arXiv:2302.10508v1 [math.LO] 21 Feb 2023

关于交换 p赋值群的极小流

Ningyuan Yao Zhentao Zhang 复旦大学 复旦大学

2023年2月22日

摘要

我们研究可定义群作用于其类型空间上的可定义拓扑动力学（G， S_G（M）），其中 M 是一个结构， G 是在 M中可定义的群。在 [14], ，Newelski提出了一个问题：在可定义拓扑动力学中，弱泛型类型是否与几乎周期类型一致。在 [29], ，我们引入了平稳性的概念（见定义2.1），并证明当 G 是在 p赋值数域上可定义的平稳可定义可容许群，或实闭域的 o极小扩张时，答案是肯定的。

在本文中，我们继续 [29], 的工作，关注 G 是在 p赋值数域上可定义的交换群这一情形，并证明：弱泛型类型与几乎周期类型一致，当且仅当 G 具有可定义的f-一般类型，或者 G 是平稳的。

1 引言

在 [14], Newelski 引入了拓扑动力学与模型论之间的联系，这一领域如今称为可定义拓扑动力学。可定义拓扑动力学研究群 $G(M)$ 在类型空间 $S_G(M)$ 上的作用，其中该群是在某个模型 M 中定义的，而类型空间由集中于 G 、且在 M 上的类型构成；它试图将这类拓扑动力学中的概念与模型论中的概念联系起来。 [14] 提出的“几乎周期类型是否与弱泛型类型一致”这一问题属于该领域。

Newelski 在 [14] 中引入的“弱泛型”概念，是将稳定环境中的“一般”概念推广到不稳定环境的一种恰当方式。若存在一个非一般可定义集 Y，使得 $X \cup Y$ 是一般的，则称可定义集~~$X \subseteq G(M)$ 为~~弱泛型；若一个可定义集的有限个平移能够覆盖整个群，则称该可定义集为一般。若类型 $p \in$ ~~$S_G(M)$~~ 中的每个可定义集都是弱泛型的，则称该类型为弱泛型。我们将 $S_G(M)$ 中弱泛型类型构成的空间记为 WGen($S_G(M)$)。

“几乎周期”这一概念源自拓扑动力学。若类型$p \in S_G(M)$的 $G(M)$-轨道的闭包是 $S_G(M)$的一个极小子流，我们就称该类型为几乎周期类型。我们用 AP($S_G(M)$) 表示 $S_G(M)$中几乎周期类型所成的空间。

Newelski 在 [14] 证明，AP($S_G(M)$) 与 WGen($S_G(M)$) 的闭包相同；若泛型类型存在，则 AP($S_G(M)$) $=$ WGen($S_G(M)$)。 [14] 中给出了一个具有 IP 但并非简单的例子，以说明这两个类并不相同。Newelski 在 [14]提出了如下问题：

Newelski 问题。假设 G 可定义于一个 o-极小结构，甚至只需是一个 NIP 结构。在 G 上的每个（全局）弱泛型类型是否都是几乎周期型?

在 [5], 中，Newelski 问题被重新表述为 NIP 理论中可定义可容许群的特殊情形。当 M 是实闭域的一个 o-极小扩张，且 G 是可在 M 上定义的可定义可容许群时，Pillay 和 Yao 在 [19] 中证明，若 G 的无挠部分维数为一，则弱泛型与几乎周期型相 coincide。他们还在 $(\mathbb{R},+)^2 \times \mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ 的情形下给出了一个反例，表明几乎周期型的集合是真包含于弱泛型的集合。

回顾一下，如果存在一个关于 G 的全局类型 p 和一个小模型 M，使得 p 的每个左平移分别在 M 中有限可满足或在 M 上可定义，那么群 G 就具有有限可满足泛型（fsg）或可定义 f-泛型（dfg）。

在 [29], 中，我们考察了 Newelski 问题：其中 G 是一个在 o-极小结构或 p-进数域 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的群，并且具有“dfg-fsg 分解”，也就是说，存在一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的短正合列

$$1 \to H \to G \to_\pi C \to 1 \tag{1}$$

其中 H 是一个 dfg 群， C 是一个 fsg 群。注意，在 o-极小结构中可定义的群是可定义可和的，当且仅当它具有这样的分解（见 [36]）。设 M 是一个 o-极小结构或 p-进数域，我们称一个在 M 上可定义的群是平稳的，如果每个 M 上的弱泛型类型都有唯一的全局弱泛型扩张。设 G 是一个在 M 上可定义的群，并满足（1）中给出的“dfg-fsg 分解”，我们在 [29] 中证明，若 G 具有 dfg 或 G 是平稳的，则几乎周期型与弱泛型重合，这推广了 [19] 的结果。此外，我们证明了 G 是平稳的，当且仅当 H 是平稳的。

本文聚焦于 Newelski 问题，其中 G 是一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换群。在交换情形下进行研究的优势在于，这类群具有 (1) 中给出的“dfg-fsg 分解”（见 [11]）。因此， [29] 中的一些论证在本文中也适用。此外，我们总可以假设 $\dim(C) \geq 1$，因为 Yao 在 [27] 中证明，当 $G = H$ 时，Newelski 问题有肯定答案。

我们的第一个结果给出了 $\mathbb{Q}_p$ 上平稳交换 dfg 群的一个刻画：

定理 1.1. 设 H 是一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换 dfg 群。那么

(i) H 有一个有限指数子群 E 和一个有限子群 F，使得对于某些 s， $t \in \mathbb{N}$， E/F 可定义同构于 $\mathbb{G}_a^s \times \mathbb{G}_m^t$ 的一个有限指数子群，其中 $\mathbb{G}_a$ 和 $\mathbb{G}_m$ 分别是加法群和乘法群。

(ii) 设 H 如 (i) 部分所述，则 H 平稳当且仅当 $s \leq 1$。

注 1.2. 设 H 和 A 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的群。我们说“H 虚拟地为 A”时，意思是“存在 H 的一个有限指数且在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的子群 X，以及一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的态射 $f\colon X \to A$，使得 $\ker(f)$ 和像(f) 都是有限的 ”。因此，定理 1.1 的第一部分表明， H 虚拟地是 $\mathbb{G}_a^s \times \mathbb{G}_m^t$ 的乘积的一个有限指数子群。

我们还研究 dfg 群上弱泛型类型在 $\mathbb{Q}_p$ 上的 μ-不变性。简言之，设 μ 是由 $\mathbb{Q}_p$ 上 id$_G$ 的所有可定义开邻域组成的部分类型，且 $p \in S_G(M)$ 是 G 上的一个弱泛型类型，我们称其为 p μ-不变的，如果 $\mu \cdot p = p$。 μ-不变性本身~~也很有趣，~~因为 dfg 群上的弱泛型类型看起来像是在“微小”扰动下保持不变的对象。我们将证明

定理 1.3. 设 H 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换 dfg 群。则任意弱泛型$p \in S_H(M)$ 都是几乎 μ-不变的。

最后，我们将分别在局部情形和全局情形下，回答关于在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换群的 Newelski 问题。我们所称的全局语境，是指类型定义在怪兽模型 $\mathbb{M}$ 上。我们所称的局部语境，是指 M 是 $\mathbb{Q}_p$ 的任意初等扩张；此时我们通过添加外部可定义集，将其扩张为关于 M 的 Shelah 扩张 $M_0 = M^{\mathrm{ext}}$，并转而考虑 $G(M_0)$ 在 $S_G(M_0)$ 上的作用。

The定理 1.4. 设 G 是一个非 dfg 的交换 $\mathbb{Q}_p$ 可定义群，则

(i)（局部情形）当且仅当 G 是平稳的时，$\mathrm{AP}(S_G(M_0)) = \mathrm{WGen}(S_G(M_0))$。
(ii)（全局情形）当且仅当 G 是平稳的时，$\mathrm{AP}(S_G(\mathbb{M})) = \mathrm{WGen}(S_G(\mathbb{M}))$。

1.1 记号与约定

L 表示一种语言，T 表示一个完备理论，$\mathbb{M}$ 表示一个怪兽模型，而 M、N.....表示 $\mathbb{M}$ 的小子模型；如果子集/子模型 A 满足 $\mathbb{M}$，且 $|A| < |\mathbb{M}|$，则称其为小的。由于我们所考虑的理论都是 NIP 理论，因此总是假设 T 是 NIP 的。每个小子集上的类型都在 $\mathbb{M}$ 中实现。若 N 是 $\mathbb{M}$ 的充分饱和子模型，并且 N 对某个足够大的基数 λ 是 λ 饱和的，我们就称 N 为 $\mathbb{M}$ 的充分饱和子模型；当然，每个关于 N 的类型都在 $\mathbb{M}$ 中实现。我们通常将 $\bar{}$ 元组写作 a、b、x、y...，而不是 $\bar{a}$、b、$\bar{x}$、$\bar{y}$...。设 $\phi(x)$ 是任意一个 $L_{\mathbb{M}}$ 公式，其中 $x = (x_1, .., x_n)$，且 $A \subseteq \mathbb{M}$，则将 $\phi(A)$ 定义为集合 $\{a \in A^n | \mathbb{M} \models \phi(a)\}$。“类型”表示完备类型，而“部分类型”表示部分类型。所谓“全局类型”，是指关于 $\mathbb{M}$ 的完备类型。设 $A \subseteq B$ 和 p 是关于 B 的（部分）类型，则 $p \restriction_A = \{\phi(x) \in p | \phi \in L_A\}$ 表示将 p 限制到 A。设 $L' \supseteq L$ 是 L 的扩张，且 M_0 是一个 L' 结构，则我们将 $M_0 \restriction_L$ 定义为 M_0 到 L 的约化。

当我们说一个集合在 M, N 或 $\mathbb{M}$ 中可定义时，指的就是显而易见的含义。当我们说一个集合 X 在 M 上可定义时，通常是指该集合在 $\mathbb{M}$ 中可定义，且其定义使用来自 M 的参数。我们有时用 $X(x)$ 表示定义 X 的公式。在这种情况下，$X(M)$ 表示由与在 $\mathbb{M}$ 中定义 X 的相同公式在 M 中定义的集合。另一方面，例如，若 X 是在 M 中可定义的集合，那么我们可以考虑由相同公式在 N 或 $\mathbb{M}^{\frown}$ 中定义的集合，并将它们记作 $X(N)$、$X(\mathbb{M})$。

设 $\Sigma(x)$ 是一个定义在某个小子集上的部分类型。为简化记号，我们将 Σ 与 $\Sigma(x)$ 在 $\mathbb{M}$ 中的实现相等同，即 $\Sigma = \Sigma(\mathbb{M})$。如果集合 Y 由定义在某个小子集上的部分类型定义，则称其在 $\mathbb{M}$ 中类型可定义。类似地，类型可定义对象是指怪兽模型 $\mathbb{M}$ 中的类型可定义对象。

