arXiv:2302.10694v2 [nlin.SI] 6 Oct 2023

´非阿贝尔第二 Painlevé 方程组的不同线性化及相关单值化曲面

IRINA BOBROVA

谨以此文献给 V.S. Retakh 75 岁寿辰

Abstract. 本文讨论了非阿贝尔第二 Painlev´e 方程的不同非阿贝尔类比之间的线性化联系。对于每一种类比，我们列出了 Harnard-Tracy-Widom (HTW) 型、Flaschka-Newell (FN) 型和 Jimbo-Miwa (JM) 型的成对关系。本文提出了一种建立 HTW-JM 对应关系的方法。对于其中一种非阿贝尔类比，我们推导出了与 FN 型和 JM 型线性化相关的单值曲面的相应非阿贝尔推广。此外，我们还讨论了与这些单值曲面相关的自然泊松结构。

Contents

1. 引言 1
2. HWT-JM 对应 4
3. 非阿贝尔单值曲面 8
4. 讨论 19
附录 A. FN 型对 20
参考文献 21

1. Introduction

著名的 Painlev´é 方程是在一百多年前推导出来的 [Pai00], [Pai02], [Gam10]。这些方程在数学和数理物理的多个分支中得到了研究，并具有重要性质。特别是，它们与一个标量微分方程组有关 [Fuc07], [Gar12] ，该方程组在弗罗贝尼乌斯定理的意义下是可积的。在论文 [JM81b], 中，研究者证明了 Painlev´é 方程可以线性化。这一事实与保持单值性的变形有关，而这些变形又与秩为 2 的向量丛相关。由于其等单值性质，Painlev´é 方程的解空间可以用单值化数据来参数化。具体而言，每个方程都可以与一个仿射三次曲线的零点集联系起来，该曲线通常称为单值曲面(例如， [VDPS09])。非正式地说，解空间的维数等于单值曲面的维数。

本文关注与非交换类比的第二 Painlev´é 方程的不同线性化相关的著名单值曲面的非阿贝尔推广，这些推广见 [AS21]。交换的第二 Painlev´é 方程为

$$f'' = 2f^3 + xf + \left(\theta - \tfrac{1}{2}\right), \qquad f(x),\ x,\ \theta \in \mathbb{C},$$

并可改写为方程组[Oka80]

$$\mathrm{P}_2 \qquad \begin{cases} f' &= -f^2 + g - \frac{1}{2}x, \\ g' &= 2fg + \theta, \end{cases} \qquad f(x),\ g(x),\ x,\ \theta \in \mathbb{C}.$$

该方程组存在几种类型的等单值 Lax 对（参见 [FN80], [JM81b], [HTW93]） ，也就是说，它等价于以下线性系统的相容条件

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_\lambda \Phi(\lambda, x) &= A(\lambda, x)\,\Phi(\lambda, x), \\ \partial_x \Phi(\lambda, x) &= B(\lambda, x)\,\Phi(\lambda, x), \end{cases}$$

其中， λ 是谱参数，而矩阵 $A(\lambda, x)$ 对 λ 的依赖形式可能不同。矩阵$A(\lambda, x)$分为三种类型：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：34M55、46L55；次要分类：34M56、34M40。*Key words and phrases.* 非阿贝尔 Painlev´é 方程、等单值 Lax 对、非阿贝尔单值曲面。

- Harnad-Tracy-Widom (HTW) 型 [HTW93]

$$A(\lambda,x)=A_1\lambda+A_0(x)+A_{-1}(x)\lambda^{-1}, \tag{2}$$

- Flaschka-Newell（FN）型 [FN80]

$$A(\lambda,x)=A_2\lambda^2+A_1(x)\lambda+A_0(x)+A_{-1}(x)\lambda^{-1}, \tag{3}$$

- 以及 Jimbo-Miwa（JM）型 [JM81b]

$$A(\lambda,x)=A_2\lambda^2+A_1(x)\lambda+A_0(x). \tag{4}$$

在论文 [KH99], [Sul08], 和 [JKT09], 中，已证明这些 P_2 方程组的所有线性化都是等价的。HTW 型对与 FN 型对之间的等价性由规范变换以及谱参数的变换给出。

命题 1.1 （参见 [KH99]）。设函数 $W(\mu,\ x)$ 和 $Z(\zeta,\ x)$ 分别是具有 (1) 以及 (2) 和 (3)的线性系统的解。那么，HTW型对可通过 Fabri 型映射与 FN型对规范等价：

$$Z(\zeta,x)=G(\zeta)W(\mu,x),\qquad G(\zeta)=\begin{pmatrix}\zeta^{-\frac{1}{2}} & -\zeta^{\frac{1}{2}}\\ \zeta^{-\frac{1}{2}} & \zeta^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\qquad \mu=-\zeta^2.$$

为了推导一个将 HTW 型对映射到 JM 型对的变换，应考虑广义拉普拉斯变换 [Sul08], [JKT09]。

命题 1.2 （见 [JKT09]）。设函数 W（$\mu,\ x$）和 Y（$\lambda,\ x$）分别是线性问题 （1）在 （2）和 （4）下的解。那么，HTW型数对与 JM型数对可通过广义拉普拉斯变换等价地联系起来：

$$W(\mu,x)=\int_L e^{\lambda\mu}\,Y(\lambda,x)\,d\lambda.$$

注 1.1。围道 L 的选取旨在消除分部积分产生的所有剩余项。由于 Painlev´e 方程的解仅具有多项式渐近性，因此总能作出这样的选取。

在矩阵情形下，P_2 系统有三种彼此不等价的推广，分别记为 P_2^0, P_2^1, 和 P_2^2系统。这些系统含有常数任意矩阵参数，并具有等单值表示（1）与（2）或（3） [AS21], ，即这些系统由零曲率条件导出

$$\partial_x A-\partial_\lambda B=[B,A]. \tag{5}$$

一般而言，这些系统可写成如下形式

$$\begin{cases} f' &= -f^2+g-\frac{1}{2}x\,\mathbb{I}-c_1,\\ g' &= 2gf+\beta[g,f]+c_2f+fc_3+c_4,\end{cases} \tag{6}$$

其中 $f=f(x)$、$g=g(x)$ 是矩阵值函数，c_i、$i=1$、2、3、4 是任意常数矩阵，并且$\beta\in\mathbb{C}$。更确切地说，在（6）中需要令

P_2^0 : $\beta=-1,\quad c_1=b,\quad c_2=0,\quad c_3=0,\quad c_4=\theta\,\mathbb{I},\quad \theta\in\mathbb{C};$

P_2^1 : $\beta=-2,\quad c_1=0,\quad c_2=0,\quad c_3=0,\quad c_4=a;$

P_2^2 : $\beta=-3,\quad c_1=b,\quad c_2=2b,\quad c_3=-2b,\quad c_4=a,\quad [b,a]=2b.$

从这些方程组出发，我们可以不考虑矩阵情形，而是考虑以下 P_2系统的非阿贝尔类比（另见 [BS23a], [BS23b], [BS23c]）。令 $\mathcal{R}$ 为一个带单位元 **1**、定义在域 $\mathbb{C}$上的结合除环。为简洁起见，我们省略单位元。假设元素 f、g和 c_i 是 $\mathcal{R}$ 的生成元，且元素 x 属于环 $\mathcal{Z}(\mathcal{R})$ 的中心。我们还假设允许在$\mathcal{R}$中使用级数。除了 $\mathcal{R}$中的乘积外，还可以引入反乘积，其转换由下述映射定义。

定义 1.1. 对合 $\tau\colon \mathcal{R}\to\mathcal{R}$ 称为转置，如果
(1) 它对 $\mathcal{R}$ 的生成元作用平凡，例如 $\tau(f)=f$；(2) 对任意 $F, G\in\mathcal{R}$，我们有 $\tau(FG)=\tau(G)\,\tau(F)$。

例如，$\tau([f,g])=-[f,g]$，其中 $[f,g]:=fg-gf$。
由于我们希望研究非阿贝尔常微分方程组成的方程组，因此给这个环配备一个导子。

定义 1.2. 若一个 $\mathbb{C}$-线性映射 $\partial_x : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 满足以下性质，则称其为 $\mathcal{R}$ 的导子：
(1) $\partial_x(x) = 1$, (2) $\partial_x(\alpha) = 0$，对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，(3) $\partial_x(F\,G) = \partial_x(F)\,G + F\,\partial_x(G)$，对任意 $F, G \in \mathcal{R}$ （莱布尼茨法则）。

为简单起见，我们将使用′ 代替 ∂_x 并将 $\partial_x(f) = f'$， $\partial_x(f') = f''$，依此类推。由于 c_i是任意的非阿贝尔常数， $\partial_x(c_i) = 0$。令 $\lambda \in \mathcal{Z}(\mathcal{R})$ 为一个谱参数。除了定义1.2中给出的性质外，导子 ∂_λ 还必须满足以下性质

$$\partial_\lambda(\lambda) = 1, \qquad \partial_\lambda(x) = 0, \qquad \partial_\lambda(f) = 0, \qquad \partial_\lambda(g) = 0, (\lambda)' = 0.$$

对于非阿贝尔 P_2 型方程组（6），我们考虑 HTW 型、FN 型和 JM 型的不同线性化（1）。具体而言，我们为每个方程组给出相应的 Lax 对。

我们将论文 [BS22] 中通过相应矩阵 P_4型方程组的 Lax 对的极限变换得到的 HTW 型对纳入列表。这些对分别是 P_2^0 的 HTW_2^0,对、P_2^1 的 HTW'^1_2 对，以及该 P_2^1, 系统的 HTW_2^2 对。要由此导出 FN 型对，可以使用与命题 1.1中相同的 Fabry 型映射。所得 FN 型对列于附录 A。

在第 2 节中，我们提出一种方法，通过命题 1.2 所给广义拉普拉斯变换的非阿贝尔类比，在非阿贝尔情形下由 HTW 对构造 JM 型对。具体而言，我们将 HTW 对改写为一种特殊形式，以便应用该变换。与论文 [JKT09], 不同，我们不采用关于谱参数线性的辅助 3×3 对。与注 1.1 类似，我们假设可以消去分部积分产生的项。但实际上，证明可以选取这样的围道本身就是一个额外问题。我们将此问题留待后续研究。

注记 1.2。 在论文 [BS22], 中，作者提出了一种方法，用于为给定的 Painlev´e 型方程组构造非阿贝尔等单值 Lax 对。他们运用了将著名的交换对进行非阿贝尔化的思想。具体而言，我们需要为非阿贝尔方程组构造一个非阿贝尔 ansatz，并利用零曲率条件（5）确定未定义的系数。这种方法的主要问题在于，如何构造一个系数能够由零曲率表示确定的非阿贝尔 ansatz。

注记 1.3。 还有一种基于可积偏微分方程的对称约化的方法 [AS21]。此外，除了非阿贝尔情形下的约化比交换情形下复杂得多这一事实之外，究竟哪一个偏微分方程约化后会得到所需的 Painlev´e 型方程组，也并不清楚。

事实证明，P_2^0 方程组存在一个多项式 JM 型对，即JM_2^0 对，该对可推广至完全非交换情形（参见备注 2.2）。P_2^1 方程组存在多项式和非多项式 JM 型对（分别为 JM_2^1 和 JM'^1_2 对）。对于P_2^2 方程组，JM 对是退化的[1]（参见JM_2^2 对）。因此，对于每个非阿贝尔 P_2 方程组，我们给出了 HTW 型、FN 型和 JM 型线性化。具体而言，我们得到以下结果

定理 1.1。以下 非阿贝尔P_2^0, P_2^1, 和P_2^2 方程组具有HTW、FN和JM型线性化 .

