arXiv:2302.10740v1 [math-ph] 21 Feb 2023

具有二十面体对称性的量子谐振子及一些显式波函数

Charles F. Dunkl　弗吉
尼亚大学数学系　夏洛茨维尔，
弗吉尼亚州 22904-4137

2023年2月22日

摘要

本文利用 Dunkl 拉普拉斯算子定义一种与任意有限反射群相关的修正量子谐振子的哈密顿算子。其势是若干线性函数倒数平方的和，这些线性函数的零点集即为该群各反射所对应的镜面。对称群对应的版本称为一维 N 个相同粒子的 Calogero-Moser 模型。本文聚焦于正二十面体的对称群，该群与 H3 型根系相关。本文通过一个由二十面体顶点导出的生成函数定义特殊波函数，其关键性质是能够轻易计算 Dunkl 拉普拉斯算子的作用。基态是一个高斯函数与若干线性函数的幂次乘积，这些线性函数来自根系。本文考察两类波函数：最高次部分指定的非齐次多项式，以及齐次调和多项式。两类波函数的平方范数均得到明确计算。通过对称化，得到这两类波函数对应的不变多项式及其平方范数。本文还确定了角动量平方对齐次调和多项式的作用。此外，还有一个与哈密顿算子及群作用对易的六阶算子。

1 引言

二十面体在几何学中是五种正多面体之一，在代数中是三阶考克斯特群之一，甚至也存在于自然界中，表现为一种病毒分子。本文研究它在量子力学中的作用，即在薛定谔方程中引入具有二十面体对称性的

势。与古代一样，关于二十面体总有许多未解之谜，但本文将提出一些新的分析见解。我们利用邓克尔算子和邓克尔拉普拉斯算子的机制，为任意有限反射群定义修正量子谐振子的哈密顿算子。该势是若干线性函数的倒数平方之和，这些函数的零点集合正是该群各反射对应的镜面。对称群情形的这一模型称为 Calogero-Moser 模型，描述一维线上带有 r^{-2} 相互作用并受谐性约束的 N 全同粒子（Lapointe 和 Vinet [11]）。Quesne [12] 证明了偶二面体群振子的超可积性。Genest 和 Vinet [9], 研究了阿贝尔群情形（坐标的符号改变），并利用哈密顿算子定义了若干对称代数。

第 2 节介绍本文的一般背景，适用于所有有限反射群。第 2.1 节介绍有限反射群、Dunkl 算子和 Dunkl 拉普拉斯算子的相关背景，并给出了一些调和多项式（即被 Dunkl 拉普拉斯算子消去的多项式）所需的公式。此外，还给出了乘法算子与 Dunkl 算子的交换关系。第 2.2 节介绍适用于任意反射群的 Dunkl谐振子及其基本性质，并阐述波函数、调和多项式与拉盖尔多项式之间的相互关系。文中还介绍了重要算子的定义和性质，包括升算（产生）型算子、降算（湮灭）型算子以及角动量平方算子。薛定谔方程的基态是指数函数与由根系构成的群不变乘积函数的乘积。由此得到的内积结构是波函数平方所对应概率的基础。本部分的公式适用于一般情形。

第3节介绍了二十面体群及其根系 H_3 。文中简要概述了正二十面体和正十二面体的对称性质，以及基本不变多项式。文中还给出了麦克唐纳积分的 H_3 版本；该积分用于对波函数的平方范数公式进行归一化。标题所指的特殊波函数在第4节中定义。它们由一个源自二十面体顶点的生成函数构造而成，其关键性质是能够轻松计算邓克尔拉普拉斯算子的作用。文中考察了两类波函数：最高次部分给定的非齐次多项式，以及齐次调和多项式。两类波函数的平方范数都得到了明确计算。通过对称化，得到这两类波函数的不变多项式及其平方范数，

第5节讨论了另外两个算子：角动量平方，以及一个由升降算符定义的六阶算子。第6节的结语谈及二十面体模型波函数构造与分析中的一些尚待解决的技术问题。附录概述了一种符号计算方法，用于分析一些以邓克尔算子定义的算子。

2 反射群与背景

2.1 根系与邓克尔算子

在 $\mathbb{R}^N$ 中，内积为 $\langle x,y\rangle:=\sum_{i=1}^N x_iy_i$ 和 $|x|^2:=\langle x,x\rangle$。若 $v\neq 0$，则沿 v 的反射 σ_v 定义为

$$x\sigma_v:=x-2\frac{\langle x,v\rangle}{|v|^2}v.$$

这是一个等距变换 $|x\sigma_v|^2=|x|^2$，也是一个对合 $\sigma_v^2=I$。不动点集 $(x\sigma_v=x)$ 是超平面 $\{x:\ \langle x,v\rangle=0\}$。有限根系是非零元素 $\mathbb{R}^N$ 的子集 R，满足：若 $u,v\in R$，则 $u\sigma_v\in R$。我们只使用约化根系，也就是说，若 u，$cu\in R$，则 $c=\pm1$。定义$W(R)$为由 $\{\sigma_v$ 生成的（有限反射）群：$v\in R\}$，它是正交群 $O_N(\mathbb{R})$的有限子群。 R可分解为正根 $R_+=\{v\in R:\ \langle u_0,v\rangle>0\}$ 和 R_-；其中 u_0 是某个固定向量，使得对所有 $v\in R$都有 $\langle u_0,v\rangle\neq 0$。由于 $\sigma_v=\sigma_{-v}$，集合 R_+用于标记 $W(R)$中的反射。根系 R 是共轭类（$W(R)$ 轨道）的并：若存在某个 $w\in W(R)$，使得 $u=vw$，则 $\sigma_u\sim\sigma_v$。重数函数 κ_v 是定义在 R 上的函数，在每个共轭类上取常数值；本文中通常 $\kappa_v\geq 1$ 或 κ_v 是形式参数。令$\gamma_\kappa:=\sum_{v\in R_+}\kappa_v$。定义邓克尔算子（$1\leq i\leq N$）

$$\mathcal{D}_if(x):=\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)+\sum_{v\in R_+}\kappa_v\frac{f(x)-f(x\sigma_v)}{\langle x,v\rangle}v_i.$$

那么，对于所有 i,j，$\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j=\mathcal{D}_j\mathcal{D}_i$（另请参见 Dunkl 和 Xu [5, 第 6 节 4]）。令 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_N}\right)$, $\Delta=\sum_{i=1}^N\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ 和 $\nabla_\kappa=(\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_N)$。

Dunkl 拉普拉斯算子为 $\Delta_\kappa:=\sum_{i=1}^N\mathcal{D}_i^2$和

$$\Delta_\kappa f(x)=\Delta f(x)+\sum_{v\in R_+}\kappa_v\left(2\frac{\langle\nabla f(x),v\rangle}{\langle x,v\rangle}-|v|^2\frac{f(x)-f(x\sigma_v)}{\langle x,v\rangle^2}\right).$$

设 $\mathbb{F}$ 表示一个包含 $\mathbb{R}$和 $\omega > 0$ 值的扩张域κ_v（此处不使用 $\mathbb{C}$）。令 $\mathcal{P}$: $= \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_N]$（ x中的多项式），对于$n = 1$、2、.....，令 $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P}\colon\ p(cx) = c^n p(x)\ \ c \in \mathbb{F}\}$（齐次多项式），以及 $\mathcal{P}_{n,\kappa} = \{p \in \mathcal{P}_n\colon\ \Delta_\kappa p(x) = 0\}$，即调和齐次多项式。群 $W(R)$ 在 $\mathcal{P}$ 上由 $wp(x) = p(xw)$、$w \in W(R)$ 表示。

全文中会用到一些基本的交换关系。（注意$[A, B] := AB - BA$ 表示算子，而 $\langle a、\ x\rangle$、$|x|^2$ 表示乘法算子，对于 $a \in \mathbb{R}$）：

$$[\langle a, \nabla_\kappa\rangle, \langle b, x\rangle] = \langle a, b\rangle + 2\sum_{v \in R_+} \kappa_v \frac{\langle a, v\rangle \langle b, v\rangle}{|v|^2}\sigma_v \tag{1}$$

$$[\Delta_\kappa, \langle b, x\rangle] = 2\langle b, \nabla_\kappa\rangle, \quad \left[|x|^2, \langle a, \nabla_\kappa\rangle\right] = -2\langle a, x\rangle. \tag{2}$$

记 $\delta := \langle x、\ \nabla\rangle$（因此 $\delta p = np$ 对于 $p \in \mathcal{P}_n$），则

$$\left[\Delta_\kappa, |x|^2\right] = 2(N + 2\gamma_\kappa + 2\delta). \tag{3}$$

命题 1 设$\phi \in \mathcal{P}_{n,\kappa}$和 $1 \le k \le m =$ 1,2,3, . . .，则

$$\begin{aligned}\Delta_\kappa |x|^{2k} \phi(x) &= 2k(N + 2\gamma_\kappa + 2n + 2k - 2)|x|^{2k-2}\phi(x) \qquad (4)\\ \Delta_\kappa^m |x|^{2m} \phi(x) &= 2^{2m} m! \left(\frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n\right)_m \phi(x).\end{aligned}$$

证明。由 (3)（即 $i = 1$的情形），再用归纳法可证第一个结论。假设该结论对 $i =$ 1,2, . . . , $k - 1$ 成立，则（取$f = |x|^{2k-2}\phi$）

$$\begin{aligned}&\Delta_\kappa |x|^{2k} \phi(x) = |x|^2 \Delta_\kappa |x|^{2k-2}\phi + 2(N + 2\gamma_\kappa + 2\delta)|x|^{2k-2}\phi(x)\\ &= \{2(k-1)(N + 2\gamma_\kappa + 2n + 2k - 4) + 2(N + 2\gamma_\kappa + 4k - 4 + 2n)\}|x|^{2k-2}\phi\\ &= 2k(N + 2\gamma_k + 2n + 2k - 2)|x|^{2k-2}\phi,\end{aligned}$$

完成归纳法。令 $C_{n,\ k} = 4k\left(\frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n + k - 1\right)$，其中 $k =$1,2, . . . , m，则

$$\begin{aligned}\Delta_\kappa^{m-1}\Delta_\kappa |x|^{2m}\phi(x) &= C_{n,m}\Delta_\kappa^{m-2}\left(\Delta_\kappa |x|^{2m-2}\phi(x)\right)\\ &= C_{n,m}C_{n,m-1}\Delta_\kappa^{m-3}\left(\Delta_\kappa |x|^{2m-4}\phi(x)\right) = \ldots\\ &= C_{n,m}C_{n,m-1}\cdots C_{n,2}\Delta_\kappa |x|^2 \phi(x) = \prod_{i=1}^m C_{n,i}\phi(x)\end{aligned}$$

$_m$且 $\prod_{i=1} C_{n,\ i} = 2^{2m} m!$

■

$\left(\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n\right)_m$。

存在直和分解 $\mathcal{P}_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \oplus |x|^{2j} \mathcal{P}_{n-2j,\ \kappa}$；这是以下两个命题（[5, 定理 7.1。15]）的推论

命题 2 对于 $n=1$，2，.....，令 $\Lambda_n := \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{4^j j!\left(-N/2-\gamma_\kappa-n+2\right)_j} |x|^{2j} \Delta_\kappa^j$ 则 $p \in \mathcal{P}_n$ 蕴含 $\Lambda_n p \in \mathcal{P}_{n,\ \kappa}$.

命题 3 假设 $p \in \mathcal{P}_n$ 则

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{4^j j! \left(N/2+\gamma_\kappa+n-2j\right)_j} |x|^{2j} \Lambda_{n-2j} \Delta_\kappa^j p(x).$$

定义 4 对于 a，$b \in \mathbb{R}^N$ 角动量算子为 $J_{a,\ b} := \langle a,\ x\rangle \langle b,\ \nabla_\kappa\rangle - \langle b,\ x\rangle \langle a,\ \nabla_\kappa\rangle$.