我们的模型论记号是标准的，并假定读者熟悉类型空间、后代类型、共后代类型、可定义类型等基本概念。参考文献见 [21] 和 [23]。

本文组织如下：

在本节其余部分，我们将给出与主要结果相关的精确定义和预备知识。

在第 2 节中，我们将证明定理 1.1。

在第 3 节中，我们将证明定理 1.3。在第 4 节中，我们将证明定理 1.4，即本文的主要定理。

致谢。作者受到中国国家社会科学基金（项目编号：20CZX050）的资助。

1.2 Shelah 扩张

我们将 M 中形如 $\phi(N,b)\cap M^n$（即在 M^n 上的迹）的 M^n 的子集称为外部可定义集，其中 $\phi(x,y)$ 是一个 L 公式，$N\succ M$，且 $b\in N^k$ 具有某些 $n,k\in\mathbb{N}$。M^{ext} 的 Shelah 扩张是通过为 M 中所有外部可定义集添加谓词而得到的 M 的扩张。我们用 L_M^{ext} 表示 M^{ext} 的语言，用 $T\mathrm{ext}_M$ 表示 M^{ext} 的理论。设 G 是可在 M 上定义的群。我们用 $S_{G,\mathrm{ext}}(M)$ 表示 $M\mathrm{ext}$ 上集中于 G 的无量词类型的集合。空间 $S_{G,\mathrm{ext}}(M)$ 通过映射自然同胚于空间 $S_{G,M}(\mathbb{M})$；后者由集中于 G 且在 M 中有限可满足的全局类型构成。

$$S_{G,M}(\mathbb{M})\ni p\mapsto\{\psi(M)|\ \psi\in p\}\in S_{G,\mathrm{ext}}(M).$$

由于 T 具有 NIP，我们有：

事实 1.5. *[23],* 命题 3.23 和推论 3.*24]* 假设 M 是 T的一个模型，则

(i) T_{M}扩张具有量词消去。因此，$S_{G,\ ext}(M)$ 与 $S_G(M^{\mathrm{ext}})$ 重合，后者是集中于 G的 M^{ext} 上的类型空间。

(ii) T_M^{ext}也具有 NIP。

(iii) $(M^{\mathrm{ext}})^{\mathrm{ext}}=M_{\text{扩张}}$，也就是说，$M$扩张 上的每个类型都是可定义的。

注意，如果 M 上的所有类型都是可定义的（例如，$M=\mathbb{Q}_p$，见 [6]），那么 M 中每个外部可定义集本身就是可定义的，因此 $M=M^{\mathrm{ext}}$。

事实 1.6（习题 3.10, [23]）。设 N_0 是 M^{ext} 的一个初等扩张，且 $N=N_0\restriction_L$ 是 N_0 在 L 上的约化。那么存在一个参数集 $B\subset\mathbb{M}$，使得 N_0 中的每个可定义集都能由 L_B 中的一个公式在 N 中外部可定义。

采用事实 1.6 中的记号，我们有 $S_G(N_0)$ 与 $S_{G,\ N}(B)$ 自然同胚；后者是 B 上集中于 G、且在 N 中有限可满足的类型空间。

1.3 可定义拓扑动力学

关于（抽象）拓扑动力学，我们参考 [1, 9]。设 G 是一个拓扑群。所谓 G-流，是指 G 在紧豪斯多夫拓扑空间 X 上通过同胚作用的作用 $G\times X\to X$，记作 (G,X)。我们通常假设 X 有一个稠密的 G-轨道。

X 的子流是 X的一个闭合 G-不变子集。根据佐恩引理，X 的极小（关于包含关系）子流总是存在的。若点 $x\in X$ 的 G-轨道的闭包 $\mathrm{cl}(G\cdot x)$ 是 X 的一个极小子流，则称 $x\in X$ 是几乎周期点；等价地，若 x 属于 X的某个极小子流，也称 x 是几乎周期点。我们用 $\mathrm{AP}(X)$ 表示 X 中所有几乎周期点构成的空间，它也是 X 所有极小子流的并集。

给定一个 G-流 (G,X)，其包络半群 $E(X)$ 是映射集合 $\pi_g\colon X\to X$（其中 $g\in G$，$\pi_g(x)=g\cdot x$）在空间 X^X（赋予积拓扑）中的闭包，并配备复合运算（该运算在左侧连续）。因此，任何 $e\in E(X)$都是一个从 X 到 X的映射。

事实 1.7。设 X 是一个 G-流。那么

(i) $E(X)$ 也是一个 G-流，并且 $E(E(X))$ 与 $\cong E(X)$ 是 G-流。

(ii) 对于任意 $x \in X$，其 G-轨道的闭包恰好是 $E(X)(x)$。特别地，对于任意$f \in E(X)$， $E(X) \circ f$ 是 $G \cdot f$ 的闭包。

事实 1.8. 设 X 是一个 G-流。则 AP($E(X)$) 是 $E(X)$的双理想。

证明. 对每个 $f \in \mathrm{AP}(E(X))$， $E(X) \circ f$ 都是一个极小子流，因此 $E(X) \circ f \subseteq \mathrm{AP}(E(X))$，从而 AP($E(X)$) 是一个左理想。

现在我们证明 AP($E(X)$) 也是一个右理想。设 $f \in \mathrm{AP}(E(X))$且 $g \in E(X)$。那么只需证明 $f \circ g$ 是几乎周期的。容易看出

$$\mathrm{cl}(G \cdot (f \circ g)) = E(X) \circ (f \circ g) = (E(X) \circ f) \circ g.$$

对于任意 $h \in (E(X) \circ f)$，我们有 $E(X) \circ h = E(X) \circ f$，因为 $E(X) \circ f$是极小的。因此

$$\mathrm{cl}(G \cdot (h \circ g)) = E(X) \circ (h \circ g) = (E(X) \circ h) \circ g = (E(X) \circ f) \circ g = \mathrm{cl}(G \cdot (f \circ g)).$$

我们得出 cl(G·(f∘g)) 是极小的，因为对每个 $h' \in$cl(G·(f∘g))，都有 cl(G·h') =cl(G·(f∘g))，因此 $f \circ g$ 是几乎周期的，证毕。 □

在模型论语境中，我们考虑一个在 M 上可定义的群 G，以及 $G(M)$在其类型空间 $S_G(M)$上的作用，记作 $gp =$tp(ga/M)，其中 $g \in G(M)$，且 a实现了 p。容易看出， $S_G(M)$是一个具有稠密轨道 {tp(g/M) | $g \in G(M)$}的 $G(M)$-流。

取一个怪兽模型 $\mathbb{M}$，并将 G 与 $G(\mathbb{M})$等同。我们称一个公式 $\varphi(x)$为 G-公式，如果其参数属于 $\mathbb{M}$，且 $\varphi(\mathbb{M})$是 G的可定义子集。若一个部分类型 r 中的每个公式都是 G-公式，则称 r 为 G-类型。假设 $\varphi(x)$是一个 G-公式，且 $g \in G$，则左平移 $g\varphi(x)$定义为 $\varphi(g^{-1}x)$。容易验证，$(g\varphi)(\mathbb{M}) = g\varphi(\mathbb{M})$。对于$p \in S_G(M)$，有 $gp = \{g\varphi(x) | \ \varphi \in p\}$。

我们回顾 [14] 中的一些概念。

定义 1.9。1. 若有限多个 X 的左平移能够覆盖 G，则可定义子集 $X \subseteq G$ 是（左）一般的。也就是说，存在 $g_1, ..., g_n \in G$，使得 $\bigcup_{i=1}^{n} g_i X = G$。

2. 若存在一个非一般的可定义子集 Y，使得 $X \cup Y$ 是一般的，则可定义子集 $X \subseteq G$ 是弱泛型的。3. 若可定义集 φ（$\mathbb{M}$）是一般的（分别为弱泛型的），则 G-公式 $\varphi(x)$ 是一般的（弱泛型的）。4. 若（部分） G-类型 p 中的每个公式都是一般的（分别为弱泛型的），则 p 是一般的（弱泛型的）。

令 AP($S_G(M)$) $\subseteq S_G(M)$ 为几乎周期类型的空间，WG($S_G(M)$) $\subseteq S_G(M)$ 为弱泛型类型的空间，Gen($S_G(M)$) $\subseteq S_G(M)$ 为一般类型的空间。则 WG($S_G(M)$) =cl(AP($S_G(M)$))。此外，若 Gen($S_G(M)$) $\neq \emptyset$，则 WG($S_G(M)$) =Gen($S_G(M)$) 是 $S_G(M)$ 的唯一极小子流（见 [14]）。

事实 1.10。 [14]$S_{G,\mathrm{ext}}(M)$ 的包络半群 $E(S_{G,\mathrm{ext}}(M))$ 同构于 $(S_{G,M}(\mathbb{M}) *)$，其中 $*$ 定义如下：对于任意 p, $q \in S_{G,M}(\mathbb{M})$， $p * q = tp(b \cdot c/\mathbb{M})$，若 b 实现 p 且 c 实现 q，并且 $tp(b/\mathbb{M}, c)$ 在 M 中有限可满足。

备注 1.11。注意，$S_{G,M}(\mathbb{M})$ 与 $S_{G,\text{ext}}(M)$ 自然同胚。假设 T 具有 NIP，由事实 1.5 和事实 1.10 可知，在 $S_G(M_{\text{ext}})$ 上存在一个半群运算“$*$”，其定义如下：对于任意 $p,q \in S_G(M^{\text{ext}})$，$p*q = tp(b\cdot c/M_{\text{ext}})$，若 b 实现 p 且 c 实现 q 在可定义闭包(M^{ext},b) 上的唯一的继承类型。此外，由事实 1.7 易见，对于任意 $p \in S_G(M^{\text{ext}})$，

$$\text{cl}(G(M)\cdot p) = S_G(M^{\text{ext}}) * p.$$

1.4 NIP、可定义可和性与连通分支

回想一下，T 具有 NIP，这意味着：对于任意不可辨识序列 $(b_i : i < \omega)$、公式 $\phi(x,y)$ 以及 $a \in \mathbb{M}$，当 $i \to \infty$ 时，$\phi(a,b_i)$ 的真值最终会稳定。

设 $G = G(\mathbb{M})$ 是一个可定义群。回想一下，A 上的类型可定义子群 H 是 G 的一个在 A 上类型可定义的子集，同时也是 G 的子群。若 $|G/H| < 2^{|T|+|A|}$，我们就称 H 具有有界指数。对于在 NIP 结构中可定义的群，存在最小的有界指数类型可定义子群 [10],；它是所有有界指数类型可定义子群的交集。我们将其记作 G^{00}，并称之为类型可定义连通分支。另一个模型论不变量是 G^0，称为 G 的可定义连通分支，它是 G 的所有有限指数可定义子群的交集。显然，$G^{00} \le G^0$。

事实 1.12. *[3]* 若 $M \models T$ 和 G 在 M 上可定义，则无论在 T 还是 T_M^{ext} 中计算，G^{00} 都相同。

事实1.13. 设 G_1 和 G_2 是可定义群，且 $G = G_1 \times G_2$。则 $G^{00} = G_1^{00} \times G_2^{00}$。这里，我们将 G_1 视为 G 的子群 $G_1 \times \{1_{G_2}\}$，并将 G_2 视为其子群 $\{1_{G_1}\} \times G_2$。

