arXiv:2302.10814v1 [math.CO] 21 Feb 2023

布鲁哈特序的超越商、拟对称簇与坦普利-利布代数

NANTEL BERGERON 和 LUCAS GAGNON

ABSTRACT. 设 $R_n = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 为 n 个变量的多项式环，并考虑由无常数项的拟对称多项式生成的理想 $\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle \subseteq R_n$。J. C. Aval、F. Bergeron 和 N. Bergeron 已证明，$\dim\left(R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle\right) = C_n$ 等于第 n 个卡特兰数。在本文中，我们通过定义一个排列集合 QSV_n 来解释这一现象，该集合具有以下性质：首先，QSV_n 是坦普利-利布代数 $\mathrm{TL}_n(2)$的一组基；其次，将 QSV_n 视为 $\mathbb{Q}^n$中的点集时，消失理想 $\mathrm{I}(\mathrm{QSV}_n)$ 的最高次数齐次分量为 $\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$。

我们的构造还有一些值得独立关注的副产品。我们利用弱超越在对称群 S_n 上定义了一个等价关系 $\sim$，并证明其等价类自然地由非交叉划分编号。每个等价类都是布鲁哈特序中从 QSV_n 中的一个元素到某个 321-避排列之间的区间。此外，布鲁哈特序在 $S_n/\sim$ 上诱导出一个定义良好的序。最后，我们证明，商 $S_n/\sim$ 的任意截面都会给出 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的一个（通常是新颖的）基。

1. 引言

拟对称函数起源于 Stanley [22], 的研究，在其中它们作为 P-划分的枚举级数出现。后来，Gessel [10] 对由所有拟对称函数张成的环 QSym 给出了更具代数性的处理，建立了它与经典对称函数环 Sym 之间优美的类比。QSym 的重要性持续提升： [1] 将 QSym 确立为枚举组合不变量的通用框架；近年来，拟对称函数也成为许多研究计划的核心（许多例子可见 [12, 18, 19] 及其中的参考文献）。

拟对称函数与有限反射群的不变量理论之间也存在显著的相似性。Chevalley 定理指出，每个有限反射群W都自然地作用于多项式环 R，并且 R 被正次数不变量生成的理想 $\langle R_+^W \rangle$ 取商后，同构于 W 的正则模；参见 [14, 第 3] 章。类似地， $R_n = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的拟对称多项式 QSym_n 是不变量，即 Hivert [13]引入的 Temperley–Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n(2)$在 R_n 上的某个作用的不变量。记$\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$ 为由正次数拟对称多项式生成的理想, [2, 3] 证明了余不变量空间 $R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$ 与 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的维数相同：二者都是第n个卡特兰数 C_n。由于 $\mathrm{TL}_n(2)$ 具有许多与反射群相似的良好性质，人们或许会因这一巧合而期待存在一个 Chevalley 型定理，但显然不存在作用于$R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$的 $\mathrm{TL}_n(2)$作用：Hivert 的作用不是乘法作用，并且 $\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$不是 $\mathrm{TL}_n(2)$子模。

2020年数学主题分类：05E05、20C08、33D80、14L24。关键词与短语：拟对称多项式。本研究部分受到约克研究讲席和加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。本文源于菲尔兹研究所代数组合研讨会的一次工作会议。

受上述讨论的启发，我们重新考察两个承载对称群 S_n左正则表示的模：

(1) 多项式环 $R_n = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ 对正次数对称多项式 Sym_n^+ 生成的理想取商 $R_n/\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle$，以及

(2) 正则置换多面体在 $\mathbb{Q}^n$ 中各顶点的坐标环 $R_n/\mathbf{I}(S_n)$，这些顶点是对每个 $\sigma \in S_n$ 的点 $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$。

模 (1) 是 Chevalley 定理的一个著名实例： R_n 的 S_n-不变量是对称多项式，而 $R_n/\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle$ 是余不变环 S_n。另一方面，模 (2) 来自 $R_n/\mathbf{I}(S_n)$ 坐标环上的置换多面体的 S_n 左乘作用，其中 $\mathbf{I}(S_n)$ 是消失理想。然而，正如 Garsia 和 Procesi 的研究 [9] 及其中的参考文献所示，仔细考察后会发现，这些模彼此决定！考虑理想

$$I_n = \langle f(x_1, \ldots, x_n) - f(1, \ldots, n) \mid f \in \mathrm{Sym}_n^+ \rangle \subseteq \mathbf{I}(S_n).$$

对于每个 $f \in R_n$，令 $\mathsf{h}(f)$ 表示 f 的最高次数齐次分量；对于 R_n 中的任意理想 I，记 $\mathsf{gr}(I) = \langle \mathsf{h}(f) \mid f \in I \rangle$。于是 $\mathsf{gr}(I_n) \supseteq \langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle$，而 Gr¨obner 基理论给出一个线性同构 $R_n/\mathsf{gr}(I_n) \cong R_n/I_n$；参见第 6.2 节。因此我们有

$$|S_n| = \dim\left(R_n/\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle\right) \geqslant \dim\left(R_n/\mathsf{gr}(I_n)\right) = \dim\left(R_n/I_n\right) \geqslant \dim(R_n/\mathbf{I}(S_n)\big) = |S_n|,$$

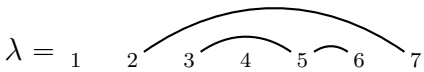
因此 $I_n = \mathbf{I}(S_n)$ 且 $\mathsf{gr}(I_n) = \langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle$，并且 $R_n/\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle \cong R_n/\mathbf{I}(S_n)$ 作为向量空间。这一同构保持各个商上的 S_n-作用：$\mathbf{I}(S_n)$ 和 $\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle$ 都是 R_n 上标准 S_n-作用的不动空间，而该作用与 $R_n/\mathbf{I}(S_n)$ 上点的作用相对应。因此，我们有一个 S_n-模同构 $R_n/\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle \cong R_n/\mathbf{I}(S_n)$，尽管左侧具有自然分次，而右侧没有。

在本文中，我们尝试将其中的一些思想应用于拟对称函数和 Temperley–Lieb 代数。众所周知，$\langle \mathrm{Sym}_n^+ \rangle \subseteq \langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$，且存在一个满射代数同态 $\phi\colon \mathbb{C}S_n \to \mathsf{TL}_n(2)$。受这些关系的启发，我们寻找满足以下条件的子集 $\mathsf{QSV}_n \subseteq S_n \subseteq \mathbb{Q}^n$：

(i) $|\mathsf{QSV}_n| = C_n$，(ii) $\phi(\mathsf{QSV}_n)$ 的像是 $\mathsf{TL}_n(2)$ 的一组基，且 (iii) 考虑消失理想 $\mathbf{I}(\mathsf{QSV}_n)$，有 $\mathsf{gr}\big(\mathbf{I}(\mathsf{QSV}_n)\big) = \langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$。

假设存在这样的集合，就可以利用 Gr¨obner 基理论以及由 QSV_n 得到的基的乘法常数，在空间 $R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$ 上定义 $\mathsf{TL}_n(2)$ 的作用。然而，QSV_n 并不容易找到：经过数年的计算机探索，我们才为较小的 n 值找到一份候选列表。如今我们已经找到了它，并发现了许多值得更广泛学界关注的非凡性质。

集合 $\mathsf{QSV}_n \subseteq S_n$ 在第 3 节中定义。初步发现之后，我们注意到，这些排列的循环结构确定了一个非交叉划分，从而将它们与关于非交叉划分和对称群 [5] 的更一般理论联系起来（另见 [20]）。例如，用 Q_λ 表示由划分 λ索引的 QSV_n 中的元素，

$\lambda =$  corresponds to $Q_\lambda = (1)(72)(653)(4).$

通过这一联系，[11] 和 [24] 研究了 一般 Temperley–Lieb 代数的基，这些基在特化后对应于 $\mathsf{TL}_n(2)$中的 $\phi(\mathsf{QSV}_n)$，因此只剩下条件 (iii)。

我们最初试图证明条件 (ii) 时，发现了关于 QSV$_n$如何嵌入 S_n的一个令人兴奋的结果。在第 4 节中，我们利用置换及其逆置换的弱超越集，在 S_n 上定义了一个等价关系 $\sim$。我们将 $S_n/\sim$ 的等价类称为超越类，并证明每个非交叉划分 λ 都双射地确定一个超越类 $\mathcal{C}_\lambda$。令人惊讶的是，布鲁哈特序在超越类上诱导出一个定义良好的商序。下文中，$\preceq$ 表示非交叉划分上的序，该序与杨氏格对偶，详见第 3.1 节。