命题 5 $J_{a,\ b} = \langle b,\ \nabla_\kappa\rangle \langle a,\ x\rangle - \langle a,\ \nabla_\kappa\rangle \langle b,\ x\rangle$；以及 $[\Delta_\kappa, J_{a,b}] = 0 = \left[|x|^2,\ J_{a,\ b}\right]$。

证明。由 (1) 得到对易子 $[\langle a,x\rangle, \langle b,\nabla_\kappa\rangle] = -[\langle b,x\rangle, \langle a,\nabla_\kappa\rangle]$，这就证明了第一个陈述。接下来（根据 2）

$$\begin{aligned}
\left[J_{a,b}, |x|^2\right] &= 2\langle a,x\rangle \langle b,x\rangle - 2\langle b,x\rangle \langle a,x\rangle = 0, \\
J_{a,b}\Delta_\kappa &= \langle a,x\rangle \Delta_\kappa \langle b,\nabla_\kappa\rangle - \langle b,x\rangle \Delta_\kappa \langle a,\nabla_\kappa\rangle \\
&= \Delta_\kappa J_{a,b} + \left(-2\langle a,\nabla_\kappa\rangle \langle b,\nabla_\kappa\rangle + 2\langle b,\nabla_\kappa\rangle \langle a,\nabla_\kappa\rangle\right) = \Delta_\kappa J_{a,b}.
\end{aligned}$$

■

Feigin 和 Hakobyan [7], 对这一组角动量算子进行了分析，重点考察了对称群和 Calogero-Moser 模型。

标准单位基向量记为 $\varepsilon_i = \left(0\ldots、\overset{i}{1}、0\ldots\right)$，其中 $1 \le i \le N$。

定义 6 角动量平方为 $\mathcal{J} := \sum_{1\le i<j\le N} J^2_{\varepsilon_i,\varepsilon_j}$

Theorem 7 $\mathcal{J} = |x|^2 \Delta_\kappa - \langle x,\nabla_\kappa\rangle^2 - (N-2)\langle x,\nabla_\kappa\rangle - 2\sum_{v\in R_+} \kappa_v \sigma_v \langle x,\nabla_\kappa\rangle$.

证明。回顾对易关系 $\mathcal{D}_i x_j = x_j \mathcal{D}_i + \delta_{ij} + 2\alpha_{ij}$ 与 $\alpha_{ij} := \sum_{v \in R_=} \kappa_v \frac{v_i v_j}{|v|^2} \sigma_v$。

首先

$$\begin{aligned} 2 \sum_{1 \le i < j \le N} J_{\varepsilon_i, \varepsilon_j}^2 &= \sum_{i \neq j} \left(x_i \mathcal{D}_j x_i \mathcal{D}_j + x_j \mathcal{D}_i x_j \mathcal{D}_i - x_i \mathcal{D}_j x_j \mathcal{D}_i - x_j \mathcal{D}_i x_i \mathcal{D}_j \right) \\ &= \sum_{i \neq j} \left(\begin{array}{c} x_i^2 \mathcal{D}_j^2 + x_j^2 \mathcal{D}_i^2 + 2x_i \alpha_{ij} \mathcal{D}_j + 2x_j \alpha_{ij} \mathcal{D}_i - 2x_i x_j \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \\ -x_i \mathcal{D}_i - x_j \mathcal{D}_j - 2x_i \alpha_{jj} \mathcal{D}_i - 2x_j \alpha_{ii} \mathcal{D}_j \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, \nabla_\kappa \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^N x_i \mathcal{D}_i x_j \mathcal{D}_j &= \sum_{i=1}^N \left(x_i^2 \mathcal{D}_i^2 + x_i \mathcal{D}_i + 2x_i \alpha_{ii} \mathcal{D}_i \right) \\ &+ \sum_{i \neq j} \left(x_i x_j \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j + 2x_i \alpha_{ij} \mathcal{D}_j \right). \end{aligned}$$

Thus

$$2 \sum_{1 \le i < j \le N} J_{\varepsilon_i, \varepsilon_j}^2 + 2 \langle x, \nabla_\kappa \rangle^2 = 2 \|x\|^2 \Delta_\kappa + \left(-2(N-1) + 2 \right) \langle x, \nabla_\kappa \rangle$$

$$+2 \sum_{i \neq j} \left(x_i \alpha_{ij} \mathcal{D}_j + x_j \alpha_{ij} \mathcal{D}_i - x_i \alpha_{jj} \mathcal{D}_i - x_j \alpha_{ii} \mathcal{D}_j + 2x_i \alpha_{ij} \mathcal{D}_j \right) + 4 \sum_{i=1}^N x_i \alpha_{ii} \mathcal{D}_i.$$

重写第二行（对指标进行一些互换）

$$\sum_{i=1}^N \left\{ 4x_i \alpha_{ii} + \sum_{j \neq i} \left(8x_j \alpha_{ij} - 4x_i \alpha_{jj} \right) \right\} \mathcal{D}_i$$

考虑 $\sum \kappa_v \sigma_v \langle x$ 中 $\mathcal{D}_i$ 的系数，即（回忆一下 $(\sigma_v x)_i = _{v \in R_+} x_i - 2 \langle x,$ $\frac{v \rangle}{\|v\|^2} v_i$，且 x_i 是一个乘法算子）

$$\begin{aligned} \sum_{v \in R_+} \kappa_v \sigma_v x_i &= \sum_{v \in R_+} \kappa_v \left\{ x_i - \frac{2}{|v|^2} \sum_{j=1}^N x_j v_j v_i \right\} \sigma_v \\ &= \sum_{v \in R_+} \kappa_v x_i \sigma_v - 2 \sum_{j=1}^N x_j \alpha_{ij} = \sum_{j \neq i} \left(x_i \alpha_{jj} - 2x_j \alpha_{ij} \right) - x_i \alpha_{ii} \end{aligned}$$

因为 $\sum_{v \in R_+} \kappa_v x_i \sigma_v = \sum_{j=1}^N x_i \alpha_{jj}$。因此 $2 \sum_{1 \le i < j \le N} J_{\varepsilon_i,\ \varepsilon_j}^2 = -2 \langle x,\ \nabla_\kappa \rangle^2 +$

$2|x|^2 \Delta_\kappa - 2(N-2) \langle x, \nabla_\kappa \rangle - 4 \sum_{v \in R_+} \kappa_v \sigma_v \langle x, \nabla_\kappa \rangle$. ■

推论 8 $\mathcal{J}$ 与 $W(R)$-作用可交换。

证明。 $\langle x、\nabla_\kappa\rangle = \delta + \sum_{v\in R_+} \kappa_v(1-\sigma_v)$以及$\sum_{v\in R_+} \kappa_v\sigma_v$属于群代数的中心，因为它是共轭类的加权和。 ■

2.2 Dunkl谐振子

这是修正后的薛定谔方程（参数为 $\omega > 0$，能量为E）¨

$$\mathcal{H}\psi := \left(\omega^2|x|^2 - \Delta_\kappa\right)\psi = E\psi.$$

指数基态为 $g(x) := \exp\left(-\frac{\omega}{2}|x|^2\right)$，这可由以下变换看出

$$g^{-1}\left(\omega^2|x|^2 - \Delta_\kappa\right)(fg) = -\Delta_\kappa f + \omega(N + 2\gamma_\kappa + 2\delta)f. \tag{5}$$

这意味着 $\left(\omega^2|x|^2 - \Delta_\kappa\right)g = \omega(N + 2\gamma_\kappa)g$。因此，波函数 ψ的形式为 $p(x)$ $g(x)$。

为了将 $\mathcal{H}$ 变换为带反射项的通常薛定谔方程，我们引入权函数 $h_\kappa(x) := \prod_{v\in R_+} |\langle x,v\rangle|^{\kappa_v}$(a $W(R)$-¨

次数为 γ_κ 的正齐次不变函数）并求出

$$h_\kappa\left(-\Delta_\kappa + \omega^2|x|^2\right)h_\kappa^{-1} = -\Delta + \omega^2|x|^2 + \sum_{v\in R_+}\frac{\kappa_v(\kappa_v - \sigma_v)|v|^2}{\langle x,v\rangle^2}, \tag{6}$$

带有如下势的薛定谔方程

$$V(x) = \omega^2|x|^2 + \sum_{v\in R_+}\frac{\kappa_v(\kappa_v - \sigma_v)|v|^2}{\langle x,v\rangle^2},$$

其中包括反射（证明见 [4, 附录]）。基态为$h_\kappa g$。对于不变函数，第二项变为 $\sum_{v\in R_+}\frac{\kappa_v(\kappa_v - 1\ |v|^2)}{\langle x\ v\rangle^2}$，。在特殊情形下， R 是 A_{N-1}型根系，而 $W(R) = \mathcal{S}_N$（对称群），该势出现在直线上具有 r^{-2} 相互作用势和谐性约束的 N 个全同粒子的 Calogero-Moser 模型中（另见 Lapointe 和 Vinet [11], [5, 第 11.6 节3]）。

记作 $\mathcal{H} := -\widetilde{\Delta}_\kappa + \omega(N + 2\gamma_\kappa + 2\delta)$，是作用于 $\mathcal{P}$ 上的算子。在通常的一元情形中，波函数为 $H_n\left(\omega^{1/2}s\right)\exp\left(-\frac{\omega}{2}s^2\right)$，特征值为 $E = \omega(2n+1)$（Schr¨odinger [13, pp. 514-516], H_n 是次数为 n的厄米特多项式）。

定义 9 令 $\mathcal{P}_{\leq n}$ 表示次数为 $\leq n$ 的多项式空间（即 $\mathcal{P}_{\leq n}=\mathcal{P}_n+\mathcal{P}_{n-1}+\ldots+\mathcal{P}_0$），并令 π_k 表示对 $\mathcal{P}_k$ 的投影，其中$k\geq 0$。

命题 10 设 $pg\in$ 是一个波函数，且有 $p\in\mathcal{P}_{\leq n}$、$\pi_n p\neq 0$，那么对于 $i\leq\frac{n+1}{2}$，$\pi_{n-2i}p=\frac{1}{i!}\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)^i\pi_n p$，有 $\mathcal{H}(pg)=\omega(N+2\gamma_\kappa+n)\,pg$、$\pi_{n-2i+1}p=0$；对于 $i\leq\frac{n}{2}$和 $p=$，$\exp\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)\pi_n p$。

证明。将方程 $-\Delta_\kappa p=\omega(N+2\gamma_\kappa+2\delta)\,p-Ep$ 按齐次分量展开

$$-\Delta_\kappa\pi_{n-i+2}p=\{\omega(N+2\gamma_\kappa+2n-2i)-E\}\,\pi_{n-i}p,i=0,1,\ldots,n.$$

$i=1$ 处的方程意味着 $E=\omega(N+2\gamma_\kappa+2n)$，因此

$$-\Delta_\kappa\pi_{n-i+2}p=-2i\omega\pi_{n-i}p,i=0,1,\ldots,n.$$

由于 $k>n$ 时 $\pi_k p=0$，因此可得 $\pi_{n-1}p=0$，再由归纳法可得，当 $i\leq\frac{n-1}{2}$ 时 $\pi_{n-1-2i}p=0$。利用关系 $-\Delta_\kappa\pi_{n-2i+2}p=(-4i\omega)\pi_{n-2i}p$进行归纳，证明 $\pi_{n-2i}p=\frac{1}{i!}\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)^i\pi_n p$以及 $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{1}{i}!\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)^i\pi_n p=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\pi_{n-2i}p=p$。级数 $\exp\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)\pi_n p$ 会终止。 ■

推论 11 在相同假设下，$\exp\left(\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)p=\pi_n p$。

对于 $n=0,1,2,\ldots$，设 $E_n:=\omega(N+2\gamma_\kappa+2n)$。由此可得 $\mathcal{H}(pg)=E_n pg$ 蕴含 $p\in\mathcal{P}_{\leq n}$ 和 $\pi_n p\neq 0$。此外，$\phi\in\mathcal{P}_{n,\kappa}$ 蕴含 $\mathcal{H}(\phi g)=E_n\phi g$。

次数为 m、指标为 $\alpha>-1$ 的拉盖尔多项式满足

$$L_n^{(\alpha)}(s)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-n)_j}{(\alpha+1)_j}\frac{s^j}{j!} \tag{7}$$

$$\int_0^\infty L_m^{(\alpha)}(s)\,L_k^{(\alpha)}(s)\,s^\alpha e^{-s}\mathrm{d}s=\delta_{mk}\frac{\Gamma(\alpha+1+m)}{m!}=\delta_{mk}\Gamma(\alpha+1)\frac{(\alpha+1)_m}{m!}. \tag{8}$$

命题 12 假设 $p\in\mathcal{P}_{n,\kappa}$ 且 $m,n=1,2,3,\ldots$那么 $\psi_{n,m}(x):=L_m^{(\alpha)}\left(\omega|x|^2\right)p(x)g(x)$ 是一个波函数，其能量为 E_{n+2m}，其中 $\alpha=\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n-1$。

证明。由 (7) $\pi_{n+2m}f_{n,\ m}=\frac{m}{(-1)m\ !}\omega^m|x|^{2m}p(x)$ 且

$$\exp\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)\pi_{n+2m}f_{n,m}=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{4^i i!}\omega^{m-i}\Delta_\kappa^i|x|^{2m}p(x)$$
$$=\frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{4^i i!}\omega^{m-i}\prod_{j=0}^{i-1}C_{n,m-j+1}\ |x|^{2m-2i}p(x)$$

（回忆 $C_{n,\ k}=4k\left(\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n+k-1\right)$ 以及 $C_{n,\ 0}=1$ 根据命题 1，以及 $\prod_{j=0}^{i-1}C_{n,\ m-i+1}=2^{2i}\frac{m!}{(m-i)!}\left(\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n+m-i\right)_i$ 因此 p 的乘子为