第 3 节专门讨论与 FN 型和 JM 型线性化相关的非阿贝尔单值曲面。为推导这些曲面，我们需要确定单值化数据，其中包括拓扑单值化、形式单值化和斯托克斯矩阵。这些数据由奇点附近的形式解确定。利用命题 3.1（这是对 [JM81a] 中命题 2.2 的非阿贝尔推广，也是对 [BCR18], 中命题 4.1 的推广），[2] 我们可以在非交换情形下求得单值化数据。确定单值化数据后[3], ，我们可以构造单值化关系，它应当为相应的 Painlev´é 型方程组的解空间提供参数化。由单值化关系导出的方程称为单值曲面。

关于P_2^0 方程组，可以推导出与FN_2^0 和JM_2^0 对相关联的单值化曲面。

命题 1.3。设 x_i， $i = 1$，2，3，以及 q 属于 $\mathcal{R}$，且 α， $\theta \in \mathbb{C}$。那么，分别与FN_2^0 和JM_2^0 对相关的单值曲面由以下方程给出

$$x_1\,x_2\,x_3 + x_1 + x_2 + x_3 - 2\sin(\pi\,\theta)\,q^{-1} = 0,$$
$$x_1\,x_2\,x_3 - x_1 - x_2\,(\alpha\,q^2) - x_3 + (1+\alpha)\,q^2 = 0.$$

[1]我们遵循 [JKT07], [JKT09]中提出的术语。[2]在某些假设下。[3]
请注意，单值化数据是运动积分。

我们想指出， $q' = 0$，也就是说，这是P_2^0 方程组的一个守恒量。在交换情形下， $q = 1$ 因此，上述关系便成为众所周知的第二 Painlev´e 方程的仿射三次曲线。还需注意，在交换情形下，这些方程通过简单的缩放彼此等价；然而，这种缩放无法推广到非阿贝尔情形。至于其余的系统P_2^1 和P_2^2, ，其单值化数据并非等单值的（这可由命题3.2 和3.3得出），因此我们无法用斯托克斯乘子来参数化它们的解。但事实上，我们可以探讨是否存在一种规范变换，使单值化数据成为等单值的。据作者所知，这种变换并不存在。

受以下论文启发： [MR12], [CMR17], ，我们在第3.3 节简要讨论与所研究的非交换单值化曲面相关的一种自然泊松结构。在交换情形下，单值化曲面可视为一族仿射三次曲线。这些三次曲面具有一个由庞加莱´留数公式定义的体积形式 Ω。该 2-形式在仿射三次曲线的非奇异部分上是全纯的，并以通常方式确定曲面上的泊松括号。为将这一构造推广到非阿贝尔情形，我们从相反的方向入手，构造与非交换三次多项式相关的非阿贝尔泊松括号。不过，这一构造仍需进一步研究，将在其他地方讨论。

致谢。作者感谢 V. Poberezhnyi、V. Retakh、V. Rubtsov、V. Sokolov 和 B. Suleimanov 提出的许多宝贵建议和意见。作者还感谢 I. Gaiur 进行富有成效的讨论，并感谢 I.H.E.S. 在作者访问期间提供热情接待和优良的工作条件。本研究部分得到 HSE 国际簇几何实验室、俄罗斯联邦政府资助项目编号 075-15-2021-608 以及俄罗斯青年数学奖的支持。作者也感谢审稿人提出的修改建议。

2. The HWT-JM correspondence

本节讨论如何从给定的 Harnard-Tracy-Widom 型方程组推导出一个 Jimbo-Miva 对。[4] 回顾一下， x, $\mu, \lambda \in \mathfrak{Z}(\mathcal{R})$，其中 μ 和 λ 是谱参数，下面的矩阵定义在 $\mathcal{R}$上。

构造方案如下。

- 考虑 HTW 型线性问题：

$$\begin{cases} \partial_\mu W(\mu, x) &= \left(A_1\mu + A_0 + A_{-1}\mu^{-1}\right) W(\mu, x), \\ \partial_x W(\mu, x) &= (B_1\mu + B_0)\, W(\mu, x). \end{cases}$$

- 假设第一个方程可以改写为以下形式

$$(C_1\mu + C_2)\, \partial_\mu W(\mu, x) = (C_3\mu + C_4)\, W(\mu, x).$$

因此，我们应求解以下矩阵方程

$$(C_3\mu + C_4) - (C_1\mu + C_2)\left(A_1\mu + A_0 + A_{-1}\mu^{-1}\right) = 0. \tag{7}$$

- 如果该方程有解，那么很容易为函数 $Y(\lambda, x)$ 找到一个线性问题，它与 $W(\mu, x)$ 通过广义拉普拉斯变换相关：

$$W(\mu, x) = \int_L e^{\lambda\,\mu}\, Y(\lambda, x)\, d\lambda. \tag{8}$$

也就是说， $Y(\lambda, x)$ 的线性问题为

$$\begin{cases} (C_1\lambda - C_3)\, \partial_\lambda Y(\lambda, x) &= (C_2\lambda - C_1 - C_4)\, Y(\lambda, x), \\ \partial_x Y(\lambda, x) &= -B_1\, \partial_\lambda Y(\lambda, x) + B_0\, Y(\lambda, x). \end{cases} \tag{9}$$

- 令 $C(\lambda) = C_1\lambda - C_3$。如果存在一个矩阵 C^{-1} 使得

$$C\, C^{-1} = C^{-1}\, C = \mathbb{I}, \tag{10}$$

那么， $Y(\lambda,\ x)$ 的线性问题具有 JM 型。否则，根据 [JKT07], [JKT09], 中的术语，函数 $Y(\lambda,\ x)$ 存在一个退化对。

定义 2.1。 如果对一般矩阵 C ，条件（10）成立，我们就称这样的矩阵为可逆。

˜请注意，矩阵 C_k 仅在相差一个可逆因子的意义下定义 $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$，也就是说，矩阵 $C_k = C\, C_k$也是（7）的解。由此显然可知，我们有以下

[4]这种方法的动机是为 P_2^2 方程组构造 Jimbo-Miwa 型对这一问题。

引理 2.1。设 C 是一个可逆一般矩阵。则（(7) 的解仅在相差一个左因子 C的意义下定义，且与之无关。

按照上述方案，我们为每个非阿贝尔 P_2 系统给出了一个 JM 型线性问题。对于 P_2^0 和 P_2^1 系统，这些对关于 f 和 g是多项式的。对于 P_2^1 系统，第二个 HTW 型对变换为一个非多项式的 JM 型对。对于 P_2^2, , JM 对是退化的。

2.1. 情形 P_2^0。考虑方程组

$$P_2^0 \qquad \begin{cases} f' &= -f^2+g-\frac{1}{2}x-b, \\ g' &= gf+fg+\theta, \end{cases}$$

其中 $f,\ g,\ b\in\mathcal{R},\ x\in\mathcal{Z}(\mathcal{R}),\ \theta\in\mathbb{C}$，以及 $b'=0$。该方程组具有 HTW 对（见 [Irf12], [AS21],[BS22]）

$$\mathrm{HTW}_2^0 \qquad \begin{cases} \partial_\mu W(\mu,x) &= \left[\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}-2f & 2f^2-g+x+2b\\ -2 & 2f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-g&-\theta\end{pmatrix}\mu^{-1}\right]W(\mu,x), \\ \partial_x W(\mu,x) &= \left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}-f&0\\-1&f\end{pmatrix}\right]W(\mu,x). \end{cases}$$

按照上述步骤，我们得到

命题 **2.1.** 该HTW_2^0 对通过映射 (8) 变换为以下 JM-型对 :

$$\mathrm{JM}_2^0 \qquad \begin{cases} \partial_\lambda Y(\lambda,x) &= \left[\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}0&-2f^2+g-x-2b\\-2&0\end{pmatrix}\lambda \right. \\ &\qquad \left. +\begin{pmatrix}-2f^2+g & 2f^3-fg+f(x+2b)+\theta-1\\ -2f & 2f^2-g+x+2b\end{pmatrix}\right]Y(\lambda,x), \\ \partial_x Y(\lambda,x) &= \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}0&-f^2+\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}x-b\\-1&f\end{pmatrix}\right]Y(\lambda,x). \end{cases}$$

备注 2.1。 文献 [AS21] 中给出了一个规范等价的 Lax 对。作者未研究这两个不同的对之间在 P_2^0 方程组中的关系。

证明. 解出 (7)，可得以下矩阵 $C_k=(c_{k,\ ij})_{i,\ j=1,\ 2}$:

$$C_1=\begin{pmatrix}0&c_{1,12}\\0&c_{1,22}\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}c_{2,11}&0\\c_{2,21}&0\end{pmatrix},\qquad C_3=\begin{pmatrix}-2c_{1,12}&2c_{1,12}f+2c_{2,11}\\-2c_{1,22}&2c_{1,22}f+2c_{2,21}\end{pmatrix},$$

$$C_4=\begin{pmatrix}-c_{1,12}g-2c_{2,11}f & -\theta c_{1,12}+c_{2,11}(2f^2-g+x+2b)\\ -c_{1,22}g-2c_{2,21}f & -\theta c_{1,22}+c_{2,21}(2f^2-g+x+2b)\end{pmatrix}.$$

注意，它们可改写为

$$C_1=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$C_3=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2f\\0&2\end{pmatrix},\qquad C_4=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-g&-\theta\\-2f&2f^2-g+x+2b\end{pmatrix},$$

即，方程 (7) 的解在相差一个形如 $\begin{pmatrix}c_{1,\ 12}&c_{2\ 11,\ ,\ 21}\\c_{1\ 22}&c_2\end{pmatrix}$ (见命题2.1) 的因子意义下唯一。于是，方程组 (9) 的第一个方程为

$$\begin{pmatrix}2&\lambda-2f\\0&-2\end{pmatrix}\partial_\lambda Y(\lambda,x)=\begin{pmatrix}g&\theta-1\\ \lambda+2f & -2f^2+g-x-2b\end{pmatrix}Y(\lambda,x). \tag{11}$$

利用条件（(10)），可以求得矩阵 $C(\lambda)=\begin{pmatrix}2&\lambda-2f\\0&-2\end{pmatrix}$的逆矩阵:

$$C^{-1}=\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2&\lambda-2f\\0&-2\end{pmatrix}. \tag{12}$$

在左侧乘以（11） C^{-1}后，方程组（9）变为JM_2^0 对，其中对 $\lambda \mapsto \frac{1}{2}\lambda$ 进行了缩放，得到P_2^0 方程组。□

注记 2.2. 正如论文 [BS22], 中所提出的，交换“自变量”与非交换“自变量”之间存在联系。通过公式引入非交换变量 $\bar{x} \in \mathcal{R}\ \bar{x} = x + 2b$，可以得到方程组

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} f' &= -f^2 + g - \frac{1}{2}\bar{x}, \\ g' &= fg + gf + \theta, \end{cases} \qquad f,\ g,\ \bar{x} \in \mathcal{R}, \qquad \theta \in \mathbb{C},$$

它等价于方程

$$f'' = 2f^3 + \tfrac{1}{2}\bar{x}\, f + \tfrac{1}{2} f\, \bar{x} + \left(\theta - \tfrac{1}{2}\right).$$

该方程首次在论文 [RR10], 中被讨论，作者假设方程$\partial_{\bar{x}}(\bar{x}) = 1$ 在 $\mathcal{R}$中有一个解。方程组 (13) 具有如下等单值 Lax 对

$$A(\lambda, \bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & -2f^2 + g - \bar{x} \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -2f^2 + g & 2f^3 - fg + f\bar{x} + \theta - 1 \\ -2f & 2f^2 - g + \bar{x} \end{pmatrix},$$

$$B(\lambda, \bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & -f^2 + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}\bar{x} \\ -1 & f \end{pmatrix},$$