证明. 由于 $[G_1 \times G_2 : G_1^{00} \times G_2^{00}] = [G_1 : G_1^{00}][G_2 : G_2^{00}]$ 有界，我们有 $G^{00} \le G_1^{00} \times G_2^{00}$。对于 $i = 1, 2$，由于 $G_i/(G_i \cap G^{00}) \cong (G^{00}G_i)/G^{00} \le G/G^{00}$，$G_i \cap G^{00}$ 是 G_i 的一个有界指数类型可定义子群，因此我们看到 $G_i^{00} \le G_i \cap G^{00}$，从而$G_1^{00} \times G_2^{00} \le G^{00}$。 □

还要回顾一下，在 M on X 上的 Keisler测度，其中 X 是 M^n 的可定义子集，是 X 的 M- 可定义子集所成的布尔代数上的有限可加测度。当我们取怪兽模型，即 $M = \mathbb{M}$ 时，就称其为全局Keisler测度。若可定义群 G 承认一个全局（左） G-不变的概率Keisler测度，则称其为可定~~义可和的。根据 [10]~~，只要 M 是 G 所定义于其上的模型，这等价于在 M 上存在一个 G（M）-不变的概率Keisler测度。注意，如果 G 是交换的，那么 G 是可和的，因而也是可定义可和的。

1.5 强 f-一般、可定义 f-一般与有限可满足的一般

设 $\phi(x,y)$ 是一个公式。回顾一下，公式 $\phi(x,b)$ 在集合 A 上分叉，当且仅当存在一个无限的 A-不可辨识序列（$b = b_0, b_1, b_2, \ldots$），使得 $\{\phi(x,b_i) | \ i < \omega\}$ 不一致。若存在一个公式 $\phi \in p$ 在 A 上分叉，则类型 $p \in S(B)$ 在 $A \subseteq B$ 上分叉。由于 T 具有 NIP，全局类型 $p \in S(\mathbb{M})$ 在 M 上不分叉，当且仅当 p 是 Aut$(\mathbb{M}/M)$-不变的（见 [37]）。

设 $G = G(\mathbb{M})$ 是一个可定义群，$p \in S_G(\mathbb{M})$ 是 G 上的一个全局类型。沿用 [5], 的记号，我们称全局类型 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 在 M 上强 f-一般，当且仅当 gp 不

对每个 $g \in G$ 都不在 M 上分叉。若 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 在某个小子模型上强 f-一般，我们就称它为强 f-一般类型。[5] 的一个漂亮结果表明:

F命题 1.14. 设 G 是一个可定义可容许群， p 是一个全局 G-类型。那么

(i) p 是弱泛型，当且仅当它是 G^{00}-不变的，当且仅当它有一个有界的 G-轨道。

(ii) p在 M上是强 f-一般的，当且仅当它是弱泛型且 M-不变（或不在 M上分叉）。

在强 f-一般类型 $p \in S_G(\mathbb{M})$中，有两种极端情形:

1. 存在一个小子模型 M ，使得 p 的每个左 G-平移在 M中有限可满足；我们称此类类型为 M上 G的 fsg（有限可满足泛型）类型；2. 存在一个小子模型 M ，使得 p 的每个左 G-平移都在 M上可定义；我们称此类类型为 M上 G的 dfg（可定义 f-泛型）类型。若一个可定义群 G 分别具有全局 fsg 类型或 dfg 类型，则称它为 fsg 群或 dfg 群。fsg 群和 dfg 群都是可定义可容许的（见 [5]）。现在我们讨论这两种情形。由 [10] 可得:

事实 1.15. 设 G 是一个由 fsg 类型 $p \in S_G(\mathbb{M})$见证的 $\emptyset$-可定义 fsg 群。那么

(i) p 既是左泛型也是右泛型。因此，全局泛型类型的空间 Gen($S_G(\mathbb{M})$) 是 $S_G(\mathbb{M})$ 的唯一极小子流。(ii) $q \in$Gen($S_G(\mathbb{M})$) 的任意左（右）平移在 $\mathbb{M}$ 的任意小子模型中都是有限可满足的。(iii) 对任意 $N \prec \mathbb{M}$，每个泛型类型 $q \in S_G(N)$ 都有唯一的全局泛型扩张。

事实 1.16. *[3]* 设 C 是一个 $\emptyset$-可定义 fsg 群，并且 $M \prec \mathbb{M}$。

(i) 在 T_M^{ext} 中计算时， C 也具有 fsg。(ii) $q \mapsto \{\psi(M) |\ \psi \in q\}$ 是 Gen(S_C($\mathbb{M}$)) 与 Gen($S_C(M^{扩张})$) 之间的双射。现在我们来讨论 dfg 群。

事实 1.17. *[19]* 设 G 是一个 $\emptyset$-可定义群，且 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 是一个弱泛型类型。若 p 在 M上可定义，则

(i) p 的每个左平移都在 M上可定义；

(ii) $G^{00} = G^0$。

(iii) $G \cdot p$ 是闭的，因此是 $S_G(\mathbb{M})$ 的一个极小子流。

事实 1.18. *[3]* 设 G 是一个在 M上可定义的 dfg 群。那么，在 T_M^{ext}中计算时， G 也具有 dfg 性质。

事实 1.19. *[19]* 假设 G 是一个在 M 上可定义的可定义可容许群，且 $M \prec N$。

(i) 令 $\pi: S_G(N^{\text{ext}}) \to S_G(N)$ 为典范限制映射，并令 $\mathcal{M}$为 $S_G(N^{\text{ext}})$ 的一个极小 $G(N)$-子流。那么 $\pi(\mathcal{M})$ 是 $S_G(N)$ 的一个极小 $G(N)$-子流。(ii) 令 $\pi: S_G(N) \to S_G(M)$ 为典范限制映射，并令 $\mathcal{M}$为 $S_G(N)$ 的一个极小 $G(N)$-子流。那么 $\pi(\mathcal{M})$ 是 $S_G(M)$ 的一个极小 $G(M)$-子流。

1.6 $\mathbb{Q}_p$上的交换可定义群

令 p 为素数， $\mathbb{Q}_p$ 为 p-进数域。我们将 $\mathbb{Q}_p$ 在环语言中的完备理论称为 p-进闭域理论，记作 pCF。Macintyre 在[12] 中证明， pCF 在环语言加上对每个 $n \in \mathbb{N}^{>0}$ 的 n 次幂新谓词$P_n(x)$的语言中具有量词消去。众所周知， pCF 具有 NIP（见 [23]）。由于 pCF 具有可定义 Skolem 函数， [31], 每个可定义映射都有一个可定义截面。赋值群 $(\mathbb{Z}, +, <)$ 和赋值 v: $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ 都是可解释的。 p-进闭域是 pCF 的一个模型。对于任意 $M \models p\text{CF}$， Γ_M 表示值群，它是 $(\mathbb{Z}, +, <)$ 的一个初等扩张。若 $A \subseteq \Gamma_M$，我们称 $\alpha \in \Gamma_M$ 在 A 上无界，当且仅当 $\alpha < \text{dcl}(A)$ 或 $\alpha > \text{dcl}(A)$。关系 $v(x) \leq v(y)$ 在环语言中是 $\emptyset$-可定义的（见[8]） 。 p-进域 $\mathbb{Q}_p$ 是一个局部紧拓扑域，其拓扑基由以下集合构成

$$B(a, n) = \{x \in \mathbb{Q}_p | v(x - a) \geq n\}$$

对于 $a \in \mathbb{Q}_p$ 和 $n \in \mathbb{Z}$。现在我们假设 $T = p\text{CF}$ 是环语言下的 $\mathbb{Q}_p$ 理论，并且 $\mathbb{M}$ 是 pCF 的一个怪兽模型。

可定义的 p-进解析流形是一个拓扑空间，它有一个由有限多个开集构成的覆盖，每个开集都同胚于 $\mathbb{Q}_p$中可定义的某个开子集，该子集位于某个 $\mathbb{Q}_p^n$ 中，其中 n；并且过渡映射是可定义且解析的。可定义的 p-进解析群是一个可定义的 p-进解析流形，并配备了一个在适当图册中可定义且解析的群结构。这样的可定义 p-进解析群是 $\mathbb{Q}_p$中的一个可定义群。反过来，根据 [33], 的引理 3.8，任何在 $\mathbb{Q}_p$ 中可定义的群 G 都可以被赋予可定义的 p-进解析群结构，且该结构是可定义的。如 [30], 所示，任何 p-进解析群 G 都有一族可定义开紧子群，它们构成 G的单位元 id_G 的局部基。

回顾 [34] ，怪兽模型中的可定义 p-进解析流形 X 是可定义紧的，当且仅当满足以下条件：对于任意由非空闭集 $Y_t \subseteq X$ 组成的可定义族 $\mathcal{F} = \{Y_t | \ t \in T\}$ ，若 $\mathcal{F}$ 向下有向，则 $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$。注意，当 X 在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义时， X 可定义紧当且仅当 $X(\mathbb{Q}_p)$ 是紧的。若 X 在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义且可定义紧，那么对任意 $a^* \in X$ ，存在唯一的 $a \in X(\mathbb{Q}_p)$，使得对于每个包含 a 的 $\mathbb{Q}_p$-可定义开子集 $U \subset X$ ，都有 $a^* \in U$。记作 $a = \text{st}(a^*)$，并称 st: $X \to X(\mathbb{Q}_p)$ 为标准部映射。

事实 1.20. *[11]* 设 G 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的阿贝尔群。那么 $G^{00} = G^0$ ，并且存在一个可定义的短正合列

$$1 \to H \to G \to_\pi C \to 1 \tag{2}$$

其中 H 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的 dfg 群， C 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的 fsg 群， π 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的同态。

事实 1.21. 设 C 是一个在 $\mathbb{Q}_p$上可定义的群。

(i) C 可定义紧当且仅当 C 具有 fsg。

(ii) 若 C 可定义紧，则 $C^{00} = C^0$ 与 ker(st) 重合，并且 st 在 C/C^0 （赋予其逻辑拓扑）与 p-adic 解析群 $C(\mathbb{Q}_p)$ 之间诱导一个同胚。

证明。对于 (i)，(ii) 中由右向左的蕴含是 [30] 的推论 2.3 (iv)。由左向右的蕴含见 [32] 的命题 3.1。对于 (ii)，参见 [30] 的推论 2.4。 □