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}}{i!(m-i)!}\left(\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n-i\right)_i\left(\omega|x|^2\right)^{m-i}$$
$$=\frac{1}{m!}\sum_{j=0}^{m}\frac{(-m)_j\left(\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n\right)_m}{j!\left(\frac{N}{2}+\gamma_\kappa+n\right)_j}\left(\omega|x|^2\right)^j=L_m^{(N/2+\gamma_\kappa+n-1)}\left(\omega|x|^2\right),$$

改变求和指标 $i=m-j$。 ■

推论 13 在上述假设下

$$\Delta_\kappa L_m^{(\alpha)}\left(\omega|x|^2\right)p(x)=-4\omega(\alpha+m)L_{m-1}^{(\alpha)}\left(\omega|x|^2\right)p(x).$$

证明。将公式（4）应用于 $\pi_{n+2m}f_{n,\ m}$ 得到 $-4\omega(\alpha+m)\pi_{n+2m-2}f_{n,\ m-1}$；并且 Δ_κ 与 exp $\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)$对易。 ■

~命题 14 设 pg 是一个波函数，满足 $\mathcal{H}p=E_np$， $\pi_np\neq 0$则

$$p(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^j}{(4\omega)^j(N/2+\gamma_k+n-2j)_j}L_j^{(N/2+\gamma_\kappa+n-2j-1)}\left(\omega|x|^2\right)\Lambda_{n-2j}\Delta_\kappa^j\pi_np(x).$$

证明。根据命题 12，如果 $q\in\mathcal{P}_{n-2j,\ \kappa}$ 那么

$$\exp\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)|x|^{2j}q(x)=\frac{(-1)^j j!}{\omega^j}L_j^{(N/2+\gamma_\kappa+n-2j-1)}\left(\omega|x|^2\right)q(x),$$

将此公式逐项应用于命题 3 中的恒等式，并使用推论 11 中的 exp $\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)\pi_np=p$。 ■

该命题表明，任何波函数都可以表示为若干乘积之和，每个乘积由（径向）拉盖尔多项式与齐次调和多项式（以及 g）相乘得到。

我们引入升降算符（$\{A,B\}:=AB+BA$）：

定义 15 对于 $a\in\mathbb{R}^N$、$a\neq 0$ 和 $\varepsilon=\pm 1$，令 $A_a^{\varepsilon}=\omega\langle a、\ x\rangle+\varepsilon\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle$ 和 $H_a:=\frac{1}{2}\{A_a^+,A_a^-\}=\omega^2\langle a、\ x\rangle^2-\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle^2$。

命题 **16** $g^{-1}A_a^+g=\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle$（降算）以及 $g^{-1}A_a^-g=2\omega\langle a、\ x\rangle -\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle$（升算）；并且 $[\mathcal{H},H_a]=0$。此外，$g^{-1}H_ag=\omega\left(\langle a、\ x\rangle\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle+\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle\langle a、\ x\rangle\right)-\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle^2$。

证明。对易子

$$\left[\omega^2\langle a,x\rangle^2-\langle a,\nabla_\kappa\rangle^2,\ \mathcal{H}\right]=-\left[\langle a,\nabla_\kappa\rangle^2,\omega^2|x|^2\right]-\left[\omega^2\langle a,x\rangle^2,\Delta_\kappa\right]$$

并利用 (2) 和 $\left[A^2,B\right]=A[A,B]+[A,B]A$ 展开右侧可得 $[H_a,\mathcal{H}]=0$。

■

命题 17 假设 $w\in W(R)$，则 $w^{-1}H_aw=H_{aw}$；假设 $S\subset\mathbb{R}^N$ 且 $S\cup(-S)$ 是一个 $W(R)$- 轨道（在 $v\to vw$ 下封闭），则 $\sum_{v\in S}H_v^k$ 与每个 $w\in W(R)$ 都对易，其中 $k=1,2,3,\ldots$.

证明。由 $\langle a,\nabla_\kappa\rangle w=w\langle aw,\nabla_\kappa\rangle$（见[5, 命题 6.4.3]）以及$w\left(\langle aw,x\rangle p(x)\right)=\langle aw,xw\rangle p(xw)=\langle a,x\rangle wp(x)$ 可知这一点（因为 $w\in O_N(\mathbb{R})$）。

■ 由命题 5 可知 $\left[\widetilde{\mathcal{H}},J_{a,\ b}\right]=0$，因此 $\left[\widetilde{\mathcal{H}},\mathcal{J}\right]=0$。

现在我们得到一组与 $W(R)$ 和 $\mathcal{H}$ 对易的算子。参见 Quesne [12]，她利用这些算子证明了偶二面体群系统中邓克尔波动方程的超可积性。Tremblay、Turbiner 和 Winternitz [14] 也研究了二面体势。Genest 和 Vinet [9] 在 $\mathbb{R}^3$ 中详细分析了 $\mathbb{Z}_2^3$- 系统（阿贝尔群）的各种波函数基，另见 G.、V. 和 Zhedanov [10]。

命题 18 假设 $\varepsilon=\pm 1$，则 $[\mathcal{H},A_a^{\varepsilon}]=-2\omega\varepsilon A_a^{\varepsilon}$

证明。$\left[\langle a,\nabla_\kappa\rangle,|x|^2\right]=2\langle a,x\rangle$ 和 $[\Delta_\kappa,\langle a,x\rangle]=2\langle a,\nabla_\kappa\rangle$ (由 (2)可得

$$\left[\omega\langle a,x\rangle+\varepsilon\langle a,\nabla_\kappa\rangle,|x|^2\right]=2\varepsilon\langle a,x\rangle$$
$$\left[\omega\langle a,x\rangle+\varepsilon\langle a,\nabla_\kappa\rangle,\Delta_\kappa\right]=-2\omega\langle a,\nabla_\kappa\rangle$$

and

$$\begin{aligned}\left[\omega^2|x|^2-\Delta_\kappa,\omega\langle a,x\rangle+\varepsilon\langle a,\nabla_\kappa\rangle\right]&=-2\varepsilon\omega^2\langle a,x\rangle-2\omega\langle a,\nabla_\kappa\rangle\\&=-2\omega\varepsilon\left(\omega\langle a,x\rangle+\varepsilon\langle a,\nabla_\kappa\rangle\right)\end{aligned}$$

因为 $\varepsilon^2=1$。■

推论19 假设 $\mathcal{H}f=\lambda f$ 则 $\mathcal{H}A_a^\varepsilon f=(\lambda-2\omega\varepsilon)A_a^\varepsilon f$

证明。$\mathcal{H}\mathcal{A}_a^\varepsilon f=A_a^\varepsilon\mathcal{H}-2\omega\varepsilon A_a^\varepsilon=A_a^\varepsilon(\mathcal{H}-2\omega\varepsilon)$。 ■

当 $\mathcal{H}f=\lambda f$、 $f=pg$ 和 $p\in\mathcal{P}_{\leq n}$、 $\pi_n p\neq 0$ 时，则有 $\lambda=E_n$。因此，$A_a^-f=((2\omega\langle a、\ x\rangle-\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle)\ p)\,g$是 $\mathcal{H}$的特征函数，对应于 $E_n+2\omega=E_{n+1}$，而 $A_a^+f=(\langle a、\ \nabla_\kappa\rangle\,p)\,g$是 $\mathcal{H}$的特征函数，对应于 $E_n-2\omega=E_{n-1}$。

2.3 积分与内积

当 ψ 是波函数时，将 $|\psi|^2$ 解释为概率分布的量子力学解释，是通过薛定谔方程（6）给出的，即其表述为 $\psi(x)=p(x)\ g(x)\,h_\kappa(x)$，其中 p是（5）的多项式特征函数。因此，我们引入希尔伯特空间 $L^2\left(\mathbb{R}^N,h_\kappa^2\mathrm{d}m\right)$，其中 $\mathrm{d}m$ 表示勒贝格测度。

定理20（*[5, 7.7.9]*）假设 p、 q 足够光滑，且 pq 呈指数衰减，则（对于 $1\leq i\leq N$）

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{D}_ip)\,qh_\kappa^2\mathrm{d}m=-\int_{\mathbb{R}^N}p\,(\mathcal{D}_iq)\,h_\kappa^2\mathrm{d}m,\tag{9}$$

因此， $\mathcal{D}_i$的伴随算子定义在$L^2\left(\mathbb{R}^N\right.$的一个稠密子空间上， $\left.h_\kappa^2\mathrm{d}m\right)$ 和 $\mathcal{D}_i^*=-\mathcal{D}_i$ 。

我们将在全文中采用伴随算子的这一含义。

推论21 (1) $\mathcal{H}^*=\mathcal{H}$: (2) $J_{a,b}^*=-J_{a,b}$; (3) $\mathcal{J}^*=\mathcal{J}$; (4) $(A_a^+)^*=A_a^-$; (5) $H_a^*=H_a$。

存在一个归一化常数

$$c_{\kappa,\omega}^{-1}:=\int_{\mathbb{R}^N}\exp\left(-\omega|x|^2\right)h_\kappa(x)^2\,\mathrm{d}m(x).\tag{10}$$

对于根系 A_{N-1} 和 B_N ，这称为 Macdonald-Mehta-Selberg 积分。Etingof [6] 对任意只有一个反射共轭类的反射群，给出了该积分求值的统一证明。我们将使用多项式的两种内积，一种是积分型，另一种是代数型。

定义 22 对于 $p,\ q\in\mathcal{P}$，令

$$\langle p,q\rangle_2=c_{\kappa,\omega}\int_{\mathbb{R}^N}p(x)\,q(x)\exp\left(-\omega|x|^2\right)h_\kappa(x)^2\,\mathrm{d}m(x),$$
$$\langle p,q\rangle_{\kappa,\omega}=p\left(\frac{1}{2\omega}\mathcal{D}_1\ldots,\frac{1}{2\omega}\mathcal{D}_N\right)q(x)\,|_{x=0}.$$

这些双线性形式满足 $\langle pw,qw\rangle_2=\langle p,q\rangle_2$, $\langle pw,qw\rangle_{\kappa,\ \omega}=\langle p,q\rangle_{\kappa,\ \omega}=\langle q,p\rangle_{\kappa,\ \omega}$对于 $w\in W(R)$（参见 [5, 定理 7.2.3]）。此外，$\langle\mathcal{D}_ip,q\rangle_{\kappa,\ \omega}=\langle p,2\omega x_iq\rangle_{\kappa,\ \omega}$，且 $p\in\mathcal{P}_n,q\in\mathcal{P}_k$和 $n\neq k$蕴含 $\langle p,q\rangle_{\kappa,\ \omega}=0$。两个内积之间的关系可由一个引理得出。设 $\boldsymbol{E}:=\exp\left(\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)$（在 $\mathcal{P}$上局部有限）。

引理 **23** $[x_i,\Delta_\kappa^n]=-2n\Delta_\kappa^{n-1}\mathcal{D}_i$和 $[x_i,\boldsymbol{E}]=-\frac{1}{2\omega}\boldsymbol{E}\mathcal{D}_i$，对于 $1\leq i\leq N$。此外，$\langle\boldsymbol{E}\mathcal{D}_ip,\boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\ \omega}=\langle\boldsymbol{E}p,\boldsymbol{E}\left(2\omega x_i-\mathcal{D}_i\right)q\rangle_{\kappa,\ \omega}$。

证明。由 $[\Delta_\kappa,\langle a,x\rangle]=2\langle a,\nabla_\kappa\rangle$可得 $[x_i,\Delta_\kappa]=-2\mathcal{D}_i$。利用 $[A,B_1B_2]=[A,B_1]B_2+B_1[A,B_2]$并运用归纳法，得到

$$\begin{aligned}[x_i,\Delta_\kappa^n]&=\left[x_i,\Delta_\kappa^{n-1}\right]\Delta_\kappa+\Delta_\kappa^{n-1}[x_i,\Delta_\varphi]\\&=-2(n-1)\Delta_\kappa^{n-2}\mathcal{D}_i\Delta_\kappa+\Delta_\kappa^{n-1}(-2\mathcal{D}_i)=-2n\Delta_\kappa^{n-1}\mathcal{D}_i.\end{aligned}$$

Thus

$$[x_i,\boldsymbol{E}]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4\omega)^n\,n!}[x_i,\Delta_\kappa^n]=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4\omega)^n\,n!}\Delta_\kappa^{n-1}\mathcal{D}_i=-\frac{2}{4\omega}\boldsymbol{E}\mathcal{D}_i.$$

对于第二部分

$$\langle\boldsymbol{E}\mathcal{D}_ip,\boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\omega}=\langle\mathcal{D}_i\boldsymbol{E}p,\boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\omega}=\langle\boldsymbol{E}p,2\omega x_i\boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\omega}=\langle\boldsymbol{E}p,\boldsymbol{E}\left(2\omega x_i-\mathcal{D}_i\right)q\rangle_{\kappa,\omega}.$$