只需改变“自变量”，即可由 JM_2^0 得到。

2.2. 情形P_{12}。令 f、 g和 a 属于 $\mathcal{R}$、 $x \in \mathfrak{Z}(\mathcal{R})$ 以及 $a' = 0$。可以验证，该方程组

$$\mathrm{P}_2^1 \qquad \begin{cases} f' &= -f^2 + g - \frac{1}{2}x, \\ g' &= 2fg + a \end{cases}$$

等价于 c HTW 型线性系统的相容条件 [AS21], [BS22] :

$$\mathrm{HTW}_2^1 \qquad \begin{cases} \partial_\mu W(\mu, x) &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} -2f & 2f^2 - g + x \\ -2 & 2f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -g & -[f,g] - a \end{pmatrix} \mu^{-1} \right] W(\mu, x), \\ \partial_x W(\mu, x) &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} -f & 0 \\ -1 & f \end{pmatrix} \right] W(\mu, x). \end{cases}$$

利用这一对，我们得到一对 JM 型方程组。

命题 2.2。 该 HTW_2^1 对通过映射 (8) 变换为如下 JM 型:

$$\mathrm{JM}_2^1 \qquad \begin{cases} \partial_\lambda Y(\lambda, x) &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & -2f^2 + g - x \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \lambda \right. \\ &\qquad \left. + \begin{pmatrix} -2f^2 + g & 2f^3 - gf + xf + a - 1 \\ -2f & 2f^2 - g + x \end{pmatrix} \right] Y(\lambda, x), \\ \partial_x Y(\lambda, x) &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & -f^2 + \frac{1}{2}g - \frac{1}{2}x \\ -1 & f \end{pmatrix} \right] Y(\lambda, x). \end{cases}$$

证明。条件（7）导出如下矩阵 $C_k = (c_{k,\ ij})_{i,\ j=1,\ 2}$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2f \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -g & -[f,g] - a \\ -2f & 2f^2 - g + x \end{pmatrix}.$$

因此， （9）中的第一个方程为

$$\text{(14)} \qquad \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 2f \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_\lambda Y(\lambda, x) = \begin{pmatrix} g & [f,g] + a - 1 \\ \lambda + 2f & -2f^2 + g - x \end{pmatrix} Y(\lambda, x).$$

将（14）左乘（12，得到 JM_2^1 对（经过缩放 $\lambda \mapsto \frac{1}{2}\lambda$）对应于 P_2^1 方程组。 □

对于 P_2^1，另一对由 [BS22]

$$\text{HTW}_2'^1 \qquad \begin{cases} \partial_\mu W(\mu,x) &= \left[\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}-2f&2f^2-g+x\\-2&2f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\-g&0\end{pmatrix}\mu^{-1}\right]W(\mu,x),\\ \partial_x W(\mu,x) &= \left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}0&0\\-1&2f\end{pmatrix}\right]W(\mu,x).\end{cases}$$

这一对变量可变换为 f 和 g 中的一对 JM 型非多项式对象。

命题 2.3。 该 $\text{HTW}_2'^1$ 对变量经由映射(8) 变换为以下一对 JM 型:

$$\text{JM}_2'^1 \qquad \begin{cases} \partial_\lambda Y(\lambda,x) &= \left[\begin{pmatrix}2&2ag^{-1}\\0&0\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}2ag^{-1}&-2f^2+g-x-2ag^{-1}f-2fag^{-1}\\-2&-2ag^{-1}\end{pmatrix}\lambda\right.\\ &\quad\left.+\begin{pmatrix}-2f^2+g-2fag^{-1}&2f^3-fg+xf-1+2fag^{-1}f\\-2f-2ag^{-1}&2f^2-g+x+2ag^{-1}f\end{pmatrix}\right]Y(\lambda,x),\\ \partial_x Y(\lambda,x) &= \left[\begin{pmatrix}1&ag^{-1}\\0&0\end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix}f+ag^{-1}&-f^2+\frac12 g-\frac12 x-ag^{-1}f\\-1&2f\end{pmatrix}\right]Y(\lambda,x).\end{cases}$$

证明。 给定的矩阵 $C_k=(c_{k,ij})_{i,j=1,2}$ 满足方程（7）：

$$C_1=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad C_2=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&ag^{-1}\end{pmatrix},$$

$$C_3=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2f\\0&2\end{pmatrix},\qquad C_4=\begin{pmatrix}c_{1,12}&c_{2,11}\\c_{1,22}&c_{2,21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-g&0\\-2ag^{-1}-2f&2ag^{-1}f+2f^2-g+x\end{pmatrix}.$$

于是，方程（9）的第一个方程写为

$$\begin{pmatrix}2&\lambda-2f\\0&-2\end{pmatrix}\partial_\lambda Y(\lambda,x)=\begin{pmatrix}g&-1\\\lambda+2f+2ag^{-1}&ag^{-1}(\lambda-2f)-2f^2+g-x\end{pmatrix}Y(\lambda,x). \tag{15}$$

在左侧乘以 (15) 与 (12，并进行缩放 $\lambda\mapsto\frac12\lambda$，我们得到 $\text{JM}_2'^1$ 对，它对应于 P_2^1方程组。□

2.3. 情形 P_2^2。 设 f、g、a和 b 是 $\mathfrak{R}$中的元素，$x\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{R})$，且 $a'=b'=0$。下面的方程组

$$\text{P}_2^2 \qquad \begin{cases} f' &= -f^2+g-\frac12 x-b,\\ g' &= 3fg-gf+2bf-2fb+a,\end{cases} \qquad [b,a]=2b.$$

具有如下形式的 HTW 对[AS21], [BS22]

$$\text{HTW}_2^2 \qquad \begin{cases} \partial_\mu W(\mu,x) &= \left[\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}-2f&2f^2-g+x+\frac23 b\\-2&2f\end{pmatrix}\right.\\ &\quad\left.+\begin{pmatrix}\frac23 bf+\frac12 a&\frac13 bg-\frac23 bf^2-\frac13 xb-\frac49 b^2\\-g+\frac23 b&-[f,g]-\frac43 bf+\frac23 fb-\frac12 a\end{pmatrix}\mu^{-1}\right]W(\mu,x),\\ \partial_x W(\mu,x) &= \left[\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\mu+\begin{pmatrix}0&-\frac13 b\\-1&2f\end{pmatrix}\right]W(\mu,x).\end{cases}$$

事实证明，该对映射为一个 JM 型的退化对。具体而言，我们有

命题 2.4. 该 $\text{HTW}_2'^1$ 对通过映射(8) 变换为 JM型的退化对：

$$\text{JM}_2^2 \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix}2&\lambda-2f\\0&0\end{pmatrix}\partial_\lambda Y(\lambda,x) &= \begin{pmatrix}g-\frac23 b&[f,g]+\frac43 bf-\frac23 fb+\frac12 a-1\\0&0\end{pmatrix}Y(\lambda,x),\\ \partial_x Y(\lambda,x) &= \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\partial_\lambda Y(\lambda,x)+\begin{pmatrix}0&-\frac13 b\\-1&2f\end{pmatrix}Y(\lambda,x).\end{cases}$$

注 2.3. 对于 $a\in\mathbb{C}$[5]，可以给出一个 JM 型的非退化多项式 Lax 对。

[5]这意味着 $b\equiv 0$。

证明。求解（7），我们得到以下矩阵 $C_k = (c_{k,\ ij})_{i,\ j=1,\ 2}$：

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_{1,12} \\ 0 & c_{1,22} \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_3 = \begin{pmatrix} -2c_{1,12} & 2c_{1,12}f \\ -2c_{1,22} & 2c_{1,22}f \end{pmatrix},$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} c_{1,12}\left(\frac{2}{3}b - g\right) & c_{1,12}\left(-[f,g] - \frac{4}{3}bf + \frac{2}{3}fb - \frac{1}{2}a\right) \\ c_{1,22}\left(\frac{2}{3}b - g\right) & c_{1,22}\left(-[f,g] - \frac{4}{3}bf + \frac{2}{3}fb - \frac{1}{2}a\right) \end{pmatrix}.$$

它们可以改写为

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_4 = \begin{pmatrix} c_{1,12} & c_{2,11} \\ c_{1,22} & c_{2,21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}b - g & -[f,g] - \frac{4}{3}bf + \frac{2}{3}fb - \frac{1}{2}a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

因此，方程组（9）的第一个方程为

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 2f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_\lambda Y(\lambda, x) = \begin{pmatrix} g - \frac{2}{3}b & [f,g] + \frac{4}{3}bf - \frac{2}{3}fb + \frac{1}{2}a - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y(\lambda, x).$$

由于矩阵 $C(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 2f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不可逆，我们得到关于 JM_2^2 的退化 P_2^2 对。 □

3. Non-abelian monodromy surfaces

在本节中，我们将推导与 FN 对和 JM 对相关的著名单值曲面的非阿贝尔推广。为了构造这些曲面，我们需要确定单值化数据，并验证其具有等单值性质，即它应定义第一积分的集合[6]。

在小节 3.1 中，我们获得了奇点附近的一类形式解，该形式解由线性化唯一确定。如果单值化数据是等单值的，那么我们便能够给出一个非阿贝尔单值曲面（见小节 3.2）。

3.1. 形式解。

为了推导非阿贝尔单值曲面，我们需要给出奇点附近的一个形式解。我们将 [JM81a] 中命题 2.2 的以下推广应用于非交换情形；其特殊情形已在论文 [BCR18] 中讨论过。

命题 3.1. 设 $r \geq 0$[7] 和 $\lambda \in \mathcal{Z}(\mathcal{R})$。考虑如下形式的 $n \times n$-矩阵 $A(\lambda)$、$F(\lambda)$、$D(\lambda)$、$T(\lambda)$

$$A(\lambda) = \sum_{k \geq -r} A_k \lambda^{-k-1}, \qquad A_{-r} = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \qquad i \neq j, \tag{16}$$

$$F(\lambda) = \mathbb{I} + \sum_{k \geq 1} F_k \lambda^{-k}, \qquad D(\lambda) = \mathbb{I} + \sum_{k \geq 1} D_k \lambda^{-k}, \qquad \partial_\lambda T(\lambda) = \sum_{k=-r}^{0} T_k \lambda^{-k-1}, \tag{17}$$

其中

(a) $A(\lambda) \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$，且 $A_{-r} \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$; (b) $F_k \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$、$k \geq 1$ 是非对角矩阵；(c) $D_k \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$、$k \geq 1$ 是对角矩阵；(d) $T_k \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$、$k = -r$、……、1，以及 $T_0 \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$ 均为对角矩阵；并设

(e) 算子 $(k\,\mathbb{I} + \mathrm{ad}_{T_0}) : \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$，$k \geq 1$，是可逆的。

那么该方程组

$$\partial_\lambda \Phi(\lambda) = A(\lambda)\, \Phi(\lambda) \tag{18}$$

[6]给定非阿贝尔常微分方程的非阿贝尔第一积分定义可以自然地推广（例如 [MS00]）。[7]r 称为 *the Poincaré rank* 不规则奇点。当 $r = 0$时，该奇点是福克斯型的。

存在唯一的[8] 形式解，该形式解在不规则奇点附近 $\lambda=\infty$ 可写为

$$\Phi_{form}(\lambda)=F(\lambda)\,D(\lambda)\,\exp\left(\sum_{k=1}^{r}\tfrac{1}{k}T_{-k}\lambda^k+\ln(\lambda)\;T_0\right)\qquad as\qquad \lambda\to\infty.$$

