arXiv:2302.10795v1 [math.PR] 21 Feb 2023

d维最近邻树中的兄弟节点

J´热罗姆·卡斯巴黎-萨克雷大学，
法国国家科学研究中心，奥赛数学实验
室，91405奥赛，法国

摘要

在 d维球面上选取一列均匀分布的点。然后，将第 n个点连接到此前到达的、距离它最近的点上。由此构造出的标号树称为 d维球面上的最近邻树。这些树具有一些与随机递归树相同的性质：最后到达节点的高度、根节点的平均度等。相反，叶节点的数量似乎取决于维数 d，但目前尚未证明此类性质。在这篇文章中，我们证明兄弟节点平均数取决于 d。

特别地，我们给出了这一数量的显式计算。在维度 1 中，它为 $1 + \ln 2$；而在任意维数 d 中，它都有显式积分形式，但遗憾的是，这并不能得出一个明确的数值。尽管如此，我们证明当 $d \to \infty$ 时，它以 $\sqrt{3/2}$的速率快速指数收敛到 2。

为证明这些结果，我们考察这些树的局部极限，并对维数为 d 时两个球的交集进行精细计算。特别地，在某些具体情形下，我们得到了这些交集的非平凡上界。

关键词：最近邻树、局部极限、球的交集、高维
2020年美国数学学会数学主题分类：05C05、60B05、05C07、51
M04

1 引言

最近邻树（NNT）。我们研究一种嵌入式随机生长树，其连接规则基于动态最近邻。

更准确地说，设 (E, δ, μ) 是一个赋有度量 δ 和概率测度 μ （定义在 E 上）的波兰空间。设 $(X_n)_{n\geq 1}$ 是一列按 μ独立同分布抽取的点。根据这列点，我们定义一个递增的带标号随机树序列 $(T_n)_{n\geq 1}$，称为带标号最近邻树 （带标号最近邻树），其顶点集为 $\{1, \ldots, n\}$，边集 E_n 定义如下：

- $E_1 = \emptyset$,

- 对于任意 $n \geq 2$，记

$$A(n) = \operatorname{argmin}\{1 \leq i \leq n-1 : \delta(X_i, X_n)\}, \tag{1}$$

then

$$E_n = E_{n-1} \cup \{(A(n), n)\}.$$

如果极小值点不唯一，则在所有取得最小值的标签中均匀随机地选择标签 $A(n)$。在我们的步骤中，这种情况以概率 1 永远不会发生。

换言之，在每一步中，树都会通过连接新节点 n 与节点 $i < n$而增长，该节点对应于点 X_i 中离 X_n最近的点的标签。图 1展示了这种构造的一种实现。此外，我们可以通过忘记这些带标号最近邻树的标签，并将其根定在原先标记为 1 的节点上，构造出 无标号有根*NNT*；也可以通过忘记所有标签，构造出 无标号无根*NNT* 。

随机递归树 如果对任意一对点，所选度量 $\delta = 1$ 下的 $A(n)$ 在 $\{1, \ldots, n-1\}$ 中均匀分布，那么 NNT 就是随机递归树（ RRT ）。人们研究了这种树的许多性质，例如其高度 [Dev87, Dev88, Pit94, DFF10, PS22], 、节点的度 [DL95, GS02], 、子树的大小 [GM05, BB14], 以及其他性质 [Mah91, Dob96]。特别地，我们要提及关于这些研究的综述 [SM95] ，以及一些书籍中的章节 [Drm09, chapter 6], [FK23, Chapter16.2]和 [Cur23, chapter 9]。显然，这份参考文献列表并不全面；感兴趣的读者也可以查阅所列参考文献中的相关文献。

d-NNT 在本文中，我们关注 (E, δ, μ) 为 $\mathbb{S}_d$ 维数为$d \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ 的球面、配备定义在 $\mathbb{S}_d$ 上的欧几里得度量 $\|.\|_2$ 以及定义在 $\mathbb{S}_d$上的勒贝格测度 λ的情形。此外，我们主要研究带标号最近邻树。因此，在本文下文中，我们将构造于空间 $(\mathbb{S}_d, \|.\|_2, \lambda)$ 上的带标号最近邻树称为 d-NNT（即 d-最近邻树）。

这些树是几何优先连接图的临界版本，该图由 [MS02、Jor10、JW15] 引入并进行研究：新节点连接到一个与其距离较近且度较高的节点（但并非确定性地连接）。当该模型的某些参数退化时，我们便得到最近邻树。

它们也是 FKP网络模型的临界版本，该模型由 [FKP02、BBB$^+$03] 引入并进行研究：新节点根据一个确定性的权衡函数，确定性地连接到这样一个节点——该节点按照欧几里得度量距离它最近，同时按照图度量距离根节点最近。当权衡函数退化时，我们便得到最近邻树。

基于这一最近邻模型，研究者定义并研究了泊松着色，相关工作见$d = 2$ [Pre09、Ald18、BBCS23]。

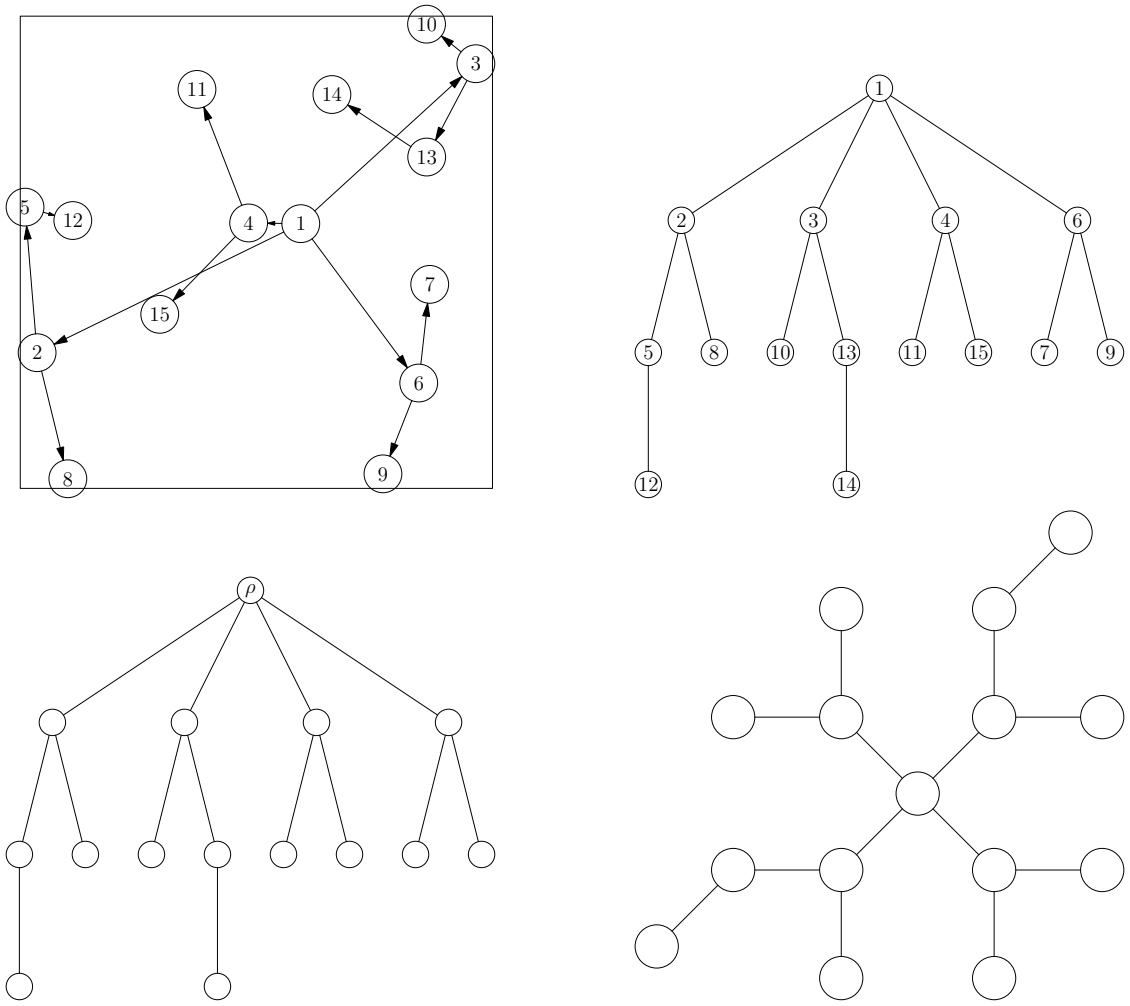

图1：左上：在配备欧几里得度量和均匀分布的正方形中，动态构造大小为15的最近邻树示意图。各点位于每个圆的中心。圆内的标签表示点到达的顺序：标签1对应第一个点，依此类推。右上：通过该构造得到的带标号最近邻树。这是本文研究的主要对象。左下：无标号有根版本。右下：无标号无根版本。

最后， d据作者所知，目前只有 Lichev 和 Mitsche 在 [LM21]中研究了-NNT 本身的许多性质。他们的一项结果在本文中有所应用，涉及-NNT 的 d局部极限。

备注。当 $d \to \infty$ 时， d-最近邻树似乎就是随机递归树（RRT）。事实上，当维数 d 非常大，且我们取 n 个点，并且依据 d 使 n 很小，那么任意两点之间的距离都非常接近 $\sqrt{2}$。因此，在极限 $d = \infty$ 下，所有点之间的距离几乎处处都为 $\sqrt{2}$ 。为得出结论，我们还需要检验更高阶的精度。据作者所知，这个问题仍未解决；不过，我们并未花太多时间详细查阅高维统计量方面的文献，其中可能已有相关研究。