定理 4.2. 将 $\leqslant$ 记为由布鲁哈特序在超越类上诱导的关系，则 $\mathcal{C}_\lambda \leqslant \mathcal{C}_\mu$ 当且仅当 $\lambda \preceq \mu$。

[11]还给出了集合 QSV$_n$ 作为布鲁哈特序子偏序集的一个类似结果（见第 3.1 节），这简化了定理 4.2 的证明。这使得布鲁哈特偏序集的这两种子序与商序之间产生了某种对偶性。

推论 4.3. 每个超越类 $\mathcal{C}_\lambda$ 都是布鲁哈特序中的一个区间，其上界为 $Q_\lambda \in$QSV$_n$，下界则由一个 321-避免排列给出

超越类的组合学内容十分丰富，还有许多值得探索之处。

在第5节中，我们利用 S_n 的超越类来探索 TL$_n(2)$ 的基。借助 [11] 和 [24], 的结果，我们的定理 5.1 重述了 QSV$_n$ 满足上述条件 (ii) 这一事实。此外，我们还证明了一个关于 TL$_n(2)$ 的基的更一般且新颖的定理，这些基来自满射 $\phi\colon \mathbb{C}S_n \to$ TL$_n(2)$。

定理 5.3。设 $n \geqslant 0$，并对每个大小为 n 的非交叉划分 λ，固定一个元素 $w_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$。那么，集合 $\{\phi(w_\lambda) \mid$ 非交叉划分 $\lambda\}$ 是 TL$_n(2)$ 的一组基。

最后，在第 6.1 节中，我们证明集合 QSV$_n$ 满足上述条件 (iii)。正次数拟对称多项式空间 QSym$_n$ 有一组由单项式拟对称函数 M_α 构成的齐次基，该基以正整数 $d>0$ 的组合 $\alpha \vDash d$ （长度为 $\ell(\alpha) \leqslant n$）为指标。对于每个这样的组合 α，我们构造一个非齐次多项式 $P_\alpha \in R_n$，使得 $\mathsf{h}(P_\alpha) = M_\alpha$，并证明如下结果。

定理 6.3。理想 $\langle P_\alpha \mid \alpha \vDash d$（其中 $d>0$ 且 $\ell(\alpha)\leqslant n\rangle \subseteq R_n$）是消失理想 I(QSV$_n$)，并且

$$\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle = \mathsf{gr}\big(\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)\big).$$

由此，我们得到一个线性同构

$$R_n/\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n) \cong R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle.$$

未来的工作将探讨这一结果中隐含的 $R_n/\langle$QSym$_n^+\rangle$ 模结构。

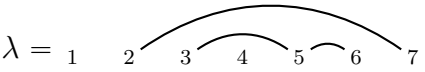
1.1. 致谢。我们感谢菲尔兹研究所代数组合学工作研讨班的参与者：K. Chan、F. G´elinas、A. Lao、A. A. Lazzeroni、C. Mc- Connell、Y. Solomon、F. Soltani、N. Wallace 和 M. Zabrocki。我们也感谢 R. Gonz´alez D'L´eon 富有启发性的讨论。

2. Preliminaries

本节将回顾有关非交叉划分（第 2.1 节）以及对称群上的偏序（第 2.2 节）的一些定义和预备结果。

2.1. 非交叉划分。设 n 为非负整数。大小为 n 的非交叉划分是由以下部分组成的图示： λ

（1）正整数 1，.....， n，按从左到右的顺序排列在水平轴上；以及（2）一组从左到右的弧 $_i\frown_j = (i,\ j)$，$i < j$ 绘制在轴上方，且彼此不相交，也没有共端点： λ 不包含任何一对 $_i\frown_k$，$_j\frown_l$ 满足 $i \leqslant j < k \leqslant l$。例如，

(2.1) $\lambda =$ 

是一个非交叉 大小为 7、包含三条弧的划分：$_2\frown_7$，$_3\frown_5$，以及 $_5\frown_6$.

将非交叉划分 λ 视为一个（无向）图， λ 的连通分支给出集合 $[n] = \{1, \ldots, n\}$ 的一个划分，这就是该术语的由来。例如，公式 (2.1) 中所示的非交叉划分对应于集合划分 $\{1\}, \{2, 7\}, \{3, 5, 6\}, \{4\}\}$。设

$$\mathrm{NCP}_n = \{\text{noncrossing partitions of size } n\}.$$

大小为 n 的非交叉划分的数量是第 n 个卡特兰数， $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ [23,练习 6.19，第] 页。

给定一条弧 $_i\frown_j \in \lambda$，称 i 为左端点， j 为右端点，并且令 t

$$\lambda^+ = \{i \in [n] \mid i \text{ is a left endpoint in } \lambda\}$$

and

$$\lambda^- = \{i \in [n] \mid i \text{ is a right endpoint in } \lambda\}.$$

例如，对于 (2.1) 中的非交叉划分 λ， $\lambda^+ = \{2、3、5\}$ 以及 $\lambda^- = \{5、6、7\}$。 λ 中的弧给出了集合 λ^+ 与 λ^-之间的一个双射，因此

$$|\lambda^+| = |\lambda^-|.$$

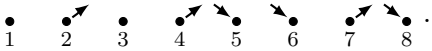
以下引理是非交叉划分相关文献中的经典结果（例如，参见 [23]）。由于它在我们的主要构造中发挥着重要作用，我们为便于说明而给出了证明。

引理 2.2。每个大小为 n 的非交叉划分 λ 都由集合 λ^+和 λ^-唯一确定。此外，给定 $[n]$ 的两个大小相等的子集 L 和 R，不等式

$$\big|[k-1] \cap L\big| \geqslant \big|[k] \cap R\big| \qquad \textit{for all } k \geqslant 1$$

成立当且仅 当我们有 $L = \lambda^+$ 和 $R = \lambda^-$ 时，存在一个大小为 n的非交叉划分 λ .

证明。给定 L 和 R，将 $[n]$ 中的元素按从左到右递增的顺序画在水平轴上，并从 L 中的每个顶点画出一条半弧，再让一条半弧终止于 R中的每个顶点。例如，取 $n = 8$、$L = \{2、4、7\}$和 $R = \{5、6、8\}$时，得到的图示为



这些半弧确定了一个唯一的非交叉划分，该划分可以通过递归地连接其间没有未完成边的成对半边来获得。这本质上与匹配左括号和右括号的过程相同，唯一的区别在于，我们的半边位于预先规定的位置。对集合 L 和 R 所作的假设条件确保了 R 中的每条终止半弧都有一条起始半弧与之匹配。

非交叉条件源于我们对连接方式的选择：交叉意味着某次连接是在两条半边之间进行的，而它们之间存在一条未完成的边。继续前面的例子，该算法依次得到图示



反过来，如果对于一个非嵌套划分 λ，$L = \lambda^+$ 和 $R = \lambda^-$，那么给定的不等式必须成立：每条弧的左端点都必须严格小于右端点。□

2.2. 置换与布鲁哈特序。令 S_n 表示[n]上的排列群。我们可以用标准的单行和双行记法，或用轮换乘积来表示 S_n 的元素。我们还用 ℓ 表示长度函数，因此对于 $w \in S_n$，$\ell(w)$是 w 的逆序数：

$$\ell(w) = |\{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \text{ and } w_i > w_j\}|.$$

S_n 上的布鲁哈特序是由以下关系生成的偏序

$$v < w \qquad \text{if and only if} \qquad wv^{-1} \text{ is a transposition } (i\,j) \text{ and } \ell(v) < \ell(w).$$

这种序在置换及相关对象的研究中无处不在（例如，参见书籍 [6]）。仅使用上述生成关系来研究布鲁哈特序很困难，因此我们将使用所谓的杨表判据来确定其其他关系。对于 $w \in S_n$ 和 $1 \leqslant k \leqslant n$，令 $\mathcal{T}_k(w)$ 为集合 $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$按递增顺序重新排列后的结果，并令 $\mathcal{T}(w)$ 为行分别为 $\mathcal{T}_n(w)$、$\mathcal{T}_{n-1}(w)$、一直到 $\mathcal{T}_1(w)$的数组。例如，$\mathcal{T}_4(52314) = 1\,2\,3\,5$，并

$$\mathcal{T}(52314) = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & \\ 2 & 3 & 5 & & \\ 2 & 5 & & & \\ 5 & & & & \end{array} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{T}(41235) = \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & 2 & 4 & & \\ 1 & 4 & & & \\ 4 & & & & \end{array}.$$