注 3.1. 我们对命题中的假设作几点说明。

- 假设 (a) 确保可以确定非对角矩阵 F_k （见方程 (21)）。如果矩阵 A_{-r} 的元素属于 $\mathcal{R}$，那么我们无法求解方程

$$[A_{-r},F_k]_{ij}=F_{k,ij}\,\alpha_j-\alpha_i\,F_{k,ij},$$

因为算子 $\mathrm{ad}_{A_{-r}}:\mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})\to\mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$ 的核非空。
还要注意，由于 $A_{-r}\in\mathrm{Mat}_n(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$，我们可以处理 Jordan 块，并可通过如下形式的谱参数变换将其对角化

$$\lambda\mapsto\lambda^{1/p},$$

与交换情形相同（命题 1.1 中给出了这样一个例子）。换言之，命题 3.1 适用于分数阶庞加莱 $^{\prime}$秩[9]。

- 假设 (d) 使我们能够定义对角矩阵 D_k （见式 (24)），因为任何具有交换元素的对角矩阵都与任何具有非交换元素的对角矩阵可交换。作为比较，在交换情形下，任意对角矩阵都彼此可交换。

此外，我们可以很容易地对函数 $\exp(T(\lambda))$ 求导，其中

$$T(\lambda)=\sum_{k=1}^{r}\tfrac{1}{k}T_{-k}\lambda^k+\ln(\lambda)\;T_0,$$

因为 $[T_k,T_0]=0,\ k=-r,\dots,-1$。

- 得益于假设 (e)，我们可以使用具有非交换元素的形式单值化 T_0。

注 3.2. 该陈述可以很容易地改写为适用于任何不同于 $\lambda=\infty$ 的不规则奇点的形式。

证明。 我们将证明，在命题的假设下，级数 (17) 的系数 F_k、 D_k和 T_k可以由方程组 (18) 的矩阵 $A(\lambda)$ 唯一确定，该矩阵由式 (16) 给出。证明中我们将使用以下显然的事实：

引理 3.1。对于 任意对角矩阵 $A\in\mathrm{Mat}_n(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ 和任意对角矩阵 $B\in\mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$，有

$$[A,B]=0.$$

- 如上所述，可以得到

$$\partial_\lambda\left(e^{T(\lambda)}\right)=(\partial_\lambda T(\lambda))\;e^{T(\lambda)},\qquad T(\lambda)=\sum_{k=1}^{r}\tfrac{1}{k}T_{-k}\lambda^k+\ln(\lambda)\;T_0,$$

因为 $[T_k,T_0]=0,\quad k=-r,\ \ldots\ldots,\ -1$ (见假设 (d) 和引理 3.1)。因此，将形式解代入

$$\Phi_{form}(\lambda)=F(\lambda)\,D(\lambda)e^{T(\lambda)}$$

方程组 (18) 得到级数 $F(\lambda)$、 $D(\lambda)$ 和 $T(\lambda)$ 所满足的以下条件：

$$\partial_\lambda F+F\left(\partial_\lambda D\,D^{-1}+D\,\partial_\lambda T\,D^{-1}\right)=A\,F,\tag{19}$$

这里省略了对 λ 的显式依赖。对 (19) 取对角部分和非对角部分，得到关于 F_k、 D_k 和 T_k 的递推系统。

引理 3.2. 对角 A_d 矩阵与非对角 B_{off} $n\times n$矩阵的乘积是一个非对角 $n\times n$矩阵 C_{off}：

$$A_d\,B_{off}=C_{off}.$$

[8]相差一个按照定义 2.1 中意义的可逆 $G\in$矩阵$_n(\mathcal{R})$ 的共轭。[9]在这种情况下， r 称为 *the Katz invariant*。

注意，$(F-\mathbb{I})$ 是一个非对角矩阵。因此，这个方程组可以写成

$$\partial_\lambda D = (A\,F)_d\,D - D\,\partial_\lambda T, \qquad\qquad \partial_\lambda F = A\,F - F\,(A\,F)_d\,,$$

其中，下标 X_d 表示矩阵 X 的对角部分。

- 考虑非对角部分：

$$\partial_\lambda F = A\,F - F\,(A\,F)_d\,. \tag{20}$$

将矩阵 A 和 F 代入（20）并比较 λ 的相应幂的系数，我们得到

$$\sum_{l=0}^{k}\left(A_{-r+l}\,F_{k-l} - \sum_{m=l}^{k} F_{k-m}(A_{-r+l}F_{m-l})_d\right) = 0, \qquad 0\le k\le r,$$

$$\sum_{l=0}^{k}\left(A_{-r+l}\,F_{k-l} - \sum_{m=l}^{k} F_{k-m}(A_{-r+l}F_{m-l})_d\right) + (k-r)F_{k-r} = 0, \qquad k\ge r+1.$$

注意到（$A_{-r}F$）$_d = A_{-r}$，那么对于 $0\le k\le r$，我们有

$$\sum_{l=0}^{k}\left(A_{-r+l}\,F_{k-l} - \sum_{m=l}^{k} F_{k-m}(A_{-r+l}F_{m-l})_d\right) = 0,$$

$$A_{-r}\,F_k + \sum_{l=1}^{k} A_{-r+l}\,F_{k-l} - F_k\,A_{-r} - \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=l}^{k} F_{k-m}(A_{-r+l}F_{m-l})_d = 0,$$

$$[F_k, A_{-r}] = \sum_{l=1}^{k}\left(A_{-r+l}\,F_{k-l} - \sum_{m=l}^{k} F_{k-m}(A_{-r+l}F_{m-l})_d\right).$$

类似地，对于 $k\ge r+1$，可以得到

$$[F_k, A_{-r}] = \sum_{l=1}^{k}\left(A_{-r+l}\,F_{k-l} - \sum_{m=l}^{k} F_{k-m}\,(A_{-r+l}\,F_{m-l})_d\right) + (k-r)F_{k-r},$$

或者，作变换 $k\mapsto k-r$，

$$[F_{k+r}, A_{-r}] = \sum_{l=1}^{k+r}\left(A_{-r+l}\,F_{k+r-l} - \sum_{m=l}^{k+r} F_{k+r-m}\,(A_{-r+l}\,F_{m-l})_d\right) + k\,F_k, \qquad k\ge 1.$$

因此，形式解的非对角部分的系数 F_k 由下式给出 y

$$[F_k, A_{-r}] = \sum_{l=1}^{k}\left(A_{-r+l}\,F_{k-l} - \sum_{m=l}^{k} F_{k-m}(A_{-r+l}F_{m-l})_d\right), \qquad 0\le k\le r,$$

$$[F_{k+r}, A_{-r}] = \sum_{l=1}^{k+r}\left(A_{-r+l}\,F_{k+r-l} - \sum_{m=l}^{k+r} F_{k+r-m}\,(A_{-r+l}\,F_{m-l})_d\right) + k\,F_k, \qquad k\ge 1.$$

回顾一下，$A_{-r} = diag(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \mathsf{Mat}_n(\mathfrak{Z}(\mathfrak{R}))$，并且对于任意 $i\ne j$，都有 $\alpha_i\ne\alpha_j$。因此，$F_{k,\ ij}$ 可以由上述方程求得，因为

$$[F_k, A_{-r}]_{ij} = F_{k,ij}\,\alpha_j - \alpha_i\,F_{k,ij} = (\alpha_j-\alpha_i)F_{k,ij}\ne 0, \tag{21}$$

这里用到了假设（a）。

- 现在我们转向对角部分：

$$\partial_\lambda D = (A\,F)_d\;D - D\,\partial_\lambda T,$$

这等价于以下递推系统

$$\sum_{l=0}^{k}\left(\sum_{m=l}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-m})_d D_{m-l} - D_{k-l}\,T_{-r+l}\right) = 0, \qquad 0\le k\le r, \tag{22}$$

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=l}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-m})_d D_{m-l} - \sum_{l=0}^{r} D_{k-l}\,T_{-r+l} + (k-r)D_{k-r} = 0, \qquad k\ge r+1. \tag{23}$$

考虑 $0 \le k \le r$ 并重写递推方程（22），将不含系数的项 D_l, $l \ge 1$归集在一起。

$$\sum_{l=0}^{k}\sum_{m=l}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-m})_d D_{m-l} - \sum_{l=0}^{k} D_{k-l}\,T_{-r+l} = 0,$$

$$\sum_{l=0}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-l})_d D_0 + \sum_{l=0}^{k}\sum_{m=l+1}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-m})_d D_{m-l} - D_0\,T_{-r+k} - \sum_{l=0}^{k-1} D_{k-l}\,T_{-r+l} = 0,$$

$$T_{-r+k} - \sum_{l=0}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-l})_d = \sum_{l=0}^{k-1}\left(\sum_{m=l+1}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-m})_d D_{m-l} - D_{k-l}\,T_{-r+l}\right). \tag{24}$$

由于 $T_l \in \mathrm{Mat}_n(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$, $l = -r, \dots, -1$ （见假设 (d)），我们有

$$[D_k, T_l] = 0, \qquad k \ge 1, \qquad l = -r, \dots, -1. \tag{25}$$

于是，系数 $T_{-r}, T_{-r+1}, \dots, T_0$ 唯一定义为

$$T_{-r+k} = \sum_{l=0}^{k}(A_{-r+l}\,F_{k-l})_d, \qquad 0 \le k \le r. \tag{26}$$

特别地， $T_{-r} = A_{-r}$。我们指出， T_0 不一定与 D_k, $k \ge 1$ 可交换。

对于递推系统 (23)，我们先利用 (25) 和 (26) 对其进行化简。所得系统可写为

$$kD_k - D_k\,T_0 + \sum_{l=1}^{k}\sum_{m=0}^{k-l}(A_l\,F_{k-l-m})_d D_m + \sum_{l=-r}^{0}\sum_{m=0}^{k}(A_l\,F_{k-l-m})_d D_m = 0,$$

或者，将含 D_k 的项归在一起，

$$kD_k + [T_0, D_k] = -\sum_{l=1}^{k}\sum_{m=0}^{k-l}(A_l\,F_{k-l-m})_d D_m - \sum_{l=-r}^{0}\sum_{m=0}^{k-1}(A_l\,F_{k-l-m})_d D_m, \qquad k \ge 1, \tag{27}$$

其中 $T_0 = \sum_{l=0}^{r}(A_{-l}F_l)_d$。由于该表达式的右端包含 D_l, $l < k$，我们可以定义 D_k，因为根据假设 (e)，算子 $(k\,\mathbb{I} + [T_0, \cdot\,])$ 可逆。

□

特别地，可以在无穷远点附近找到方程组的一个形式解 P_2^0, P_2^1, 和 P_2^2。下文假设谱参数属于 $\mathbb{C}$。

命题 3.2. 设 $F(\zeta)$、 $D(\zeta)$、 $T(\zeta)$ 满足命题 3.1。则存在唯一的形式解，与以下各对相关联 FN_2^0, FN_2^1, FN'^1_2 ，以及 FN_2^2, 其形式为

$$Z_{form}(\zeta) = F(\zeta)\,D(\zeta)\,\exp\left(\left(-\tfrac{4}{3}\zeta^3 + \zeta\,x\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \ln(\zeta)\,T_0\right) \qquad as \qquad \zeta \to \infty,$$

其中

$$\mathrm{FN}_2^0: \quad T_0 = ([f,g] - \theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C}; \qquad \mathrm{FN}_2^1: \quad T_0 = a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{FN}'^1_2: \quad T_0 = ([f,g] + a)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \qquad \mathrm{FN}_2^2: \quad T_0 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

证明。 考虑 FN_2^0 配对的情形。其他情形的计算类似。利用命题3.1，可以求得非对角部分：

$$F_1 = -\tfrac{1}{2}f\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad F_2 = -\tfrac{1}{8}\left(2f^2 - 2g + x + 2b\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$F_3 = \tfrac{1}{8}\left(-f^3 - bf - fb - xf - (\theta - \tfrac{1}{2})\right)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \dots.$$