树的统计性质。让我们暂且回到一般情形（E， δ， μ）。从带标号最近邻树 T_n，甚至从其无标号版本（有根或无根）中，能够推断出（E， δ， μ）的哪些性质？尽管空间的几何结构显然会影响 T_n，但要找到能体现这种依赖关系的性质实例，比预想的更难。

例如，寻找一种能够区分维数的统计量 d 对于 d-最近邻树而言尚属未知。事实上，许多统计量与维数无关。例如，对于含有n 个节点的最近邻树，树中第 n个点的高度分布不依赖于（E， δ， μ），根节点的平均度为第（$n-1$）个调和数 $H_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$，等等。在 [JW15、LM21]，中，作者猜想， T_n 的渐近叶节点数能够用来推断 d。在本文中，我们证明，兄弟节点数的期望确实能够用来推断它。

主要结果。本文的主要结果涉及 d-最近邻树中节点的兄弟节点数的渐近均值，记作 S_d。令 T_n 为一棵大小为 n的 d-最近邻树，并取一个非 1 节点 $i \in \{2, \ldots, n\}$。 $s(i)$ 表示 T_n 中与 i 共享前驱节点 i的节点集合的基数：

$$s(i) = (\text{card}\{j \in \{2, \ldots, n\} : A(j) = A(i)\}) - 1 \tag{2}$$

其中 $A(i)$ 是方程（1）中定义的标签。 $S(T_n)$ 的兄弟节点数均值 T_n 为

$$S(T_n) = \frac{1}{n} \sum_{i \in \{2,\ldots,n\}} s(i). \tag{3}$$

备注。 我们可以扩展 s， 使得 $s(1) = 0$。在这种情况下， $S(T_n) = \mathbb{E}[s(U)]$， 其中 U 在 $\{1, \ldots, n\}$上均匀分布。

The 这个随机数的渐近行为在维度 1 和 RRT 中是显式的 :

定理 1。 设 T_n 为一棵 1-最近邻树。 T_n 的兄弟节点数几乎处处收敛，当 $n \to \infty$趋于 $S_1 = 1 + \ln 2$。

设 T_n 为一棵 R RT。 T_n 的兄弟节点数的期望在 $n \to \infty$ 趋于 $S_\infty = 2$时几乎处处收敛。

对于维度 1，据作者所知，这是一个新结果。证明见第 2.3 节。对于 RRT 情形，这一结果也可以从先前关于 RRT 的研究中推导出来，例如参见 [Cur23，命题 9。2]。我们在第2.1 节给出一个简短的证明。

对于任意维数 d，兄弟节点数的渐近均值 S_d 并不十分显式，我们得到一个闭合积分形式。在给出它之前，先引入以下记号：

- 我们记 c 为 V_d 欧几里得度量下维数为 d 时半径为 1 的球的体积

$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}, \tag{4}$$

- 我们定义函数 $F(z)$：对任意 $z > 0$,

$$F(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}\ln(1+z) - \frac{1}{1+z}\right), \text{ and} \tag{5}$$

- 我们定义函数 $z(\theta)$：对任意 $\theta \in [0,\pi]$,

$$z(\theta) = (2\cos\theta)_+ = \begin{cases} 2\cos(\theta) & \text{if } \theta \in [0,\pi/2], \\ 0 & \text{if } \theta \in [\pi/2,\pi]. \end{cases} \tag{6}$$

定理 2. 设 T_n 为一个 d-最近邻树。T_n 的兄弟节点数的期望几乎处处收敛，当 $n \to \infty$时收敛到

$$S_d = 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{V_d}\int_0^\pi d\theta\,\sin(\theta)^{d-2}\int_{z(\theta)}^\infty dz\,z^{d-1}F\left(\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}\right) \tag{7}$$

其中

$$\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d} = z^d - \frac{V_{d-1}}{V_d}\left(\int_{\frac{1-z\cos\theta}{\sqrt{(1-z\cos\theta)^2+(z\sin\theta)^2}}}^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,dx + z^d\int_{-1}^{\frac{\cos\theta-z}{\sqrt{(\cos\theta-z)^2+(\sin\theta)^2}}}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,dx\right). \tag{8}$$

另一个关于 S_d 的有趣公式是

$$S_d = 2 - \underbrace{2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d}\int_0^1 dz\;\left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right)}_{T_+(d)} + \underbrace{2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d}\int_0^\pi d\theta\,\sin(\theta)^{d-2}\int_{z(\theta)^d}^\infty du\left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\right)}_{T_-(d)}. \tag{9}$$

备注。量 $V_d z^d - \mathcal{L}(z,\theta)$ 表示在维数 d中两个球的交集体积，其中一个球的半径为 1，另一个球的半径为 z，两球中心之间的距离为 $\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}$，见图 2。在第 5.1 节中，引理 2 根据 z 和 θ 给出了其体积的一个非平凡上界。

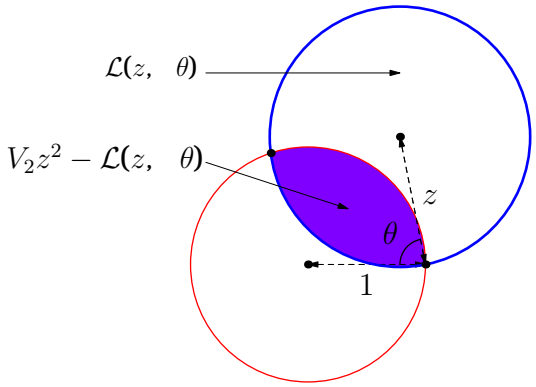

图 2：红色圆的半径为 1，蓝色圆的半径为 z，两圆圆心之间的距离为 $\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}$。紫色区域表示两圆的交集，其体积为 $V_2 z^2 - \mathcal{L}(z,\ \theta)$；蓝色球的面积减去紫色区域（交集）的面积为 $\mathcal{L}(z,\ \theta)$。

定理（9）中的表达式2 可以证明，兄弟节点平均数 S_d以指数速度收敛（猜想：是否单调递增？）至 2，根据 d，这得益于以下定理，该定理描述了 $T_+(d)$ 和 $T_-(d)$ 的渐近行为。

定理 3。 我们考虑以下量 $T_+(d)$ 和 $T_-(d)$，其定义见定理2。它们均为正数，并且，当 $d \to \infty$时，

$$T_+(d) \sim \frac{2\sqrt{2\pi}}{3}\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^d \tag{10}$$

and

$$T_-(d) = O\left(\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^d\right). \tag{11}$$

备注。 我们预计， T_- 的渐近指数阶是正确的，也就是说， $T_-(d)$ 应为 $\Omega\left(\frac{1}{d}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^d\right)$。

对于无标号树? 同一个统计量也适用于无标号有根最近邻树。事实上，知道根节点后，我们可以找到一个节点的前驱节点，从而计算该树的兄弟节点平均数。

对于无标号无根NNT，我们可以计算的统计量是节点度数平方的平均值。事实上，对于任意标号树 T_n，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\deg(i)^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=2}^{n}s(i) + 4(n-1) - 2\deg(1)\right). \tag{12}$$

由于 $\mathsf{deg}(1) = O(\log(n))$，当 $n \to \infty$参见 [LM21，定理 1。6], 度数平方的渐近均值收敛到 $S_d + 4$。该统计量不需要知道标签，也不需要知道根节点，因此可以在无标号无根NNT上计算。

内容： 在第 2 节中，我们证明定理1。我们首先回顾 RRT 情形下的计算，然后通过回顾 $d = 1$ -NNT 的局部极限来计算 d的情形。在第 3 节中，我们证明定理2。在第 4 节和第 5 节中，我们分别通过展示 T_+ 和 T_- 的渐近行为来证明定理 3 。

2 RRT 和 1-NNT 中的兄弟节点

2.1 RRT 中的兄弟节点

令 n为任意整数。设 i为 $\{1, \ldots, n\}$中的均匀随机节点，RRT 中兄弟节点数的渐近均值为

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{n}}_{i \text{ 均匀选取}} \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\frac{1}{i-1}}_{j = A(i) \text{ 在 } \{1,\ldots,i-1\} \text{ 上均匀分布}} \sum_{k=j+1}^{n} \underbrace{\frac{1}{k-1}\mathbf{1}_{k\neq i}}_{k>j \text{ 和 } k\neq i \text{ 的概率}}.$$

在 n 中归一化，得到

$$S_\infty = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{1}{x}\mathrm{d}y \int_y^1 \frac{1}{z}\mathrm{d}z = -\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \ln(y) = \int_0^1 (1 - \ln(x))\mathrm{d}x = 2.$$

2.2 d-最近邻树的局部极限

在 [LM21 中，定理 1.10], Lichev 和 Mitsche 证明， d-NNT 在以均匀随机顶点为新根后存在一个局部极限（即所谓的 Benjamini–Schramm 极限），它是一个随机带标记的无限单端树，称为泊松 d-NN 随机树。泊松 d-NN 随机树定义如下：令 $\mathcal{P}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中的一个泊松点过程，并从 $[0, 1]$ 上抽取一组独立均匀随机变量 $(X_v)_{v\in\mathcal{P}}$（视为到达时间），然后将每个点 $v \in \mathcal{P}$连接到其最近的较早邻居 $A(v) =$极小值点$\{u \in \mathcal{P} \cap \{u : X_u < X_v\} : \delta(X_u, X_v)\}$。特别地，我们有集中性，且所有局部统计量都收敛。图3展示了二维情况下的局部极限示意图。