命题 2.3（[6, 定理 2.6.3]）。对于 $v, w \in S_n$，$v \leqslant w$ 成立，当且仅当 $\mathcal{T}(v)$ 的每个条目都小于或等于 $\mathcal{T}(w)$中对应的条目。

例如，通过考察上方所示的图示 $\mathcal{T}(52314)$ 和 $\mathcal{T}(41235)$，杨表判据使我们可以推导出 $52314 \leqslant 41235$。

3. The set QSV_n

本节定义集合 $\mathrm{QSV}_n \subseteq S_n$，并确立其基本性质。我们的处理方式基本上遵循非交叉划分相关文献中的标准做法，最初由 [5]提出。在第 3.1 节中，我们转而讨论布鲁哈特序在 QSV_n上的限制，并回顾文献 [11]中对该序的组合描述。

设 λ 是一个大小为 n 的非交叉划分，并回顾第 2.1 节中的集合 λ^+ 和 λ^-。定义置换 $Q_\lambda \in S_n$ 如下：

$$Q_\lambda(j) = \begin{cases} i & \text{if } j \in \lambda^- \text{ and } {}_i\!\frown\!{}_j \in \lambda \\ k & \text{if } j \notin \lambda^- \text{ and } k \text{ is the largest element connected to } i \text{ in } \lambda \end{cases}$$

因此，Q_λ 会将每个 $j \in [n]$ 映射到 λ中的左邻点（如果存在这样的邻点）；否则，将 j 映射到其连通分支中最右侧的元素。

Let

$$\mathrm{QSV}_n = \{Q_\lambda \mid \lambda \in \mathrm{NCP}_n\}.$$

例如，QSV$_3$ 的元素为：

$$Q_{\underset{1\ 2\ 3}{\bullet\frown\bullet\ \bullet}} = 321, \qquad Q_{\underset{1\ 2\ 3}{\bullet\frown\bullet\frown\bullet}} = 312, \qquad Q_{\underset{1\ 2\ 3}{\bullet\frown\bullet\ \bullet}} = 213,$$

$$Q_{\underset{1\ 2\ 3}{\bullet\ \bullet\frown\bullet}} = 132, \qquad \text{and} \qquad Q_{\underset{1\ 2\ 3}{\bullet\ \bullet\ \bullet}} = 123.$$

引理 3.1. 设 λ 是一个大小为 n、连通分支为 $C_1, \ldots, C_s$ 的非交叉划分，并将 C_r 中的元素按递增顺序列为 $\{c_{r,1} < c_{r,2} < \cdots < c_{r,|C_r|}\}$，其中 $1 \leqslant r \leqslant s$。则其不相交循环分解为

$$Q_\lambda = \prod_{r=1}^{s} (c_{r,|C_r|} \cdots c_{r,2} c_{r,1}).$$

证明。根据上文 Q_λ 的定义，结论显然成立：$[n] - \lambda^- = \{c_{r,1} \mid 1 \leqslant r \leqslant s\}$，因此对每个 r，都有 $Q_\lambda(c_{r,1}) = c_{r,|C_r|}$；而对于 $1 < i \leqslant |C_r|$，有 $c_{r,i} = c_{r,i-1}$。□

例如　例如，当 λ 只有一个连通分支时，Q_λ 是一个单循环：带有　　h

$$\lambda = {}_1\frown{}_2\frown{}_3\frown{}_4\frown{}_5\frown{}_6\frown{}_7 \qquad \text{we have} \qquad Q_\lambda = (7654321) = 7123456.$$

考虑公式 (2.1) 中所示的非交叉划分，可得一个更复杂的例子：带有

$$\lambda = {}_1\ \ {}_2\frown\frown{}_3\frown{}_4\frown{}_5\frown{}_6\frown{}_7 \qquad \text{we have} \qquad Q_\lambda = (1)(72)(653)(4) = 1764352.$$

备注 3.2. 给定任意一个 n-循环 $c \in S_n$，[5] 在 NCP$_n$ 与绝对序中恒等元和 c 之间的区间之间建立了一个双射。我们构造的 QSV$_n$ 对 n-循环 $c = (n \cdots 21)$ 实现了这一双射。

3.1. QSV$_n$上的布鲁哈特序。第 2.2 节中描述的 S_n 上的布鲁哈特序限制为集合 QSV$_n$上的一个偏序。正如论文 [11], 中所述，这个偏序十分自然；本节将回顾其定义，以供后续各节使用。

在非交叉划分$_n$ 的集合 NCP $\preceq$ 上定义偏序：将覆盖关系扩展为如下偏序：λ 被 μ覆盖，当且仅当 λ 可通过以下某种方式由 μ 得到：

（1）从 μ中移除一条形如$_i$　$_{i+1}$ 的弧；或（2）将 μ 中的任意一条弧$_i$　$_k$ 替换为两条弧 $_i$　$_j$ 和 $_j$　$_k$，其中存在某个 $i < j < k$，使这两条弧既不相交，也不与 μ中的任何其他弧共用左端点或右端点。

要以直接而直观的方式描述 $\preceq$ on NCP$_n$ 上的非覆盖关系，以及 QSV$_n$ 上的布鲁哈特序的非覆盖关系，是很困难的。相反，通过一个中介对象来理解这些关系最为恰当。长度为 $2n$ 的投票序列是一个序列 $b \in \{\pm 1\}^{2n}$，其 b 的每个部分和均非负，且总和为 0。第 5节中使用了一个众所周知的非交叉划分之间的双射：对于 $\lambda \in$ NCP$_n$，定义投票序列 $b^\lambda = (b_1^\lambda, b_2^\lambda, \ldots, b_{2n}^\lambda)$，如下所示：

$$b_{2k-1}^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{if } k \notin \lambda^- \\ -1 & \text{if } k \in \lambda^- \end{cases} \qquad \text{and} \qquad b_{2k}^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{if } k \in \lambda^+ \\ -1 & \text{if } k \notin \lambda^+ \end{cases}$$

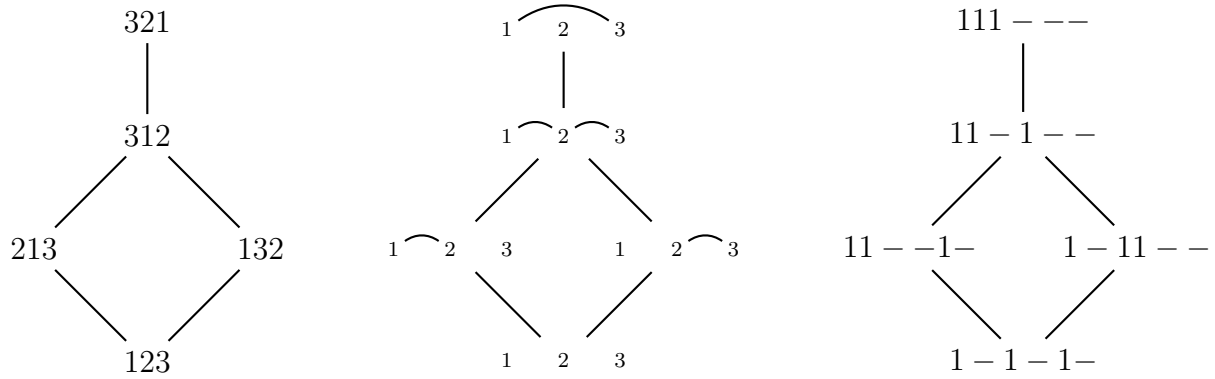


FIGURE 1. 以下对象的哈斯图：带有布鲁哈特序的 QSV_3；带有$\trianglelefteq$的 NCP_3；以及投票序列（其中每个 -1都表示为 $-$），其序关系为部分和上的逐项序。

