* **119** (1993年)，1105–1113。[127] X. Tang，有限维复单李代数的双导子，
Linear Multilinear Algebra **66** 2018 250 259
( )，–。

[128] A. R. Villena，巴拿赫代数上的李导子， *J. Algebra* **226** (2000年)，390–409。[129] D. Wang，X. Yu，施勒丁格–维拉索罗李代数上的双导子与线性交换映射， *Comm. Algebra* **41** (2013年)，2166–2173。

[130] Y. Wang，带超对合的超代数中的李超同态， *J. Algebra* **344** (2011年)，333–353。[131] Y. Wang，超代数中的函数恒等式， *J. Algebra* **382** (2013年)，144–176。[132] Y. Wang，超代数李理想上的李超同态， *Israel J. Math.* **196** (2013年)，461–482。[133] Y. Wang，任意三角环中次数为
2 *Linear Algebra* 的函数恒等式，
Appl. **479** 2015 171 184
( )，–。[134] Y. Wang，上三角矩阵环中的函数恒等式再探， *Linear Multilinear*
Algebra **67** 2019 348 359 ( )，–。[135]
W. Watkins，保持可交换矩阵对的线性映射，
Linear Algebra Appl. ( )，–。[136]
14 1976 29 35
L. Yuan，J. Li，
q *Comm. Algebra* -变形海森堡–维
50 2022 3651 3663
拉索罗代数的双导子，( )，–。[137] E. I. Zelmanov，关于素约当代数 II， *Siberian Math. J.* **24** (1983年)，89–104。[138] K. Zhao，由分次结合代数构造单李色代数， *J. Algebra* **269** (2003年)，439–455。

Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana, Slovenia

Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Maribor, Slovenia

Institute of Mathematics, Physics, and Mechanics, Ljubljana, Slovenia
Email address: matej.bresar@fmf.uni-lj.si