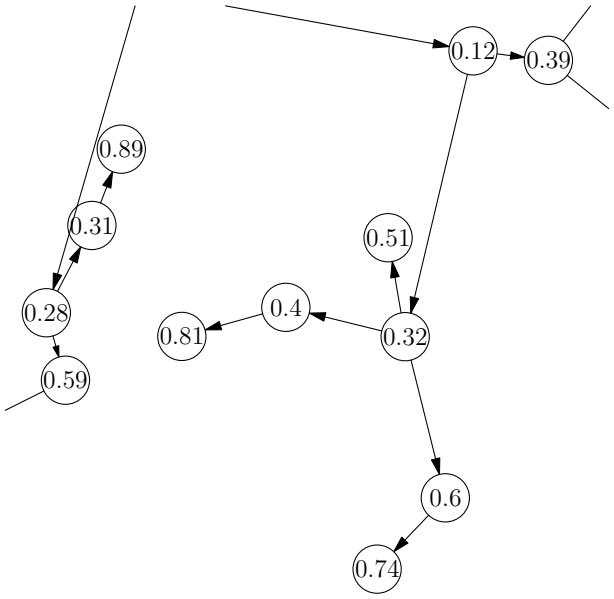

图3：2-NNT 的局部极限。每个圆代表 PPP 中的一个点。每个圆内标出了该点的随机到达时间 X_v。箭头从 $A(v)$ 指向 v。

2.3 一维中的兄弟节点

感谢 2.2 中定义的局部极限，另请参见图 4，兄弟节点数期望的极限为

$$S_1 = \int_0^1 \underbrace{\mathrm{d}u_1}_{u_1\text{ 的标签均匀分布}} \int_0^\infty \underbrace{\mathrm{d}r\ 2u_1 e^{-2u_1 r}}_{u_1\text{ 与 }A\text{之间的距离（}u_1\text{）}} \int_0^{u_1} \underbrace{\frac{1}{u_1}\mathrm{d}v}_{A\text{（}u_1\text{）的标签在 }[0,u_1]\text{中均匀分布}} \tag{13}$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{-r} \mathrm{d}x \int_v^{u_1} \mathrm{d}u_2 e^{2xu_2}}_{\text{蓝色区域}} + \underbrace{\int_{r/2}^{r} \mathrm{d}x \int_{u_1}^{1} \mathrm{d}u_2 e^{-2(r-x)(u_2-u_1)}}_{\text{红色区域}} + \underbrace{\int_r^\infty \mathrm{d}x \int_v^1 \mathrm{d}u_2 e^{-2(x-r)u_2}}_{\text{绿色区域}} \right)}_{\text{不含 }u_1\text{的 }A(u_1)\text{的预期子节点数}}. \tag{14}$$

让我们花些时间来解释如何求彩色区域的积分 ：

• 点 (x, u_2) 的标签为 $x \le -r$ (位于图4的蓝色区域内)时，是 (r, v) 的子节点，当且仅当其标签 $u_2 \in [v, u_1]$。实际上， u_2 必须大于 v，才能成为 (r, v) 的子节点；而要使其不成为 $(0, u_1)$ 的子节点，则必须小于 u_1。此外，以 x 为中心且经过 r 的球内不能有标签小于 u_2的点。实际上，如果存在这样的点，那么它就是

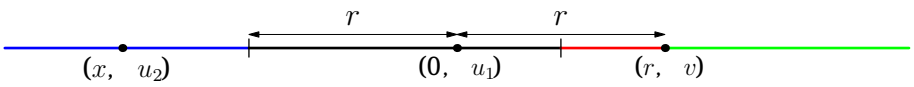

图4：$[-r,r]$（黑色区域和红色区域）中的所有点的标签都大于 u_1。蓝色区域：点 (x,u_2) 是 (r,v) 的子节点，当且仅当标签 $u_2\in[v,u_1]$，且不存在标签属于 $[0,u_2]$ 的点位于 $[2x-r,r]$ 中；但可以肯定的是，$[-r,r]$ 中不可能存在这样的点。黑色区域：没有点能成为 (r,v) 的子节点。红色区域：点 (x,u_2) 是 (r,v) 的子节点，当且仅当 $u_2\in[u_1,1]$，且不存在标签属于 $[u_1,v]$ 的点位于 $[2x-r,r]$ 中。绿色区域：点 (x,u_2) 是 (r,v) 的子节点，当且仅当标签 $u_2\in[v,1]$，且不存在标签属于 $[0,u_2]$ 的点位于 $[r,2x-r]$ 中。

$(x,\ u_2)$，因此它不是（$r,\ v$）；这个球就是线段 $[2x-r,r]$，但我们知道 $[-r,r]$ 不含有此类点，那么我们只需计算 $[2x-r,-r]$ 不包含标签小于 u_2的点的概率。由于点的分布是泊松点过程，该概率为 e^{2xu_2}。

- 点（$x,\ u_2$），其中 $r/2\le x\le r$（位于图 4 的红色区域内），如果其标签$u_2\in[u_1,1]$，则它是（$r,\ v$）的子节点。事实上，u_2必须大于 v，才能成为（$r,\ v$）的子节点，但线段 $[-r,r]$ 上的点的标签都大于 $u_1\le v$。此外，以 x 为中心且经过 r 的球必须不含标签小于 u_2 的点，因为我们已经知道其中不含标签大于 u_1的点；这个球就是线段 $[2x-r,r]$。由于点的分布是泊松点过程，该概率为 $e^{-2\ (r-x)\ \ (u_2-u_1)}$。

- 点（$x,\ u_2$）位于（$r,\ v$）的 $r\le x$（图4中的绿色区域）内，且其标签$u_2\in[v,1]$，则它是（$r,\ v$）的子节点。此外，以 x 为中心且经过 r 的球中不能有标签小于 u_2的点；这个球就是线段 $[r,2x-r]$。由于点的分布是泊松点过程，该概率值为 $e^{-2\ (x-r)\ u_2}$。

另一种计算方法是统计较早的兄弟节点数量，再乘以 2。我们采用这种方法，因为后续在任意维数下都会用到它。

$$S_1=2\int_0^1\mathrm{d}u_1\int_0^\infty\mathrm{d}r\ 2u_1e^{-2u_1r}\int_0^{u_1}\frac{1}{u_1}\mathrm{d}v\left(\int_{-\infty}^{-r}\mathrm{d}x\int_v^{u_1}\mathrm{d}u_2e^{2xu_2}+\int_r^\infty\mathrm{d}s\int_v^{u_1}\mathrm{d}u_2e^{-2(x-r)u_2}\right).\tag{15}$$

为此，我们先对 x积分，

$$S_1=4\int_0^1\mathrm{d}u_1\int_0^{u_1}\mathrm{d}v\int_v^{u_1}\mathrm{d}u_2\int_0^\infty\mathrm{d}r\ e^{-2u_1r}\left(\frac{e^{-2ru_2}}{2u_2}+\frac{1}{2u_2}\right).$$

然后，在 r 上，

$$S_1=2\int_0^1\mathrm{d}u_1\int_0^{u_1}\mathrm{d}v\int_v^{u_1}\mathrm{d}u_2\frac{1}{u_2}\left(\frac{1}{2(u_1+u_2)}+\frac{1}{2u_1}\right).$$

现在，我们将其分解为部分分式，并通过依次对 u_2、 v 和 u_1 积分得出结论，

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \mathrm{d}v \int_v^{u_1} \mathrm{d}u_2 \left(\frac{2}{u_2} - \frac{1}{u_1+u_2} \right) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \mathrm{d}v \left(2\ln(u_1) - 2\ln(v) - \ln(2u_1) + \ln(u_1+v) \right) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \mathrm{d}v \left(\ln(u_1) - 2\ln(v) - \ln(2) + \ln(u_1+v) \right) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \frac{1}{u_1} \big(u_1 \ln u_1 - 2u_1(\ln(u_1)-1) - u_1\ln(2) + u_1(\ln(u_1)-1+2\ln 2) \big) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \left(1 + \ln 2 \right) = 1 + \ln(2). \quad \square
\end{aligned}$$

定理2的证明

下文中， V_d 表示 d维单位球的体积，即 $V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$ ；而$A_{d-1} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ 表示其表面的面积。我们回顾一下， $A_{d-1} = dV_d$。

从局部极限到方程(7)：与维度 1 中的情形一样，我们使用第2.2节给出的局部极限，兄弟节点平均数为

$$S_d = 2 \int_0^1 \underbrace{\mathrm{d}u_1}_{\text{label of } u_1 \text{ is uniform}} \int_0^\infty \underbrace{\mathrm{d}r\, d\, V_d u_1 r^{d-1} e^{-V_d u_1 r^d}}_{\text{distance between } u_1 \text{ and } A(u_1)} \int_0^{u_1} \underbrace{\frac{1}{u_1}\mathrm{d}v}_{\text{label of } A(u_1) \text{ is uniform in } [0,u_1]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,r)} \mathrm{d}z}_{\text{no older sibling of } u_1 \text{ could be in } B(0,r)} \int_v^{u_1} \mathrm{d}u_2 \underbrace{e^{-u_2 \mathcal{L}_r(z)}}_{\text{probability to be an older sibling of } u_1}.$$

前面的 2 是因为，在上面的积分中，我们只计算年长的兄弟节点。此外，标签为 $u_2 \in [v, u_1]$ 、位置为 z 的点 u_1 成为年长兄弟节点的概率 $e^{-u_2 \mathcal{L}_{(z_2)}}$ ，是指以 z 为中心且经过标签为 v的点的球内没有比它更早的点；但请记住，这样的点不可能存在于以 0 为中心、半径为 r的球内。因此，量 $\mathcal{L}_r(z)$表示以 z为中心并经过$(r, 0, \ldots, 0)$的球的体积，其中去除了以 0 为中心、半径为 r的球内的部分：

$$\mathcal{L}_r(z) = \mathrm{Vol}\left(B(z, |z - (r, 0, \ldots, 0)|) \backslash B(0, r) \right). \tag{16}$$

现在，我们计算任意维数 $d \geq 2$下的这个积分。首先，我们进行坐标变换，从 $z \in \mathbb{R}^d$变换到 (s, θ)，其中 s是 z与 $(r, 0, \ldots\ldots, 0)$ 之间的距离， θ是两条直线 $(z, (r, 0, \ldots\ldots, 0))$ 和 $(0, (r, 0, \ldots\ldots, 0))$ 之间的角，其雅可比行列式为 $s\sin(\theta)^{d-2}$

即从笛卡尔坐标变换到球坐标。同样地，我们围绕 x 轴进行圆周积分。

$$
\begin{aligned}
S_d &= 2dV_d \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{d-1} e^{-V_d u_1 r^d} \int_0^{u_1} \mathrm{d}v \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_{s(\theta)}^\infty \mathrm{d}s \underbrace{s \sin(\theta)^{d-2}}_{\text{Jacobian}} \underbrace{A_{d-2} s^{d-2}}_{\text{volume of points } (s,\theta)} \int_v^{u_1} \mathrm{d}u_2 e^{-u_2 \mathcal{L}_r(s,\theta)} \\
&= 2dA_{d-2}V_d \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)^{d-2} \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^{u_1} \mathrm{d}v \int_v^{u_1} \mathrm{d}u_2 \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{d-1} e^{-V_d u_1 r^d} \int_{s(\theta)}^\infty \mathrm{d}s\, s^{d-1} e^{-u_2 \mathcal{L}_r(s,\theta)}
\end{aligned} \tag{17}
$$

where $s(\theta) = \begin{cases} 2r\cos(\theta) & \text{if } \theta \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{if } \theta \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$.