设 F 是一个包含 $\mathbb{Q}_p$ 的代数闭域。如果簇结构和群结构均由 $\mathbb{Q}_p$ 上的数据（多项式方程、过渡映射、态射）给出（见 [35]），则称 $G(F)$ 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数群。一个 p-进代数群是指 $G(F)$ 这个定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的代数群的 $\mathbb{Q}_p$ 点所组~~成的群 $G(\mathbb{Q}_p)$。当然，~~ $G(\mathbb{Q}_p)$ 也是结构 $(\mathbb{Q}_p, +, \times, 0, 1)$ 中的可定义群，但实质上只是环语言中的无量词可定义群。滥用术语，如果 $G(\mathbb{Q}_p)$ 是一个 p-进代数群，我们也称 $G(\mathbb{M})$ 为 p-进代数群。为与前文记号一致，我们将 $G(\mathbb{M})$ 记作 G。我们将加法群 $(\mathbb{M}, +)$ 记作 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$，将乘法群 $(\mathbb{M}^*, \times)$ 记作 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$。我们将 n 个 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ （分别为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$）的直积记作 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^n$ （分别为 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^n$）。如果一个（连通） p-进代数群 G 在 $\mathbb{Q}_p$ 上可三角化，则称其为.....，若存在一个正规列

$$\{1_G\} = G_0 \lhd ... \lhd G_i \lhd G_{i+1} \lhd ... \lhd G_n = G$$

使得每个 G_{i+1}/G_i 在 $\mathbb{Q}_p$上（无量词）可定义同构于 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ 或 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 。

在 [18] 中证明了， $\mathbb{Q}_p$ 上的每个 dfg 群都虚拟地是一个在 $\mathbb{Q}_p$上可三角化的 p-进代数群的有限指数子群。具体而言，我们有

事实1.22。 *[18]* 设 H 是一个在 $\mathbb{Q}_p$上可定义的 dfg 群。那么 H 虚拟地是一个在 $\mathbb{Q}_p$上可三角化的连通代数群。

对于交换代数群，我们有

事实1.23（定理17.17和推论17.19, [13]）。设 G 是 $\mathbb{Q}_p$上的一个连通交换线性代数群。那么 $G(\mathbb{Q}_p)$在 $\mathbb{Q}_p$上可定义同构于 $G_u(\mathbb{Q}_p) \times T(\mathbb{Q}_p)$，其中 $T(\mathbb{Q}_p)$是一个 $\mathbb{Q}_p$-环面，而 $G_u(\mathbb{Q}_p)$是若干个 $\mathbb{G}_a(\mathbb{Q}_p)$的直积。

注1.24. 任意 $\mathbb{Q}_p$-环 $T(\mathbb{Q}_p)$ 都是 $T_{spl}(\mathbb{Q}_p)$ 与 $T_{an}(\mathbb{Q}_p)$ 的几乎直积，其中 $T_{spl}(\mathbb{Q}_p)$ 是 $\mathbb{Q}_p$-分裂的（即 $\mathbb{Q}_p$-可定义同构于若干个 $\mathbb{G}_m(\mathbb{Q}_p)$ 的直积），而 T_{an} 是各向异性的（见 *[20],* 第 53 页），因此是紧的（见 *[26]*）。

事实1.25. *[17]* 设 G 是 $\mathbb{Q}_p$ 中可定义的群。假设 G 有一个 1_G 的交换开邻域，那么 G 是交换-有限的。

推论 1.26. 设 H 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换 dfg 群。那么 H 几乎是若干个 $\mathbb{G}_a$ 与 $\mathbb{G}_m$ 的直积。

证明。由事实1.22，存在一个有限指数的 $\mathbb{Q}_p$-可定义子群 $A < H$ 和一个有限子群 $A_0 < A$ ，使得 A/A_0 同构于 B 的一个开子群，其中 B 是一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可三角化的 p-进代数群。由事实1.25， B 是交换-有限的，因此由于 B 连通，它是交换的。

现在， B 是一个交换的 p-进线性代数群。根据事实1.23， $B(\mathbb{Q}_p)$在 $\mathbb{Q}_p$上与 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s(\mathbb{Q}_p) \times T(\mathbb{Q}_p)$可定义同构，其中 $s \in \mathbb{N}$ 且 $T(\mathbb{Q}_p)$是一个 $\mathbb{Q}_p$-塔。由于 B 在 $\mathbb{Q}_p$上可三角化，由注1.24可知， $T(\mathbb{Q}_p)$在 $\mathbb{Q}_p$上分裂，因此对某个 $t \in \mathbb{N}$，它在 $\mathbb{Q}_p$ 上与 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t(\mathbb{Q}_p)$可定义同构。证明完毕。□

2 平稳性与坏性

回顾一下，我们在 pCF中工作。我们先介绍平稳性。

定义 2.1. 若每个弱泛型类型$p \in S_G(\mathbb{Q}_p)$都恰有一个全局弱泛型扩张，则称 $\mathbb{Q}_p$-可定义群 G为平稳。

在 [29], 中，我们考虑如下情形： G 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义群（不一定是交换的），并且存在一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的短正合列

$$1 \to H \to G \to_\pi C \to 1,$$

对于 C 一个 fsg 群和 H 一个 dfg 群，我们在 [29] 中证明了:

事实 2.2. (i) G 平稳当且仅当 H 平稳。

(ii) (局部情形) 如果 G平稳，则对于任意模型$M \succ \mathbb{Q}_p$，AP($S_G(M^{\text{ext}})$) =WGen($S_G(M^{\text{ext}})$)。

(iii) (全局情形) 如果 G 平稳，则 AP($S_G(\mathbb{M})$) =WGen($S_G(\mathbb{M})$)。

对于在 $\mathbb{Q}_p$上可定义的 dfg 群，我们有

事实 2.3. *[29]* 设 H 是一个在 $\mathbb{Q}_p$上可定义的 dfg 群，则以下命题等价:

(i) H 是平稳的。

(ii) H 有有界多个全局弱泛型类型。

(iii) 存在一个小模型 M，使得每个全局弱泛型类型都是 M-可定义的 $e.$

(iv) 每个全局弱泛型类型都是 $\mathbb{Q}_p$-可定义的。

现在我们将研究在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换群的平稳性。首先，我们证明，对于可定义可容许群，“虚拟”关系保留平稳性。

首先，是否为有限指数可定义子群这一关系并不重要。这是因为，对于满足 [G 的可定义群 $H < G$，若 H] 有限，则有 $H^{00} = G^{00}$，而 G 上的任意弱泛型类型确实也是 H 上的弱泛型类型。

Now 我们只需处理这样的情形： A 是 G 的商群，且核有限 el.

引理 2.4. 设 G 和 A 是在模型 M 上可定义的群，且 $\pi : G \to A$ 是在 M 上可定义的满态射。若 $p \in S_A(M)$ 且 $q = \pi(p)$，则 $\pi^{-1}(q)$ =ker(π)p。

证明。设 $r \in \pi^{-1}(q)$。假设 $a \models r$，则 $\pi(a) \models q$。设 f 是 π 的可定义截面，则有 $a \in$ker(π)f(π(a))，这意味着 $r \in$ker(π)$f(q)$，因此 $\pi^{-1}(q) \subseteq$ker(π)$f(q)$。另一方面，容易看出 ker(π)$f(q) \subseteq \pi^{-1}(q)$，所以 ker($\pi$)$f(q)$ =$\pi^{-1}(q)$。由于 $p \in \pi^{-1}(q)$，我们有 ker(π)p = ker(π)$f(q) = \pi^{-1}(q)$。

□

事实 2.5. *[38]* 设 π： $G \to A$ 是可定义群之间的可定义满态射。那么$\pi(G^{00}) = A^{00}$。

引理 2.6. 设 π： $G \to A$ 是 $\mathbb{Q}_p$-可定义群之间的 $\mathbb{Q}_p$-可定义满态射。假设 N 是 $\mathbb{M}$ 的充分饱和的小子模型，且 $p \in S_G(\mathbb{M})$。则有

(i) 如果 p 是 $G^{00}(N)$-不变的，那么 $\pi(p)$ 是 $A^{00}(N)$-不变的。

(ii) 如果 $\pi(p)$ 是 $A^{00}(N)$-不变的，那么 $G^{00}(N)p \subseteq$ ker(π)p。

证明：如果 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 是 $G^{00}(N)$-不变的，那么 $\pi(p)$ 是 $\pi(G^{00})(N)$-不变的，因此也是 $A^{00}(N)$-不变的。

另一方面，假设 $\pi(p) = q \in S_A(\mathbb{M})$ 是 $A^{00}(N)$-不变的，那么 $\pi^{-1}(q)$ 就是 $\pi^{-1}(A^{00}(N))$-不变的。由于 $G^{00}(N) \subseteq \pi^{-1}(A^{00}(N))$，我们看到 $\pi^{-1}(q)$ 是 $G^{00}(N)$-不变的。由引理 2.4，$\pi^{-1}(q) = \ker(\pi)p$，所以 $G^{00}(N)p \subseteq \ker(\pi)p$。 □

引理 2.7. 设 G 和 A 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 和 π 上的可定义可容许群：$G \to A$是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的满态射，且其核有限。设 $M \succ \mathbb{Q}_p$。那么 $p \in S_G(M)$ 是弱泛型类型，当且仅当 $\pi(p) \in S_A(M)$ 是弱泛型类型。

证明。由于每个 M 上的弱泛型类型都可扩张为一个全局弱泛型类型，只需证明 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 是弱泛型类型，当且仅当 $\pi(p) \in S_A(\mathbb{M})$ 是弱泛型类型。

若 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 弱泛型，则 p 是 G^{00}-不变的，因此根据引理 2.6 的 (i) 部分，$\pi(p)$ 是 A^{00}-不变的。另一方面，假设 $q = \pi(p) \in S_A(\mathbb{M})$ 弱泛型，其中 $p \in S_G(\mathbb{M})$。那么 q 是 A^{00}-不变的，并且根据引理 2.6 $G^{00}p \subseteq$，$\ker(\pi)p$ 是有限的。因此 $p \in S_G(\mathbb{M})$ 的 G-轨道有界，故根据事实 1.14，它是弱泛型的。 □

注 2.8. 假设 G 虚拟地是 A 的一个有限指数子群，其见证为一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的有限指数子群 $X \subseteq G$ 和一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义态射 $f: X \to A$。我们始终假设 $\ker(f) \subseteq G^0(\mathbb{Q}_p)$。

解释。由于 $\ker(f)$ 有限，且 G^0 是所有在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的有限指数子群的交，因此存在 X 的一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义有限指数子群 Y，使得 $Y \cap \ker(f) = G^0 \cap \ker(f)$。我们看到，$f \restriction_Y: Y \to A$ 的核包含于 G^0 中。如有必要，将 X 替换为 Y 后，我们可以假设 $\ker(f) \subseteq G^0 \cap G(\mathbb{Q}_p) = G^0(\mathbb{Q}_p)$。

引理 2.9. 设 G 和 A 是可定义可和群，且二者都在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义。若 G 虚拟地是 A 和 $G^0 = G^{00}$ 的有限指数子群，则 G 平稳当且仅当 A 平稳。

证明. 设 $X \subseteq G$ 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的有限指数子群，并且 $f: X \to A$ 是一个可定义态射，使得 $\mathrm{Im}(f)$ 在 A 中具有有限指数。容易看出，G 平稳当且仅当 X 平稳，且 A 平稳当且仅当 $\mathrm{Im}(f)$ 平稳。因此，只需证明 X 平稳当且仅当 $\mathrm{Im}(f)$ 平稳。