■

定理 24 设 $p,q\in\mathcal{P}$，则 $\langle\boldsymbol{E}p,\boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\omega}=\langle p,q\rangle_{2^\circ}$

证明。暂时记 $\langle p、\ q\rangle_{\boldsymbol{E}}=\langle\boldsymbol{E}p、\ \boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\ \omega}$。我们将证明$\langle p、\ q\rangle_{\boldsymbol{E}}$和 $\langle p、\ q\rangle_2$ 满足相同的递推关系，并且 $\langle 1、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}}=1=\langle 1、\ 1\rangle_{2^\circ}$。由

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\mathcal{D}_ip)\left(qe^{-\omega|x|^2}\right)h_\kappa^2\mathrm{d}m=-\int_{\mathbb{R}^N}p\mathcal{D}_i\left(qe^{-\omega|x|^2}\right)h_\kappa^2\mathrm{d}m$$

此可得 $\langle \mathcal{D}_i p、\ q\rangle_2 = -\langle p、\ -2\omega x_i q + \mathcal{D}_i q\rangle_2$。由引理 $2\omega\langle p、\ x_i q\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle \mathcal{D}_i p、\ q\rangle_{\boldsymbol{E}} + \langle p、\ \mathcal{D}_i q\rangle_{\boldsymbol{E}}$，并由对称性可得 $\langle p、\ x_i q\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle x_i p、\ q\rangle_{\boldsymbol{E}}$。结合 $\langle 1、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = 1$，可得 $\langle pq、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle p、\ q\rangle_{\boldsymbol{E}}$（根据定义，$\langle pq、\ 1\rangle_2 = \langle p.q\rangle_2$）。此外，$\langle 1,\ (2\omega x_i - \mathcal{D}_i)\ p\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle \mathcal{D}_i 1、\ p\rangle_{\boldsymbol{E}} = 0$。归纳地假设对于所有 $p \in \mathcal{P}_{\leq n}$都有$\langle p、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle p、\ 1\rangle_2$；任意 $p \in \mathcal{P}_{\leq n+1}$ 都可以表示为$p\ (x) = \sum_{i=1}^N x_i p_i\ (x)$，其中每个 $p_i \in \mathcal{P}_{\leq n}$，于是 $\langle p、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \sum_{i=1}^N \langle x_i p_i、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^N \langle \mathcal{D}_i p_i、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^N \langle \mathcal{D}_i p_i、\ 1\rangle_2$。通过类似的论证，$\frac{1}{2\omega}\sum_{i=1}^N \langle \mathcal{D}_i p_i、\ 1\rangle_2 = \langle p、\ 1\rangle_2$。因此，对于所有 $p \in \mathcal{P}$，都有 $\langle p、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle p、\ 1\rangle_2$，特别是 $\langle p、\ q\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle pq、\ 1\rangle_{\boldsymbol{E}} = \langle p、\ q\rangle_2$. ■

这一结果对波函数有着显著的推论。

定理 25 设 $p、\ q \in \mathcal{P}$ 以及 $\widetilde{\mathcal{H}}p = E_n p、\ \widetilde{\mathcal{H}}q = E_k q$。若 $n = k$，则$\langle p、\ q\rangle_2 = \langle \pi_n p、\ \pi_n q\rangle_{\kappa,\ \omega}$。若 $n \neq k$，则 $\langle p、\ q\rangle_2 = 0$。

证明。第二部分由 $\widetilde{\mathcal{H}}^* = \widetilde{\mathcal{H}}$ 得出。设 $k = n$，则由推论 11 $\boldsymbol{E}p = \pi_n p、\ \boldsymbol{E}q = \pi_n q$ 以及 $\langle p、\ q\rangle_2 = \langle \boldsymbol{E}p、\ \boldsymbol{E}q\rangle_{\kappa,\ \omega} = \langle \pi_n p、\ \pi_n q\rangle_{\kappa,\ \omega}$。
■

令人遗憾的是，对于秩大于 2 的特定根系，要显式构造调和多项式、正交基或 $L^2\left(\mathbb{R}^N, h_\kappa^2 \mathrm{d}m\right)$-范数非常困难。借助符号计算，可以求出低次数多项式及其范数，但这些方法无法为所有次数构造显式基。关于范数有一个有限的结果，它推广了命题 12。

命题 26 假设 $p,q \in \mathcal{P}_{n,\kappa}$和 $m, n = 1, 2, 3, \ldots$和 $p_{n,m}(x) := L_m^{(\alpha)}\left(\omega|x|^2\right) p(x)$, $q_{n,m}(x) := L_m^{(\alpha)}\left(\omega|x|^2\right) q(x)$ $(\alpha = \frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n - 1)$ 则$\langle p_{n,m}, q_{n,m}\rangle_2 = \frac{1}{n!}\left(\frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n\right)_m \langle p, q\rangle_2$。

证明。$\pi_{n+2m} p_{n,m} = \frac{(-1)^m}{m!}\omega^m |x|^{2m} p(x)$（$\pi_{n+2m} q_{n,m}$ 的情况类似），并由定理

$$\langle p_{n,m}, q_{n,m}\rangle_2 = \pi_{n+2m} p_{n,m}\left(\frac{1}{2\omega}\nabla_\kappa\right)\pi_{n+2m} q_{n,m}(x)$$

$$= \frac{1}{2^{2m}(m!)^2}\Delta_\kappa^m p\left(\frac{1}{2\omega}\nabla_\kappa\right)|x|^{2m} q(x) = \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} p\left(\frac{1}{2\omega}\nabla_\kappa\right)\Delta_\kappa^m |x|^{2m} q(x)$$

$$= \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} p\left(\frac{1}{2\omega}\nabla_\kappa\right) 2^{2m} m!\left(\frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n\right)_m q(x)$$

$$= \frac{1}{m!}\left(\frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n\right)_m p\left(\frac{1}{2\omega}\nabla_\kappa\right) q(x) = \frac{1}{m!}\left(\frac{N}{2} + \gamma_\kappa + n\right)_m \langle p, q\rangle_2.$$

注：$\boldsymbol{E}p = p$ 因为 $\Delta_\kappa p = 0$。 ■

3 二十面体群

3.1 几何性质

H_3 型正根系为

$$R_+ = \left\{ \begin{array}{c} (2,0,0),(0,2,0),(0,0,2),(\tau,\pm\tau^{-1},\pm 1), \\ (\pm 1,\tau,\pm\tau^{-1}),(\tau^{-1},\pm 1,\tau),(-\tau^{-1},1,\tau),(\tau^{-1},1,-\tau) \end{array} \right\},$$

其中，$\pm$ 中的符号选择彼此独立，且这些根满足 $\langle v、\ u_0\rangle > 0$、$u_0 := (3、\ 2\tau、\ 1)$，$\tau$表示黄金比例[1] $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$。因此 $\tau^2 = \tau + 1$。以下记 $G := W(H_3)$，即二十面体群。它是正二十面体的对称群，

$$\mathcal{I} := \{(0,\pm\tau,\pm 1),(\pm 1,0,\pm\tau),(\pm\tau,\pm 1,0)\}$$

（12 个顶点，20 个三角形面）以及正十二面体的对称群

$$\mathcal{K} := \{(0,\pm\tau^{-1},\pm\tau),(\pm\tau,0,\pm\tau^{-1}),(\pm\tau^{-1},\pm\tau,0),(\pm 1,\pm 1,\pm 1)\}$$

（20 个顶点，12 个五边形面）；详情见 Coxeter [1, 第 II 章]。令 $\mathcal{I}'$、$\mathcal{K}'$ 表示 $\mathcal{I}$上的点，并将其归一化至单位球面上。15 个大圆 $\{x : |x| = 1、\ \langle x、\ v\rangle = 0\}$ 对于 $v \in R_+$ 构成一个球面复形，包含 120 个三角形区域，其顶点为 $\mathcal{I}' \cup \mathcal{K}'$，以及 $\mathcal{K}'$ 的 30 条边的中点（等价地说，是 $\mathcal{I}'$ 或 $\mathcal{K}'$的顶点、面中心和边中心）。根据反射群的一般理论 $\#G = 120$。任意一个球面三角形的内角为 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{\pi}{3}$、$\frac{\pi}{5}$。沿单根$v_1 = (\tau、\ -\tau^{-1}、\ -1)$、$v_2 = (-1、\ \tau、\ -\tau^{-1})$、$v_3 = (\tau^{-1}、\ -1、\ \tau)$的反射生成 G，而区域 $\{x : \langle x、\ v_i\rangle > 0、\ i = 1、2、3\}$ 是基本区域，与单位球面的交点为$\frac{1}{\sqrt{\tau+2}}(\tau、1、0)$、$\frac{1}{\sqrt{3}}(1、1、1)$、$\frac{1}{2}(1、\tau、\tau^{-1})$。基本次数为 2、6、10，$G$-不变多项式的环 $\mathcal{P}^G$ 由 $|x|^2$、$\prod \langle u、\ x\rangle$、$\prod \langle u、\ x\rangle$ 生成，其中 $\mathcal{I}_+ := \{u \in \mathcal{I} : \langle u、\ u_0\rangle > 0\}$（对于 $\mathcal{K}_+$也类似$u\in\mathcal{I}_+$ $u\in\mathcal{K}_+$，从每对对踵点中各取一个因子）。这些乘积是不变量，因为任意反射的作用都会改变偶数个符号。多项式 $(1+t)(1+5t)(1+9t)$ $= 1+15t+59t^2+45t^3$ 表明，G 有 15 个反射、59 个平面旋转，以及 45 个无不动向量的变换。

[1]有些文献使用 ϕ 表示黄金比例，而我们遵循 Coxeter 的 [1] 用法。

3.2 解析方面

G 中只有一个反射共轭类，且只有一个参数 κ，因此 $\gamma_\kappa = 15\kappa$。此外 $\dim \mathcal{P}_n = \binom{n+2}{2}$，所以能量本征值 $E_n = \omega\,(3 + 30\kappa + 2n)$ 的重数为 $\binom{n+2}{2}$。由分解 $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,\kappa} \oplus |x|^2 \mathcal{P}_{n-2}$ 可得 $\dim \mathcal{P}_{n,\kappa} = 2n + 1$。令 $\mathcal{P}^G$: $= \{p \in \mathcal{P} : wp = p\ \forall w \in G\}$，表示 G-不变多项式。 $\mathcal{P}^G$ 和调和不变量的 Poincar´e 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim\left(\mathcal{P}^G \cap \mathcal{P}_n\right) t^n = \left[\left(1-t^2\right)\left(1-t^6\right)\left(1-t^{10}\right)\right]^{-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \dim\left(\mathcal{P}^G \cap \mathcal{P}_{n,\kappa}\right) t^n = \left[\left(1-t^6\right)\left(1-t^{10}\right)\right]^{-1}$$

分别。注意，满足 $\dim\left(\mathcal{P}^G \cap \mathcal{P}_{n,\ \kappa}\right) \geq 2$ 的最低次数为 n =30。

对于每个 $y \in \mathcal{I}$，有 5 个反射固定 y，其余 10 个则将 y 映射到 $\mathcal{I} \backslash \{\pm y\}$的各点。这个事实将在构造特殊多项式时用到；借助这些多项式，可以轻松计算 ∇_κ 和Δ_κ的作用。

H_3 的归一化常数 (10) 最初由 F. Garvan[8]证明（通过概念性方法列出 100 多个线性方程，再由计算机求解）；之后，Etingof [6]给出了一个证明，该证明适用于所有只有一个反射共轭类的反射群。

定理 27 对于 $\kappa > 0$、 $\omega > 0$ 和 h_κ （x）：$=$ $\prod |\langle x, v\rangle|^{\kappa_{v \in R_+}}$

$$c_{\kappa,\omega}^{-1} := \int_{\mathbb{R}^3} h_\kappa(x)^2 \exp\left(-\omega |x|^2\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(2\kappa+1)\,\Gamma(6\kappa+1)\,\Gamma(10\kappa+1)}{\omega^{15\kappa}\Gamma(\kappa+1)^3}.$$

证明。Etingof 给出的一般公式使用 $\omega = \frac{1}{2}$ 以及满足$|v|^2 = 2$的根。 R_+ 中的根都满足 $|v|^2 = 4$。经过变量替换即可得到所述公式。

■

交错多项式 $a_G(x)$ 的平方的积分：$=$ $\prod \langle x, v\rangle$，也就是说， $a_G\left(\frac{1}{2\omega}\nabla_\kappa\right) a_G(x)$，通过符号计算（只需几分钟的 CPU 时间）即可得出

$$\frac{c_{\kappa,\omega}}{c_{\kappa+1,\omega}} = \frac{120}{\omega^{15}}(2\kappa+1)\,(6\kappa+1)_5\,(10\kappa+1)_9\,.$$