现在，我们进行变量代换 $s = zr$，以考察相对距离。因此，

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{d-1} e^{-V_d u_1 r^d} \int_{s(\theta)}^\infty \mathrm{d}s\, s^{d-1} e^{-u_2 \mathcal{L}_r(s,\theta)} &= \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{d-1} e^{-V_d u_1 r^d} \int_{z(\theta)}^\infty \mathrm{d}z\, z^{d-1} r^d e^{-u_2 \mathcal{L}_1(z,\theta) r^d} \\
&= \int_{z\theta)}^\infty \mathrm{d}z\, z^{d-1} \int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^{2d-1} e^{-(u_1 V_d + u_2 \mathcal{L}_1(z,\theta)) r^d} \\
&= \frac{1}{d} \int_{z(\theta)}^\infty \mathrm{d}z\, z^{d-1} \frac{1}{(u_1 V_d + u_2 \mathcal{L}(z,\theta))^2}
\end{aligned}
$$

其中 $z(\theta) = (2\cos\theta)_+$。下文中，$\mathcal{L}$ 表示 $\mathcal{L}_1$。

现在，我们可以继续计算方程（17），方法是对以下变量积分：u_2，v 和 u_1，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^{u_1} \mathrm{d}v \int_v^{u_1} \mathrm{d}u_2 \frac{1}{(u_1 V_d + u_2 \mathcal{L}(z,\theta))^2} \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \int_0^{u_1} \mathrm{d}v\, \frac{u_1 - v}{u_1 (V_d + \mathcal{L}(z,\theta))(v\mathcal{L}(z,\theta) + u_1 V_d)} \\
&= \frac{1}{V_d + \mathcal{L}(z,\theta)} \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \frac{1}{u_1} \int_0^{u_1} \mathrm{d}v\, \frac{u_1 - v}{v\mathcal{L}(z,\theta) + u_1 V_d} \\
&= \frac{1}{V_d + \mathcal{L}(z,\theta)} \int_0^1 \mathrm{d}u_1 \frac{1}{\mathcal{L}(z,\theta)} \left(\frac{\mathcal{L}(z,\theta) + V_d}{\mathcal{L}(z,\theta)} \ln\left(\frac{\mathcal{L}(z,\theta) + V_d}{V_d} \right) - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\mathcal{L}(z,\theta)^2} \ln\left(\frac{\mathcal{L}(z,\theta) + V_d}{V_d} \right) - \frac{1}{\mathcal{L}(z,\theta)(\mathcal{L}(z,\theta) + V_d)} \\
&= \frac{1}{V_d^2} \frac{1}{\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}} \left(\frac{1}{\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}} \ln\left(1 + \frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d} \right) - \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}} \right).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
S_d = 2\frac{(d-1)V_{d-1}}{V_d} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)^{d-2} \int_{z(\theta)}^\infty \mathrm{d}z\, z^{d-1} \frac{1}{\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}} \left(\frac{1}{\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}} \ln\left(1 + \frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d} \right) - \frac{1}{1 + \frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}} \right),
$$

即为定理2的式（7）。

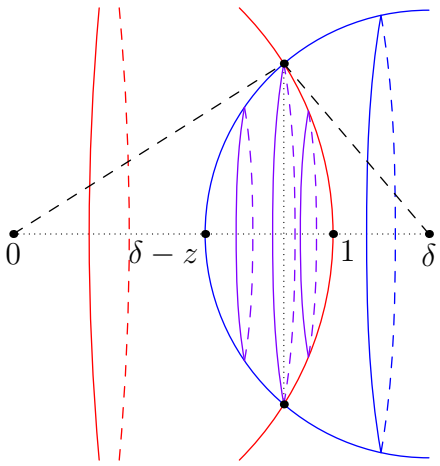

图5：当 $d = 3$ 时的示意图。红色表示半径为 1 的球；蓝色表示半径为 z 的球。紫色表示交集。交集的体积 I 可通过对紫色圆盘的体积积分得到；对于两个 d 维球的交集，这些圆盘是（$d-1$）维球。

精确计算 $\mathcal{L}(z,\ \theta)$： 两个球的交集体积，一个球的半径为 1，另一个球的半径为 z，两球中心的距离为 δ（见图 5），在维数 d下为，

$$I = \int_{\frac{1-z^2+\delta^2}{2\delta}}^{1} \mathrm{d}x\, V_{d-1}(1-x^2)^{(d-1)/2} + \int_{-z}^{\frac{1-z^2-\delta^2}{2\delta}} \mathrm{d}x\, V_{d-1}(z^2-x^2)^{(d-1)/2}.$$

在我们的情形中，~~根据余弦定理，~~ $\delta = \sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}$。注意到 $\frac{\mathcal{L}(z\,\theta}{V_d} = \frac{V_d z^d - I,\ )}{V_d}$，~~,~~可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d} &= z^d - \frac{V_{d-1}}{V_d}\left(\int_{\frac{1-z^2+(1+z^2-2z\cos\theta)}{2\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}}^{1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_{-z}^{\frac{1-z^2-(1+z^2-2z\cos\theta)}{2\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}}(z^2-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\\ &= z^d - \frac{V_{d-1}}{V_d}\left(\int_{\frac{2(1-z\cos\theta)}{2\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}}^{1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x + z^{d-1}\int_{-z}^{\frac{2z(\cos(\theta)-z)}{2\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}}(1-(x/z)^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}$$

之后 变量代换 $y = x/z$ 应用于求和的第二项后，我们得到方程（8） .

与2的 S_d 之差： 首先，备注是

$$\begin{aligned}2 &= \frac{2d}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma((d-1)/2)}\cdot\sqrt{\pi}\frac{\Gamma((d-1)/2)}{\Gamma(d/2)}\cdot\frac{1}{d}\\ &= 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{V_d}\cdot\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,\sin(\theta)^{d-2}\cdot\int_0^{\infty}\mathrm{d}z\,z^{d-1}F\left(z^d\right).\end{aligned}$$

因此，差值 $2 - S_d$ 可以写成两个正项之差

$$2 - S_d = \underbrace{2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{V_d}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)^{d-2} \int_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}z\, z^{d-1} F(z^d)}_{T_+(d)}$$
$$\underbrace{- 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{V_d}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{z(\theta)}^{\infty} \mathrm{d}z\, z^{d-1} \left(F\left(\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d}\right) - F(z^d)\right)}_{T_-(d)}.$$

现在，我们找到 $T_+(d)$ 的另一种写法。首先进行变量代换 $u = z^d$，以简化 $T_+(d)$:

$$\begin{aligned} T_+(d) &= 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)^{d-2} \int_0^{2^d(\cos\theta)^d} \mathrm{d}u\, F(u) \\ &= 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)^{d-2} \left[\frac{-\ln(1+u)}{u}\right]_0^{2^d(\cos\theta)^d} \\ &= 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)^{d-2} \left(1 - \frac{\ln(1+2^d(\cos\theta)^d)}{2^d(\cos\theta)^d}\right) \end{aligned}$$

然后进行第二次变量代换 $z = \cos\theta$，得到

$$T_+(d) = 2\,\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d}\int_0^1 \mathrm{d}z\, \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right). \quad \square$$

4 的渐近行为 T_+ （公式(10) 在定理3中的证明）

为了研究 T_+ 的渐近行为，我们只需研究

- $2\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d} = \frac{2d}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma((d-1)/2)}$ whose asymptotic is $\sqrt{\frac{2d}{\pi}} + O(d^{-1/2})$,
- $\int_0^{1/2} \mathrm{d}z\, \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right)$, and
- $\int_{1/2}^1 \mathrm{d}z\, \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right)$.