对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$。

命题 3.3（[11, 定理 1.1 和推论 7.5]）。设 λ 和 μ 是大小为 n的非交叉划分。以下条件等价：

(1) $\lambda \trianglelefteq \mu$，(2) $Q_\lambda \leqslant Q_\mu$ 在布鲁哈特序中，且 (3) 对所有 $1 \leqslant k \leqslant 2n$，$\sum_{i=1}^{k} b_k^\lambda \leqslant \sum_{i=1}^{k} b_k^\mu$。

对于 $n = 3$，图 1 展示了 QSV_n、NCP_n和长度为 $2n$ 的投票序列上的（同构）序关系。

本节的最终结果很容易由 [11], 的结果推出，但该来源并未明确陈述这一结果。为求完整起见，这里给出证明。

推论 3.4。令 f 及为大小为的非交叉划分。则当且仅当

$$\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big| \;\leqslant\; \big|\mu^+ \cap [k-1]\big| - \big|\mu^- \cap [k]\big|$$

and

$$\big|\lambda^+ \cap [k]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big| \;\leqslant\; \big|\mu^+ \cap [k]\big| - \big|\mu^- \cap [k]\big|$$

对所有均成立。

证明。由命题 3.3，只需证明对所有 ，

$$\sum_{i=1}^{2k-1} b_i^\lambda \;=\; 1 + 2\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - 2\big|\lambda^- \cap [k]\big| \qquad \text{and} \qquad \sum_{i=1}^{2k} b_i^\lambda \;=\; 2\big|\lambda^+ \cap [k]\big| - 2\big|\lambda^- \cap [k]\big|.$$

下面用归纳法证明：当时，这些等式可直接验证；而当时，我们考察第个表达式与第个表达式之差：

$$\Big(1 + 2\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - 2\big|\lambda^- \cap [k]\big|\Big) - \Big(2\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| + 2\big|\lambda^- \cap [k-1]\big|\Big) = 1 - 2\big|\lambda^- \cap \{k\}\big|,$$

其结果为，且

$$\Big(2\big|\lambda^+ \cap [k]\big| - 2\big|\lambda^- \cap [k]\big|\Big) - \Big(1 + 2\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| + 2\big|\lambda^- \cap [k]\big|\Big) = 2\big|\lambda^+ \cap \{k\}\big| - 1,$$

即为b_{2k}^λ。 □

注记 3.5。下面我们对命题 3.3 作几点补充说明。

(1) [11] 的结果描述的是集合 $\{\omega_0 w \omega_0^{-1} \mid w \in \mathrm{QSV}_n\}$ 的布鲁哈特序，而非 QSV_n，其中 $\omega_0 \in S_n$ 表示 Bruhat 最大元 $\omega_0 \in S_n$。按照备注 3.2 的术语，这些是与循环 $(12\ldots n)$ 相关联的非交叉划分，而非与 $(n\ldots 21)$相关联的非交叉划分；不过，由 ω_0 共轭所诱导的映射是布鲁哈特序的自同构，因此这些结果是等价的。我们的许多结果在这一双射下都有对应结果，我们将在全文中反复探讨这种等价性。(2) [11] 的结果在命题 3.3 的第 3 项中使用 Dyck 路径，而非投票序列。两者之间可以这样转换：将投票序列中的每个 1 替换为 Dyck 路径中的一个上升步，同样地，将每个 -1 替换为一个下降步。(3) 命题 3.3 第 3 项中的序的另一种实现方式，可以在杨氏格中空图示与阶梯形之间的区间的对偶中找到。这可由 Dyck 路径与上述对偶区间之间显而易见的序同构得出 [23, 解答 6.19 vv]。

4. The excedance quotient of the Bruhat order

本节介绍一种新的等价关系 $\sim$，定义在 S_n 上，并证明它会导出布鲁哈特序的一个商。该等价关系以一种简单的方式，利用置换的弱超越来定义。我们发现了 $S_n/\sim$ 中等价类的若干优良性质，并将在给出初始定义后对其加以总结。

给定一个置换 $w \in S_n$，w 的一个弱超越是满足 $i \leqslant w_i$ 的一对 $(i、w_i)$。进一步地，我们将超越值 $E_{val}(w)$ 和超越位置 $E_{pos}(w)$ 定义为以下集合

$$E_{val}(w) = \{w_i \mid (i, w_i) \text{ is a weak excedance of } w\}, \text{ and}$$

$$E_{pos}(w) = \{i \mid (i, w_i) \text{ is a weak excedance of } w\}.$$

通过置换的双行记法，最容易看出弱超越以及集合 $E_{val}(w)$ 和 $E_{pos}(w)$。例如，将一个置换中的非超越标为红色，

$$w = \overset{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8}{3\,5\,1\,4\,2\,6\,5\,8}, \qquad E_{pos}(w) = \{1,2,4,6,8\}, \qquad \text{and} \qquad E_{val}(w) = \{3,4,5,6,8\}.$$

我们将 $\sim$ 上的超越关系 S_n 定义为：

$$v \sim w \quad \text{if and only if} \quad E_{val}(v) = E_{val}(w) \text{ and } E_{pos}(v) = E_{pos}(w), \tag{4.1}$$

并称 $S_n/\sim$ 的每个等价类为一个超越类。

现在我们总结本节的主要结果。每个大小为n 的非交叉划分 λ 都会确定一个超越类：回顾第 2.1 节中定义的集合 λ^+ 和 λ^-，并令

$$\mathcal{C}_\lambda = \{w \in S_n \mid E_{val}(w) = [n] - \lambda^+ \text{ and } E_{pos}(w) = [n] - \lambda^-\}.$$

在第 4.1 节中，我们证明这一构造是双射，因此超越类的数量由 Catalan 数给出。例如，S_3 的五个超越类为：

$$\mathcal{C}_{\overset{\frown}{1\,2\,3}} = \{\overset{1\,2\,3}{3\,2\,1}, \overset{1\,2\,3}{2\,3\,1}\}, \qquad \mathcal{C}_{\overset{\frown}{1}\,\overset{\frown}{2}\,\overset{\frown}{3}} = \{\overset{1\,2\,3}{3\,1\,2}\}, \qquad \mathcal{C}_{\overset{\frown}{1}\,2\,3} = \{\overset{1\,2\,3}{2\,1\,3}\},$$

$$\mathcal{C}_{1\,\overset{\frown}{2}\,\overset{\frown}{3}} = \{\overset{1\,2\,3}{1\,3\,2}\}, \qquad \text{and} \qquad \mathcal{C}_{1\,2\,3} = \{\overset{1\,2\,3}{1\,2\,3}\}.$$

布鲁哈特序在 $S_n/\sim$, 上诱导出一种关系，而在第 4.3 节中，我们通过以下结果证明这种关系是偏序。回顾第 3.1 节中的序 $\preceq$ 。

定理 4.2. 设 $\leqslant$ 为布鲁哈特序在超越类 $S_n/\sim$ 上诱导的关系，则 $\mathcal{C}_\lambda \leqslant \mathcal{C}_\mu$ 当且仅当 $\lambda \preceq \mu$。

定理 4.2 的证明中有两个关键的中间结果，见第 4.2 节：我们证明每个超越类 $\mathcal{C}_\lambda$ 都包含唯一的 Bruhat 极小元和 Bruhat 最大元，并且它们分别是一个 321-避排列和元素 $Q_\lambda \in$QSV$_n$。结合定理 4.2，可推出以下推论。

推论 4.3. 每个超越类 $\mathcal{C}_\lambda$ 都是布鲁哈特序中的一个区间，其上界为 $Q_\lambda \in$QSV$_n$ ，下界则由一个 321-避排列给出

备注 4.4. 值得一提的是，“超越类”还有两种不同的定义方式。

(1) 我们对超越类的定义是两个显而易见的选择之一：也可以考虑由集合 $E'_{val}(w)$和 $E'_{pos}(w)$中的值i 以及位置 w_i 所确定的等价类，其中 $i < w_i$，这称为严格超越。这种选择同样可行，并会得到与本文所述结果等价的结论。这种等价性与注记 3.5 (1) 中描述的自同构直接相关。(2) 超越关系细化了 $[8]$, 中定义的一种等价关系；在该关系下，具有相同超越位置集合的置换彼此等价。 $[8]$的作者证明了关于其“超越类”的若干计数与统计结果，值得探讨这些结果如何推广到我们对超越类的定义。