命题17适用于 $\mathcal{I}_+$ ，因为 $\mathcal{I}$ 是一个 G-轨道，这引出了以下内容：

定义28 对于 $k = 1,2,3,\ldots$，令 $H^{(k)} := \sum_{y\in\mathcal{I}_+} H_y^k$。

回忆一下 $\mathcal{I}_+ = \{(0,\tau,\pm1),(1,0,\pm\tau),(\tau,\pm1,0)\}$。由命题 (16) 和 (17)，$\left[\mathcal{H}, H^{(k)}\right] = 0$ 和 $\left[w, H^{(k)}\right] = 0$ 对于 $k = 1,2,\ldots$ 以及 $w \in G$。就对多项式的作用而言

$$\widetilde{H}^{(k)} = g^{-1}H^{(k)}g = \sum_{y\in\mathcal{I}_+} \left\{\omega\left(\langle y,x\rangle\langle y,\nabla_\kappa\rangle + \langle y,\nabla_\kappa\rangle\langle y,x\rangle\right) - \langle y,\nabla_\kappa\rangle^2\right\}^k$$

因此 $\widetilde{H}^{(k)}$ 将 $\mathcal{P}^G$ 映射到 $\mathcal{P}^G$。方程 $\sum_{y\in\mathcal{I}_+}\langle x,y\rangle^2 = 2(\tau+2)\,|x|^2$ 表明 $H^{(1)} = 2(\tau+2)\,\mathcal{H}$。$H^{(2)}$、$\mathcal{H}$、$\mathcal{J}$ 和 G 之间存在函数关系。为表述这一关系，我们使用

$$\begin{aligned}
G_{\mathrm{rot}} &= \{w \in G : \det w = 1, w \neq I\}\\
\rho_2 &= \left\{w \in G_{\mathrm{rot}} : w^2 = I\right\},\\
\rho_3 &= \left\{w \in G_{\mathrm{rot}} : w^3 = I\right\},\\
\rho_{5,1} &= \left\{w \in G_{\mathrm{rot}} : w^5 = I, \mathrm{tr}\ w = \tau\right\}\\
\rho_{5,2} &= \left\{w \in G_{\mathrm{rot}} : w^5 = I, \mathrm{tr}\ w = 1-\tau\right\}
\end{aligned}$$

那么，$G_{\mathrm{rot}} = 59$，ρ_3 由 20 个旋转组成，它们固定 $\mathcal{K}$，$\rho_{5,\,1}$，$\rho_{5,\,2}$ 分别由 12 个 $\frac{2\pi}{5}$、$\frac{4\pi}{5}$ 的旋转组成，这些旋转固定 $\mathcal{I}$ 的一对对踵顶点；而 ρ_2 由 15 个绕 $\mathcal{I}$ 的边中点旋转组成。通过符号计算机计算（见附录）

$$\begin{aligned}
H^{(2)} &= 6(\tau+1)\mathcal{H}^2 + 8\omega^2(\tau+1)\mathcal{J} - 24\omega^2(\tau+1) \qquad (12)\\
&\quad - 32\omega^2(\tau+1)\kappa\sum_{v\in R_+}\sigma_v - 32\omega^2(\tau+1)\kappa^2\sum_{w\in\rho_2} w - 36\omega^2(\tau+1)\kappa^2\sum_{w\in\rho_3} w\\
&\quad - 20\omega^2(\tau+2)\kappa^2\sum_{w\in\rho_{5,1}} w - 20\omega^2(4\tau+3)\kappa^2\sum_{w\in\rho_{5,2}} w.
\end{aligned}$$

在 $\mathcal{P}^G$ 上，群项化为常数 $-24\omega^2(\tau+1)(10\kappa+1)^2$。注意，群项是对陪集求和，因此在 G 的群代数中是中心元。由于 $\mathcal{J}$ 与群作用对易，上述关系表明 $\left[H^{(2)},\mathcal{J}\right] = 0$。

为了构造一个与 $\mathcal{H}$ 和 G 对易且在函数上独立于 $\mathcal{H}$、$\mathcal{J}$ 的算子，我们提升到 $H^{(3)}$。在 $\kappa=0$ 层次进行相对快速的符号计算表明 $\left[H^{(3)},\mathcal{J}\right]\neq 0$，从而确立了独立性。（类似地，在 $\kappa=0$ 层次进行计算表明 $\left[H^{(3)},H^{(5)}\right]\neq 0$。）这在启发式上是合理的，因为最低次数的相互独立的 G-不变多项式的次数为 2、6、10，因此 $\mathcal{H}$、$H^{(3)}$ 和 $H^{(5)}$ 也是如此。回顾一下，$H^{(k)}$ 在 $L^2\left(\mathbb{R}^3\right.$ 中是自伴的，$\left.h_\kappa^2\mathrm{d}m\right)$.

4 显式二十面体波函数

4.1 定义和基本性质

这些多项式由生成函数定义。

定义29 对于 $y_0\in\mathcal{I}$ 和 $x\in\mathbb{R}^3$，令

$$F\left(r,x;y_0\right)=\left(1-r\left\langle x,y_0\right\rangle\right)^{-1}\prod_{y\in\mathcal{I}}\left(1-r\left\langle x,y\right\rangle\right)^{-\kappa}=\sum_{n=0}^{\infty}q_n\left(x;y_0\right)r^n.$$

令 $F_0(r;\,x,y)=\prod(1-r\left\langle x,y\right\rangle)^{-\kappa}=:\sum_{n=0}^{\infty}p_{2n}(x)\,r^{2n}$（因为 $y\in\mathcal{I}$ $\mathcal{I}$蕴含 $-y\in\mathcal{I}$），因此 $q_n(x;\,y_0)=\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left\langle x,y_0\right\rangle^{n-2j}p_{2j}(x)$。此外，$q_n$ $(x;\,-y_0)=q_n(-x;\,y_0)=(-1)^n\,q_n(x;\,y_0)$。

定理30 假设 $u\in\mathbb{R}^3$ 和 $y_0\in\mathcal{I}$，则

$$\left\langle u,\nabla_\kappa\right\rangle F\left(r,x;y_0\right)=\left\langle u,y_0\right\rangle\left(\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}+r\left(1+11\kappa\right)\right)F\left(r,x;y_0\right)-\kappa rF\left(-r,x;y_0\right)\right).$$

证明。乘积 F_0 具有 G 不变性，且适用 ∇_κ 的乘积法则。令 $f_0(r,x;\,y_0)=(1-r\left\langle x,y_0\right\rangle)^{-1}$。利用对数导数

$$\frac{1}{F}\left\langle u,\nabla_\kappa\right\rangle F=\frac{\left\langle u,\nabla\right\rangle F_0}{F_0}+\frac{\left\langle u,\nabla\right\rangle f_0}{f_0}+\kappa\sum_{v\in R_+}\frac{f_0\left(r,x;y_0\right)-f_0\left(r,x\sigma_v;y_0\right)}{\left\langle x,v\right\rangle f_0\left(r,x;y_0\right)}\left\langle u,v\right\rangle.$$

前两项为

$$\frac{\left\langle u,\nabla\right\rangle F_0}{F_0}+\frac{\left\langle u,\nabla\right\rangle f_0}{f_0}=\sum_{y\in\mathcal{I}}\frac{r\kappa\left\langle u,y\right\rangle}{1-r\left\langle x,y\right\rangle}+\frac{r\left\langle u,y_0\right\rangle}{1-r\left\langle x,y_0\right\rangle}$$

而对 R_+ 求和为

$$\kappa\sum_{v\in R_+}\frac{f_0(r,x;y_0)-f_0(r,x\sigma_v;y_0)}{\langle x,v\rangle f_0(r,x;y_0)}\langle u,v\rangle=\kappa\sum_{v\in R_+}\frac{\langle u,v\rangle}{\langle x,v\rangle}\left\{1-\frac{1-r\langle x,y_0\rangle}{1-r\langle x\sigma_v,y_0\rangle}\right\}$$
$$=\kappa\sum_{v\in R_+}\frac{r\langle u,v\rangle}{\langle x,v\rangle}\frac{\langle x,y_0\rangle-\langle x\sigma_v,y_0\rangle}{1-r\langle x\sigma_v,y_0\rangle}=\kappa\sum_{v\in R_+}\frac{2r}{|v|^2}\frac{\langle u,v\rangle\langle y_0,v\rangle}{1-r\langle x\sigma_v,y_0\rangle}.$$

固定 y_0 的五个反射不会出现在求和中。对于每个 $y\in\mathcal{I}\setminus\{\pm y_0\}$，存在唯一的 $v\in R_+$ 使得 $y_0\sigma_v=y$；因此，项 $1-r\langle x,y\rangle$ 在 $\frac{1}{F}\langle u,\nabla_\kappa\rangle F$ 中以系数

$$\overline{r\kappa\left\{\langle u,y\rangle+\tfrac{2}{|v|^2}\langle u,v\rangle\langle y_0,v\rangle\right\}}=r\kappa\left\{\langle u,y_0\sigma_v\rangle+\tfrac{2}{\|v\|^2}\langle u,v\rangle\langle y_0,v\rangle\right\}=r\kappa\langle u,y_0\rangle$$

出现（根据 $\langle x\sigma_v,y_0\rangle=\langle x,y_0\sigma_v\rangle$ 以及 $y_0\sigma_v$ 的定义）。项 $\frac{1}{1-r\langle x,y_0\rangle}$ 和 $\frac{1}{1+r\langle x,y_0\rangle}$ 分别以系数 r（$\kappa+1$）$\langle u,y_0\rangle$ 和 $-r\kappa\langle u,y_0\rangle$ 出现。因此

$$\frac{1}{F}\langle u,\nabla_\kappa\rangle F=\kappa r\langle u,y_0\rangle\sum_{y\in\mathcal{I}\setminus\{\pm y_0\}}\left\{1+\frac{r\langle x,y\rangle}{1-r\langle x,y\rangle}\right\}+r(\kappa+1)\langle u,y_0\rangle\left\{1+\frac{r\langle x,y_0\rangle}{1-r\langle x,y_0\rangle}\right\}$$
$$-\langle u,y_0\rangle\left\{\frac{\kappa r\langle x,y_0\rangle}{1+r\langle x,y_0\rangle}+\kappa\frac{1-r\langle x,y_0\rangle}{1+r\langle x,y_0\rangle}\right\}$$
$$=\frac{\langle u,y_0\rangle}{F}\left\{\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}+r(1+11\kappa)\right)F(r,x;y_0)-\kappa rF(-r,x;y_0)\right\};$$

注意，$\#_{y_0}(\mathcal{I}\setminus\{\pm y_0\})=10$ 和 $F(-r,x;y_0)F(r,x;y_0)=\frac{1-r\langle x,y_0\rangle}{1+r\langle x,y_0\rangle}$。这就完成了证明。■

推论 **31** $\langle u,\nabla_\kappa\rangle q_{2n}(x;y_0)=2\langle u,y_0\rangle(6\kappa+n)q_{2n-1}(x;y_0)$ 以及 $\langle u,\nabla_\kappa\rangle q_{2n+1}(x;y_0)=\langle u,y_0\rangle(10\kappa+2n+1)q_{2n}(x;y_0)$。

证明。

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n\langle u,\nabla_\kappa\rangle q_n(x;y_0)=\langle u,y_0\rangle\begin{pmatrix}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}+r(1+11\kappa)\right)\sum_{n=0}^{\infty}r^nq_n(x;y_0)\\-\kappa r\sum_{n=0}^{\infty}(-r)^nq_n(x;y_0)\end{pmatrix}$$
$$=\langle u,y_0\rangle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{n+1+11\kappa+(-1)^{n+1}\kappa\right\}r^{n+1}q_n(x;y_0).$$

■

这是一个优美公式；一般来说，$\langle u,\nabla_\kappa\rangle$ 的作用相当复杂——例如 $\mathcal{D}_1x_1^3=\left(3+\frac{23}{2}\kappa\right)x_1^2-\frac{\kappa}{2}(\tau-7)x_2^2+\frac{\kappa}{2}(\tau+6)x_3^2$。

相比之下，令 $y_0 = (0, \tau, 1)$，则 $q_2(x;\ y_0) = (\tau x_2 + x_3)^2 + 2(\tau+2)\ |x|^2$,$q_3(x;\ y_0) = (\tau x_2 + x_3)\ q_2(x;\ y_0)$ 和 $\langle u, \nabla_\kappa \rangle\, q_3(x;\ y_0) = (\tau u_2 + u_3)\,(10\kappa+3)\ q_2(x;\ y_0)$.