系数 T_k 为

$$T_{-3} = -4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad T_{-2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad T_{-1} = (x+2b)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$T_0 = ([f, g-b]-\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - 2\,[D_1, b]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

根据命题 3.1中的假设 (d)， $T_{-1} \in \mathrm{Mat}_2(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$。当且仅当 $b \in \mathbb{C}$时，此结论成立。于是，系数 D_1满足方程:

$$D_1 + [[f, g], D_1] = \left(-\tfrac{1}{2}f^2 g - \tfrac{1}{2}gf^2 + \tfrac{1}{2}g^2 - \tfrac{1}{2}xg + (\tfrac{1}{2}-\theta)f + \tfrac{1}{8}x^2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

由于算子 $\mathbb{I} + \mathrm{ad}_{[f,g]}$ 可逆，因此可以确定 D_1。其余系数 D_k、 $k > 1$可由式（27）求得。 □

命题 3.3。 设级数 $F(\lambda)$、 $D(\lambda)$、 $T(\lambda)$ 满足命题 3.1。那么，存在唯一的形式解，与以下形式的成对对象 JM_2^0 和 JM_2^1, 相关:

$$Y_{form}(\lambda) = F(\lambda)\,D(\lambda)\,\exp\left(\left(\tfrac{2}{3}\lambda^3 + \lambda\, x\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \ln(\lambda)\,T_0\right) \qquad as \qquad \lambda \to \infty,$$

其中

$$\mathrm{JM}_2^0: \qquad T_0 = [f, g]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (1-\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{C};$$

$$\mathrm{JM}_2^1: \qquad T_0 = [f, g]\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + (1-a)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

证明。 以 JM_2^0 对为例。系数 F_k 和 T_k 分别为

$$F_1 = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(2f^2 - g + x + 2b\right)\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad F_2 = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(-2f^3 + fg - f(x+2b) - (\theta-1)\right)\\ -f & 0\end{pmatrix},$$

$$F_3 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 2f^4 - f^2 g - gf^2 + \frac{1}{2}g^2 + f^2(x+2b) - \frac{1}{2}g(x+2b)\\ -2f^2 + g & 0\end{pmatrix}, \qquad \dots;$$

$$T_{-3} = 2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad T_{-2} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad T_{-1} = (x+2b)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$T_0 = ([f, g-2b] - 2\,[D_1, b])\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + (1-\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

与命题 3.2 中类似的推理对元素 b施加了一个限制，即 b 应当是可交换的。于是 D_1 由以下方程定义

$$D_1 + \left[[f, g]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, D_1\right] = f[f, g]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \left(gf^2 - \tfrac{1}{2}g^2 + \tfrac{1}{2}xg - (1-\theta)f\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

系数 D_k 可由（27）求得，因为算子（$k\,\mathbb{I} + \mathrm{ad}_{T_0}$）是可逆的 e. □

3.2. 单值化数据。我们将在下文看到，某些线性化具有等单值化单值化数据。因此，可以得到非阿贝尔单值曲面。

在开始讨论与 JM 对和 FN 对相关的单值曲面的非交换推广之前，我们先回顾一下如何在交换情形下构造它们。

3.2.1. 交换情形。

- FN 对。交换 FN 型对为 [FN80]

$$\mathrm{FN}_2 \qquad \begin{cases} \partial_\zeta Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\zeta^2+\begin{pmatrix}0 & 4f\\ 4f & 0\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}2f^2+x & -2f^2+2g-x\\ 2f^2-2g+x & -2f^2-x\end{pmatrix}\right.\\ &\qquad\left.+\begin{pmatrix}-\theta & \theta-\frac12\\ \theta-\frac12 & -\theta\end{pmatrix}\zeta^{-1}\right]Z(\zeta,x),\\ \partial_x Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}0 & -f\\ -f & 0\end{pmatrix}\right]Z(\zeta,x). \end{cases}$$

无穷远点附近的相应形式解：

$$Z_{form}(\zeta,x)=F(\zeta,x)\,D(\zeta,x)\,\exp\left(\left(-\tfrac43\zeta^3+\zeta\,x\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\theta\,\ln(\zeta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\quad\text{as}\quad\zeta\to\infty.$$

斯托克斯射线由方程 $Re(\zeta^3)=0$ 定义：

$$\arg(\zeta)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi\,k}{3},\qquad\qquad k=-1,\dots,4,$$

因此，共有六条斯托克斯射线：

$$\begin{aligned} &l_1:\quad \arg(\zeta)=-\frac{\pi}{6}, && l_2:\quad \arg(\zeta)=\frac{\pi}{6}, && l_3:\quad \arg(\zeta)=\frac{\pi}{2},\\ &l_4:\quad \arg(\zeta)=\frac{5\pi}{6}, && l_5:\quad \arg(\zeta)=\frac{7\pi}{6}, && l_6:\quad \arg(\zeta)=\frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

以及六个斯托克斯扇区：

$$\begin{aligned} &l_1\subset\Omega_1=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right), && l_2\subset\Omega_2=\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right), && l_3\subset\Omega_3=\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right),\\ &l_4\subset\Omega_4=\left(\frac{\pi}{2},\frac{7\pi}{6}\right), && l_5\subset\Omega_5=\left(\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right), && l_6\subset\Omega_6=\left(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

典范基本解 $Z_k = Z_k(\zeta,x)$ 属于相应的斯托克斯扇区交集。在我们的例子中，有

$$\begin{aligned} &Z_1:\quad \Omega_1\cap\Omega_2=\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right), && Z_2:\quad \Omega_2\cap\Omega_3=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right), && Z_3:\quad \Omega_3\cap\Omega_4=\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right),\\ &Z_4:\quad \Omega_4\cap\Omega_5=\left(\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right), && Z_5:\quad \Omega_5\cap\Omega_6=\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right), && Z_6:\quad \Omega_6\cap\Omega_1=\left(\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

从一个规范解 Z_k 经过无穷远点 Z_{k+1} 转到另一个规范解时，规范解 Z_k 在右侧乘以相应的斯托克斯矩阵 S_k：

$$Z_{k+1}=Z_k\,S_k,\qquad k=1,\dots,5,\qquad\qquad Z_1=Z_6(\zeta e^{2\pi i},x)\,S_6.$$

利用条件

$$S_k\equiv Z_k^{-1}\,Z_{k+1}=\lim_{\zeta\to\infty}Z_k^{-1}\,Z_{k+1},\qquad\qquad \zeta\in\Omega_k\cap\Omega_{k+1},$$

可以验证，斯托克斯矩阵为

$$S_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s_1 & 1\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1 & s_2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s_3 & 1\end{pmatrix},\quad S_4=\begin{pmatrix}1 & s_4\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_5=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s_5 & 1\end{pmatrix},\quad S_6=\begin{pmatrix}1 & s_6\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

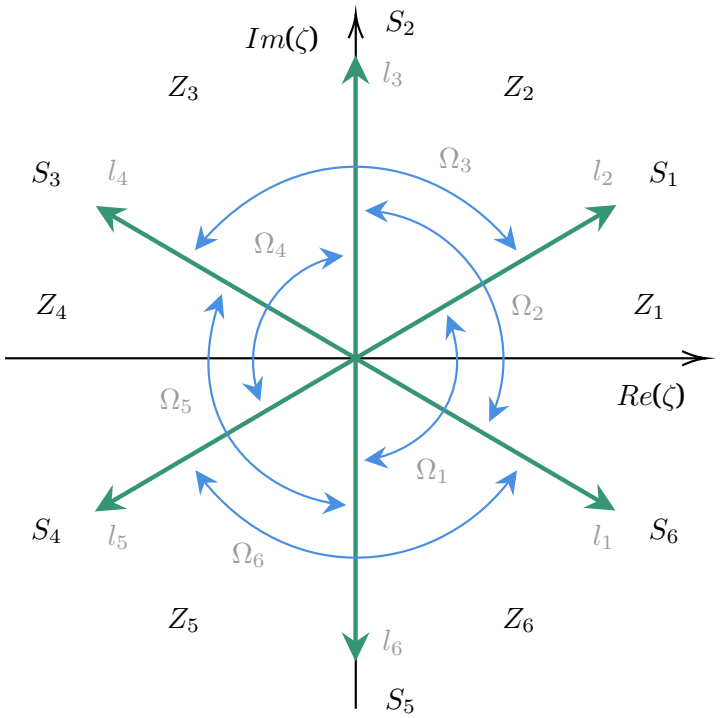

FIGURE 1. 斯托克斯射线 l_k、斯托克斯扇区 Ω_k、斯托克斯矩阵 S_k 以及典范解 Z_k，其中 $k = 1,$ ....., 6。

线性系统的基本解FN$_2$具有如下对称性 $Z(e^{\pi i}\zeta,\ x) = \sigma_1\, Z(\zeta,\ x)\,\sigma_1$，其中$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是泡利矩阵[10]，，由此得到以下关系

$$S_{k+3} = \sigma_1\, S_k\, \sigma_1, \qquad s_{k+3} = s_k, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{28}$$

绕零点的拓扑单值化很容易求得，因为矩阵 $A_{-1} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ 可对角化：

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -\theta & \theta - \frac{1}{2} \\ \theta - \frac{1}{2} & -\theta \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} -2\theta + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} G^{-1}, \qquad G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，拓扑单值化 M_0 和形式单值化 Λ_0 为

$$M_0 = e^{2\pi i\, m_0}, \qquad m_0 = \begin{pmatrix} -2\theta + \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_0 = e^{2\pi i\, T_0}, \qquad T_0 = -\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

单值化关系[11] 表示为

$$S_1\, S_2\, S_3\, S_4\, S_5\, S_6\, e^{-2\pi i\, T_0} = C\, e^{-2\pi i\, m_0}\, C^{-1},$$

其中 $C\, C^{-1} = C^{-1}\, C = \mathbb{I}$ 并且我们已固定辐角$(\zeta) \in (0,\ 2\pi]$。利用条件(28)，可将其改写为 as

$$(S_1\, S_2\, S_3\, \sigma_1)^2 = C\, e^{-2\pi i\, (\theta - \frac{1}{2})\sigma_3}\, C^{-1}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

令 $\tilde{\theta} = \theta - \frac{1}{2}$、$C = (c_{i,\ j})$ 以及 $C^{-1} = (\tilde{c}_{i,\ j})$，并展开以下矩阵方程[12]

$$S_1\, S_2\, S_3\, \sigma_1 = C\, e^{-\pi i\, \tilde{\theta}\sigma_3}\, C^{-1},$$

[10]我们将使用泡利矩阵的标准记号。[11]一般而言，奇点处的单值化关系 ν 写作[JM81a]

$$M^{(\nu)} = \left(C^{(\nu)}\right)^{-1} e^{2\pi i\, T_0^{(\nu)}} \left(S_1^{(\nu)} \ldots S_{k_\nu}^{(\nu)}\right)^{-1} C^{(\nu)},$$

其中 $S_j^{(\nu)}$、$j = 1$、...、k_ν 是点 ν 处的斯托克斯乘子，$T_0^{(\nu)}$、$M^{(\nu)}$ 分别是形式单值化和拓扑单值化，而 $C^{(\nu)} \in SL_n(\mathbb{C})$。[12]该方程的定义差一个符号。

我们得到

$$\begin{pmatrix} s_2 & 1+s_2\,s_3 \\ 1+s_1\,s_2 & s_1+s_3+s_1\,s_2\,s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}\tilde{c}_{11}e^{-\pi i\,\tilde{\theta}}+c_{12}\tilde{c}_{21}e^{\pi i\,\tilde{\theta}} & c_{11}\tilde{c}_{12}e^{-\pi i\,\tilde{\theta}}+c_{12}\tilde{c}_{22}e^{\pi i\,\tilde{\theta}} \\ c_{21}\tilde{c}_{11}e^{-\pi i\,\tilde{\theta}}+c_{22}\tilde{c}_{21}e^{\pi i\,\tilde{\theta}} & c_{21}\tilde{c}_{12}e^{-\pi i\,\tilde{\theta}}+c_{22}\tilde{c}_{22}e^{\pi i\,\tilde{\theta}} \end{pmatrix}.$$