最后两个积分的渐近式由以下引理给出。

引理 1. 当 $d \to \infty$,

$$\int_0^{1/2} dz\, \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right) \sim \frac{\pi\sqrt{3}-3}{8d}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3} \tag{18}$$

and

$$\int_{1/2}^{1} dz\ \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right) \sim \frac{\pi\sqrt{3}+3}{8d}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3}. \tag{19}$$

该引理将在接下来的两个章节中证明。因此，将所有内容综合起来，我们得到

$$T_+(d) \sim \sqrt{\frac{2d}{\pi}}\frac{1}{d}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3}\left(\frac{\pi\sqrt{3}-3}{8}+\frac{\pi\sqrt{3}+3}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{d}}\frac{\sqrt{6\pi}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^d$$

即方程（10）。

4.1 当 $z \in (0, 1/2)$ （方程 (18)的证明）

我们进行变量代换 $u = 1/2 - z$，使问题转移到 0 附近，而非 $1/2$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \mathrm{d}z\ \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right)\\
&= \int_0^{1/2} \mathrm{d}u\ \left(\frac{3}{4}+u-u^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+2^d(1/2-u)^d)}{2^d(1/2-u)^d}\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3}\int_0^{1/2} \mathrm{d}u\ \left(1+\frac{4}{3}u-\frac{4}{3}u^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+(1-2u)^d)}{(1-2u)^d}\right).
\end{aligned}$$

现在，我们进行变量代换 $u = \frac{x}{d}$，于是–

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} \mathrm{d}u\ \left(1+\frac{4}{3}u-\frac{4}{3}u^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+(1-2u)^d)}{(1-2u)^d}\right)\\
&= \frac{1}{d}\int_0^{d/2} \mathrm{d}x\ \left(1+\frac{4}{3}\frac{x}{d}-\frac{4}{3}\frac{x^2}{d^2}\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+\left(1-\frac{2x}{d}\right)^d)}{\left(1-\frac{2x}{d}\right)^d}\right).
\end{aligned}$$

当 $d \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{d/2} \mathrm{d}x\ \left(1+\frac{2x}{d}\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{2x}{3d}\right)^{\frac{d-3}{2}}\left(1-\frac{\ln(1+(1-\frac{2x}{d})^d)}{(1-\frac{2x}{d})^d}\right)\\
&\to \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, e^x\, e^{-x/3}\left(1-\frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}\right) (\text{Now: } y = e^{-2x/3})\\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y\ \frac{1}{y^2}\left(1-\frac{\ln(1+y^3)}{y^3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}-3}{8}.
\end{aligned}$$

最后一个积分的计算结果由标准的计算机代数系统得出。

4.2 当 $z \in (1/2,1)$ （方程 (19) 的证明）

这与 $z \in (0,1/2)$ 的情形非常相似。我们进行变量代换 $u = z - 1/2$，以便处理 0 附近的问题，而不是 $1/2$:

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1} \mathrm{d}z \, \left(1-z^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln(1+2^d z^d)}{2^d z^d}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3} \int_0^{1/2} \mathrm{d}u \left(1 - \frac{4}{3}u - \frac{4}{3}u^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln(1+(1+2u)^d)}{(1+2u)^d}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3} \int_0^{1/2} \mathrm{d}u \left(1 - \frac{4}{3}u - \frac{4}{3}u^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln((1+2u)^d) + \ln\left(1+(1+2u)^{-d}\right)}{(1+2u)^d}\right).
\end{aligned}$$

现在，我们进行变量代换 $u = \frac{x}{d}$，于是得到

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{d-3} \frac{1}{d} \int_0^{d/2} \mathrm{d}x \left(1 - \frac{4}{3}\frac{x}{d} - \frac{4}{3}\frac{x}{d}^2\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln\left(\left(1+\frac{2x}{d}\right)^d\right) + \ln\left(1+\left(1+\frac{2x}{d}\right)^{-d}\right)}{\left(1+\frac{2x}{d}\right)^d}\right).$$

当 $d \to \infty$ 时，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{d/2} \mathrm{d}x \left(1 - \frac{2x}{d}\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 + \frac{2x}{3d}\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(1 - \frac{\ln\left(\left(1+\frac{2x}{d}\right)^d\right) + \ln\left(1+\left(1+\frac{2x}{d}\right)^{-d}\right)}{\left(1+\frac{2x}{d}\right)^d}\right) \\
&\to \int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-2x/3} \left(1 - 2xe^{-2x} - e^{-2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y \, \left(1 + 3y^3 \ln y - y^3 \ln(1+y^3)\right) = \frac{\pi\sqrt{3}+3}{8}.
\end{aligned}$$

5 T_- （方程 (11) 定理 3中的证明）

本节中，维数 d 均假设大于 2。

T_- 的精确渐近行为比 T_+的更复杂。不过，我们只需要一个相对于 T_+的渐近行为可忽略的上界。回顾一下，

$$T_-(d) = 2\frac{(d-1)V_{d-1}}{dV_d} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{z(\theta)^d}^{\infty} \mathrm{d}u \left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u)\right).$$

$2\,(d-1)\frac{V_{d-1}}{dV_d} \sim \sqrt{\frac{2d}{\pi}}$的渐近行为已知。因此，我们需要证明

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{z(\theta)^d}^{\infty} \mathrm{d}u \left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u)\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^d\right). \tag{20}$$

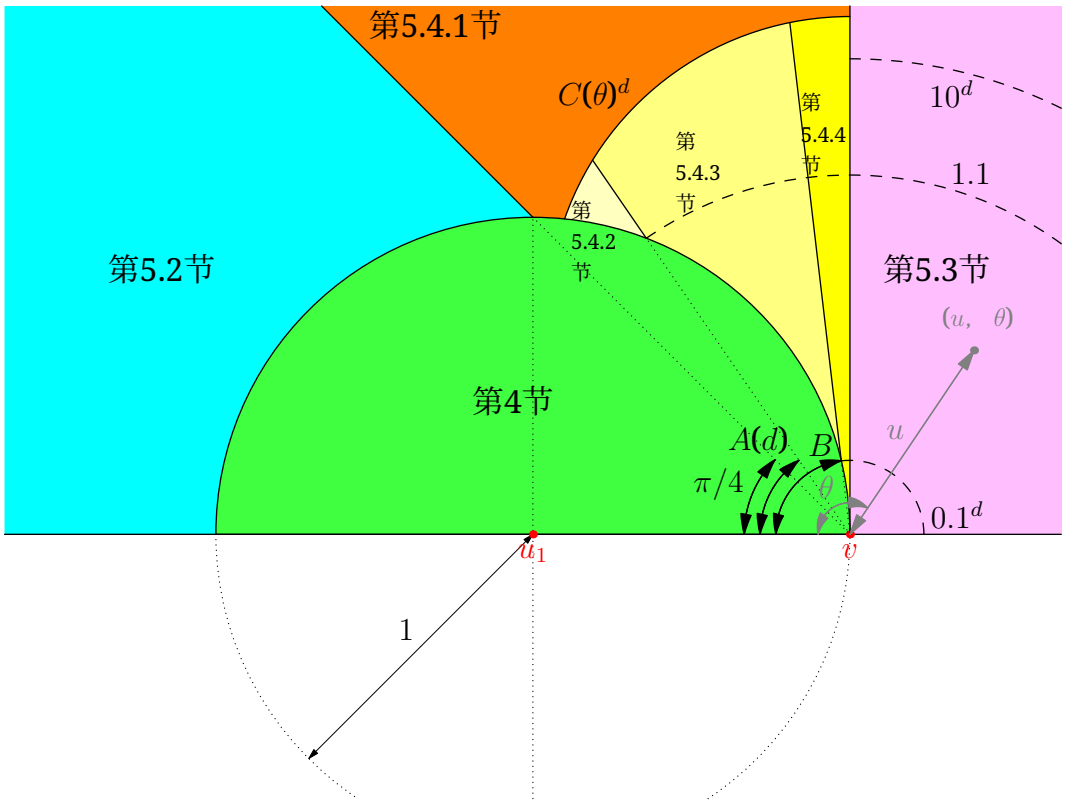

图6：每个彩色区域对应本文的一个节或小节。绿色区域对应第4节，我们将在该节中给出 $T_+(d)$ 的精确渐近行为。在其他区域中，我们给出对应部分积分的上界 $T_-(d)$。灰色点 (u,θ) 表示坐标为 (u,θ) 的积分点。角度 $A(d)$ 和 B 定义于第 5.4 节。希望这幅图有助于直观展示我们进行积分的十二个区域。

为此，我们首先给出 $F\left(\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)_{V_d}\right) - F(u)$ 在命题 1 中的一些上界，然后将积分划分为12个区域。对于这12个区域中的每一个，我们应用命题 1中的一个上界。这将在第 5.2、5.3 和 5.4节中完成。在图 6中示出了这12个区域。

在表述命题 1之前，我们引入函数

$$C(\theta) = \frac{1}{(\cos\theta) + 0.01} \tag{21}$$

这是本节始终使用的记号。

命题 1. 在下表中，对于任意 $d \geq 2$，在一行与一列的交叉处，根据 u 和 θ 的值，$F\left(\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)_{V_d}\right) - F(u)$ 有一个上界：

	$\theta \in [\pi/4, \pi/2]$	$\theta \in [\pi/2, \pi]$
$u \in [0, 0.1^d]$	$1/2$	$1/2$
$u \in [\max(0.1, 2\cos\theta)^d, 1.1]$	$\frac{18\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}$	$\frac{8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{u(\text{正弦}\ \theta)^{d+1}}{(1+u^{2/d})^{d/2}}$
$u \in [1.1, 10^d]$		$\frac{2662\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{1}{(1+1.1^{2/d})^{d/2}} \frac{\ln u}{u^2}$
$u \in [10^d, \infty)$		$F(u-1) - F(u)$
$u \in [1.1, C(\theta)^d]$	$\frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{\ln u}{u^2} \frac{(\sin\theta)^{d+1}}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}$	
$u \in [C(\theta)^d, \infty)$	$F(u-1) - F(u)$	

此外，如果 $\theta \in [0, \pi/4]$ 和 $u \in [0, \infty)$，那么 $F\left(\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta) V_d\right) - F(u)$ 的上界为 $F(u-1) - F(u)$。

5.1 命题 1 的证明

命题 1 的证明基于以下两个引理：一个给出 $\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta) V_d$ 的下界，另一个则给出当 $F(u-\epsilon) - F(u)$ 时的上界 $\epsilon \in [0, u]$。