回顾（见 [5, 第 6.5] 节），满足 $\langle u、\nabla_\kappa \rangle\, Vp(x) = V(\langle u, \nabla \rangle\, p(x))$、$V1 = 1$，且 $p \in \mathcal{P}_n$ 蕴含 $Vp \in \mathcal{P}_n$ 的交织算子 V。

定义 32 对于 $n = 0$，令 1、2、.....中的每一个 $\nu(n) = 2^n(6\kappa+1)$ $_s\left(5\kappa + \frac{1}{2}\right)_t$，其中 $s = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$、$t = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$。

命题 33 假设 $y_0 \in \mathcal{I}$，则 $V(\langle x, y_0 \rangle^n) = {}^{n}!\ \nu(n)^{q_n}(x;\ y_0)$。

证明。使用归纳法。对于 $n = 0.$，该公式显然成立。假设 n 为奇数，且该公式对 $n-1$ 成立，则

$$\begin{aligned}
\langle u, \nabla_\kappa \rangle \frac{n!}{\nu(n)} q_n(x; y_0) &= \langle u, y_0 \rangle \frac{n!}{\nu(n)} (10\kappa + n)\, q_{n-1}(x; y_0) \\
\langle u, \nabla_\kappa \rangle (V \langle x, y_0 \rangle^n) &= V(\langle u, \nabla \rangle \langle x, y_0 \rangle^n) = n \langle u, y_0 \rangle V \langle x, y_0 \rangle^{n-1} \\
&= n \langle u, y_0 \rangle \frac{(n-1)!}{\nu(n-1)} q_{n-1}(x; y_0),
\end{aligned}$$

其中 $\frac{10\kappa + n}{\nu\ n}(\ ) = \frac{1}{\nu\ (n-1)}$. 假设 n 为偶数，且该公式对$n-1$成立，则

$$\begin{aligned}
\langle u, \nabla_\kappa \rangle \frac{n!}{\nu(n)} q_n(x; y_0) &= \langle u, y_0 \rangle \frac{n!}{\nu(n)} (12\kappa + n)\, q_{n-1}(x; y_0) \\
\langle u, \nabla_\kappa \rangle (V \langle x, y_0 \rangle^n) &= V(\langle u, \nabla \rangle \langle x, y_0 \rangle^n) = n \langle u, y_0 \rangle V \langle x, y_0 \rangle^{n-1} \\
&= n \langle u, y_0 \rangle \frac{(n-1)!}{\nu(n-1)} q_{n-1}(x; y_0),
\end{aligned}$$

且 $\frac{12\kappa + n}{\nu\ n}(\ ) = \frac{1}{\nu\ (n-1)}$。 ■

推论 34 假设 $y_0 \in \mathcal{I}$，则 $\Delta_\kappa q_n(x; y_0) = {}^{\nu}(n)\, \nu(n-2)\,(\tau+2)\ q_{n-2}(x; y_0)$，且 $\Delta_\kappa^m q_n(x; y_0) = {}^{\nu}(n)\, \nu(n-2m)\,(\tau+2)^m\, q_{n-2m}(x;\ y_0)$。

证明。注意 $\Delta \langle x, y \rangle^n = n(n-1)\ |y|^2 \langle x, y \rangle^{n-2}$ 和 $|y_0|^2 = \tau^2 + 1 = \tau + 2$。

我们有

$$\begin{aligned}\Delta_{\kappa}q_{n}\left(x;y_{0}\right) &= \frac{\nu\left(n\right)}{n!}\Delta_{\kappa}V\left(\left\langle x,y_{0}\right\rangle^{n}\right) = \frac{\nu\left(n\right)}{n!}V\left(\Delta\left\langle x,y_{0}\right\rangle^{n}\right)\\ &= \frac{\nu\left(n\right)}{n!}n\left(n-1\right)\left(\tau+2\right)V\left(\left\langle x,y_{0}\right\rangle^{n-2}\right)\\ &= \frac{\nu\left(n\right)}{n!}\left(\tau+2\right)\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)!}{\nu\left(n-2\right)}q_{n-2}\left(x;y_{0}\right).\end{aligned}$$

■

该推论给出了所需公式，可用于求出最高次数部分为 $q_{n}\left(x;y_{0}\right)$ 的波函数，并构造调和多项式。注意

$$\frac{\nu\left(2n\right)}{\nu\left(2n-2m\right)} = 2^{2m}\left(-6\kappa-n\right)_{m}\left(-5\kappa+\frac{1}{2}-n\right)_{m} \tag{13}$$

$$\frac{\nu\left(2n+1\right)}{\nu\left(2n+1-2m\right)} = 2^{2m}\left(-6\kappa-n\right)_{m}\left(-5\kappa-\frac{1}{2}-n\right)_{m}. \tag{14}$$

4.2 波函数与调和多项式

根据命题 10 $\left(\exp\left(-\frac{\Delta_{\kappa}}{4\omega}\right)q_{n}\left(x;\ y_{0}\right)\right)g$ 是一个波函数，其最高次数项为 $q_{n}\left(x;y_{0}\right)$。对于群 G，能量本征值特化为 $E_{n}=\omega\left(30\kappa+2n+3\right)$。

定义 35 对于 $y_{0}\in\mathcal{I}$ 和 $n=1,2,3,\ldots,$ 令

$$w_{n}\left(x;y_{0}\right) := \sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left(-1\right)^{j}\frac{\left(\tau+2\right)^{j}}{\left(4\omega\right)^{j}j!}\frac{\nu\left(n\right)}{\nu\left(n-2j\right)}q_{n-2j}\left(x;y_{0}\right).$$

由推论 34 $\Delta_{\kappa}^{j}w_{n}\left(x;\ y_{0}\right) = \nu\left(n\right)\nu\left(n-2j\right)\left(\tau+2\right)^{j}w_{n-2j}\left(x;\ y_{0}\right)$。因此 $\mathcal{H}w_{n}\left(x;\ y_{0}\right) = \omega\left(15\kappa+2n+3\right)w_{n}\left(x;\ y_{0}\right)$。我们利用定理 25 求出 $\left\langle w_{n}\left(\cdot;\ y_{0}\right)\ w\left(\cdot;y_{1}\right)\right\rangle_{2}$。引理 36 设 $p\in\mathcal{P}_{n}$ 且 $y_{0}\in\mathcal{I}$，则 $\left\langle p,q_{n}\left(\cdot;\ y_{0}\right)\right\rangle_{\kappa,\omega} = \left(2\omega\right)^{-n}\nu\left(n\right)p\left(y_{0}\right)$。

证明。根据命题 33 $q_{n}\left(x;\ y_{0}\right) = \nu\left(n\right)n!\ V\left(\left\langle x,y_{0}\right\rangle^{n}\right)$ 因此

$$\begin{aligned}p\left(\nabla_{\kappa}\right)q_{n}\left(x;y_{0}\right) &= \frac{\nu\left(n\right)}{n!}p\left(\nabla_{\kappa}\right)V\left(\left\langle x,y_{0}\right\rangle^{n}\right) = \frac{\nu\left(n\right)}{n!}V\left(p\left(\nabla\right)\left\langle x,y_{0}\right\rangle^{n}\right)\\ &= \frac{\nu\left(n\right)}{n!}\left\langle y_{0},\nabla\right\rangle^{n}p\left(x\right) = \nu\left(n\right)p\left(y_{0}\right).\end{aligned}$$

这使用了 $V1=1$ 和 $p,\ q\in\mathcal{P}_n$ 意味着 $p(\nabla)\ q(x)\ =q(\nabla)p(x)$。■

根据定理 25 和引理

$$\langle w_n(\cdot;y_0),w_n(\cdot;y_1)\rangle_2=\langle q_n(\cdot;y_1),q_n(\cdot;y_0)\rangle_{\kappa,\omega}=(2\omega)^{-n}\nu(n)\,q_n(y_1;y_0). \tag{15}$$

$\{y_0,y_1\}$有两种情况：(1) $y_1=\pm y_0$ 和 $\langle y_0,y_1\rangle=\pm(\tau+2)$; (2)$\langle y_0,y_1\rangle=\pm\tau$。列表 $[\langle y,y_1\rangle:\ y\in\mathcal{I}_+]$ 由 $(\tau+2)\ -(\tau+2)$ 组成，其中 $\tau,-\tau$ 各出现 5 次，因此 $\prod(1-r\langle y_1,y\rangle)^{-\kappa}=\left(1-5\tau^2r^2\right)^{-\kappa}\left(1-\tau^2r^2\right)^{-5\kappa}{}_{y\in\mathcal{I}}$ (因为 $(\tau+2)^2=5\tau^2$)。由于 $q_n(x;\ -y_1)\ =(-1)^n\,q_n(x;\ y_1)$，只需考虑 $\langle y_0,y_1\rangle=\tau+2,\tau$。如果 $y_1=y_0$，那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}q_n(y_0;y_0)\,r^n&=(1-(\tau+2)\,r)^{-1}\left(1-5\tau^2r^2\right)^{-\kappa}\left(1-\tau^2r^2\right)^{-5\kappa}\\&=(1+(\tau+2)\,r)\left(1-5\tau^2r^2\right)^{-\kappa-1}\left(1-\tau^2r^2\right)^{-5\kappa},\end{aligned}$$

且如果 $\langle y_0,y_1\rangle=\tau$ 那么

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}q_n(y_0;y_1)\,r^n&=(1-\tau r)^{-1}\left(1-5\tau^2r^2\right)^{-\kappa}\left(1-\tau^2r^2\right)^{-5\kappa}\\&=(1+\tau r)\left(1-5\tau^2r^2\right)^{-\kappa}\left(1-\tau^2r^2\right)^{-5\kappa-1}.\end{aligned}$$

定义 37 对于 $n=0,1,2,\ldots$令

$$Y_n^{(0)}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\kappa+1)_j\,(5\kappa)_{n-j}}{j!\,(n-j)!}5^j,\ Y_n^{(1)}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\kappa)_j\,(5\kappa+1)_{n-j}}{j!\,(n-j)!}5^j.$$

根据负二项级数 $q_{2n}(y_0;\ y_0)\ =\ \tau^{2n}Y_{(0)n},q_{2n+1}(y_0;\ y_0)\ =\tau^{2n}(\tau+2)\ Y_{(0)n}$，且如果 $\langle y_0,y_1\rangle=\tau$那么 $q_{2n}(y_0;\ y_1)\ =\tau^{2n}Y_{(1)n}$，并且 $q_{2n+1}(y_0;\ y_1)\ =\tau^{2n+1}Y_{(1)n}$。根据方程 (15)

$$\begin{aligned}\|w_{2n}(\cdot;y_0)\|_2^2&=(2\omega)^{-2n}\nu(2n)\,\tau^{2n}Y_n^{(0)},\\\|w_{2n+1}(\cdot;y_0)\|_2^2&=(2\omega)^{-2n-1}\nu(2n+1)\,(\tau+2)\,\tau^{2n}Y_n^{(0)},\end{aligned} \tag{16}$$

且如果 $\langle y_0,y_1\rangle=\tau$ 那么

$$\begin{aligned}\langle w_{2n}(\cdot;y_0),w_{2n}(\cdot;y_1)\rangle_2&=(2\omega)^{-2n}\nu(2n)\,\tau^{2n}Y_n^{(1)}\\\langle w_{2n+1}(\cdot;y_0),w_{2n+1}(\cdot;y_1)\rangle_2&=(2\omega)^{-2n}\nu(2n+1)\,\tau^{2n+1}Y_n^{(1)}.\end{aligned} \tag{17}$$

通过将命题 2 特化为 $N=3$、$\gamma_\kappa=15\kappa$ 来构造调和多项式。

定义38 对于 $y_0 \in \mathcal{I}$ 和 $n = 1$、2、3、....., 令

$$\phi_n(x; y_0) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(\tau+2)^j |x|^{2j}}{4^j j! (-15\kappa - n + 1/2)_j} \frac{\nu(n)}{\nu(n-2j)} q_{n-2j}(x; y_0).$$

根据推论 34 $\Delta_\kappa \phi_n(\cdot; y_0) = 0$ 和 $\phi_n(\cdot; y_0)$ g 是一个波函数（能量本征值 E_n）。内积 $\langle \phi_n(\cdot; y_0) \quad \phi_n(\cdot; y_1) \rangle_2 = \langle \phi_n(\cdot; y_1) \quad \phi_n(\cdot; y_0) \rangle_{\kappa,\ \omega}$比前一种情况复杂。

定理39 对于 $y_0, y_1 \in \mathcal{I}$

$$\langle \phi_n(\cdot; y_0), \phi_n(\cdot; y_1) \rangle_2 = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2\omega)^{-n} (\tau+2)^{2j}}{4^j j! (-15\kappa - n + 1/2)_j} \frac{\nu(n)^2}{\nu(n-2j)} q_{n-2j}(y_0; y_1).$$

Abbreviate $d_{n,j} = \dfrac{(\tau+2)^j}{4^j j! (-15\kappa - n + 1/2)_j} \dfrac{\nu(n)}{\nu(n-2j)}$. Then

$$(2\omega)^n \langle \phi_n(\cdot; y_0), \phi_n(\cdot; y_1) \rangle_{\kappa,\omega} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n,j} \Delta_\kappa^j q_{n-2j}(\nabla_\kappa; y_0) \phi_n(x; y_1)$$

$$= q_n(\nabla_\kappa; y_0) \phi_n(x; y_1) = \nu(n) \phi_n(y_0; y_1) = \nu(n) \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} d_{n,j} |y_0|^{2j} q_{n-2j}(y_0; y_1).$$