4.1. 超越类与非交叉划分。本节将确立一些关于超越类与非交叉划分之间关系的基本结果。

命题 4.5. 对于 $n \geqslant 0$，映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NCP}_n & \longrightarrow & S_n/\sim \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{C}_\lambda \end{array}$$

是一个双射。

证明。我们首先证明，每个超越类都具有 $\mathcal{C}_\lambda$ 的形式，其中 $\lambda \in$NCP$_n$。根据引理 2.2，这等价于证明对于任意 $w \in S_n$，以下判据成立：

$$\Big|\big\{i \in [k-1] \mid i \notin E_{val}(w)\big\}\Big| \;\geqslant\; \Big|\big\{j \in [k] \mid j \notin E_{pos}(w)\big\}\Big| \qquad \text{for all } 1 \leqslant k \leqslant n.$$

我们将直接证明上述不等式。固定 $1 \leqslant k \leqslant n$ ，并假设 $j \in [k]$ 不是超越位置，因此 $w_j < j$。根据假设， $w_j < k$ ，且 w_j 不是超越值。因此，

$$\big\{i \mid i \in [k-1] \text{ and } i \notin E_{val}(w)\big\} \;\supseteq\; \big\{w_j \mid j \in [k] \text{ and } j \notin E_{pos}(w)\big\},$$

由此得证。现在，我们必须证明每个 $\mathcal{C}_\lambda$ 都非空。下文的引理 4.6 将证明这一点，并完成证明。□

引理 4.6. 设 λ 是一个大小为 n 的非交叉划分。那么 $Q_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$，使得

$$E_{val}(Q_\lambda) = [n] - \lambda^+ \qquad \textit{and} \qquad E_{pos}(Q_\lambda) = [n] - \lambda^-.$$

证明。 根据定义， $Q_\lambda(j) < j$ 当且仅当弧 $_{Q_\lambda(j)} \quad {}_{j}$ 出现在λ中，此时$j \in \lambda^-$ 且 $Q_\lambda(j) \in \lambda^+$；这就证明了该断言。 □

最终结果通过推论 3.4，将 $\mathcal{C}_\lambda$ 的某些元素性质与第 3.1 节中定义的投票序列 b^λ 的部分和联系起来。这将成为后续各节中若干论证的关键。

引理 4.7. 设 λ 是一个大小为 $n \geqslant 0$ 的非交叉划分，并取 $w \in \mathcal{C}_\lambda$。对于所有 $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\big|\{w_i \mid n \geqslant i > k \text{ and } w_i < k\}\big| \;=\; \big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big|$$

and

$$\big|\{w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k \text{ and } w_i > k\}\big| \;=\; \big|\lambda^+ \cap [k]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big|.$$

证明. 为了证明第一个等式，注意到根据定义，

$$\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big| \;=\; \Big|\big\{w_i \in [k-1] \mid w_i \notin E_{val}(w)\big\}\Big| - \Big|\big\{i \in [k] \mid i \notin E_{pos}(w)\big\}\Big|.$$

置换 w 在满足 $i \notin E_{pos}(w)$ 的 $i \in [k]$ 与同时满足 $w_i \notin E_{val}(w)$ 和 $i \in [k]$ 的 $w_i \in [k-1]$ 之间建立了双射。因此，上式右边统计的是满足 $w_i \notin E_{val}(w)$ 和 $i \notin [k]$ 的 $w_i \in [k-1]$，这恰好就是 $\{w_i \mid n \geqslant i > k$ 和 $w_i < k\}$。

第二个等式可由一个类似但稍复杂的论证推出。我们先将右边改写成更合适的形式：

$$\begin{aligned}\big|\lambda^+ \cap [k]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big| \;&=\; \Big(k - \big|\lambda^- \cap [k]\big|\Big) - \Big(k - \big|\lambda^+ \cap [k]\big|\Big) \\ &=\; \big|E_{pos}(w) \cap [k]\big| - \big|E_{val}(w) \cap [k]\big|.\end{aligned}$$

对于每个 $w_i \in E_{val}(w) \cap [k]$，都有 $i \leqslant w_i$，因此 $i \in E_{pos}(w) \cap [k]$。于是，$w^{-1}$ 在 $E_{val}(w) \cap [k]$ 与满足 $w_i \leqslant k$ 的 $i \in E_{pos}(w) \cap [k]$ 的子集之间建立了双射。因此，上式统计的是满足 $w_i \notin [k]$ 的各个位置 $i \in E_{pos}(w) \cap [k]$；该集合的基数等于 $\{w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k$ 和 $w_i > k\}$。□

4.2. 极小元与极大元。本节将证明，每个超越类都包含唯一的布鲁哈特极小元和极大元。这是证明超越类为布鲁哈特区间且商序定义良好的关键中间步骤。我们先讨论极大元，即 QSV_n 中的元素；而极小（321- 避免）元素将在下文命题 4.8 的证明之后讨论。

命题 4.8. 对于所有非交叉划分 λ, Q_λ 是 $\mathcal{C}_\lambda$ 的布鲁哈特极大元。

证明。引理 4.6 表明 $Q_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$，因此我们只需证明 Q_λ 是 $\mathcal{C}_\lambda$ 的上界；为此，固定 $w \in \mathcal{C}_\lambda$。根据杨表判据（命题 2.3），只需证明对于每个 $1 \leqslant k \leqslant n$，$\mathcal{T}_k(w)$ 中的每个条目都不大于 $\mathcal{T}_k(Q_\lambda)$ 中对应的条目。

论证由两个不同部分组成：首先逐项比较 $\mathcal{T}_k(w)$ 和 $\mathcal{T}_k(Q_\lambda)$ 中严格大于 k 的元素，然后对至多为 k 的元素进行同样的比较。这一方法的有效性依赖于这样一个事实：对于 w 和 Q_λ，这些元素集合具有相同的基数：根据引理 4.7,

$$\begin{aligned}\big|\{w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k \text{ and } w_i > k\}\big| &= \big|\lambda^+ \cap [k]| - |\lambda^- \cap [k]\big| \\ &= \big|\{Q_\lambda(i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k \text{ and } w_i > k\}\big|.\end{aligned}$$

我们先处理第一部分。将 $\mathcal{T}_k(w)$ 和 $\mathcal{T}_k(Q_\lambda)$ 中大于 k 的元素分别按递增顺序列为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ 和 $q_1 < q_2 < \ldots < q_r$。我们的目标是证明，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant r$，都有 $x_i \leqslant q_i$。固定这样一个 i，由引理 4.7 可得

$$\big|\{w_t \mid 1 \leqslant t \leqslant q_i \text{ and } w_t > q_i\}\big| = \big|\lambda^+ \cap [q_i]| - |\lambda^- \cap [q_i]\big|.$$

只需证明上述表达式等于 $r-i$，因为这意味着 x_1、x_2、……、x_i 均不包含在集合 $\{w_t \mid 1 \leqslant t \leqslant q_i$ 和 $w_t > q_i\}$ 中，从而得出 $x_i \leqslant q_i$。

令 C 表示包含值 q_i 的 λ 连通分支。由于 $q_i \in \mathcal{T}_k(Q_\lambda)$ 和 $q_i > k$，我们有 $t_i = Q_\lambda^{-1}(q_i) \leqslant k < q_i$。根据 Q_λ 的定义，q_i 必须是 C 的最大元素，而 t_i 是其最小元素。从组合意义上看，差值 $\big|\lambda^+ \cap [q_i]\big| - \big|\lambda^- \cap [q_i]\big|$ 统计了 λ 中左端点位于 $[q_i]$ 且右端点位于 $[n]-[q_i]$ 的弧的数量；由于 $q_i \in E_{val}(w)$，这也就是 λ 中位于 q_i 上方的弧的数量。λ 中任何位于 q_i 上方的弧，其左、右端点之间都必须包含 C 的所有元素，因此任何此类弧的左端点都属于 $[k]$，而右端点大于 q_i。于是，每条这样的弧都属于元素 q_{i+1}、……、q_r 之一所在的连通分支，并且恰有 $r-i$ 个这样的连通分支。