若 $p \in S_G(M)$ 是弱泛型的，则根据注 2.8，$\ker(f)p = p$。由引理 2.4 和引理 2.7 可知，对于任意 $M \succ \mathbb{Q}_p$，映射 $p \mapsto f(p)$ 是 $\mathrm{WGen}(S_X(M))$ 与 $\mathrm{WGen}(S_{\mathrm{Im}(f)}(M))$ 之间的一一对应，这意味着 X 平稳当且仅当 $\mathrm{Im}(f)$ 平稳。证明完毕。 □

现在设 H 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的交换 dfg 群，那么对于某些 s、$t \in \mathbb{N}$，它虚拟地是 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ 的一个有限指数子群。根据引理 2.9，为了考察 H 的平稳性，合理的做法是假设 $H = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$，因为 $H^0 = H^{00}$。

事实 2.10. *[15]* 设 H 为 $\mathbb{G}_a$ 或 $\mathbb{G}_m$。设 $\Sigma_0(x)$ 为部分类型 $\{v(x) > \gamma | \ \gamma \in \Gamma_{\mathbb{M}}\}$，而 $\Sigma_\infty(x)$ 为部分类型 $\{v(x) < \gamma | \ \gamma \in \Gamma_{\mathbb{M}}\}$，则

(i) H 上的每个全局弱泛型类型都是 $\emptyset$-可定义的。

(ii) 若 $H = \mathbb{G}_a$，则 $H^{00} = H^0 = H$，且 $p \in S_H(\mathbb{M})$ 是弱泛型的，当且仅当它与部分类型 $\Sigma_\infty(x)$ 相容；

(iii) 若 $H = \mathbb{G}_m$，则 $H^{00} = H^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} P_n(\mathbb{G}_m)$，且 $p \in S_H(\mathbb{M})$ 是弱泛型类型，当且仅当它与部分类型 $\Sigma_\infty(x)$ 或部分类型 $\Sigma_0(x)$ 相容。

由事实 2.10 可直接看出， $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ 上的任意全局弱泛型类型也是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 上的全局弱泛型类型。此外，我们有

事实 2.11. *[28]* 在 $\mathbb{G}_m^t$ 上的任何全局弱泛型类型，对每个 $t \in \mathbb{N}^+$ 都是 $\emptyset$-可定义的。此外，当且仅当对于所有不全为零的 $k_1, ..., k_t \in \mathbb{Z}$， $\mathbb{G}_m^t$ 上的全局类型 tp($a_1, ..., a_t/\mathbb{M}$) 是弱泛型类型，当且仅当 $k_1 v(a_1) + ... + k_t v(a_t)$ 在 $\Gamma_{\mathbb{M}}$ 上无界。

引理 2.12. tp($a_1, \ldots, a_t/\mathbb{M}$) 是 $\mathbb{G}_m^t$ 上的弱泛型类型，当且仅当每个 tp($a_j/\mathbb{M}, a_i : i < j$) 都是 $\mathbb{G}_m^0$-不变的（$\mathbb{G}_m^0 = \mathbb{G}_m^0(\mathbb{M})$）。因此，对每个 $t \in \mathbb{N}^+$， $\mathbb{G}_m^t$ 都是平稳的。

证明. 假设 tp($a_1, \ldots, a_t/\mathbb{M}$) 是弱泛型类型，那么它是 $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0)^t$-不变的，因此每个 tp($a_j/\mathbb{M}, a_i$: $i < j$) 都是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0$- 不变的。

我们通过对 $t \in \mathbb{N}^+$ 进行归纳来证明反方向。假设该引理对$t-1$成立。根据归纳假设，tp($a_1, ..., a_{t-1}/\mathbb{M}$) 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{t-1}$ 上的弱泛型类型。反设 tp($a_1, ..., a_t/\mathbb{M}$) 不是弱泛型类型，那么存在不全为零的 $k_1, ..., k_t \in \mathbb{Z}$，使得 $k_1 v(a_1) + ... + k_t v(a_t)$ 在$\Gamma_{\mathbb{M}}$上有界。取满足 $\alpha < k_1 v(a_1) + ... + k_t v(a_t) < \beta$ 的 $\alpha < \beta \in \Gamma_{\mathbb{M}}$。若 $k_t = 0$，则 $\alpha < k_1 v(a_1) + ... + k_{t-1} v(a_{t-1}) < \beta$，这与 tp($a_1, ..., a_{t-1}/\mathbb{M}$) 的弱泛型性矛盾。若 $k_t \neq 0$，则任取满足 $k_t v(b) < \alpha - \beta$ 的 $b \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0$，我们有

$$k_1 v(a_1) + ... + k_t v(ba_t) = k_1 v(a_1) + ... + k_t v(a_t) + k_t v(b) < \beta + \alpha - \beta = \alpha,$$

这也构成矛盾，因为 tp($a_t/\mathbb{M}, a_1, ..., a_{t-1}$) 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0$-不变的。 □

引理 2.13. 对每个 $t \in \mathbb{N}$， $H = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^t$ 都是平稳的。

证明. 设 $p =$ tp($a_0, a_1 ..., a_t/\mathbb{M}$) $\in S_H(\mathbb{M})$ 是弱泛型类型。那么容易看出，对于 $j = 0, ..., t$， tp($a_j/\mathbb{M}, a_i$: $i < j$) 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0$-不变的，因为 $H^0 = \mathbb{G}_{\mathrm{a}} \times (\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0)^t$。由引理 2.12 可知， p 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{t+1}$ 上的弱泛型类型，因此由事实 2.11 可知它是 $\emptyset$- 可定义的。由于 H 上的每个全局弱泛型类型都是 $\emptyset$- 可定义的，由事实 2.3 可知 H 是平稳的。 □

我们回顾一下 [29] 中坏性的概念：

定义 2.14. 设 H 是一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的 dfg 群。若存在一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上的强 f-泛型类型 tp($a/\mathbb{M}$)，以及一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义函数 θ，使得 tp($\theta(a)/\mathbb{Q}_p$) 是非代数的，且 tp($\theta(a)/\mathbb{M}$) 在 $\mathbb{Q}_p$ 中有限可满足，则称 H 是坏的。

注 2.15。如 *[29],* 所指出的， M 上的一个坏 dfg 群并不是平稳的，因为由于pCF 的远性（有关远性的详细信息，参见 *[22]* ），每个非代数的全局类型都不可能同时在 M 上可定义且在 M中有限可满足。

引理 2.16。设 H 是一个在 $\mathbb{Q}_p$上可定义的 dfg 群。如果 H 是虚拟地 A，那么 H 是坏的，当且仅当 A是坏的。

证明。设 $X \subseteq H$ 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的有限指数子群，且 $f : X \to A$ 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义态射，并且 ker(f) 和 A/Im(f) 都是有限的。应用可定义 Skolem 函数，设 g: Im(f) $\to H$ 是 $\mathbb{Q}_p$-可定义的 f 截面。若 $p \in S_H(\mathbb{M})$ 是关于 $\mathbb{Q}_p$ 的强 f-泛型类型，那么根据引理 2.7， $f(p)$ 是弱泛型。由于 p 是 $\mathbb{Q}_p$-不变的，我们有 $f(p)$ 也是 $\mathbb{Q}_p$-不变的，因此根据事实 1.14，它也是关于 $\mathbb{Q}_p$ 的强 f-泛型。同理，我们可以证明，若 $q \in S_{\mathrm{Im}(f)}(\mathbb{M})$ 是关于 $\mathbb{Q}_p$ 的强 f-泛型，那么 $g(q) \in S_H(\mathbb{M})$ 也是如此。因此， X 是坏的，当且仅当 Im(f) 是坏的。显然， H 是坏的，当且仅当 X 是坏的；而 A 是坏的，当且仅当 Im(f) 是坏的。证明完毕。 □

在 [29], 中，我们证明了 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^2$ 是一个坏 dfg 群。这意味着对于所有 $s \geq 2$, $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s$ 都是坏的。此外，我们有:

C推论 2.17. $\mathbb{G}_a^s \times \mathbb{G}_m^t$ 是坏的，因此当 $s \geq$时，对每个 t 都不是平稳的 2.

证明。设 tp($a/\mathbb{M}$) 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的强 f-泛型类型，且 θ 是一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义函数，满足 tp($\theta(a)/\mathbb{Q}_p$) 是非代数的，并且 tp($\theta(a)/\mathbb{M}$) 在 $\mathbb{Q}_p$中有限可满足。设 tp($b/\mathbb{M}, a$) 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ 在 $\mathbb{Q}_p$上的强 f-泛型类型。那么对任意 $a_0 \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s$和 $b_0 \in (\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^0)^t$，我们看到 tp($b_0 b/\mathbb{M}, a$) = tp($b_0 b/\mathbb{M}$, $a_0 + a$) 不在 $\mathbb{Q}_p$上分叉，且 tp($a_0 + a/\mathbb{M}$) 不在 $\mathbb{Q}_p$上分叉，因此 tp($a_0 + a, b_0 b/\mathbb{M}$) 不在 $\mathbb{Q}_p$ 上分叉，由此 tp($a, b/\mathbb{M}$) 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$在 $\mathbb{Q}_p$上的强 f-泛型类型。令 $\theta^*(a, b) = \theta(a)$，则 tp($\theta^*$ $(a, b)/\mathbb{Q}_p$) 是非代数的，并且 tp($\theta^*(a, b)/\mathbb{M}$) 在 $\mathbb{Q}_p$中有限可满足。 □

结合引理 2.13，我们得到

定理 2.18。设 H 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的阿贝尔 dfg 群，且虚拟地为 $\mathbb{G}_a^s \times \mathbb{G}_m^t$ 的一个有限指数子群。那么，当且仅当 $s \leq 1$ 时， H 是平稳的。

回顾我们在 [29] 中提出的猜想:

猜想 1。设 H 是在 o-最小结构或 p-进闭域中可定义的 dfg 群。那么，当且仅当 H 非平稳时，H 是坏的。

现在，当 H 是交换的时，我们可以证明猜想 1。

推论 2.19。设 H 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换 dfg 群。那么，当且仅当其非平稳时， H 是坏的。

证明。根据推论 1.26, H 虚拟地是某个 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ s, $t \in \mathbb{N}$。根据引理 2.9, H 是平稳的当且仅当 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ 是平稳的。如果 H 是不良的，那么根据备注 2.15 H 是不平稳的。反之，如果 H 是不平稳的，那么由引理 2.13可知 $s \geq 2$，因此根据推论 2.17, $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$是不良的，所以 H 是不良的。 □

3 μ-不变性

设 G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$上的任意群。我们回顾一些关于 [16]的概念。G 的无穷小类型是关于 $\mathbb{Q}_p$的部分类型，记作 $\mu_G(x)$（或者在 G 明确时简记为 $\mu(x)$），它由所有定义 $\mathbb{Q}_p$ 上 id_G的某个开邻域的公式组成。为与前面的记号相容，我们将 $\mu(\mathbb{M})$（分别将 $\mu_G(\mathbb{M})$）与 μ （分别与 μ_G）等同起来。

记号 3 .1. 1. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是 G-公式，则我们用 $\varphi \cdot \psi$ 表示 G-公式 la

$$(\varphi \cdot \psi)(x) = \exists u \exists v (\varphi(u) \wedge \psi(v) \wedge x = uv)$$

2. 若 $p(x)$ 和 $r(x)$ 是（部分） G-类型，则

$$(p \cdot r) = \{(\varphi \cdot \psi)(x) |\ p \vdash \varphi(x),\ r \vdash \psi(x)\}$$

定义 3.2. 设 N 是 $\mathbb{Q}_p$ 的初等扩张， G 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的群，而 μ 是 G 的无穷小类型。

1. 若 $\mu \cdot p = p$，则称 $p \in S_G(N)$ 是 μ-不变的；

2. 我们称 G 是 μ-不变的，如果 G 上的每个全局弱泛型类型都是 μ-不变的。

注 3.3. 显然，

(i) 如果对于任意 $a \models p$ 和 $\epsilon \models \mu$，都有 $\epsilon a \models p$，那么 $p \in S_G(N)$ 是 μ-不变的；

(ii) G 是 μ-不变的，当且仅当对于任意模型 $N \succ \mathbb{Q}_p$ ， G 上在该模型之上的每个弱泛型类型都是 μ-不变不变的。

现在，我们将 $N \succ \mathbb{Q}_p$ 固定为 $\mathbb{M}$ 的一个任意的、充分饱和的（小）子模型 .