由此方程组可立即推出，斯托克斯乘子由下式定义 [FN80],[VDPS09]

$$s_1\,s_2\,s_3+s_1+s_2+s_3 = 2\sin(\pi\,\theta). \tag{29}$$

因此，根据 θ 和任意两个斯托克斯乘子，我们可以确定第三个斯托克斯乘子。结果，P_2 方程的解空间由两个斯托克斯乘子参数化。

- JM 对。在 JM 对的交换情形 [JM81b],

$$\mathrm{JM}_2 \qquad \begin{cases} \partial_\lambda Y(\lambda,x) &= \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 0 & -2f^2+g-x \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\lambda \right. \\ & \qquad \left. +\begin{pmatrix} -2f^2+g & 2f^3-fg+xf+\theta-1 \\ -2f & 2f^2-g+x \end{pmatrix}\right] Y(\lambda,x), \\ \partial_x Y(\lambda,x) &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} 0 & -f^2+\frac{1}{2}g-\frac{1}{2}x \\ -1 & f \end{pmatrix}\right] Y(\lambda,x), \end{cases}$$

无穷远点附近的形式解可以写成

$$Y_{form}(\lambda,x) = F(\lambda,x)\,D(\lambda,x)\,\exp\left(\left(\tfrac{2}{3}\lambda^3+\lambda\,x\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+(1-\theta)\,\ln(\lambda)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{as} \quad \lambda\to\infty.$$

斯托克斯射线由下式定义 $Re(\lambda^3)=0$，并且与上文所写的射线重合。因此，我们得到与图 1 中相同的图示。与 FN 情形不同，斯托克斯矩阵为

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_2 & 1 \end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix} 1 & s_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad S_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_4 & 1 \end{pmatrix},\quad S_5=\begin{pmatrix} 1 & s_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad S_6=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_6 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于这对方程组只有一个奇点，单值化关系如下

$$S_1\,S_2\,S_3\,S_4\,S_5\,S_6\,e^{2\pi i\,\theta\,\sigma_3}=\mathbb{I},$$

其中我们假设 $\arg(\lambda)\in(0,2\pi]$。这个关系可以改写为

$$S_3\,S_4\,S_5\,S_6=\left(\alpha^{-\sigma_3}\,S_1\,S_2\right)^{-1},\qquad \alpha=e^{-2\pi i\,\theta},$$

或者，写成显式形式，

$$\begin{pmatrix} 1+s_3\,s_4+s_3\,s_6+s_5\,s_6+s_3\,s_4\,s_5\,s_6 & s_3+s_5+s_3\,s_4\,s_5 \\ s_4+s_6+s_4\,s_5\,s_6 & 1+s_4\,s_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha^{-1}s_1 \\ -\alpha\,s_2 & \alpha^{-1}\,(1+s_1\,s_2) \end{pmatrix}.$$

注意，我们可以 从这个方程组中消去变量 s_1 和 s_2。因此，得到的方程为

$$\alpha\,(1+s_4\,s_5)=1+s_3\,s_4+s_4\,s_5+s_3\,s_4^2\,s_5+s_3\,s_6+s_5\,s_6+2s_3\,s_4\,s_5\,s_6+s_4\,s_5^2\,s_6+s_3\,s_4^2\,s_5^2\,s_6. \tag{30}$$

引入新变量

$$x_1=1+s_3\,s_4,\qquad x_2=1+s_4\,s_5,\qquad x_3=1+s_5\,s_6$$

并利用条件

$$\alpha=1+s_3\,s_4+s_3\,s_6+s_5\,s_6+s_3\,s_4\,s_5\,s_6,$$

方程（30）变为 [VDPS09]

$$x_1\,x_2\,x_3-x_1-\alpha\,x_2-x_3+(1+\alpha)=0, \tag{31}$$

并对第二 Painlev´e 方程的解空间进行参数化。

*Rem*节 3.3. 这两个三次曲线，(29) 和 (31)，通过缩放彼此相连 ng

$$s_1=i\alpha^{\frac{1}{2}}\,x_1,\qquad s_2=i\alpha^{-\frac{1}{2}}\,x_2,\qquad s_3=i\alpha^{\frac{1}{2}}\,x_3. \tag{32}$$

3.2.2. 非交换情形。 在本小节中，我们将推导分别与 JM 型和 FN 型配对相关的单值曲面（31）和（29）的非交换推广。

在非阿贝尔情形中，我们有非交换的拓扑单值化和形式单值化矩阵，问题在于它们如何影响定义单值化曲面的方程形式。关于 FN 对，我们将遵循论文中提出的将其引入单值化关系的思路 [BCR18]。具体而言，假设复平面上有两条割线 $\mathbb{R}_{\pm}$，并固定谱参数的主值辐角，使得绕无穷远点一周时，形式单值化按期望的顺序出现。具体而言，修正形式解为 [BCR18]

$$\tilde{Z}_{form}(\zeta) = F(\zeta)\, D(\zeta)\, \exp\left(\left(-\tfrac{4}{3}\zeta^3 + \zeta\, x\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \left(\ln(\zeta) + 2\pi i\, \varepsilon\right) T_0 \right) \qquad \text{as} \qquad \zeta \to \infty, \tag{33}$$

其中 $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon = 1$ 分别位于上、下半平面，且 $\arg(\zeta) \in (0, 2\pi]$。

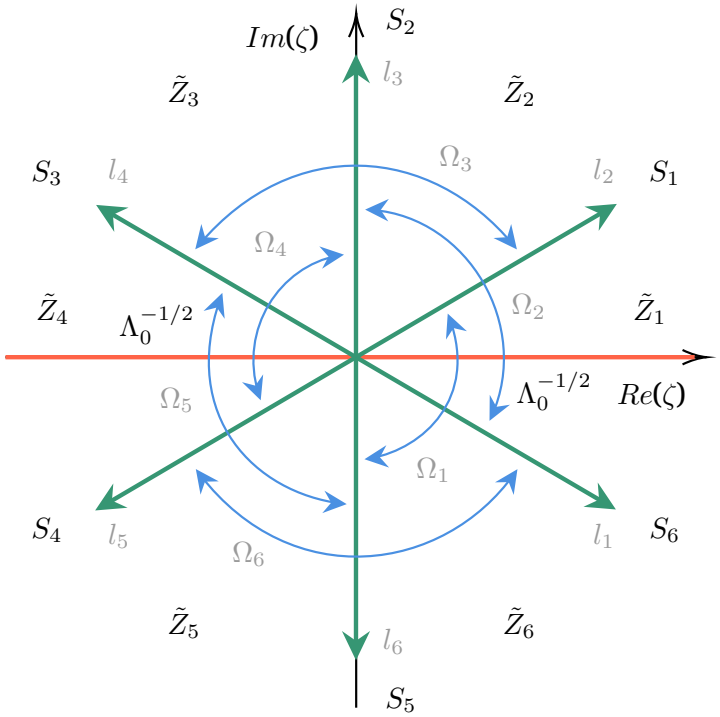

FIGURE 2. 斯托克斯射线 l_k、斯托克斯扇区 Ω_k 和斯托克斯矩阵 S_k，以及修正基本解 $Z_{form}(\zeta)$ 的典范~解 Z_k，其中 $k = 1, \ldots\ldots, 6$。

对于FN_2^0 对，这样的推广是在 [BCR18]中推导出的。存在一些排印错误[13], ，我们将在下文予以更正

命题 3.4。 与 $s_k \in \mathcal{R}$、 $k = 1$、2、3相关的斯托克斯乘子FN_2^0 对满足方程 n

$$s_1\, s_2\, s_3 + s_1 + s_2 + s_3 = 2\sin(\pi\, \theta)\, q^{-1},$$

其中 $q := e^{\pi i\, [g,f]}$[14] $\in \mathcal{R}$。

证明。

- 斯托克斯数据。注意，斯托克斯数据与交换情形类似。因此，我们有六条斯托克斯射线，

$$\arg(\zeta) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi\, k}{3}, \qquad\qquad k = -1, \ldots, 4,$$

[13]矩阵指数中符号计算错误会导致关系式 (4.29) 和 (4.30) 的右端不正确，从而产生另一个单值化曲面。[14]函数 e 可以通过允许在 $\mathcal{R}$中的泰勒级数引入

六个斯托克斯扇区，以及斯托克斯矩阵

$$S_1=\begin{pmatrix}1&0\\ s_1&1\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1&s_2\\ 0&1\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}1&0\\ s_3&1\end{pmatrix},\quad S_4=\begin{pmatrix}1&s_4\\ 0&1\end{pmatrix},\quad S_5=\begin{pmatrix}1&0\\ s_5&1\end{pmatrix},\quad S_6=\begin{pmatrix}1&s_6\\ 0&1\end{pmatrix}$$

满足关系式 (28)。

- 拓扑单值化与形式单值化。拓扑单值化 M_0 与交换情形相同。形式单值化 Λ_0 为（见命题3.2）

$$\Lambda_0=e^{2\pi i\,T_0},\qquad T_0=([f,g]-\theta)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Not可知，形式单值化是P_2^0 系统的一个运动积分，即 $\partial_x(T_0)=0$.

- 单值化关系。设 $C\in\mathrm{Mat}_n(\mathcal{R})$ 是一个可逆矩阵， C^{-1} 是它的逆矩阵，即:

$$C\,C^{-1}=C^{-1}\,C=\mathbb{I}.$$

为得到单值化关系的平方根形式，我们需要两条切割线 $\mathbb{R}_{\pm}$ （图2中以红色标出），并将主值辐角固定为 $\arg(\zeta)\in(0,2\pi]$。然后可以对形式解作如下修改（见公式（33）），使单值化关系写为

$$S_1\,S_2\,S_3\,e^{-\pi i\,T_0}\,S_4\,S_5\,S_6\,e^{-\pi i\,T_0}=C\,M_0^{-1}\,C^{-1}.$$

注意

引理 3.3。对于任意 $a\in\mathcal{R}$ 以及任意矩阵 $B\in\mathrm{Mat}_n(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$，有

$$[a\,\mathbb{I},B]=0.$$

于是，利用对称条件（28）和该引理，可将此关系改写为

$$(S_1\,S_2\,S_3\,Q\,\sigma_1)^2=C\,e^{-2\pi i\,(\theta-\frac12)\sigma_3}\,C^{-1},\qquad Q:=q\,\mathbb{I}.$$

令 $\tilde\theta=\theta-\frac12$、$C=(c_{i,\ j})$ 和 $C^{-1}=(\tilde c_{i,\ j})$，其中

$$\begin{pmatrix}c_{11}\,\tilde c_{11}+c_{12}\,\tilde c_{21}&c_{11}\,\tilde c_{12}+c_{12}\,\tilde c_{22}\\ c_{21}\,\tilde c_{11}+c_{22}\,\tilde c_{21}&c_{21}\,\tilde c_{12}+c_{22}\,\tilde c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde c_{11}\,c_{11}+\tilde c_{12}\,c_{21}&\tilde c_{11}\,c_{12}+\tilde c_{12}\,c_{22}\\ \tilde c_{21}\,c_{11}+\tilde c_{22}\,c_{21}&\tilde c_{21}\,c_{12}+\tilde c_{22}\,c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