对于论证的第二部分，我们旨在证明，$\mathcal{T}_k(w)$中不超过 k 的每个条目都小于或等于 $\mathcal{T}_k(Q_\lambda)$ 中的相应条目；我们将以下述间接方式建立这一点。记 $s = \big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big|$，引理 4.7指出，$[k]$中恰有 s 个元素不出现在 $\mathcal{T}_k(w)$中，$\mathcal{T}_k(Q_\lambda)$的情形同样如此。分别将这些元素按递增顺序枚举为 $y_1 < y_2 < \cdots < y_s$和$p_1 < p_2 < \cdots < p_s$。我们将证明，对于每个 $1 \leqslant i \leqslant s$，都有 $p_i \leqslant y_i$；这意味着，对于 $[k] - \{p_1, p_2, \ldots\ldots, p_s\}$ 以及 $[k] - \{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_s\}$ 中的其余元素，所需的不等式方向相反。

固定 $1 \leqslant i \leqslant s$，由引理 4.7 可得

$$\big|\{w_t \mid n \geqslant t > k \text{ and } w_t < p_i\}\big| = \big|\lambda^+ \cap [p_i - 1]\big| - \big|\lambda^- \cap [p_i]\big|.$$

因此，只需证明上述量为 $i-1$，从而 p_i 被 y_i、y_{i+1}、……、y_s 中的每一个所上界，特别是 $p_i \leqslant y_i$。

从组合意义上说，差值 $\big|\lambda^+ \cap [p_i - 1]\big| - \big|\lambda^- \cap [p_i]\big|$ 计数的是λ 中左端点为 $[p_i - 1]$、右端点位于 $[n]-[p_i]$ 中的弧的数量，或者等价地说，是 λ中位于 p_i 上方的弧的数量。记包含 p_i的连通分支为 C，每条这样的弧都必须在其左右端点之间包含 C，因此左端点小于 p_i，右端点则位于 $[n]-[k]$中的某处。于是，每条这样的弧都必须属于 p_1、p_2、……、p_{i-1} 中某一个的连通分支，而这样的连通分支共有 $i-1$ 个。□

现在我们转而讨论每个超越类的最小元素。对于大小为 n 的非交叉划分λ，将集合 λ^+、λ^-、$[n]-\lambda^+$ 和 $[n]-\lambda^-$ 按递增顺序排列为

$$\lambda^+ = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_s\}, \qquad \lambda^- = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_s\},$$

$$[n]-\lambda^+ = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-s}\}, \qquad \text{and} \qquad [n]-\lambda^- = \{y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-s}\}.$$

令 $T_\lambda \in S_n$ 为满足以下条件的置换

$$T_\lambda(i) = \begin{cases} a_r & \text{if } i \in \lambda^- \text{ and } i = b_r \\ x_r & \text{if } i \notin \lambda^- \text{ and } i = y_r. \end{cases}$$

因此，T_λ 的双行记法可通过将 λ^+ 的元素按从左到右递增的顺序置于 λ^- 的元素下方，并以相同方式将 $[n]-\lambda^+$ 的元素置于 $[n]-\lambda^-$ 的元素下方得到。例如，取 $n=8$ 和

$$\lambda = \begin{tikzcd} 1 \arrow[rr, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & 3 & 4 & 5 \arrow[r, bend left] & 6 & 7 & 8 \end{tikzcd}$$

我们有 $\lambda^+=\{1,2,5\}$ 以及 $\lambda^-=\{3,5,7\}$, $[8]-\lambda^+=\{3,4,6,7,8\}$，以及 $[8]-\lambda^-=\{1,2,4,6,8\}$，因此

$$T_\lambda = \overset{1}{3}\overset{2}{4}\overset{3}{1}\overset{4}{6}\overset{5}{2}\overset{6}{7}\overset{7}{5}\overset{8}{8},$$

其中非超越以红色标出，如第 4 节开头所示。

命题 4.9. 对所有非交叉划分 λ, $T_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$，$T_\lambda$ 都是 $\mathcal{C}_\lambda$的 Bruhat 最小元。

证明. 为了说明 $T_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$，回想一下为 λ定义的元素 a_i, b_i, x_i和 y_i 。对于$1 \leqslant r \leqslant s$，我们对 λ^+ 和 λ^- 的枚举保证了

$$a_r = \min\left\{k \mid r \geqslant \left|[k]\cap\lambda^+\right|\right\} \qquad \text{and} \qquad b_r = \min\left\{k \mid r \geqslant \left|[k]\cap\lambda^-\right|\right\}.$$

根据引理 2.2，情况总是如此：$\left|[k-1]\cap\lambda^+\right| \geqslant \left|[k]\cap\lambda^-\right|$，因此 $a_r < b_r$。由此，数对 $(b_r, a_r) = (b_r, T_\lambda(b_r))$ 不是 T_λ的弱超越。类似论证表明，每个数对 (y_r, x_r), $1 \leqslant r \leqslant n-s$ 都是 T_λ 的弱超越，因此我们得出

$$\lambda^+ = [n] - E_{val}(T_\lambda) \qquad \text{and} \qquad \lambda^- = [n] - E_{pos}(T_\lambda).$$

要证明 $T_\lambda \leqslant w$ 对所有 $w \in \mathcal{C}_\lambda$都成立，请回顾杨表判据（命题 2.3）。对于 $1 \leqslant k \leqslant n$，第 $\mathcal{T}_k(T_\lambda)$ 行由 $E_{val}(w)$ 中最小的 $\left|[k]\cap\lambda^-\right|$ 个元素以及 $[n]-E_{val}(w)$ 中最小的 $k-|[k]\cap\lambda^-|$ 个元素组成。对于 w，第 $\mathcal{T}_k(w)$ 行同样由 $E_{val}(w)$ 中的 $|[k]\cap\lambda^-|$ 个元素和 $[n]-E_{val}(w)$ 中的 $k-|[k]\cap\lambda^-|$ 个元素组成，但这些元素未必是最小的。因此，根据极小性假设，$\mathcal{T}_k(T_\lambda)$ 的每个元素都不大于 $\mathcal{T}_k(w)$中对应的元素。□

最后，回顾一下，若不存在满足 $w_i > w_j > w_k$的指标$i < j < k$，则置换 $w \in S_n$ 称为 321-避免。已知 321-避免排列的数量为第 n 个卡特兰数，因此下面的结果表明，每个超越类都包含唯一一个 321-避排列。

命题 4.10. 对于所有非交叉划分 λ，置换 T_λ 是 321-避免的。

证明。设 $i,j,k \in [n]$，并且不失一般性地假设 $i<j<k$。由于 $[n]$ 中的任意元素都必须包含在 λ^+ 或其补集中，因此 $\{i,j,k\}$ 中必有两个元素同属于 λ^+ 或 $[n]-\lambda^+$之一。由于 T_λ 在 λ^+ 到 λ^-以及在 $[n]-\lambda^+$ 到 $[n]-\lambda^-$上的限制都是保序双射，这意味着 T_λ中不可能存在 321模式，证明完毕。□

4.3. 比较超越类。在本节中，我们证明定理 4.2。该证明基于一个最后的中间结果；回顾第 3.1 节中定义的非交叉划分上的序 $\preceq$

命题 4.11。设 μ 是一个大小为 n 的非交叉划分。则

$$\{w \in S_n \mid w \leqslant Q_\mu\} = \bigsqcup_{\lambda \preceq \mu} \mathcal{C}_\lambda.$$

证明。首先，假设 $\lambda \trianglelefteq \mu$，因此根据命题 3.3， $Q_\lambda \leqslant Q_\mu$。命题 4.8 表明，对于任意 $w \in C_\lambda$，$w \leqslant Q_\lambda$，因此由传递性可得

$$\{w \in S_n \mid w \leqslant Q_\mu\} \supseteq \bigsqcup_{\lambda \trianglelefteq \mu} \mathcal{C}_\lambda.$$

为证明反向的包含关系，设 w 是一个满足 $w \leqslant Q_\mu$ 的置换，并令 λ 为唯一满足 $w \in \mathcal{C}_\lambda$ 的非交叉划分。由推论 3.4，命题 $\lambda \trianglelefteq \mu$ 等价于以下不等式

$$\big|\lambda^+ \cap [k-1]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big| \;\leqslant\; \big|\mu^+ \cap [k-1]\big| - |\mu^- \cap [k]\big|$$

and

$$\big|\lambda^+ \cap [k]\big| - \big|\lambda^- \cap [k]\big| \;\leqslant\; \big|\mu^+ \cap [k]\big| - \big|\mu^- \cap [k]\big|$$