定义 3.4. 我们称 G 具有 $\natural$-性质，如果对于任意 $N^* \succ N(|N^*| < |\mathbb{M}|)$，每个 $H^{00}(N)$-不变类型 $p \in S_G(N^*)$ 都是 μ-不变的。

引理 3.5. 假设 G和 A 是可定义可和群，且可定义于 $\mathbb{Q}_p$之上。那么我们有：

(i) 若 G 具有 $\natural$-性质，则它是 μ-不变的。

(ii) 若 X 是 G 的有限指数 $\mathbb{Q}_p$-可定义子群，且 X 具有 $\natural$-性质，则 G 也具有$\natural$-性质。

(iii) 若 $G^{00} = G^0$ 和 G 虚拟地为 A，则 G 具有 $\natural$-性质，当且仅当 A 具有该性质。

证明。对于 (i)，任意全局弱泛型类型都是 G^{00}-不变的，因此根据“$\natural$-性质”的定义，它也是 μ-不变的。

对于 (ii)，取一个 $G^{00}(N)$-不变类型 $p \in S_G(N^*)$，那么对于任意 $g \in G(\mathbb{Q}_p)$， $gp \in S_X(N^*)$也都是 $G^{00}(N)$-不变的，因为 $gG^{00} = G^{00}g$。取 $g \in G(\mathbb{Q}_p)$，使得 $gp \in S_X(N^*)$，那么gp 是 μ-不变的。由于 $g\mu = \mu g$，我们看到 p 也都是 μ-不变的。证明完毕。

对于 (iii)，设 X 是 G 的一个有限指数 $\mathbb{Q}_p$-可定义子群，且 $f : X \to A$ 是一个有限纤维的 $\mathbb{Q}_p$-可定义态射，使得像(f) 在 A 中具有有限指数。由 (ii) 部分可知，我们可以假设 $X = G$ 和 $A =$ 像(f)。

设 $N^* \succ N$ 是 $\mathbb{M}$ 的一个小子模型， $\mathcal{G} \subseteq S_G(N^*)$ 是 $G^0(N)$-不变类型的空间， $\mathcal{A} \subseteq S_A(N^*)$ 是 $A^0(N)$- 不变类型的空间。由注 2.8 可知，我们可以假设 $\ker(f) \subseteq G^0(N)$，因此 f 是 $\mathcal{G}$ 与 $\mathcal{A}$ 之间的一一对应。由于 $f(\mu_G) = \mu_A$，我们看到，对于任意 $p \in S_G(N^*)$， $f(\mu_G p) = \mu_A f(p)$。如果 G 具有 $\natural$-性质，那么对任意 $p \in \mathcal{G}$， $\mu_G p = p$，从而对任意 $q \in \mathcal{A}$， $\mu_A q = q$。因此 A 具有 $\natural$-性质。

反之，若 A 具有 $\natural$-性质，则对于任意 $q \in \mathcal{A}$， $\mu_A q = q$。由引理 2.4，我们有$f^{-1}(\mu_A) = \mu_A$核(f)，因此

$$\mu_G f^{-1}(q) = \mu_G \ker(f) f^{-1}(q) = f^{-1}(\mu_A q) = f^{-1}(q)$$

对于任意 $q \in \mathcal{A}$，因此 G 具有 $\natural$-性质。 □

引理 3.6. 假设 G_1 和 G_2 是具有 $\natural$-性质的 $\mathbb{Q}_p$ 可定义群。那么 $G = G_1 \times G_2$也如此。

证明。设 $N^* \succ N$是 $\mathbb{M}$的一个小子模型，且 $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mu_G = \mu_{G_1} \times \mu_{G_2}$。设 $h_1 \in G_1$和 $h_2 \in G_2$满足 $\mathrm{tp}(h_1, h_2/N^*)$ 是 $G^{00}(N)$-不变的。那么我们有 $\mathrm{tp}(h_1/N^*, h_2)$ 是 $G_1^{00}(N)$-不变的。由于 G_1 具有 $\sharp$-性质，我们有

$$\mathrm{tp}(\epsilon_1 \cdot h_1/N^*, h_2)) = \mathrm{tp}(h_1/N^*, h_2), \text{ and hence, } \mathrm{tp}(\epsilon_1 \cdot h_1, h_2/N^*) = \mathrm{tp}(h_1, h_2/N^*).$$

那么，$\mathrm{tp}(h_2/N^*, \epsilon_1 \cdot h_1)$ 是 $G_2^{00}(N)$-不变的。类似的论证表明

$$\mathrm{tp}(\epsilon_1 \cdot h_1, \epsilon \cdot h_2/N^*) = \mathrm{tp}(\epsilon_1 \cdot h_1, h_2/N^*)$$

因此我们有

$$\mathrm{tp}(\epsilon_1 \cdot h_1, \epsilon \cdot h_2/N^*) = \mathrm{tp}(h_1, h_2/N^*)$$

这正是所需的。 □

回忆一下 [4] ,

定义 3.7. 胞腔 $A \subseteq \mathbb{M}$ 要么是一个点，要么是如下形式的集合

$$\{t \in \mathbb{M} | \alpha \square_1 v(t-c) \square_2 \beta,\ (t-c) \in \lambda P_n(\mathbb{M})\}$$

wi常数 $n > 0$、 $\lambda \in \mathbb{Z}$、 $c \in \mathbb{M}$、 α、 $\beta \in \Gamma_{\mathbb{M}}$ 和 $\square_i$ 满足 $<$ 或者没有条件。

事实 3.8（[4], 定理 5.2.8.）。每个可定义集 $X \subseteq \mathbb{M}$ 都是有限个胞腔的不交并。

引理 3.9. $\mathbb{G}_a$ 具有 $\sharp$-性质。

证明。注意，$\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{00}(N) = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}(N)$。令 $\epsilon \in \mu_{\mathbb{G}_{\mathrm{a}}}$, $N^* \succ N$ 为 $\mathbb{M}$ 的一个小子模型，并令 $a \in \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ 满足 $\mathrm{tp}(a/N^*)$ 是一个 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(N)$-不变类型。由事实 3.8，要证明 $\mathrm{tp}(\epsilon + a/N^*) = \mathrm{tp}(a/N^*)$，只需证明对每个 $c \in \mathbb{N}^*$, $v(\epsilon + a - c) = v(a - c)$ 和 $P_n((\epsilon + a - c)/(a - c))$，对每个 $n \in \mathbb{Z}$ 都成立。

由于 $\mathrm{tp}(a/N^*)$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}(N)$-不变的，我们有 $v(a - c) < \Gamma_N$ 对每个 $c \in N^*$ 都成立。因此，对于任意 $c \in N^*$，$v((\epsilon + a) - c) = v(\epsilon + (a - c)) = v(a - c)$。此外，对于任意 $c \in N^*$，我们有

$$\frac{((\epsilon + a) - c)}{(a - c)} = 1 + \frac{\epsilon}{a - c}$$

在 N 上无限接近于 1，因此是一个 n 次幂。

因此，$\mathrm{tp}(\epsilon + a/N^*) = \mathrm{tp}(a/N^*)$，如所需。 □

引理 3.10. $\mathbb{G}_m$ 具有 $\sharp$性质。

证明. 设 $N^* \succ N$和 $a \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$，使得 $\mathrm{tp}(a/N^*)$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{00}(N)$-不变的。首先，对任意 $c \in N^*$， $v(a) \geq v(a - c)$。否则，存在某个 $c \in N^*$，使得 $v(a - c) > v(a)$，于是 $v(a) = v(c)$。取 $e \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{00}(N)$，使得 $v(e) > 0$。由于 $\mathrm{tp}(a/N^*)$ 是 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{00}(N)$-不变的，因此 $v(ea) = v(c)$。但是 $v(ea) = v(e) + v(a) = v(e) + v(c) > v(c)$，矛盾。

我们只需证明，对于每个 $\delta \in \mu_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$、$c \in N^*$ 和 $n \in \mathbb{Z}$， $v(\delta a - c) = v(a - c)$，且 $P_n((\delta a - c)/(a - c))$。取 $\delta \in \mu_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$，则对于某个 $\epsilon \in \mu_{\mathbb{G}_{\mathrm{a}}}$，有 $\delta = 1 + \epsilon$。对于每个 $c \in N^*$，我们有$v(\delta a - c) = v(\epsilon a + a - c) = v(a - c)$，因为 $v(\epsilon a) > v(a) \geq v(a - c)$。

此外，对于任意 $c \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\delta a - c}{a - c} = \frac{\epsilon a + a - c}{a - c} = 1 + \frac{\epsilon a}{a - c}.$$

由于 $v(\epsilon a/(a - c)) \geq v(\epsilon a/a) = v(\epsilon) > \mathbb{Z}$，因此对于每个 $n \in \mathbb{N}^{>0}$， $1 + (\epsilon a/(a - c))$ 都是 n 次幂。所以，$\mathrm{tp}(a/N^*)$ 是 $\mu_{\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$-不变的，符合要求。 □

引理 3.11. 设 H 是 $\mathbb{Q}_p$ 上的一个交换 dfg 群，则 H 具有 $\natural$-性质。

证明。根据推论 1.26, H 对于某个 s、$t \in \mathbb{N}$是虚拟地 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$。由引理 3.6、3.9 和 3.10 可知, $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^s \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^t$ 具有 $\natural$-性质。根据引理 3.5 的 (iii) 部分, H 具有 $\natural$-性质。 □

由引理 3.11 可直接得到

Cor推论 3.12。设 H 是定义在 $\mathbb{Q}_p$上的交换 dfg 群，则 H 是 μ-不变的 t.