并展开以下矩阵方程

$$S_1\,S_2\,S_3\,Q\,\sigma_1=C\,e^{-\pi i\,\tilde\theta\sigma_3}\,C^{-1},$$

得到

$$\begin{pmatrix}s_2\,q&(1+s_2\,s_3)\,q\\ (1+s_1\,s_2)\,q&(s_1+s_3+s_1\,s_2\,s_3)\,q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}\tilde c_{11}e^{-\pi i\,\tilde\theta}+c_{12}\tilde c_{21}e^{\pi i\,\tilde\theta}&c_{11}\tilde c_{12}e^{-\pi i\,\tilde\theta}+c_{12}\tilde c_{22}e^{\pi i\,\tilde\theta}\\ c_{21}\tilde c_{11}e^{-\pi i\,\tilde\theta}+c_{22}\tilde c_{21}e^{\pi i\,\tilde\theta}&c_{21}\tilde c_{12}e^{-\pi i\,\tilde\theta}+c_{22}\tilde c_{22}e^{\pi i\,\tilde\theta}\end{pmatrix}.$$

由于条件 $C\,C^{-1}=C^{-1}\,C=\mathbb{I}$ 成立，矩阵元素的 τ-转置条件也成立。因此，可以得到

$$\begin{aligned}s_2\,q+(s_1+s_3+s_1\,s_2\,s_3)\,q&=(c_{11}\tilde c_{11}+c_{21}\tilde c_{12})\,e^{-\pi i\,\tilde\theta}+(c_{12}\tilde c_{21}+c_{22}\tilde c_{22})\,e^{\pi i\,\tilde\theta}\\&=\tau\left((C^{-1}\,C)_{11}\right)\,e^{-\pi i\,\tilde\theta}+\tau\left((C^{-1}\,C)_{22}\right)\,e^{\pi i\,\tilde\theta}=2\cos(\pi\,\tilde\theta)=2\sin(\pi\,\theta).\end{aligned}$$

□

尽管对于 FN_2^1 和 FN_2^2 这两组 JM 型对，形式单值化也是方程组P_2^1 和 P_2^2, 的运动积分，但拓扑单值化并非如此，这是因为存在项 $[f,g]$。此外，除了矩阵 A_{-1} 可以通过与交换情形相同的规范变换化为对角形式这一事实外，拓扑单值化不是 $\mathrm{Mat}_2(\mathcal{Z}(\mathcal{R}))$ 中的元素，这与命题3.1中的假设 (a) 矛盾。

考察 JM 型对时，形式单值化仅是 P_2^0 方程组的守恒量。因此，式 (31) 的非交换推广如下所述。

命题 3.5。 与 $x_k\in\mathcal{R}$、$k=1$、2、3相关的斯托克斯乘子，满足以下条件JM_2^0 对

$$x_1\,x_2\,x_3-x_1-x_2\,(\alpha\,q^2)-x_3+(1+\alpha)\,q^2=0,$$

其中 $q:=e^{\pi i\,[g,f]}\in\mathcal{R}$ 和 $\alpha:=e^{-2\pi i\,\theta}\in\mathbb{C}$。

证明。

• 斯托克斯数据。注意，斯托克斯数据与交换情形中的相同。特别地，斯托克斯矩阵为

$$S_1=\begin{pmatrix}1 & s_1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s_2 & 1\end{pmatrix},\quad S_3=\begin{pmatrix}1 & s_3\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s_4 & 1\end{pmatrix},\quad S_5=\begin{pmatrix}1 & s_5\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad S_6=\begin{pmatrix}1 & 0\\ s_6 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $s_k\in\mathcal{R}$, $k=1,\ \ldots\ldots,\ 6$。

• 拓扑单值化和形式单值化。拓扑单值化 M_0 就是单位矩阵，因为这一对只有一个奇点。根据命题3.3，形式单值化Λ_0 为

$$\Lambda_0=e^{2\pi i\,T_0},\qquad\qquad T_0=[f,g]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(1-\theta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

• 单值化关系。令主值辐角为 $\arg(\lambda)\ \in\ (0,2\pi]$。则单值化关系为

$$S_1\,S_2\,S_3\,S_4\,S_5\,S_6\,e^{-2\pi i\,T_0}=\mathbb{I},$$

或者，等价地，

$$S_3\,S_4\,S_5\,S_6=\left(e^{-2\pi i\,T_0}\,S_1\,S_2\right)^{-1}.$$

令 $q=e^{\pi i\,[g,f]}$, $\alpha=e^{-2\pi i\,\theta}$，并展开上面的矩阵方程，可得方程组

$$\begin{pmatrix}1+s_3\,s_4+s_3\,s_6+s_5\,s_6+s_3\,s_4\,s_5\,s_6 & s_3+s_5+s_3\,s_4\,s_5\\ s_4+s_6+s_4\,s_5\,s_6 & 1+s_4\,s_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\,q^2 & -\alpha^{-1}\,s_1\\ -\alpha\,s_2\,q^2 & \alpha^{-1}\,(1+s_2\,s_1)\end{pmatrix},$$

由 w hich 可以消去变量 s_1 和 s_2。事实上，一方面，我们有 e

$$\begin{aligned}\alpha\,(1+s_4\,s_5)=1+s_2\,s_1 &\overset{\text{by the }\tau\text{-action}}{\Longleftrightarrow} \alpha(1+s_5\,s_4)\ =1+s_1\,s_2\\ &\Longleftrightarrow\qquad (1+s_5\,s_4)(\alpha\,q^2)\ =(1+s_1\,s_2)\,q^2.\end{aligned}\tag{34}$$

另一方面，$(1+s_1\,s_2)\,q^2=q^2+s_1\,s_2\,q^2=q^2+\left(-\alpha^{-1}s_1\right)\,\left(-\alpha\,s_2\,q^2\right)$ 因此，(34) 的右端可改写如下:

$$\begin{aligned}(1+s_5\,s_4)(\alpha\,q^2)&=q^2+(s_3+s_5+s_3\,s_4\,s_5)\,(s_4+s_6+s_4\,s_5\,s_6)\,,\\ (1+s_5\,s_4)(\alpha\,q^2)&=q^2+s_3\,s_4+s_3\,s_6+s_5\,s_4+s_5\,s_6+s_3\,s_4\,s_5\,s_4\\ &\quad+2s_3\,s_4\,s_5\,s_6+s_5\,s_4\,s_5\,s_6+s_3\,s_4\,s_5\,s_4\,s_5\,s_6.\end{aligned}\tag{35}$$

引入变量

$$x_1=1+s_3\,s_4,\qquad\qquad x_2=1+s_5\,s_4,\qquad\qquad x_3=1+s_5\,s_6$$

并利用条件

$$\alpha\,q^2=1+s_3\,s_4+s_3\,s_6+s_5\,s_6+s_3\,s_4\,s_5\,s_6,$$

方程（35）变为

$$x_1\,x_2\,x_3-x_1-x_2\,(\alpha\,q^2)-x_3+(1+\alpha)\,q^2=0.$$

□

注 3.4。 可以验证，变换（32）无法推广到非交换情形，因为一般而言，元素 q 与斯托克斯乘子不交换。事实上，这个问题与形式解的修改无关 Z_{form}（ζ）。取与 FN 情形相同的割线，并将主值辐角固定为 $\arg(\lambda)\ \in\ (0,\ 2\pi]$，我们得到 JM 对的单值化关系，其形式为

$$S_3\,Q\,S_4\,S_5\,S_6=\left(e^{2\pi i\,\sigma_3}\,Q\,S_1\,S_2\right)^{-1},\qquad\qquad Q=\begin{pmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

这将导出方程

$$(x_1-1+q)\,x_2\,x_3-x_1-\alpha\,x_2-q\,x_3+(2+\alpha-q)=0,$$

that 是（31）的一个特例，因为变量经过变换后，可以将其改写为 a s

$$x_1\,x_2\,x_3-x_1-x_2\,(\alpha q^2)-x_3+(1+\alpha)=0.$$

我们还注意到，非阿贝尔单值曲面在很大程度上取决于主值辐角。

注3.5. 考虑矩阵代数 $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$，而非 $\mathcal{R}$，斯托克斯乘子有 $3n^2$ 个任意参数，并满足一个 n^2 参数的条件。因此，任意参数的个数等于 $2n^2$，并对矩阵P_2^0 方程组的解空间进行参数化。

3.3. 泊松结构。 承接论文 [MR12], [CMR17], ，我们希望考虑一种与非交换单值化曲面相关的自然泊松结构。回顾一下，交换单值化曲面可以看作一族仿射三次曲线。三次曲面具有由庞加莱´留数公式定义的体积形式。这个 2-形式在仿射三次曲线的非奇异部分上是全纯的，并以自然方式定义曲面上的泊松括号。为了将这一结构推广到非阿贝尔情形，我们将从非交换泊松括号入手。

由于所得的单值化流形也可以写成多项式形式[15]，，我们更倾向于使用结合自由代数，而不是环 $\mathcal{R}$。具体地，考虑 $\mathcal{A}=\mathbb{C}\langle x_1,x_2,x_3,q\rangle$，它是在域 $\mathbb{C}$ 上由四个生成元 x_1、x_2、x_3 和 q 构成的含幺结合自由代数。

定义 3.1. 设 $D:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是满足以下性质的一个 $\mathbb{C}$-线性映射：
(1) 对任意 f、$g\in\mathcal{A}$，$D(fg)=D(f)$
$g+fD(g)$；(2) 对任意 $\alpha\in\mathbb{C}$，$D(\alpha)=0$；
(3) $D(q)=0$。
我们将这样的映射称为代数 $\mathcal{A}$的导子。

在我们的情形中，还有一个由如下形式的关系给出的附加信息：

$$\varphi(x_1,x_2,x_3,q)=0,$$

其中 $\varphi=\varphi(x_1,x_2,x_3,q)$ 关于其所有变量都是多项式，且 $\deg\varphi(x_1,x_2,x_3)\le 3$。因此，我们将如下在 $\mathcal{A}/\langle\varphi\rangle$[16] 上引入泊松括号。

定义 3.2. 设 $\{\cdot,\cdot\}:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个 $\mathbb{C}$-线性映射，定义如下
(1) $\{x_i,x_j\}=\varepsilon_{ijk}\,\partial_k\varphi$，其中 ε_{ijk}是反对称符号，且 $\partial_k=D_{x_k}$；(2) 对任意 $x_i\in\mathcal{A}$，$\{x_i,q\}=0$；(3) 对任意 x_i、$x_j\in\mathcal{A}$，$\{x_i,x_j\}=-\{x_j,x_i\}$，

并且满足左莱布尼茨法则 $\{fg,h\}=f\{g,h\}+g\{f,h\}$，对任意 f、g、$h\in\mathcal{A}$均成立。

命题 3.6. 定义中给出的映射3.2 满足雅可比恒等式

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0,$$

对任意 f、g、$h\in\mathcal{A}$均成立。

证明. 只需证明代数生成元中泊松括号非零者满足雅可比恒等式，即恒等式

$$\{\{x_1,x_2\},x_3\}+\{\{x_2,x_3\},x_1\}+\{\{x_3,x_1\},x_2\}=0,$$

其中，$\varphi=\varphi(x_1,x_2,x_3,q)$ 是关于其所有变量的多项式，且 $\deg\varphi(x_1,x_2,x_3)\le 3$。通过直接计算即可完成这一点。□

注 3.6。 利用 τ-作用，可以修改定义 3.2 以引入右莱布尼茨法则。

得益于命题 3.6，所定义的括号是泊松括号。我们将在进一步研究与非阿贝尔三次曲线相关的非阿贝尔体积形式时使用它们。

4. Discussion

命题 3.1 不允许使用非交换系数 A_{-r}。将其推广到完全非交换情形，有助于研究更广泛的一类形式为 (18) 的方程组。我们预计，需要改变奇点附近形式解的形式，避免出现指数部分。另一方面，由于其他类型的非交换 Painlev´e 方程已有等单值 Lax 对，这个命题仍有助于构造它们的非阿贝尔单值曲面