引理 2. *1.* 对任意 $d \geq 2$，对于任意 $u \geq 0$ 和 $\theta \in [0, \pi]$，

$$\frac{\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta)}{V_d} \geq \max(0, u-1).$$

2. 此外，若 $\theta \in [\pi/2, \pi]$，或者若 $\theta \in [0, \pi/2]$ 和 $u \in [(2\cos\theta)^d, C(\theta)^d]$，

$$\frac{\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta)}{V_d} \geq u - \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{\left(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta\right)^{d/2}} \left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta} + \frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right).$$

引理 3. 令函数 $F(x) = \frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \frac{1}{x+1}\right)$。

1. 对任意 $u \geq 0$，对于任意 $\epsilon \in [0, u]$，$F(u-\epsilon) - F(u) \leq \frac{1}{2}$。*2.* 对任意 $u \geq 0$，对于任意 $\epsilon \in [0, u]$，$F(u-\epsilon) - F(u) \leq \frac{2}{3}\epsilon$。*3.* 对任意 $u \geq 1.1$，对于任意 $\epsilon \in [0, 1]$，$F(u-\epsilon) - F(u) \leq \frac{2\ln u}{u-1}\epsilon \leq 2.42\frac{\ln u}{u^3}\epsilon$。

5.1.1 引理的证明2

- 首先，备注：对于任意 $z \in [0, \infty)$ 和任意 $\theta \in [0, \pi]$，$\mathcal{L}(z, \theta) \geq z^d V_d - V_d$。事实上，它是半径为 z 的球的体积减去半径为 1 的球中的一些元素，因此在最坏情况下，半径为 1 的球完全包含在半径为 z 的球中。此外，它始终非负。

• 遗憾的是，一般而言这个界还不够；当 $\theta \in [\pi/2, \pi]$，或者当 $\theta \in [0, \pi/2]$ 且 $\cos\theta \le z \le C(\theta)$ 时，我们需要对其进行细化。为此，我们回顾一下方程（8）

$$\frac{\mathcal{L}(z,\theta)}{V_d} = z^d - \frac{V_{d-1}}{V_d}\left(\int_{\frac{1-z\cos\theta}{\sqrt{(1-z\cos\theta)^2+(z\sin\theta)^2}}}^{1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x + z^d\int_{-1}^{\frac{\cos\theta-z}{\sqrt{(\cos\theta-z)^2+(\sin\theta)^2}}}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x\right).$$

随着 $\frac{V_{d-1}}{V_d}\sqrt{d}$ 在 d 中减小，我们用 $\frac{V_1}{V_2}\sqrt{2}\sqrt{d} = \frac{\sqrt{2d}}{\pi} = \frac{V_{d-1}}{V_d}$ 的上界。现在通过变量代换 $v = \sqrt{1-x^2}$，分别为括号内求和中的两项给出上界。

因此，左边一项可改写为（注意，由于 $z \le C(\theta) < 1/\cos\theta$，$1 - z\cos\theta \ge 0$），

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1-z\cos\theta}{\sqrt{(1-z\cos\theta)^2+(z\sin\theta)^2}}}^{1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{z\sin\theta}{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}}\frac{v^d}{\sqrt{1-v^2}}\,\mathrm{d}v \\
&\le \frac{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}{1-z\cos\theta}\int_0^{\frac{z\sin\theta}{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}}v^d\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}{1-z\cos\theta}\frac{1}{d+1}\left(\frac{z\sin\theta}{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}\right)^{d+1} \\
&= \frac{z^d}{d+1}\frac{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}{1/z-\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+z^2-2z\cos\theta}}\right)^{d+1}.
\end{aligned}$$

类似地，注意到 $\cos\theta - z \le 0$，因为 $z \ge z(\theta) \ge \cos\theta$，右边一项变为

$$\int_{-1}^{\frac{\cos\theta-z}{\sqrt{(z-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{d+1}\frac{\sqrt{(z-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}{z-\cos\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\sqrt{(z-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}}\right)^{d+1}.$$

由此得证，因为 $1/(d+1) \le 1/d$。 □

5.1.2 引理3的证明

1. 对任意 $x \in [0, \infty[$，第 1 点成立，因为 $F(x) \in [0, 1/2]$。

2. 点 2 成立，因为 F 向上凹且递减，因此，对于任意 $u \ge 0$ 和 $\epsilon \le u$，

$$F(u-\epsilon) - F(u) \le F(0) - F(\epsilon) \le |F'(0)|\epsilon = \frac{2}{3}\epsilon.$$

3. 最后，如果 $u \ge 1.1$ 且 $\epsilon \le 1$，那么

$$F(u-\epsilon) - F(u) \le (F(u-1) - F(u))\epsilon$$

因为 F 向上凹且递减（泰勒斯定理）。但是，

$$\begin{aligned} F(u-1)-F(u) &= \frac{1}{u-1}\left(\frac{\ln(u)}{u-1}-\frac{1}{u}\right)-\frac{1}{u}\left(\frac{\ln(1+u)}{u}-\frac{1}{u+1}\right) \\ &= \frac{u^2\ln u-(u-1)^2\ln(1+u)}{u^2(u-1)^2}-\left(\frac{1}{u(u-1)}-\frac{1}{u(u+1)}\right) \\ &\le \frac{2u\ln u}{u^2(u-1)^2}-\underbrace{\frac{2}{(u-1)u(u+1)}}_{\ge 0} \le \frac{2\ln u}{u(u-1)^2} \le 2\cdot 11^2\,\frac{\ln u}{u^3}. \end{aligned}$$

备注，我们得到 $u^2\ln u-(u-1)^2\ln(1+u)\le 2u\ln u$，因为 $u(u-2)\le(u-1)^2$和 $0\le\ln u\le\ln(1+u)$。 □

5.1.3 命题1 由引理2 和3

命题 *1* 的证明。 与界限 $1/2$和 $F(u-1)-F(u)$ 对应的五种情况，分别由引理 3和2 的第 1 点显然成立。

现在，我们来讨论最后四种情况。

- 当 $u\in[\quad \max(0.1,2\cos\theta)^d,1.1]$ 以及 $\theta\in[\pi/4,\pi/2]$: 由引理 2 和 3 的第 2 点可知，

$$F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\le\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}(\sin\theta)^{d+1}\frac{u}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right).$$

  - 若 $2\cos\theta\ge 0.1$ 且 $d\ge 1$，则

$$\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\le\frac{1}{1.1^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{2\cos\theta-\cos\theta}\le\frac{1}{\frac{1}{1.1}-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{1}{\cos\theta}\le 5+20.$$

  - 若 $2\cos\theta<0.1$ 且 $d\ge 1$，则

$$\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\le\frac{1}{1.1^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{0.1-\cos\theta}\le\frac{1}{\frac{1}{1.1}-0.05}+\frac{1}{0.05}\le 1.2+20.$$

我们指出，在这种情况下

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{\left(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta\right)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right)>u,$$

该界仍然成立，因为

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u) &\le F(0)-F(u)\le\frac{2}{3}u \\ &\le\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{\left(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta\right)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right) \end{aligned} \tag{22}$$

我们可以像之前一样结束。

• 如果 $u \in [0.1^d, 1.1]$, $\theta \in [\pi/2, \pi]$ （特别是，$\cos\ \theta \le 0$）并且 $d \ge 1$：根据引理2和3的第 2 点，

$$F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \le \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}(\sin\theta)^{d+1}\frac{u}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right)$$
$$\le \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}(\sin\theta)^{d+1}\frac{u}{(1+u^{1/d})^{d/2}}\left(\frac{1}{1.1^{-1}}+\frac{1}{0.1}\right).$$

这种情况

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{\left(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta\right)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right) > u$$

通过方程（22）完成。

• 若 $u \in [1.1, 10^d]$, $\theta \in [\pi/2, \pi]$ 且 $d \ge 1$:

– if $\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}(\sin\theta)^{d+1}\frac{u}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right) \le 1$, by point 2 of Lemma 2 and point 3 of Lemma 3,

$$F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \le 242\frac{\ln u}{u^3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right)$$
$$\le \frac{242\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{\ln u}{u^2}\frac{1}{\left(1+1.1^{2/d}\right)^{d/2}}\left(\frac{1}{1/10}+1\right)$$
$$\le \frac{2662\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{\ln u}{u^2}\frac{1}{\left(1+1.1^{2/d}\right)^{d/2}}.$$

– 否则，$1 < \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}(\sin\theta)^{d+1}\frac{u}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right)$, 由引理2 的第 1 点和引理 3的第3点,

$$F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \le F(u-1) - F(u) \le 242\frac{\ln u}{u^3}$$
$$\le 242\frac{\ln u}{u^3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right)$$

并以同样的方式得出结论。

• 若 $u \in [1.1, C(\theta)^d]$, $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ 且 $d \ge 1$：按照与上文相同的情形划分，我们总能得到

$$F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \le 242\frac{\ln u}{u^3}\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{u(\sin\theta)^{d+1}}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}\left(\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\right).$$

但是，现在，

$$\frac{1}{u^{-1/d}-\cos\theta}+\frac{1}{u^{1/d}-\cos\theta}\le\frac{1}{C(\theta)^{-1}-\cos\theta}+\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$\le\frac{1}{0.01}+(2+\sqrt{2})\le 104. \qquad \square$$