设 M 是 $T = p$CF 的一个固定模型，并且扩张 $\mathbb{Q}_p$；设 $\mathbb{M}_0$ 是 T_M^{ext}的一个怪兽模型。显然，将 $\mathbb{M}_0$ 约化到 L 所得的约化 $\mathbb{M}_0 \restriction_L$ 同样是饱和且齐性的；为方便起见，我们假设 $\mathbb{M}_0 \restriction_L = \mathbb{M}$。容易看出，无论在 T 的 $\mathbb{M}$ 中还是在 T_M^{ext}的 $\mathbb{M}_0$ 中计算，部分类型 μ_H 都是相同的。

引理 3.13. 设 H 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的交换 dfg 群。那么在 T_M^{ext} 中计算时, H 也具有 μ-不变性。

证明. 注意, T_M^{ext} 也具有 NIP。根据事实 1.12，无论在 T 还是在 $T_{\mathrm{ext}M}$ 中计算, H^{00} 都相同。设 $N_0 \succ M^{\mathrm{ext}}$ 是一个充分饱和的模型, N 是 N_0 在 L 上的约化。设 $p \in S_H(N_0)$ 是一个弱泛型类型。根据事实 1.14, p 是 $H^{00}(N)$-不变的。根据事实 1.6，存在 $N^* \prec \mathbb{M}$ 使得 $N \prec N^*$，且 $S_H(N_0)$ 与 $S_{H,N}(N^*)$ 自然同胚。我们将 p 视为 $S_{H,N}(N^*) \subset S_H(N^*)$ 中的一个元素，则 p 是 $H^{00}(N)$-不变的，并且由引理 3.11 可知, p 是 μ-不变的。 □

4 主要定理

在本节中，我们固定 M 为 $\mathbb{Q}_p$ 的一个初等扩张。我们用 M_0 表示 M^{ext}。根据 $\mathbb{M}_0$，令 $\mathbb{M}_0 \succ M_0$ 为 T_M^{ext} 的一个怪兽模型。此外，我们假设 $\mathbb{M}$（$\mathbb{M}_0$ 在 L 中的约化）是一个扩张 M 的 $T = p$CF 怪兽模型。

此外，我们固定 G 为一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的交换群，且它不是 dfg 群。注意，根据事实 1.20, G 具有一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义的短正合列

$$1 \to H \to G \to_\pi C \to 1,$$

其中 C 是一个 fsg 群，维数 $\dim(C) \geq 1$，而 H 是一个 dfg 群。根据事实 1.16 和事实 4.5，在 T_M^{ext} 中计算时, H 和 C 也分别具有 dfg 和 fsg 性质。

令 $f : C \to G$ 为 π 的一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义截面。那么任意 $g \in G$ 都可以唯一地写成 $f(c)h$，其中 $c = \pi(g) \in C$ 且 $h = (f(c))^{-1}g \in H$。此外，我们可以假设 $\mathrm{Im}(f)$ 包含于 G 的一个可定义紧子集中：令 $U(\mathbb{Q}_p)$ 为 $G(\mathbb{Q}_p)$ 的一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的开紧子群。则 $\pi(U(\mathbb{Q}_p))$ 是 $C(\mathbb{Q}_p)$ 的一个开子群。由于 $C(\mathbb{Q}_p)$ 是紧的，我们可以找到 $c_1, ..., c_n \in C(\mathbb{Q}_p)$，使得 $n \in \mathbb{N}$，且 $\bigcup_{i \leq n} c_i \cdot \pi(U(\mathbb{Q}_p)) = C(\mathbb{Q}_p)$。令 $g_i \in G(\mathbb{Q}_p)$ 满足：对 $i = 1, ..., n$，有 $\pi(g_i) = c_i$，并且 $V(\mathbb{Q}_p) = U(\mathbb{Q}_p) \cup \bigcup_{i \leq n} g_i \cdot U(\mathbb{Q}_p)$。我们有 $V(\mathbb{Q}_p)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义，且 $\pi(V(\mathbb{Q}_p)) = C(\mathbb{Q}_p)$。现在, $V(\mathbb{Q}_p)$ 是 1_G 的一个开紧邻域，因为它是有限个开紧集的并。令 $V = V(\mathbb{M})$；根据可定义 Skolem 函数，我们可以找到 $\pi \restriction_V$ 的一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义截面 f。因此，我们可以假设 $f(C) \subset V$。用 $V \cup V^{-1}$ 替换 V 后，我们可以假设 $V = V^{-1}$。令 $\eta : C \times C \to H$ 定义为 $\eta(c_1, c_2) = f(c_1c_2)^{-1}f(c_1)f(c_2)$。

引理 4.1. 对任意 c_1、$c_2 \in C$，存在 $h_0 \in H(\mathbb{Q}_p)$，使得 $\eta(c_1, c_2) \in \mu_H h_0$。

证明。首先，我们证明 H 在 G 中是闭的。显然，cl(H) 是一个在 $\mathbb{Q}_p$ 上可定义的 G 的闭子群。由 [7], 中的 Denef 的胞腔分解可知，dim(H) =dim(cl(H))。于是， H 是 cl(H) 的一个具有非空内部的子群，这意味着 H 是 cl(H) 的一个开子群。因此， H 是 cl(H) 的一个闭子群。故 H =cl(H) 在 G 中是闭的。

设 $W = V \cdot V \cdot V$，则 W 与 V 一样是可定义紧的。显然， $\eta(C)$ 包含于 $W \cap H$。由于 $W(\mathbb{Q}_p)$ 是紧的，且 $H(\mathbb{Q}_p)$ 在 $G(\mathbb{Q}_p)$ 中是闭的，因此 $W(\mathbb{Q}_p) \cap H(\mathbb{Q}_p)$ 是紧的。于是，对任意 c_1， $c_2 \in C$， $\eta(c_1, c_2) \in (W \cap H)$ 都有一个标准部 $h_0 \in (W \cap H)(\mathbb{Q}_p)$，即 $\eta(c_1, c_2) \in (\mu_G h_0) \cap H = \mu_H h_0$。 □

4.1 局部情形

现在我们描述 $S_G(M_0)$ 中的几乎周期类型。设 $\mathcal{I}$ 是 $S_C(M_0)$ 中泛型类型所成的空间，则 $\mathcal{I}$ =AP($S_C(M_0)$) 是 $S_C(M_0)$ 的唯一极小子流，并且也是半群 $(S_C(M_0)\ *)$ 的一个双理想（见事实 1.8）。我们用 $f(\mathcal{I})$ 表示集合 $\{f(q) |\ q \in \mathcal{I}\}$。令 $\mathcal{J}$ =AP($S_H(M_0)$) 表示 $S_H(M_0)$ 中所有几乎周期类型的集合，它也是 $S_H(M_0)$ 的所有极小子流之并。

事实 4.2 ([29])。 $f(\mathcal{I}) * \mathcal{J} \subseteq$ AP($S_G(M_0)$)。

事实 4.3 ([29])。设 $r \in S_G(M_0)$。那么， r 几乎周期，当且仅当 $r = f(q) * p * r$ 对于某些 $q \in \mathcal{I}$和 $p \in \mathcal{J}$。

注意，根据 [2] 的定理 5.1， T_M^{ext} = Th(M_0) 也是一种远端理论。根据 [22], 中的引理 2.16, 我们有

事实 4.4。对于任意 $N \models T^{\text{扩张}}$，如果且 $N' \succ N$ 是 $|N|^+$-饱和的， $p(x) \in S(N')$ 在 N 上可定义，并且 $q(y) \in S(N')$ 在 N 中有限可满足。那么， $p(x) \cup q(y)$ 蕴含一个在 N' 上的完备 (x, y)-类型。事实上，如果 $a \models p$ 和 $b \models q$，那么 tp($a/N', b$) 是 tp(a/N) 的唯一的继承类型，而 tp($b/N', a$) 在 N 中有限可满足。

事实 4.5. *[3]*令 N为 $M^{\text{扩张}}$的一个充分饱和扩张。那么， $p \in S_H(M_0)$ 几乎周期，当且仅当其在 N 上的唯一的继承类型 $\bar{p}$ 是弱泛型。

引理 4.6. AP($S_G(M_0)$) = $f(\mathcal{I}) * \mathcal{J}$。

证明。根据事实 4.2，我们只需证明 AP($S_G(M_0)$) $\subseteq f(\mathcal{I}) * \mathcal{J}$。

令 $r \in S_G(M_0)$ 几乎周期，则根据事实 4.3，我们有 $r = f(q) * p * r$，其中某些 $q \in \mathcal{I}$ 和 $p \in \mathcal{J}$ 满足条件。令 N为 M_0的一个充分扩张。令 $h \in H(N)$ 实现 p在 N上的唯一的继承类型。令 $g^* = f(c^*)h^* \in G$实现 r 在可定义闭包 dcl(N, h) 上的唯一的继承类型，其中 $c^* = \pi(g^*) \in C$且 $h^* \in H$。根据事实 1.15， q在可定义闭包 dcl(N, h, g^*) 上有唯一的泛型扩张 $\bar{q}$，且该扩张在 M_0中有限可满足。令 $c \in C$ 实现 $\bar{q}$，则

$$f(q) * p * r = \text{tp}(f(c)hf(c^*)h^*/M_0) = \text{tp}(f(c)f(c^*)hh^*/M_0) = \text{tp}(f(cc^*)\eta(c, c^*)hh^*/M_0$$

显然，tp($h^*/M_0, h$) 是 tp(h^*/M_0) 的唯一继承类型，因为 $h^* \in$dcl(M_0, g^*)。我们有 tp(hh^*/M_0) = $p *$ tp(h^*/M_0)。根据事实 1.8，我们有 tp(hh^*/M_0) $\in \mathcal{J}$，因为 $p \in \mathcal{J}$。由于 tp(h/N) 和 tp($h^*/N, h$) 都在 M_0 上可定义，因此 tp(hh^*/N) 在 M_0 上可定义，因而是 tp(hh^*/M_0) 的继承扩张。由事实 4.5 可知，tp(hh^*/N) 是一个弱泛型类型。

根据引理 4.1，存在 $h_0 \in H(\mathbb{Q}_p)$，使得 $\eta(c, c^*) = \epsilon h_0$ 对某个 $\epsilon \in \mu_H$ 成立，因此，根据引理 3.13,

$$\mathrm{tp}(\eta(c, c^*)hh^*/N) = \mathrm{tp}(\epsilon h_0 hh^*/N) = h_0 \cdot \mathrm{tp}(hh^*/N).$$

因此，$\mathrm{tp}(\eta(c, c^*)hh^*/N)$ 在 M_0 上也是可定义的。由于 $\mathrm{tp}(cc^*/N) = \bar{q} * \mathrm{tp}(c^*/N)$ 是 C 上的泛型类型，因此它是 $\mathrm{tp}(cc^*/M_0 \epsilon h_0 hh^*)$ 的共同继承扩张。根据事实 4.4，$\mathrm{tp}(f(cc^*)/M_0, \eta(c, c^*)hh^*)$ 在 M_0 中有限可满足，因此我们有

$$r = f(q) * p * r = \mathrm{tp}(f(cc^*)\eta(c, c^*)hh^*/M_0) = \mathrm{tp}(f(cc^*)/M_0) * \mathrm{tp}(\eta(c, c^*)hh^*/M_0).$$