[15]容易将关系式（29）改写为多项式形式。[16]为简便起见，我们将省略理想。

（例如，参见 [Kaw15], [BCR18]）。此外，这些非交换三次多项式可用于确定离散动力学，从而有助于推导离散 Painlev´e 方程的非阿贝尔类比。

另一个有趣的问题涉及单值化数据空间上的正则动力学（例如，参见 [PR23]）[17]。这些动力学可以从 Painlev´e 叶状结构上的野动力学推导出来 [Kli16]。为此，有必要在单值化数据空间上构造对数正则坐标的恰当定义。注意，在非阿贝尔情形下，x_1, x_2, x_3 和 q 是自由含幺结合代数 $\mathcal{A}$ 的生成元，因此尚不清楚如何定义对数正则辛结构。然而，在交换情形下，泊松括号定义了泊松张量。若该张量非奇异，则其逆确定辛结构。或许，我们可以通过将对数函数适当地推广到非交换情形，以类似方式引入非阿贝尔辛结构。

Appendix A. FN-type pairs

A.1. Case P_2^0.

$$\mathrm{FN}_2^0 \quad \begin{cases} \partial_\zeta Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}-4&0\\0&4\end{pmatrix}\zeta^2+\begin{pmatrix}0&4f\\4f&0\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}2f^2+x+2b&-2f^2+2g-x-2b\\2f^2-2g+x+2b&-2f^2-x-2b\end{pmatrix}\right.\\ &\qquad\left.+\begin{pmatrix}-\theta&\theta-\frac12\\\theta-\frac12&-\theta\end{pmatrix}\zeta^{-1}\right]Z(\zeta,x),\\ \partial_x Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}0&-f\\-f&0\end{pmatrix}\right]Z(\zeta,x). \end{cases}$$

A.2. 情形$\mathrm{P}^1{}_2$

$$\mathrm{FN}_2^1 \quad \begin{cases} \partial_\zeta Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}-4&0\\0&4\end{pmatrix}\zeta^2+\begin{pmatrix}0&4f\\4f&0\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}2f^2+x&-2f^2+2g-x\\2f^2-2g+x&-2f^2-x\end{pmatrix}\right.\\ &\qquad\left.+\begin{pmatrix}[g,f]-a&-[g,f]+a-\frac12\\-[g,f]+a-\frac12&[g,f]-a\end{pmatrix}\zeta^{-1}\right]Z(\zeta,x),\\ \partial_x Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}0&-f\\-f&0\end{pmatrix}\right]Z(\zeta,x). \end{cases}$$

$$\mathrm{FN}'^1_2 \quad \begin{cases} \partial_\zeta Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}-4&0\\0&4\end{pmatrix}\zeta^2+\begin{pmatrix}0&4f\\4f&0\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}2f^2+x&-2f^2+2g-x\\2f^2-2g+x&-2f^2-x\end{pmatrix}\right.\\ &\qquad\left.+\begin{pmatrix}a&a-\frac12\\a-\frac12&a\end{pmatrix}\zeta^{-1}\right]Z(\zeta,x),\\ \partial_x Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}f&-f\\-f&f\end{pmatrix}\right]Z(\zeta,x). \end{cases}$$

A.3. Case P_2^2.

$$\mathrm{FN}_2^2 \quad \begin{cases} \partial_\zeta Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}-4&0\\0&4\end{pmatrix}\zeta^2+\begin{pmatrix}0&4f\\4f&0\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}2f^2+x&-2f^2+2g-x-\frac43 b\\2f^2-2g+x+\frac43 b&-2f^2-x\end{pmatrix}\right.\\ &\qquad+\left[g-\tfrac23 b,f\right]\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\zeta^{-1}+\left(\tfrac43 bf+a-\tfrac12\right)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\zeta^{-1}\\ &\qquad\left.+\left(\tfrac23 bf^2-\tfrac13 bg+\tfrac13 xb+\tfrac49 b^2\right)\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\zeta^{-2}\right]Z(\zeta,x),\\ \partial_x Z(\zeta,x) &= \left[\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\zeta+\begin{pmatrix}f&-f\\-f&f\end{pmatrix}+\tfrac16\begin{pmatrix}b&-b\\b&-b\end{pmatrix}\zeta^{-1}\right]Z(\zeta,x). \end{cases}$$

数据和材料的可用性。不适用。

利益冲突。作者声明不存在任何利益冲突。

[17]作者谨向弗拉基米尔·鲁布佐夫致以诚挚谢意，感谢他指出了这篇论文和这一问题。

资助。HSE 国际簇几何实验室、俄罗斯联邦政府资助项目编号 075-15-2021-608；青年俄罗斯数学奖。

References

[AS21] V. E. Adler 和 V. V. Sokolov. 关于矩阵 Painlev´e II 方程. *Theoret. and Math. Phys.*, 207(2):188–201, 2021. arXiv:2012.05639. ← 1, 2, 3, 5, 6, 7[BCR18] M. Bertola、M. Cafasso 和 V. Rubtsov. 非交换 Painlev´ *Com-* e 方程及 Calogero 型方程组. , ( ): – *munications in Mathematical Physics* 363 2 503 530, 2018 1710 00736 ← 3 8 16 ´ 4 20 . arXiv: . . , , ,[22] *Nonlinearity* 35 BS I. A. Bobrova 和 V. V. Sokolov. 关于矩阵 Painleve- 方程. , (12):6528, 2022 年 11 月. arXiv:2107.11680, arXiv:2110.12159. ← 3, 5, 6, 7[BS23a] I. Bobrova 和 V. Sokolov. 哈密顿 ´ *Journal of Nonlinear* e 型方程组的分类. , : – . arXiv: . . [23] *Mathematical Physics* 30 646 662, 2023 2209 00258 ´ ← 2 BS b I. Bobrova 和 V. Sokolov. 带广义 Okamoto 积分的非阿贝尔 Painleve 方程组. 载于 *of PDEs: Algebraic and Cohomological Aspects* 789 *Contemporary Mathemaics* 41 76 *The Diverse World* , ← 2卷 , 页码 – . 美国数学会，2023 年. arXiv:2206.10580.[] BS23c I. Bobrova 和 V. Sokolov. 关于非阿贝尔 Painlev *Journal of Geometry and Physics* e 型方程组的分类. [17] , 191 2303 10347 104885, 2023 : . arXiv: . . ´CMR L. Chekhov、M. Mazzocco 和 V. Rubtsov. Painlev *International Mathematics Research Notices* e 单值化流形、装饰特征簇与簇代数. ← 4, 2017(24):7639–7691, 2017. *Communications in Mathe-* arXiv:1511.03851v1. [, 1980] FN*matical Physics* 76 1 65 116, 1980 ← 1 2 13 H. Flaschka 和 A. C. Newell. 保单值化与谱变形 I. [07] ¨ 15 , ( ): – . , , , ¨ *Mathematische Annalen* 63 3 301 321, 1907 ← 1 Fuc R. Fuchs. 关于具有三个有限本质奇点的二阶线性齐次微分方程. , ( ): [10] ´ ´ – . Gam B. Gambier. 关于其通解具有固定临界点的二阶一阶微分方程 . ´, ( ): – . Gar R. Garnier. 关于通解为单值的三阶微分方程，以及一类新的高阶方程，其通解具有固定临界点. 载于 ´´, 卷 ´页码 – . HTW J. Harnad、C. A. Tracy 和 H. Widom. 随机矩阵中出现的方程的哈密顿结构. 载于 `, 页码 231–245. Springer, 1993. arXiv:9301051. *Acta Mathematica* 33 1 1 55, 1910 ← 1 , 2 ´Irf´M. Irfan. 非交换 Painlev´e 第二方程的 Lax [ 12] ´ ´ ` 对表示与 Darboux 变换. , ( ): – . arXiv: . . ´JKT N. Joshi、A. V. Kitaev 和 P. A. Treharne. 关于 Painlev´e III–VI 方程的线性化及三波共振系统的约化. ´, ( ): . arXiv: . v . , JKT N. Joshi、A. V. Kitaev 和 P. A. Treharne. 关于第一和第二 Painleve 方程的线性化. ´, ( ): . arXiv: . v . , , ´JM a M. Jimbo 和 T. Miwa. 有理系数线性常微分方程的单值化保持变形。I. 一般理论与 *Annales scientifiques*-函数. , ( ): – . , , JM b M. Jimbo 和 T. Miwa. 有理系数线性常微分方程的单值化保持变形。II. *de l'École normale supérieure*, ( ): – . , , Kaw H. Kawakami. 矩阵 Painleve 方程组. , ( ): 29, 1 126, 1912 ← 1 . KH A. A. Kapaev 和 E. Hubert. 关于 Painleve 方程 Lax 对的注记. [93] *Low-Dimensional Topology and Quantum Field Theory*, ( ): . ← 1Kli M. Klimes. 第五 Painlev[e 方程的野单值化及其在野特征簇上的作用：一种合流方法. 12] , 2016. ´ *Jour-* *nal of Geometry and Physics* 62 7 1575 1582, 2012 1201 0900 ← 5 [07] MR´M. Mazzocco 和 V. Rubtsov. Painlev *Journal of Mathematical Physics* 48 10 103512, 2007 0706 1750 3 ← 3 4 e 单值化流形上的合流、 [09] ´ *Journal* 其泊松结构与量子化. *of Physics A: Mathematical and Theoretical* 42 5 055208, 2009 0806 0271 1 ← 2 3 , 2012. 4 [81] , 19 τ *Physica D: Nonlinear Phenomena* 2 2 306 352, 1981 ← 3 8 14 MS [81] *Physica D: Nonlinear Phenomena* 2 3 407 448, 1981 ← 1 2 15 A. V. Mikhailov 和 V. V. Sokolov. 结合代数上的可积常微 [15] ´ *Journal of Mathematical Physics* 56 3 分方程. 033503, 2015 ← 20 , : – . [99] ´ *Journal of Physics A: Mathematical* https://arxiv.org/abs/solv-int/ . *and General* 32 46 8145, 1999 ← 2 Oka K. Okamoto. 与 Painleve 方程相关的多项式哈密顿量，I. [16] , ´, , ( ): – *arXiv preprint arXiv:1609.05185*. Pai P. Painleve. 关于通解为单值的微分方程的回忆录 . , : – . ← 20Pai[P. Painlev12] e. 关于通解为单值的二阶及高阶微分方程 . ´, 25:1–85, 1902. *arXiv preprint arXiv:1212.6723* ← 4PR E. Paul 和 J.-P. Ramis. 第五 Painleve 叶状结构的动力学. [, . RR V. S. Retakh 和 V. N. Rubtsov. 非交换 Toda 链、Hankel 拟行列式与 Painleve II 方程. 00] , *Communications in Mathematical* *Physics* 211 231 251, 2000 9908004 , ( ): . arXiv: . . Sul B. I. Suleimanov. 第二 Painleve 方程的“量子化”及其 L-A 对等价性问题. ← 8 [80] ´ , 156:1280–1291, 2008. *Proceedings of the Japan Academy* *Series A Mathematical Sciences* 56 6 264 VDPS 268, 1980 ← 1 M. Van Der Put 和 M.-H. Saito. 线性微分方程与 Painlev [00] ´ ´ ´ ´ ´ ´ ´ *Bulletin de la Société* e 方程的模空间. 载于 [, 卷 59, 页码 *Mathématique de France* 28 201 261, 1900 ← 1 2611–2667, 2009. 02] , 15

Faculty of Mathematics、 HSE University、 Usacheva str. 6、 Moscow、 Russia*Email address*: ia.bobrova94@gmail.com