现在，本节其余部分将对图 6 中绘出的十二个区域上的这九个上界进行积分，以证明定理11中的公式（3）。

5.2 当 $\theta\in[0,\pi/4]$ 时的渐近行为

设 $\theta\in[0,\pi/4]$，在这种情况下，$2\cos\theta\ge 1/\cos\theta$。因此，我们需要对下面的积分求上界

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{(2\cos(\theta))^d}^{\infty}\mathrm{d}u\,F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\\
&\le\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{(2\cos(\theta))^d}^{\infty}\mathrm{d}u\,F(u-1)-F(u)\ \text{(by the last line of Proposition 1)}\\
&=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{(2\cos(\theta))^d-1}^{(2\cos(\theta))^d}F(u)\,\mathrm{d}u\ \text{(because}\int_0^{\infty}F=1<\infty)\\
&=\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\left[-\frac{\ln(1+u)}{u}\right]_{(2\cos(\theta))^d-1}^{(2\cos(\theta))^d}\\
&\le\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\frac{d\ln(2\cos\theta)}{(2\cos\theta)^d-1}\ \text{(the negative term given by }u=(2\cos\theta)^d\text{ is forgotten)}\\
&\le\frac{d\ln 2}{\sqrt{2}-1}\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\ \text{(because }\theta\in[0,\pi/4])\\
&\le\frac{d\ln 2}{2(\sqrt{2}-1)}\frac{2\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^d\ \text{(remember that }d\ge 2).
\end{aligned}$$

5.3 当 $\theta\in[\pi/2,\pi]$ 时的渐近行为

目标是对下面的积分求上界

$$\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\,F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u).$$

为此，我们将其分成四部分，并对每一部分使用命题 1 中得到的相应上界，见图6。

当 $u \le 0.1^d$ **时:**

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \underbrace{\sin(\theta)^{d-2}}_{\le 1} \int_0^{0.1^d} \mathrm{d}u \underbrace{F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u)}_{\le 1/2} \le \frac{\pi}{2}\frac{0.1^d}{2}.$$

当 $0.1^d \le u \le 1.1$ **时:**

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{0.1^d}^{1.1} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \\
&\le \frac{8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \underbrace{\sin(\theta)^{2d-1}}_{\le 1} \int_{0.1^d}^{1.1} \frac{u}{(1+u^{2/d})^{d/2}} \\
&\le \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \int_{0.1^d}^{1.1} \left(\frac{u^{2/d}}{1+u^{2/d}}\right)^{d/2} \le \frac{4.4\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \left(\frac{1.1^{2/d}}{1+1.1^{2/d}}\right)^{d/2} \le \frac{4.4\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \left(\sqrt{\frac{11}{21}}\right)^d
\end{aligned}$$

因为 $x \mapsto x/(1+x)$ 在 $[0,\infty)$ 上递增，而 $d \mapsto 1.1^{2/d}$ 在 $[2,\infty)$ 上递减 .

当 $1.1 \le u \le 10^d$ **时:**

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \underbrace{\sin(\theta)^{d-2}}_{\le 1} \int_{1.1}^{10^d} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \\
&\le \frac{\pi}{2}\frac{2662\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{1}{(1+1.1^{2/d})^{d/2}} \int_{1.1}^{10^d} \mathrm{d}u\, \frac{\ln(u)}{u^2} \\
&\le \frac{1331\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \left(\sqrt{\frac{10}{21}}\right)^d \underbrace{\int_1^{\infty} \mathrm{d}u\, \frac{\ln(u)}{u^2}}_{=1} \\
&= \frac{1331\sqrt{2}}{\sqrt{d}} \left(\sqrt{\frac{10}{21}}\right)^d .
\end{aligned}$$

当 $10^d \le u$ 时：

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta \underbrace{\sin(\theta)^{d-2}}_{\le 1} \int_{10^d}^{\infty} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \\
&\le \frac{\pi}{2}\int_{10^d}^{\infty} \mathrm{d}u F(u-1) - F(u) \\
&= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_{10^d-1}^{10^d} \\
&\le \frac{\pi}{2}\frac{d\ln(10)}{10^d-1} \le \frac{d\pi\ln(10)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^d.
\end{aligned}$$

5.4 $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$时的渐近分析

为完成这篇文章，我们需要求出.....的上界

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{(2\cos\theta)^d}^{\infty} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u).$$

这个最后的积分根据 u 和 θ分成七部分，见图6 了解这七部分。我们引入以下两个记号：对于任意 $d \ge 2$,

$$A(d) = \arccos\left(\frac{1.1^{1/d}}{2}\right) \text{ and } B = \arccos(0.05). \tag{23}$$

只需注意，$(2\cos(A(d)))^d = 1.1$ 和 $(2\cos(B))^d = 0.1^d$，因此 $\frac{\pi}{4} \le A(d) \le \frac{\pi}{3} \le B \le \frac{\pi}{2}$。

5.4.1 当 $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ 和 $u \ge C(\theta)^d$

首先，备注一下，在这种情况下，$1 < \frac{1}{0.01+\sqrt{2}/2} \le C(\theta) \le 100$。

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \underbrace{\sin(\theta)^{d-2}}_{\le 1} \int_{C(\theta)^d}^{\infty} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u) \\
&\le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \frac{d\ln(C(\theta))}{C(\theta)^d - 1} \text{ (see case } u \ge 10^d \text{ in Section 5.3)} \\
&\le d\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ \frac{\ln 100}{1 - C(\theta)^{-d}} C(\theta)^{-d} \\
&\le \frac{d\ln 100}{1-(0.01+\sqrt{2}/2)^d} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\ ((\cos\theta) + 0.01)^d \\
&\le \frac{d\ln 100}{1-(0.01+\sqrt{2}/2)^2} \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.01\right)^d.
\end{aligned}$$

第5.4.2节 当 $\theta \in [\pi/4, A(d)]$ **且** $u \in \left[(2\cos\theta)^d, C(\theta)^d\right]$

我们备注，在这种情况下 $u \geq (2\cos A(d))^d \geq 1.1$。因此，根据命题 1，

$$\int_{\pi/4}^{A(d)} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{(2\cos\theta)^d}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u)$$
$$\leq \frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \int_{\pi/4}^{A(d)} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{2d-1} \int_{(2\cos\theta)^d}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u \frac{\ln u}{u^2} \frac{1}{(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta)^{d/2}}.$$

现在，注意到 $g\colon x \mapsto (1+x^2-2x\cos\theta)$ 在 $[\cos\theta, \infty)$ 上为正且递增，我们得到以下上界

$$\leq \frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \int_{\pi/4}^{A(d)} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{2d-1} \underbrace{\int_{(2\cos\theta)^d}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u \frac{\ln u}{u^2}}_{\leq \int_1^\infty \mathrm{d}u \frac{\ln u}{u^2} = 1} \underbrace{\frac{1}{(1+4(\cos\theta)^2-4(\cos\theta)^2)^{d/2}}}_{=1}$$
$$\leq \frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \left(A(d) - \frac{\pi}{4}\right) (\sin A(d))^{2d-1}$$
$$\leq \frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \frac{\pi}{12} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4}\right)^d \quad (\text{because } A(d) \leq \pi/3).$$

第5.4.3节 当 $\theta \in [A(d)\ B]$

在这种情况下，$0.1^d \leq (2\cos\theta)^d \leq 1.1$。然后，我们根据 1.1 将 u 上的积分拆分为，

$$\int_{A(d)}^{B} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{(2\cos\theta)^d}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u \left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u)\right).$$

当 $u \in [1.1, C(\theta)^d]$**：** 根据命题 1，

$$\int_{A(d)}^{B} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{1.1}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u \left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right) - F(u)\right)$$
$$\leq \frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}} \int_{A(d)}^{B} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{2d-1} \int_{1.1}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u \frac{\ln u}{u^2} \frac{1}{\left(1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta\right)^{d/2}}.$$

现在，由于 $g\colon\ x\mapsto(1+x^2-2x\cos\theta)$ 在 $[\cos\theta,\ \infty)$ 上为正且递增，并且 $\cos\theta\le 1\le 1.1^{1/d}\le u^{1/d}$，因此 $1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta=g(u^{1/d})\ \ge g(1)=2(1-\cos\theta)$，所以

$$\begin{aligned}
&\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{1.1}^{C(\theta)^d}\mathrm{d}u\left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\right)\\
&\le\frac{25168\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\frac{1}{2^{d/2}}\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\underbrace{\sin(\theta)^{-1}}_{\le 1/\sin(\pi/4)=\sqrt{2}}\frac{(\sin\theta)^{2d}}{(1-\cos\theta)^{d/2}}\underbrace{\int_{1.1}^{C(\theta)^d}\mathrm{d}u\frac{\ln u}{u^2}}_{\le 1}\\
&\le\frac{50336}{\pi\sqrt{d}}\frac{1}{2^{d/2}}\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\left(\frac{(\sin\theta)^4}{1-\cos\theta}\right)^{d/2}.
\end{aligned}$$

现在注意到 $\frac{(\sin\theta)^4}{\cos\theta}\le\frac{32}{27}$。一种简单的方法是看出，$\theta\mapsto\frac{(\sin\theta)^4}{\cos\theta}$ 在 $[0,\pi/2]$ 上的最大值，与 $x\mapsto(1-x)(1+x)^2$ 在 $[0,1]$ 上的最大值相同，其中令 $x=\cos t$。[1] 于是

$$\begin{aligned}
&\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{1.1}^{C(\theta)^d}\mathrm{d}u\left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\right)\\
&\le\frac{50336}{\pi\sqrt{d}}\frac{1}{2^{d/2}}(B-A(d))\left(\frac{32}{27}\right)^{d/2}\le\frac{50336}{\pi\sqrt{d}}\frac{\pi}{4}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^{d}.
\end{aligned}$$

当 $u\in[(2\cos\theta)^d,\ 1.1]$**：** 根据命题 1，

$$\begin{aligned}
&\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{(2\cos\theta)^d}^{1.1}\mathrm{d}u\left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\right)\\
&\le\frac{18\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{2d-1}\int_{(2\cos\theta)^d}^{1.1}\mathrm{d}u\left(\frac{u^{2/d}}{1+u^{2/d}-2u^{1/d}\cos\theta}\right)^{d/2}.
\end{aligned}$$