这里用到了引理 36, $\Delta_\kappa^{2j} \phi_n(\cdot; y_1) = 0$, 适用于 $j > 0$ 和 $|y_0|^2 = \tau + 2$。
注意$\langle \phi_n(\cdot;\ y_0) \quad \phi_n(\cdot;\ y_1) \rangle_2 = \ ^{\nu}{}_{(n)} \quad {}_{(2\omega)\ n} \phi_n(y_1;\ y_0)$。

这里可以使用拉盖尔多项式进行乘法。根据命题 12 和 26, 多项式 $f_{n,\ m}(x) = L_m^{(15\kappa+n+1/2)}\left(\omega |x|^2\right) \phi_n(x; y_0)$ 满足 $\widetilde{\mathcal{H}} f_{n,\ m} = E_{n+2m} f_{n,\ m}$ 和 $\| f_{n,\ m} \|_2^2 = \frac{1}{m!} \left(\frac{3}{2} + 15\kappa + n\right)_m \quad \|\phi_n\|_2^2$。此外, 根据推论 13, $\Delta_\kappa f_{n,\ m} = -4\omega \left(15\kappa + n + m + \frac{1}{2}\right) f_{n,\ m-1}$。

命题 40 假设 $n = 2,3, \ldots$和 $y \in \mathcal{I}$, 那么

$$w_n(x; y) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(-\frac{\tau+2}{4\omega}\right)^j \frac{1}{(15\kappa + 3/2 + n - 2j)_j} \times \frac{\nu(n)}{\nu(n-2j)} L_j^{(15\kappa+1/2+n-2j)}\left(\omega |x|^2\right) \phi_{n-2j}(x; y).$$

证明。将命题 14 特化到 $N = 3, \gamma_\kappa = 15\kappa$。根据定义 $w_n(\cdot;\ y) = \exp\left(-\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right) q_n(\cdot;\ y)$ 和 $\Delta_\kappa^j q_n(\cdot;\ y) = (\tau+2)^j \quad {}^{\nu}{}_{(n)\nu(n-2j)} q_{n-2j}(\cdot;\ y)$。最后 $\Lambda_{n-2j} q_{n-2j}(\cdot; y) = \phi_{n-2j}(\cdot;\ y)$（根据定义38）。 ■

4.3 G-不变波函数

G-不变多项式的次数全为偶数，其中一些可以通过对 $y \in \mathcal{I}_+$ 求和 $q_{2n}(\cdot; y)$ 得到。

定义 41 对于 $n = 1, 2, 3\ldots$，令 $q_{2n}^G(x) = \sum_{y\in\mathcal{I}_+} q_{2n}(x;\ y)$。

在公式 $q_{2n}(x;\ y_0) = \sum_{j=0}^{n} \langle x, y_0\rangle^{2n-2j} p_{2j}(x)$（回忆 $\sum_{j=0}^{\infty} p_{2n}(x) r^{2n} = \prod_{y\in\mathcal{I}_+} \left(1 - r^2 \langle x, y\rangle^2\right)^{-\kappa}$）中，项 $\langle x, y_0\rangle^{2m}$ 被 $s_{2m}(x) := \sum_{y\in\mathcal{I}_+} \langle x, y\rangle^{2m}$ 替换。简单计算可得

$$\begin{aligned} s_{2m}(x) &= 2\left(\tau^{2m}+1\right)\left(x_1^{2m}+x_2^{2m}+x_3^{2m}\right) \\ &\quad + 2\sum_{j=1}^{m-1}\binom{2m}{2j}\tau^{2j}\left\{x_1^{2j}x_2^{2m-2j}+x_2^{2j}x_3^{2m-2j}+x_3^{2j}x_1^{2m-2j}\right\}. \end{aligned}$$

一些低次数的例子为

$$\begin{aligned} s_2(x) &= 2(\tau+2)|x|^2,\ s_4(x) = 6(\tau+2)|x|^4, \\ s_6(x) &= 4(4\tau+3)|x|^6 + 6(2\tau-1)\prod_{y\in\mathcal{I}_+}\langle x, y\rangle, \\ s_{10}(x) &= 5(5\tau+3)\prod_{y\in\mathcal{K}_+}\langle x, y\rangle + 75(3\tau+1)|x|^4\prod_{y\in\mathcal{I}_+}\langle x, y\rangle \\ &\quad + 10(11\tau+7)|x|^{10}. \end{aligned}$$

首先考虑由 q_{2n}^G 生成的不变波函数。

定义 42 对于 $n = 1,2, \ldots$，令

$$w_{2n}^G(x) := \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{(\tau+2)^j}{(4\omega)^j\, j!}\frac{\nu(2n)}{\nu(2n-2j)} q_{2n-2j}^G(x).$$

即为 $w_{2n}^G(x) = \sum_{y\in\mathcal{I}_+} w_{2n}(x; y)$，并且有 $\langle y_0, y_1\rangle = \tau$

$$\begin{aligned} \left\|w_{2n}^G\right\|_2^2 &= \sum_{y,y'\in\mathcal{I}_+}\left\langle w_{2n}(\cdot; y), w_{2n}\left(\cdot; y'\right)\right\rangle_2 \qquad (18) \\ &= 6\left\|w_{2n}(\cdot; y_0)\right\|_2^2 + 30\left\langle w_{2n}(\cdot; y_0), w_{2n}(\cdot; y_1)\right\rangle_2 \qquad (19) \\ &= 6(2\omega)^{-2n}\nu(2n)\tau^{2n}\left(Y_n^{(0)} + 5Y_n^{(1)}\right) \end{aligned}$$

由式 (16) 和 (17) 得到。对于超几何型多项式，有一个恒等式

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(\kappa+1)_j\,(5\kappa)_{n-j}}{j!\,(n-j)!}z^j+5\sum_{j=0}^{n}\frac{(\kappa)_j\,(5\kappa+1)_{n-j}}{j!\,(n-j)!}z^j=\left(6+\frac{n}{\kappa}\right)\sum_{j=0}^{n}\frac{(\kappa)_j\,(5\kappa)_{n-j}}{j!\,(n-j)!}z^j,$$

因此令 $Y_{(2)n}:=\left(6+\frac{n}{\kappa}\right)\sum_{j=0}^{n}(\kappa)j\quad n-j\quad(5\kappa)!\,()!\,5^j=Y_{(0)n}\quad+5Y$

$_{(1)n}$。

对调和多项式使用相同的思路。

对于 $n=1,\ 2,\ \ldots$令

$$\begin{aligned}\phi_{2n}^{G}(x)&:=\sum_{j=0}^{n}\frac{(\tau+2)^j\,|x|^{2j}}{4^j j!\,(-15\kappa-2n+1/2)_j}\frac{\nu(2n)}{\nu(2n-2j)}q_{2n-2j}^{G}(x)\\&=\sum_{y\in\mathcal{I}_+}\phi_{2n}(x;y).\end{aligned}$$

（因此，当 n 为偶数，并且将 $w_n(\cdot;y)$ $\phi_{n-2j}(\cdot;y)$ 分别替换为 w_n^G、ϕ_{n-2j}^G 时，命题 40 中的展开式成立。）当然，要使其非零，必须满足 $2n\neq 2,\ 4,\ 8,\ 14$。按照类似于 (18) 的计算

$$\begin{aligned}\left\|\phi_{2n}^{G}\right\|_2^2&=\sum_{y,y'\in\mathcal{I}_+}\left\langle\phi_{2n}(\cdot;y),\phi_{2n}\left(\cdot;y'\right)\right\rangle_2=6\left\|\phi_{2n}(\cdot;y_0)\right\|_2^2+30\left\langle\phi_{2n}(\cdot;y_0),\phi_{2n}(\cdot;y_1)\right\rangle_2\\&=6\tau^{2n}\frac{\nu(2n)}{(2\omega)^{2n}}\sum_{j=0}^{n}\frac{5^j\,(-6\kappa-n)_j\,(-5\kappa-n+1/2)_j}{j!\,(-15\kappa-2n+1/2)_j}Y_{n-j}^{(2)}.\end{aligned}$$

计算使用了$(\tau+2)^{2j}=5^j\tau^{2j}$以及由 (13) 得到的 $\nu(2n)/\nu(2n-2j)$ 的表达式。此外还有 $\left\|\phi_{2n}^{G}\right\|_2^2=6\ ^{\nu}{}_{(2n)\,(2\omega)_{2n}}\phi_{2n}^{G}(y)\quad y\in\mathcal{I}$。这个公式可用于次数相当小（约为 ≤ 50 ）时的符号计算。这是本文最有效的成果之一，因为不变调和多项式对于波函数分析至关重要。尝试通过符号计算直接计算 $\left\langle\phi_{2n}^{G},\phi_{2n}^{G}\right\rangle_{\kappa,\omega}$ 会变得非常

耗费时间和资源（针对 $2n>10$）。我们发现

$$\left\|\phi_6^G\right\|_2^2=\left(2^6\times 15\right)\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^6(6\kappa+1)_3\left(5\kappa+\frac{1}{2}\right)_3\frac{(5\kappa+1)(2\kappa+1)}{30\kappa+7}$$

$$\left\|\phi_{10}^G\right\|_2^2=\left(2^9\times 3\right)\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{10}(6\kappa+1)_5\left(5\kappa+\frac{1}{2}\right)_5\frac{(5\kappa+1)_2(6\kappa+5)}{(30\kappa+11)(30\kappa+17)}$$

$$\left\|\phi_{12}^G\right\|_2^2=\left(2^{11}\times 15\right)\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{12}(6\kappa+1)_6\left(5\kappa+\frac{1}{2}\right)_6\frac{(5\kappa+1)_3(\kappa+1)(10\kappa+9)}{(30\kappa+13)(30\kappa+19)(30\kappa+23)}$$

$$\left\|\phi_{16}^G\right\|_2^2=\left(2^{16}\times 15\right)\left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{16}(6\kappa+1)_8\left(5\kappa+\frac{1}{2}\right)_8$$
$$\times\frac{(5\kappa+1)_4(\kappa+1)(3\kappa+4)}{(30\kappa+17)(30\kappa+23)(30\kappa+27)(30\kappa+29)}.$$

对于 $n=1$、2、4、7，和必然为零。看来，如果 $\dim\left(\mathcal{P}_{2n,\ \kappa}\cap\mathcal{P}^G\right)=1$，那么平方范数就是关于 κ 的线性因子的商。在 $2n=30$ 处则不会出现这种情况，此时 $\dim\left(\mathcal{P}_{30,\ \kappa}\cap\mathcal{P}^G\right)=2$。其他 G-不变波函数也可以处理：令 $f_{n,\ m}^G(x)$ $=L_m^{(15\kappa+2n+1/2)}\left(\omega|x|^2\right)\phi_{2n}^G(x)$，则 $\widetilde{\mathcal{H}}f_{n,\ m}^G=E_{2n+2m}f_{n,\ m}^G$ 且 $\left\|f_{n,\ m}^G\right\|_2^2=\frac{1}{m!\left(15\kappa+2n+\frac{3}{2}\right)_m}\left\|\phi_{2n}^G\right\|_2^2$。

5 作用于波函数的二阶和六阶算子

以下是关于 $\mathcal{J}$ 和 $\widetilde{H}^{(3)}$ 对 w_n 和 ϕ_n 函数作用的一些说明。多项式 $\mathcal{J}\phi_n(\cdot,y)$ 形式简单（本质上是特征函数）。

引理 43 假设 $\phi\in\mathcal{P}_{n,\ \kappa}$ 则 $\mathcal{J}\phi=-\langle x,\nabla_\kappa\rangle^2\phi-\langle x,\nabla_\kappa\rangle\phi-2\kappa\sum\sigma_v\langle x,\nabla_\kappa\rangle\phi,^{v\in R_+}$

$and\ \langle x,\nabla_\kappa\rangle\phi=(n+15\kappa)\phi-\kappa\sum_{v\in R_+}\sigma_v\phi.$

证明。这是将定理 7 特化到 $N=3$ 的结果；注意 $\Delta_\kappa\phi=0$。 ■

命题 44 假设 $y\in\mathcal{I}_+$ 则

$$\mathcal{J}\phi_{2n+1}(\cdot;y)=-2(10\kappa+2n+1)(10\kappa+n+1)\phi_{2n+1}(\cdot;y).$$