对所有 $1 \leqslant k \leqslant n$ 均成立。我们将利用引理 4.7 中对两边各自给出的刻画，证明这一等价表述。根据假设 $w \leqslant Q_\mu$，杨表判据（命题 2.3）说明杨图 $\mathcal{T}(w)$ 的各项均小于或等于杨图 $\mathcal{T}(Q_\mu)$ 中对应的项。因此，对每个 $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\big|\{w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k \text{ and } w_i > k\}\big| \;\leqslant\; \big|\{Q_\mu(i) \mid 1 \leqslant i \leqslant k \text{ and } Q_\mu(i) > k\}\big|,$$

因为 $\mathcal{T}_k(w)$ 的每一项都小于或等于 $\mathcal{T}_k(Q_\mu)$ 中对应的项，同理

$$\big|\{w_i \mid n \geqslant i > k \text{ and } w_i < k\}\big| \;\leqslant\; \big|\{Q_\mu(i) \mid n \geqslant i > k \text{ and } Q_\mu(i) < k\}\big|,$$

因为 $\mathcal{T}_k(Q_\mu)$ 的每一项都大于或等于 $\mathcal{T}_k(w)$ 中对应的项。至此，证明完成。□

现在我们来证明定理 4.2。回顾第 4.2 节中定义的元素 T_λ。

定理 4.2 的证明。超越类上的关系 $\leqslant$ 定义如下:

$$\mathcal{C}_\lambda \leqslant \mathcal{C}_\mu \qquad \text{if and only if} \qquad v \leqslant w \text{ for some } v \in \mathcal{C}_\lambda \text{ and } w \in \mathcal{C}_\mu.$$

由引理 4.6 可知，对于每个非交叉划分 λ， $Q_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$。命题 3.3 蕴含，只要 $\lambda \trianglelefteq \mu$，就有 $\mathcal{C}_\lambda \leqslant \mathcal{C}_\mu$。因此，只需证明反向命题：只有当 $\lambda \trianglelefteq \mu$ 时， $\mathcal{C}_\lambda \leqslant \mathcal{C}_\mu$。为此，假设对于某个 $v \in \mathcal{C}_\lambda$ 和 $w \in \mathcal{C}_\mu$，有 $v \leqslant w$。根据命题 4.8，$w \leqslant Q_\mu$，因此布鲁哈特序在 S_n 上的传递性蕴含 $v \leqslant Q_\mu$。命题 4.11 进而蕴含 $\lambda \trianglelefteq \mu$，证明完毕。□

5. Bases for the Temperley–Lieb Algebra $\mathsf{TL}_n(2)$

Temperley–Lieb 代数 $\mathsf{TL}_n(2)$ 是由元素 e_1，.....， e_{n-1} 生成的 $\mathbb{C}$-代数，并满足以下关系，其中每个 $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$

$$\begin{aligned} e_i^2 &= 2e_i \\ e_i e_j &= e_j e_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ e_i e_j e_i &= e_i \quad \text{if } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

存在一个从对称群代数 $\mathbb{C}S_n$ 到 $\mathsf{TL}_n(2)$的满射代数态射，由下式给出

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}S_n &\longrightarrow \mathsf{TL}_n(2) \\ s_i &\longmapsto 1 - e_i. \end{aligned}$$

特别地，$\mathsf{TL}_n(2) \cong S_n/\ker(\phi)$。

众所周知，所有 321-避排列在 ϕ 下的像构成 $\mathsf{TL}_n(2)$ 的一组基。Zinno [24] 提出的另一组基可通过映射 ϕ 得到，该映射利用了 13

中的非交叉划分组合学（见备注 3.2）。这组基恰好是集合 $\{\phi(\omega_0 w \omega_0) \mid w \in \mathrm{QSV}_n\}$。由于核

$$\ker(\phi) = \langle (13) - (123) - (132) + (12) + (23) - e \rangle$$

在 $\mathbb{C}$-线性映射 $w \mapsto \omega_0 w \omega_0$（如注记 3.5 中所述）下保持不变，因此以下结果是 [24, 定理 2] 的直接推论。

定理 5.1. 对所有 $n \geqslant 0$，集合 $\phi(\mathrm{QSV}_n)$ 都是 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的一组基。

备注 5.2. 定理 5.1 也可由 Gobet 和 Williams 在 [11] 中的工作推出：他们的结果蕴含了 Zinno 结果的一个推广，即每个 S_n 的 Coxeter 元都确定 $\mathrm{TL}_n(2)$ 在 ϕ 下的一组基（另见备注 3.2）。然而，[11]并未明确陈述这一关于基的结果，因此从 Zinno 早期的工作中更容易推导出该定理。

5.1. Temperley–Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的更多基。在研究超越类时，我们发现其结构可应用于如下问题：计算在 ϕ 下为 $\mathrm{TL}_n(2)$ 提供基的排列集合。我们在此附上该结果及其证明，因为它是我们当前研究的一项有趣成果。

定理 5.3。令 $n \geqslant 0$，并对每个大小为 n 的非交叉划分 λ 固定一个元素 $w_\lambda \in \mathcal{C}_\lambda$。那么集合 $\{\phi(w_\lambda) \mid \text{非交叉划分 } \lambda\}$ 是 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的一组基。

定理 5.3 的证明见第 5.3 节。在此，我们讨论其影响：在定理中取 $w_\lambda = Q_\lambda$ 可得到定理 5.1 的又一个证明，从而确认了上文讨论的 [11] 和 [24] 的结果。然而一般而言，通过定理 5.3 得到的许多基都是新颖的。最小的新颖例子可取 $n = 4$：集合

$$\{\overset{1\,2\,3\,4}{4\,3\,1\,2}、14223341、14223143、13213442、11243342、14213243、13223144、13213244、12213443、11233243、12213344、11233244、11223443、\overset{1\,2\,3\,4}{1\,2\,3\,4}\}$$

满足定理 5.3 的条件，因此在 ϕ 下映射为 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的一组基。该集合既不是 QSV_4，也不是 321-避免排列的集合（$4312 \notin \mathrm{QSV}_4$，且并非 321-避免）。此外，[11, 24] 中并未描述上述集合：这些文献中 S_4 的每个非 QSV_4 子集，都包含来自某些超越类的多个元素，而不包含来自另一些超越类的任何元素。

备注 5.4. 与本文的其他结果一样，定理 5.3 也蕴含一个类似的陈述，其中涉及备注 4.4 (1) 中的交替超越类。这个陈述应能给出更多 $\mathrm{TL}_n(2)$ 的基，可通过将定理中的所有排列用 ω_0 共轭得到。

5.2. Temperley–Lieb 代数的一个表示。本节将 Temperley–Lieb 代数 $\mathrm{TL}_n(2)$ 描述为对称群代数 $\mathbb{C}S_n$ 对映射 ϕ 的核取商。首先回顾一下，置换 $w \in S_n$ 中的一个 321模式是指一个三元组 $i < j < k$，满足 $w_i > w_j > w_k$。给定这样的模式，我们可以写成

$$w = \mathbf{a} w_i \mathbf{b} w_j \mathbf{c} w_k \mathbf{d},$$

其中 a、b、c 和 d 是 w 单行记法中的（可能为空的）子词。商$\mathbb{C}S_n/\ker(\phi)$ 随后由以下关系定义

$$w \equiv \mathbf{a} w_j \mathbf{b} w_i \mathbf{c} w_k \mathbf{d} + \mathbf{a} w_i \mathbf{b} w_k \mathbf{c} w_j \mathbf{d} - \mathbf{a} w_j \mathbf{b} w_k \mathbf{c} w_i \mathbf{d} - \mathbf{a} w_k \mathbf{b} w_i \mathbf{c} w_j \mathbf{d} + \mathbf{a} w_k \mathbf{b} w_j \mathbf{c} w_i \mathbf{d} \qquad (\text{模 } \ker(\phi)) \tag{5.5}$$

对于每个置换 $w \in S_n$ 中的每个 321模式。

引理 5.6. 设 $w \in S_n$ 是一个在位置 $i < j < k$ 出现 321模式的置换。那么，对于集合中的每个置换 w'，$w > w'$

$$\{\mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_k\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_i\mathbf{b}w_k\mathbf{c}w_j\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_k\mathbf{c}w_i\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_k\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_j\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_k\mathbf{b}w_j\mathbf{c}w_i\mathbf{d}\}$$