由于 $\mathrm{tp}(cc^*/M_0) \in \mathcal{I}$ 且 $\mathrm{tp}(\eta(c, c^*)hh^*/M_0) = h_0 \mathrm{tp}(hh^*/M_0) \in \mathcal{J}$，我们有 $r \in f(\mathcal{I}) * \mathcal{J}$，如所要求。 □

事实 4.7。 *[29]* 设 $p = \mathrm{tp}(e/\mathbb{Q}_p) \in S_1(\mathbb{Q}_p)$ 是一个非代数型。假设 p_1 是在 $\mathbb{Q}_p$ 上的唯一的继承类型 p，e，则 p_1 在 $\mathbb{Q}_p$ 中不是有限可满足的。

事实 4.8. *[29]* 令 N 为 $|M_0|^+$的一个饱和扩张，$\mathrm{tp}(c^*/N)$ 是 C上的一个泛型类型，而 $\mathrm{tp}(h^*/N, c^*)$ 是 H上关于 $\mathbb{Q}_p$的一个强 f-泛型类型。那么，$\mathrm{tp}(f(c^*)h^*/N)$ 是 G 上关于 $\mathbb{Q}_p$的一个强f-泛型类型。

引理 4.9. 令 H 为一个坏 dfg 群（在 T中）。那么，$\mathrm{WGen}(S_G(M_0))$ 是 $\mathrm{AP}(S_G(M_0))$ 的真子集。

证明. 令 N_0 为 M_0的一个充分饱和扩张，并令 $N = N_0 \restriction_L$ 为 N_0 到L的约化。令 $\mathrm{tp}(c^*/N)$ 为 C 上的一个泛型类型。根据 H的坏性，我们可以找到 $\mathrm{tp}(h^*/N, c^*)$，即一个在 H 上关于 $\mathbb{Q}_p$的强f-泛型类型，以及一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义函数 θ，使得 $\mathrm{tp}(\theta(h^*)/N, c^*)$ 在 $\mathbb{Q}_p$中有限可满足。由事实 4.8 可知，$p = \mathrm{tp}(f(c^*)h^*/N) \in S_G(N)$ 在 $\mathbb{Q}_p$上是强f-泛型的，因此是 $G^{00}(N)$-不变的。

令 p 为 N_0 上的一个部分类型（在 T_M^{ext} 中）。根据事实 1.12，无论在 T 还是 $T_{\text{扩张}M}$ 中计算，G^{00} 都相同，因此 p 在 T_M^{ext} 中也弱泛型。令 $p^* \in S_G(N_0)$ 为 p 的任意弱泛型扩张，$p_0 \in S_G(M_0)$ 为 p^* 在 M_0 上的限制，则 p_0 是弱泛型的。

反设 p_0 是几乎周期的。令 $q = p_0 \restriction_L \in S_G(M)$ 为 p_0 在语言 L 上的限制，$q_0 = q \restriction_{\mathbb{Q}_p} \in S_G(\mathbb{Q}_p)$ 为 q 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的限制（在 T 中）。根据事实 1.19 的 (i) 部分，q 在 $S_G(M)$ 中几乎周期，因此根据事实 1.19 的 (ii) 部分，q_0 在 $S_G(\mathbb{Q}_p)$ 中几乎周期。显然，$q_0 = \mathrm{tp}(f(c^*)h^*/\mathbb{Q}_p)$。将引理 4.6 应用于 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ext}} = \mathbb{Q}_p$，可得 $\mathrm{tp}(f(c^*)/\mathbb{Q}_p, h^*)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 中有限可满足。由此得出，$\mathrm{tp}(f(c^*)/\mathbb{Q}_p, \theta(h^*))$ 和 $\mathrm{tp}(\theta(h^*)/\mathbb{Q}_p, f(c^*))$ 均在 $\mathbb{Q}_p$ 中有限可满足，这与事实 4.7 矛盾。

□

那么，结合引理 4.9 与事实 2.2，我们得到

定理 4.10. $\mathrm{AP}(S_G(M_0)) = \mathrm{WGen}(S_G(M_0))$ 当且仅当 G 是平稳的 y.

4.2 全局情形

现在我们考虑全局情形。

引理 4.11. 设 H 是一个坏 dfg 群。则 $S_G(\mathbb{M})$ 具有一个不是几乎周期的弱泛型类型。

证明. 设 c^* 实现泛型类型 $p \in S_C(\mathbb{M})$。由 H 的坏性，我们可以找到 H 上的一个强f-泛型类型 tp($h^*/\mathbb{M}, c^*$)，以及一个 $\mathbb{Q}_p$-可定义函数 θ，使得 $\theta(h^*)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 中有限可满足。由事实 4.8 可知，tp($f(c^*)$ $h^*/\mathbb{M}$) 在 G 上相对于 $\mathbb{Q}_p$ 是强 f-泛型的。

反设 tp($f(c^*)h^*/\mathbb{M}$) 是几乎周期的。由事实 1.19 的 (ii) 部分，tp($f(c^*)h^*/\mathbb{Q}_p$) 在 $S_G(\mathbb{Q}_p)$ 中是几乎周期的。由引理 4.6，tp($c^*/\mathbb{Q}_p, h^*$) 在 $\mathbb{Q}_p$ 中有限可满足。由此可得，tp($c^*/\mathbb{Q}_p, \theta(h^*)$) 和 tp($\theta(h^*)/\mathbb{Q}_p, c^*$) 均在 $\mathbb{Q}_p$ 中有限可满足，这与事实 4.7 矛盾。 □

然后，结合引理 4.11 和事实 2.2，可得

定理 4.12。AP($S_G(\mathbb{M})$) =WGen($S_G(\mathbb{M})$) 当且仅当 G 是平稳的。

参考文献

[1] J. Auslander，《极小流及其扩张》，北荷兰，阿姆斯特丹，1988 年。[2] G. Boxall 和 C. Kestner，具有远端 Shelah 扩张的理论，arXiv。[3] A. Chernikov、A. Pillay 和 P. Simon，NIP 理论中的外部可定义性与群，《伦敦数学学会杂志》，90 (2014)，213-240。[4] R. Cluckers，胞腔分解与 p进积分，博士论文。[5] A. Chernikov 和 P. Simon，可定义可容许的 NIP 群，《美国数学会杂志》，31 (2018)，609-641。[6] F. Delon，参数化与外部参数下的可定义性，《美国数学会会刊》，106 (1989)，193-198。[7] J. Denef，p进半代数集与胞腔分解，《纯粹与应用数学杂志》，369 (1986)，154–166。[8] J. Denef，与簇上的 p 进点相关的 Poincar´e 级数的有理性，《数学发明》，77 (1984)，1–23。[9] E. Glasner，《近端流》，数学讲义第 517 卷，Springer，1976。[10] E. Hrushovski、Y. Peterzil 和 A. Pillay，群、测度与 NIP，《美国数学会杂志》，21 (2008)，563-596。[11] W. J ohnson 和 N. Yao，p进闭域中可定义的阿贝尔群，arXiv。[12] A. Macintyre，关于 p进域中的可定义子集，《符号逻辑杂志》，41 (1976)，605-610。[13] J. S. Milne，《代数群：域上有限型群概形理论》，剑桥高等数学研究丛书，2017。[14] L. Newelski，可定义群作用的拓扑动力学，《符号逻辑杂志》，74 (2009)，50-72。[15] D. Penazzi、A. Pillay 和 N. Yao，关于 p进代数群的一些模型论与拓扑动力学，《基础数学》，247 (2019)，191-216。

[16] Y. Peterzil 和 S. Starchenko，拓扑群、 μ-类型及其稳定子。《欧洲数学学会杂志》(JEMS)，第 19 卷 (2017)，第 10 期，第 2965–2995 页。[17] A. Pillay 和 N. Yao，关于 p进域中可定义群的一则短札，《数学逻辑档案》，58 (2019)，1029–1034。[18] A. Pillay 和 N. Yao，关于在 p进闭域中可定义且具有可定义 f-泛型的群，arXiv:1911.01833v2 [math.LO], 2019。[19] A. Pillay 和 N. Yao，关于极小流、可定义可容许群与 o-极小性，《Adv. Math.》，290 (2016)，483-502。[20] V. Platonov 和 A. Rapinchuk，《代数群与数论》，Academic Press，1994。[21] B. Poizat，《模型论教程》，Springer，2000。[22] P. Simon，远端与非远端 NIP 理论，《纯粹与应用逻辑年刊》，164 (2013)，294-318。[23] P. Simon，《NIP 理论指南》，剑桥大学出版社，2015。[24] T. A. Springer，《线性代数群》，第二版，Birkh¨ause，1998。[25] L. van den Dries 和 P. Scowcroft，关于 p进域上的半代数集的结构，《符号逻辑杂志》，53 (1988)，1138-1164。[26] S. P. Wang，关于各向异性可解线性代数群，《美国数学会会刊》，84 (1982)，11-15。[27] N. Yao，关于 $\mathbb{Q}_p$ 上三角化代数群的可定义拓扑动力学，《数学逻辑季刊》，65 (2019)，376-386。[28] N. Yao，关于 Presburger 算术中的 f-泛型类型，《逻辑研究》，12 (2019)，57-78。[29] N. Yao 和 Z. Zhang，关于某些远端 NIP 理论中的极小流与可定义可容许性，arXiv:2209.08495v1 [math.LO], 2022。[30] A. Onshuus 和 A. Pillay，关于可定义群与紧 P进李群，《伦敦数学学会杂志》，78(1)，(2008)，233-247。[31] Lou van den Dries，具有可定义 Skolem 函数的代数理论，《符号逻辑杂志》，49(1984)，625-629。[32] W. Johnson，关于 fsg 群在 p进闭域中的一则短札，预印本，2022。[33] A. Pillay，关于在 $\mathbb{Q}_p$中可定义的域，《数学逻辑档案》，29 (1):1-7 (1989)。[34] W. Johnson 和 N. Yao，关于非紧 p进群，《符号逻辑杂志》，第 87 卷，第 1 期，2022 年 3 月，第 188-213 页。[35] A. Pillay，(1998)。代数闭域的模型论。载于：Bouscaren, E.（编），《模型论与代数几何》。数学讲义，第 1696 卷。Springer，柏林、海德堡。

[36] A. Conversano 和 A. Pillay，《可定义群的连通分支与 o-极小性 I》，《Adv. Math.》，231（2012），605-623。[37] E. Hrushovski 和 A. Pillay，《关于 NIP 与不变测度》，《J. Eur. Math. Soc.》，13（2011），1005-1061。[38]W. Johnson 和 N. Yao，在 p-进闭域中可定义的阿贝尔群，arXiv:2206.14364v2 [math.LO], 2022。