函数 $\frac{x^2}{1+x^2-2x\cos\theta}$ 在 $[0,1/\cos\theta]$ 上为正并递增，依此类推 $[0,1.1]$。事实上，$1/\cos\theta>2\cdot 1.1^{-1/d}>1.1$ 因为 $d\ge 2$，于是

$$\begin{aligned}
&\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{d-2}\int_{(2\cos\theta)^d}^{1.1}\mathrm{d}u\left(F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d},\theta)}{V_d}\right)-F(u)\right)\\
&\le\frac{19.8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{2d-1}\left(\frac{1.1^{2/d}}{1+1.1^{2/d}-2\times 1.1^{1/d}\cos\theta}\right)^{d/2}\\
&\le\frac{19.8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\int_{A(d)}^{B}\mathrm{d}\theta\sin(\theta)^{2d-1}\left(\frac{1.1^{1/d}}{1.1^{-1/d}+1.1^{1/d}-2\cos\theta}\right)^{d/2}.
\end{aligned}$$

最后一个新的论点是，当 $x = 1$ 时，函数 $x \mapsto x + 1/x$ 取最小值。然后，我们像前一种情况 $u \in [1.1, C(\theta)^d]$ 一样得出结论：

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{19.8\sqrt{2}}{\pi\sqrt{d}}\sqrt{1.1}\frac{1}{\sin(\pi/4)}\int_{A(d)}^{B} \mathrm{d}\theta \left(\frac{\sin(\theta)^4}{2-2\cos\theta}\right)^{d/2} \\
&\leq \frac{19.8\sqrt{2.2}}{\pi\sqrt{d}}\sqrt{2}\frac{1}{2^{d/2}}\int_{A(d)}^{B} \mathrm{d}\theta \left(\frac{(\sin\theta)^4}{1-\cos\theta}\right)^{d/2} \\
&\leq \frac{39.6\sqrt{1.1}}{\pi\sqrt{d}}\frac{1}{2^{d/2}}\left(B - A(d)\right)\left(\frac{32}{27}\right)^{d/2} \leq \frac{39.6\sqrt{1.1}}{\pi\sqrt{d}}\frac{\pi}{4}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^{d}.
\end{aligned}$$

第5.4.4节 当 $\theta \in [B, \pi/2]$

当 $u \in [1.1, \quad C(\theta)^d]$： 第5.4.3节中的第一次计算第5.4.3节 成立，且与 $\pi/2 - B \leq \pi/4$,

$$\int_{B}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{1.1}^{C(\theta)^d} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta)}{V_d}\right) - F(u) \leq \frac{50336}{\pi\sqrt{d}}\frac{\pi}{4}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^{d}.$$

当 $u \in [0.1^d, 1.1]$： 第5.4.3节中的第二次计算第5.4.3节 成立，

$$\int_{B}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \sin(\theta)^{d-2} \int_{0.1^d}^{1.1} \mathrm{d}u\, F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta)}{V_d}\right) - F(u) \leq \frac{39.6\sqrt{1.1}}{\pi\sqrt{d}}\frac{\pi}{4}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^{d}.$$

当 $u \in [(2\cos\theta)^d, \quad 0.1^d]$：

$$\int_{B}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \underbrace{\sin(\theta)^{d-2}}_{\leq 1} \int_{(2\cos\theta)^d}^{0.1^d} \mathrm{d}u\, \underbrace{F\left(\frac{\mathcal{L}(u^{1/d}, \theta)}{V_d}\right) - F(u)}_{\leq 1/2} \leq \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\frac{0.1^d}{2} \leq \frac{\pi}{4}0.1^d.$$

5.5 证明结束

综合前述十二个渐近式，并注意到 $\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^d$ 是指数级的主导项，我们得到

$$T_{-}(d) = O\left(\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)^{d}\right). \quad \square$$

6 展望

我们的主定理表明，给定一个 d-最近邻树，可以通过计算其兄弟节点平均数来渐近地辨别其维数。

兄弟节点的数量仅取决于最近邻树的局部极限。因此，我们的主定理可以推广，并表述为适用于任意 d 维流形。特别是，对于 $(\mathbb{S}_d,\ \|.\|_2,\ \lambda)$ 和 $(\mathbb{T}_d,\ \|.\|_2,\ \lambda)$ 上的最近邻树，我们无法通过计算兄弟节点平均数来区分，其中 $\mathbb{T}_d$ 表示 d 维环面。因此，如何区分圆、线段和具有 k 条边的星形图，仍是一个开放问题。

另一个尚未解决的问题是，我们能否根据度量 δ，通过兄弟节点数量或其他统计量来区分定义在 $(\mathbb{S}_d, \delta, \lambda)$ 上的最近邻树（ NNT ）。具体而言，当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时，定义在 $(\mathbb{S}_d, \|.\|_p, \lambda)$ 和 $(\mathbb{S}_d, \|.\|_q, \lambda)$ 上的最近邻树（NNT）的兄弟节点数量应该相同，因为它们的局部极限只相差一次旋转和伸缩（因此最近点不变）。但是，如果 p 和 q 不是 H¨older 共轭的，兄弟节点数量是否会依赖于它们?

最后，根据定理2 和3，我们应该构造一种统计检验，以便从一个 d 维的 d-最近邻树（NNT）中确定维数 d。但是，根据维数 d，该检验需要指数数量的节点。我们能否找到更好的统计量?

致谢

作者谨此感谢 Nicolas Curien 将他引入最近邻树（NNT）和随机递归树（RRT）这一主题，并建议他计算兄弟节点平均数；感谢 Alice Contat 在维度 1 的精确计算中提供帮助；还要感谢 Robin Stephenson 将他引介至几何优先连接图和 FKP网络模型的相关文献。作者还要感谢 ERC 740943 GeoBrown 和 ANR RanTanPlan 提供支持。

参考文献

[Ald18] David Aldous。《通过泊松着色和合并平面划分的自相似过程对平面的随机划分》。《概率年刊》，46(4):2000–2037，2018。[BB14] Erich Baur 和 Jean Bertoin。《在大型递归树中随机切断边》。载于《随机分析与应用 *2014*：献给 *Terry Lyons*》，第 51–76 页。施普林格，2014。[BBB+03] Noam Berger、B´ela Bollob´as、Christian Borgs、Jennifer Chayes 和 Oliver Riordan。《FKP网络模型的度分布》。载于《自动机、语言与编程国际研讨会》，第 725–738 页。施普林格，2003。[BBCS23] Anne-Laure Basdevant、Guillaume Blanc、Nicolas Curien 和 Arvind Singh。《泊松着色中前沿的分形性质》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2302.07254*，2023。

[Cur23] Nicolas Curien。《随机图：随笔》。https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/nicolas.curien/enseignement.html，2023。[Dev87] Luc Devroye。《分枝过程在树高分析中的应用》。Acta Informatica，24(3):277–298，1987。[Dev88] Luc Devroye。《记录值理论在随机树研究中的应用》。Acta Informatica，26(1-2):123，1988。[DFF10] Luc Devroye、Omar Fawzi 和 Nicolas Fraiman。《缩放附着随机递归树的高度》。载于离散数学与理论计算机科学，第 129–142 页。离散数学与理论计算机科学，2010。[DL95] Luc Devroye 和 Jiang Lu。《均匀随机递归树和有向无环图中最大度的强收敛性》。Random Structures & Algorithms，7(1):1–14，1995。[Dob96] Robert P. Dobrow。《递归树中距离的分布》。Journal of Applied Probability，33(3):749–757，1996。[Drm09] Michael Drmota。《随机树：组合学与概率的交汇》。Springer Science & Business Media，2009。[FK23] Alan Frieze 和 Michał Karoński。《随机图导论》。剑桥大学出版社，2023。[FKP02] Alex Fabrikant、Elias Koutsoupias 和 Christos H Papadimitriou。《启发式优化权衡：互联网幂律的新范式》。载于《自动机、语言与编程：第 29 届国际研讨会，ICALP 2002，西班牙 Málaga，2002 年 7 月 8–13 日，会议录第 29 卷》，第 110–122 页。施普林格，2002。[GM05] Christina Goldschmidt 和 James Martin。《随机递归树与 Bolthausen-Sznitman 合并过程》。Electronic Journal of Probability，10:718–745，2005。[GS02] William Goh 和 Eric Schmutz。《随机递归树最大度的极限分布》。Journal of Computational and Applied Mathematics，142(1):61–82，2002。组合学与组合优化中的概率方法。[Jor10] Jonathan Jordan。《几何优先连接图的度序列》。Advances in Applied Probability，42(2):319–330，2010。[JW15] Jonathan Jordan 和 Andrew R Wade。《随机几何优先连接图的相变》。Advances in Applied Probability，47(2):565–588，2015。

[LM21] Lyuben Lichev 和 Dieter Mitsche。随机最近邻树的新结果。*arXiv* 预印本 *arXiv:2108.13014*，2021 年。[Mah91] Hosam M Mahmoud。递归树中路径长度的极限分布。工程与信息科学中的概率，5(1):53–59，1991 年。[MS02] Subhrangshu S Manna 和 Parongama Sen。欧几里得空间中的调制无标度网络。《物理评论 *E*》，66(6):066114，2002 年。[Pit94] Boris Pittel。关于随机递归树和随机 m 叉搜索树高度的注记。*Random Structures & Algorithms*，5(2):337–347，1994 年。[Pre09] John Preater。由移民驱动的一种投票者模型。《统计与概率快报》，79(20):2131–2137，2009 年。[PS22] Michel Pain 和 Delphin S´enizergues。加权递归树高度的修正项。《应用概率年刊》，32(4):3027–3059，2022 年。[SM95] Robert T Smythe 和 Hosam M Mahmoud。递归树综述。《概率论与数理统计理论》，51(1-27)，1995 年。