证明。调和多项式 $\phi_{2n+1}(;y)$ 是 $0\le m\le n$ 上 $|x|^{2n-2m}q_{2m+1}(;y)$ 的和。由于 $\sigma_v q_{2m+1}(x;y)=q_{2m+1}(x;y\sigma_v)$，且 5 个反射保持不变

y，另外 10 个将 y 映射到 $\mathcal{I}\backslash\{\pm y\}$，由此可知 $\sum_{v\in R_+}\sigma_v q_{2m+1}(\cdot;\ y) = 5q_{2m+1}(\cdot;\ y)$。根据引理 $\langle x,\ \nabla_\kappa\rangle \phi_{2n+1}(\cdot;\ y) = (10\kappa+2n+1)\ \phi_{2n+1}(\cdot;\ y)$，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{J}\phi_{2n+1}(\cdot;y) &= -(10\kappa+2n+1)\{(10\kappa+2n+1)+1+10\kappa\}\phi_{2n+1}(\cdot;y)\\ &= -2(10\kappa+2n+1)(10\kappa+n+1)\phi_{2n+1}(\cdot;y).\end{aligned}$$

■

命题 45 假设 $n\geq 3$ 则 $\mathcal{J}\phi_{2n}^G = -2n(30\kappa+2n+1)\ \phi_{2n}^G$。

证明。与前面的证明类似，ϕ_{2n}^G 是 $|x|^{2n-2m}q_{2m}^G$之和；但在这种情况下，$\sum_{v\in R_+}\sigma_v\phi_{2n}^G = 15\phi_{2n}^G$，因此 $\langle x、\ \nabla_\kappa\rangle \phi_{2n}^G = 2n\phi_{2n}^G$ 和 $\mathcal{J}\phi_{2n}^G = -(2n)^2 - 2n - 2(15\kappa)(2n) = -2n(30\kappa+2n+1)\phi_{2n}^G$. ■

命题 46 假设 $y\in\mathcal{I}_+$ 则

$$\mathcal{J}\phi_{2n}(\cdot;y_0) = -2(6\kappa+n)(18\kappa+2n+1)\phi_{2n}(\cdot;y) + 2\kappa(18\kappa+1)\phi_{2n}^G.$$

证明。在这种情况下，$\sum_{v\in R_+}\sigma_v q_{2m}(x;\ y) = 3q_{2m}(x;\ y) + 2q_{2m}^G(x)$，并且

$$\langle x,\nabla_\kappa\rangle \phi_{2n}(\cdot;y_0) = (2n+15\kappa-3\kappa)\phi_{2n}(\cdot;y) - 2\kappa\phi_{2n}^G.$$

将这些值代入 $\mathcal{J}$的公式，并利用 $\sum_{v\in R_+}\sigma_v\phi_{2n}^G = 15\phi_{2n}^G$

即可得到所述结果。 ■

回想一下，对于 $2n=2$，$\phi_{2n}^G = 0$ 4、8、14。

推论 47 $\mathcal{J}\left(\phi_{2n}(\cdot;\ y_0) - \frac{1}{6}\phi_{2n}^G\right) = -2(6\kappa+n)(18\kappa+2n+1)\left(\phi_{2n}(\cdot;\ y_0) - \frac{1}{6}\phi_{2n}^G\right)$.

注 48 $\sum_{v\in R_+}\sigma_v$作用于同型分量为 χ 的多项式上的特征值为 $15\chi(\sigma_v)/\chi(I)$，其中 χ 是 G 的一个不可约特征标。从 G 的特征标表中，我们得到可能的值为 ± 15、± 5、± 3、0。如果 $p\in\mathcal{P}_{n,\ \kappa}$ 且 p 的同型分量为 χ（这意味着 $\mathcal{P}_{n,\ \kappa}$ 中存在一个在 G 作用下不变且不可约的子空间，并且 G 在其上的作用对应于 χ），其特征值为 λ_χ，那么 $\mathcal{J}p = -((15-\lambda_\chi)\ \kappa+n)((15+\lambda_\chi)\ \kappa+n+1)p$。特别地，反射表示在 $\mathcal{P}_1$ 上实现，其中 $\chi(I) = 3$，$\chi(\sigma_v) = 1$，$\lambda_\chi = 5$。

$\mathcal{J}$ 在 $w_n(\cdot;y)$ 上的作用由命题 40 以及 $\mathcal{J}$ 与 $|x|^2$ 的任意多项式对易这一事实推出。下面给出几个例子（$y\in\mathcal{I}_+$）

$$\begin{aligned}\mathcal{J}w_2(\cdot,y)&=-6(6\kappa+1)^2\phi_2(\cdot;y)\\ \mathcal{J}w_3(\cdot,y)&=-4(10\kappa+3)(5\kappa+1)\phi_3(\cdot;y)\\ &\quad+\frac{2(\tau+2)}{5\omega}(10\kappa+3)(10\kappa+1)^2L_1^{(15\kappa+3/2)}\left(\omega|x|^2\right)\phi_1(\cdot;y),\end{aligned}$$

这由 $w_3(\cdot;y)=\phi_3(\cdot;y)-\frac{(\tau+2)}{5\omega(10\kappa+3)}\phi_1(\cdot;y)$ 得出

$$\begin{aligned}\mathcal{J}w_4(\cdot;y)&=-4(3\kappa+1)(18\kappa+5)\phi_4(\cdot;y)\\ &+\frac{12(\tau+2)}{\omega(30\kappa+7)}(3\kappa+1)(6\kappa+1)^2(10\kappa+3)L_1^{(15\kappa+5/2)}\left(\omega|x|^2\right)\phi_2(\cdot;y).\end{aligned}$$

算子 $\widetilde{H}^{(3)}$（见 (11)）保持波函数不变，并且与G 对易，但其作用似乎很复杂。在二次层面上，我们发现（取 $y\in\mathcal{I}_+$）

$$\begin{aligned}\widetilde{H}^{(3)}\phi_2(x;y)&=2\omega^3(4\tau+3)\left(25080\kappa^3+19772\kappa^2+5058\kappa+419\right)\phi_2(x;y),\\ \widetilde{H}^{(3)}w_2(x;y)&=10\omega^3(4\tau+3)\left(3000\kappa^3+4276\kappa^2+1386\kappa+127\right)w_2(x;y)\\ &\quad+48\omega^3(4\tau+3)\left(420\kappa^3-67\kappa^2-78\kappa-9\right)\phi_2(x;y),\\ \widetilde{H}^{(3)}L_2^{(15\kappa+1/2)}\left(\omega|x|^2\right)&=2\omega^3(4\tau+3)(30\kappa+11)\\ &\quad\times\left(500\kappa^2+1092\kappa+245\right)L_2^{(15\kappa+1/2)}\left(\omega|x|^2\right).\end{aligned}$$

如前所述，目前只知道 $\widetilde{H}^{(3)}$ 不与 $\mathcal{J}$ 对易。

6 总结

最终目标是找到能够构造任意次数的波函数和调和多项式的正交基的公式。然而，值得指出的是，对于八面体群（ B_3 型群），这尚未实现，尽管与二十面体群中的反射相比，换位和变量符号变换更容易处理。一般公式（命题 10）确实能给出波函数，例如在证明一维全同粒子的 Calogero-Moser 模型具有完全可积性时，该模型带有谐性

约束和 r^{-2} 相互作用势，但对于对称群（ A_{N-1} 型），尚无 $\exp\left(\frac{\Delta_\kappa}{4\omega}\right)$ 作用的显式公式。

一种方法或许是分析单项式 $q_n(x;\, y_1)\, q_m(x;\, y_2)\, q_k(x;\, y_3)$，但似乎没有类似于易于处理的生成函数$F(r, x; y)$这样的工具。要以可用的形式计算$\nabla_\kappa(q_n(\cdot; y_0)\, q_m(\cdot; y_1))$，已经面临相当大的技术困难。特别值得关注的是，为 G-不变调和多项式构造正交基；将其乘以适当的拉盖尔多项式（变量为 $\omega|x|^2$）后，便可得到所有 G-不变波函数的基。

7 附录

存在一个指数函数 $\exp\langle x, y\rangle$ 在 $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$上的类似函数 $K(x, y)$，它满足 $K(x, y) = K(y, x)$ $K(xw, yw) = K(x, y)$，对所有 $w \in W(R)$以及 $\mathcal{D}_i^{(x)} K(x, y) = y_i K(x, y)$ 均成立（其中 $\mathcal{D}_i^{(x)}$ 是作用于 x 上的算子 $\mathcal{D}_i$，对于 $1 \le i \le N$）。该核对非奇异参数 $\{\kappa_v\}$存在，其中包括 $\kappa_v \ge 0$这种情形。设 $p(x)$是一个多项式，则根据乘积法则

$$\mathcal{D}_i\left(p(x) K(x, y)\right) = \left(y_i p(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} p(x)\right) K(x, y) + \sum_{v \in R_+} \kappa_v \frac{p(x) - p(x\sigma_v)}{\langle x, v\rangle} K(x\sigma_v, y)\, v_i.$$

该公式以及关系式 $wK(x, y) = K(xw, y) = K\left(x, yw^{-1}\right)$ 说明了有理Cherednik代数中的一个元素（即由 $\left\{\mathcal{D}_i^{(x)}, x_i\colon\ 1 \le i \le N\right\} \cup W(R)$ 生成的作用于多项式的算子代数）如何作用于一般形式的和 $\sum_{w \in W(R)} p_W(x, y)\, K(xw, y)$。可以证明，若 $\mathcal{T}$属于有理Cherednik代数，且 $\mathcal{T}K(x, y) = 0$，则 $\mathcal{T} = 0$（见 Dunkl [3]）。对于特定的群和算子，$\mathcal{T}K(x, y)$ 的计算可以通过计算机代数实现。函数 K 是一个未定义函数，其自变量为 $\langle x, y\rangle$（或 $\left\langle x, yw^{-1}\right\rangle$）。要计算 $\mathcal{D}_i^{(x)} K(xw, y) = \mathcal{D}_i^{(x)} K\left(x, yw^{-1}\right) = \left(yw^{-1}\right)_i K(xw, y)$，只需将 $\frac{\partial}{\partial x_i}$作用于$\left\langle x, yw^{-1}\right\rangle$，这是一项直接的计算。该方法用于证明了 (12)。此类计算可能涉及多达 $\#G$ 项 $K(xw, y)$ 形式的项。

要证明 $\left[\widetilde{H}^{(3)}, \mathcal{J}\right] \ne 0$，只需证明这个关系对 $\kappa = 0$成立。对于与前一个类似的符号论证，将 $\mathcal{D}_i$ 替换为 $\frac{\partial}{\partial x_i} + y_i$

并将其应用于 x中的多项式。因子 exp $\langle x,y\rangle$ 是默认存在的；例如 $\mathcal{J}1=|x|^2|y|^2-\langle x,y\rangle(\langle x,y\rangle+2)$，这说明了 $\mathcal{J}$在 $\kappa=0$和 $N=3$时的公式 (7)（因为 $\sum_{i=1}^{3}x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+y_i\right)\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle(\langle x,y\rangle+1)$）。

参考文献

[1] H. S. M. Coxeter，《正则多胞体》，第3版，Dover Press，纽约，1973年。[2] C. F. Dunkl，与反射群相关的微分-差分算子，《美国数学会汇刊》311（1989），167-183。[3] C. F. Dunkl，《微分-差分算子的计算》，《符号计算杂志》28（1999），819-826。[4] C. F. Dunkl，带反射的B2谐振子与超可积性，arXiv:2210.14180，2022年10月25日。[5] C. F. Dunkl 和 Y. Xu，《多变量正交多项式》，第2版，《数学及其应用百科全书》155，剑桥大学出版社，英国剑桥，2014年。[6] P. Etingof，有限Coxeter群的Macdonald-Mehta-Opdam恒等式的统一证明，《数学研究快报》17（2010），第2期，277–284。[7] M. Feigin 和 T. Hakobyan，关于Dunkl角动量代数，《高能物理杂志》11（2015），107。[8] F. G. Garvan，蛮力求解的一些Macdonald-Mehta积分，q-级数与分拆（明尼阿波利斯，明尼苏达州，1988），77–98，IMA数学应用丛书18，施普林格，纽约，1989年。[9] V. X. Genest 和 L. Vinet，多元Hahn多项式与奇异振子，《物理学杂志 A：数学与理论》47（2014），455201。[10] V. X. Genest、L. Vinet 和 A. Zhedanov，三维Dunkl振子，物理学杂志：会议系列512（2014），012010。[11] L. Lapointe 和 L. Vinet，Calogero-Sutherland模型的精确算子解，《数学物理通讯》178（1996），425-452。[12] C. Quesne，平面上可解且可积量子系统无限族的交换算子形式体系，《现代物理快报A》25（2010），15-24。

[13] E. Schr¨odinger，作为本征值问题的量子化 II，《物理学年鉴》（第4辑）79（1926），489-527。[14] F. Tremblay、A. Turbiner、P. Winternitz，平面上可解且可积量子系统的无限族，《物理学杂志 A：数学与理论》42（2009），242001。