这个引理广为人知，但为求完整起见，我们仍简要给出证明。

证明。我们考虑 $w' = \mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_k\mathbf{d}$ 的情形，其余情形均可通过类似论证得出。直接计算可得 $w(w')^{-1} = (w_j\, w_i)$，它是一个对换。接下来不难验证，w' 的每个逆序都是 w 上的一个逆序，而且 w 至少有一个 w' 所没有的逆序：$i < j$ 和 $w_i > w_j$。因此我们得出 $\ell(w') < \ell(w)$，从而 $w' < w$。□

5.3. 定理 5.3 的证明。本节证明定理 5.3，该定理可由下一个结果所确立的三角性推出。回顾在第 4.2 节中为每个非交叉划分 $\lambda \in \mathrm{NCP}_n$ 定义的 321-避排列 T_λ。另请注意，S_n 中所有 321-避排列构成 $\mathrm{TL}_n(2)$ 在 ϕ 下的一组基；这一点可以（例如根据等式（5.5）和引理 5.6）推得。

命题 5.7. 设 λ 是一个大小为 n 的非交叉划分。对于每个 $w \in \mathcal{C}_\lambda$，有

$$w \equiv T_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_\mu^w T_\mu \qquad (mod\ \ker(\phi))$$

其中某些系数为 $a_\mu^w \in \mathbb{Z}$。

命题 5.7 的证明由下一个引理给出。

引理 5.8. 假设 $w \in S_n$ 含有一个 321模式。那么 w 含有一个 321模式 $i < j < k$，且满足 $i \in E_{pos}(w)$ 和 $k \notin E_{pos}(w)$。此外，集合

$$\{\mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_k\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_i\mathbf{b}w_k\mathbf{c}w_j\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_k\mathbf{c}w_i\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_k\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_j\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_k\mathbf{b}w_j\mathbf{c}w_i\mathbf{d}\}$$

中恰有一个元素与 w 属于同一超越类。

证明。根据假设，w 具有一个 321模式，我们将其记为 $i_0 < j_0 < k_0$。对于第一个断言，我们根据 i_0 和 k_0分情况讨论。若 $i_0 \in E_{pos}(w)$，则要么 $k_0 \notin E_{pos}(w)$，此时便得到所需的 321模式；要么 $k_0 \in E_{pos}(w)$，此时有$i_0 < j_0 < k_0 \leqslant w_{k_0} < w_{j_0} < w_{i_0}$。接下来假设 $k_0 \in E_{pos}(w)$，集合 $w^{-1}([k_0 - 1])$ 不包含 i_0、j_0或 k_0，因此至少存在一个 $k > k_0$ 满足 $w_k < k_0$，且 $i_0 < j_0 < k$ 是一个 321模式，其中 $i_0 \in E_{pos}(w)$ 且 $k \notin E_{pos}(w)$。另一方面，若 $i_0 \notin E_{pos}(w)$，则 $w_{k_0} < w_{j_0} < w_{i_0} < i_0 < j_0 < k_0$，因此 $k_0 \notin E_{pos}(w)$。此时，$w([i_0 - 1])$ 不包含w_{i_0}、w_{j_0}或w_{k_0}，因此至少存在一个 $i < i_0$ 满足 $w_i > i_0$，且 $i < j_0 < k_0$ 是一个 321模式，其中 $i \in E_{pos}(w)$ 且 $k_0 \notin E_{pos}(w)$。

对于第二个断言，我们将第一个断言中描述的321模式记作 $i < j < k$。根据 j 是否为超越位置，分为两种情况；我们只考虑第一种情况，因为第二种情况可由类似论证得出。假设$j \in E_{pos}(w)$，我们首先证明，当 $w' = \mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_k\mathbf{d}$时，

$$E_{pos}(w') = E_{pos}(w) \qquad \text{and} \qquad E_{val}(w') = E_{val}(w).$$

对于所有 $s \in [n] - \{i, j\}$，我们都有 $w'_i = w_i$，因此上述陈述可归结为 i、$j \in E_{pos}(w')$和 w_i、$w_j \in E_{val}(w')$；为说明这一点，注意到 $i < j \leqslant w_j < w_i$，因此 $w'_i = w_j > i$ 和 $w'_j = w_i > j$。为完成证明，我们验证集合中的每个元素 w''

$$\{\mathbf{a}w_i\mathbf{b}w_k\mathbf{c}w_j\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_j\mathbf{b}w_k\mathbf{c}w_i\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_k\mathbf{b}w_i\mathbf{c}w_j\mathbf{d},\ \mathbf{a}w_k\mathbf{b}w_j\mathbf{c}w_i\mathbf{d}\}$$

都属于比 w 更大的差异超越类：要么 $k \leqslant w''_k$，此时 $E_{pos}(w'') \neq E_{pos}(w)$；要么 $w''_k \in \{w_i,$ 此时 $w_j\}$ 对于 w'' 不是超越值，此时 $E_{val}(w'') \neq E_{val}(w)$。□

命题 5.7 的证明。我们对 S_n 的布鲁哈特序进行归纳。若 w 是 321-避免的，则 $w = T_\lambda$，结论显然成立。若 w 不是 321-避免的，则有 $T_\lambda < w$，因此我们为归纳起见，假设对每个 $v < w$，结论都成立。由于 w 含有一个 321模式，利用等式（5.5）、引理 5.6 和引理 5.8，我们可以将其表示为

$$w \equiv w' + \sum_{\substack{w'' \leqslant w \\ w'' \notin \mathcal{C}_\lambda}} b_{w''} w'' \qquad (\mathrm{mod}\ \ker(\phi)),$$

其中 $w' < w$ 是 $\mathcal{C}_\lambda$ 的一个元素，且每个系数 $b_{w''}$ 都属于 $\{1,0,-1\}$。现在，我们可以对上述表达式中的元素 w' 和 w'' 应用归纳假设；根据命题 4.11，上述求和中的每个 w'' 都属于一个超越类 $\mathcal{C}_\mu$，且满足 $\mu < \lambda$，因此得到

$$w \equiv T_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_\mu^{w'} T_\mu + \sum_{\mu<\lambda} \sum_{w''\in\mathcal{C}_\mu} \left(b_{w''} T_\mu + \sum_{\nu<\mu} b_{w''} a_\nu^{w''} T_\nu \right)$$

对于某些系数 $a_\mu^{w'}$,$a_\mu^{w''} \in \mathbb{Z}$。合并同类项，证明即告完成。 □

6. The quasisymmetric variety

在本节中，我们证明最后一个主要结果——定理 6.3。证明依赖若干中间技术性结果，我们先对其作简要概述，再陈述下面的定理。每个中间步骤的完整细节将在后续小节中给出。

与引言中一样，令 QSym_n 表示 $R_n = \mathbb{Q}[x_2, \ldots, x_n]$ 中的拟对称多项式，并用 M_α 表示以组合 α为指标的单项拟对称函数。在第 6.1 节中，我们定义一族以合成为指标的非齐次多项式 P_α，并证明

$$P_\alpha = M_\alpha + \text{lower degree terms.} \tag{6.1}$$

对于置换 $\sigma \in S_n$，我们用 $P_\alpha(\sigma)$ 表示 P_α 在 $x_1 = \sigma_1, x_2 = \sigma_2$等处的取值。回顾第 3 节中定义的集合 QSV_n。

定理 6.2。对于每个至多含有 n 个部分的非空整数组成 α，以及任意$\sigma \in \mathrm{QSV}_n$，都有 $P_\alpha(\sigma) = 0$。

我们暂且假设定理 6.2 成立，直到第 6.1 节给出该定理的证明。

现在回顾一下，对于任意 $f \in R_n$，$\mathsf{h}(f)$ 表示 f 的齐次最高次分量；对于任意理想 $I \subseteq R_n$，我们记作

$$\mathsf{gr}(I) = \langle \mathsf{h}(f) \mid f \in I \rangle.$$

在第 6.2 节中，我们将说明，Gr¨obner 基理论中的标准结果如何导出线性同构 $R_n/I \cong R_n/\mathsf{gr}(I)$；为了证明以下结果，我们也暂且假设这一点成立。

定理 6.3。由长度为 $\ell(\alpha) \leqslant n\rangle \subseteq R_n$ 的 $\langle P_\alpha \mid$ 非空合成 α 构成的理想是消失理想 $\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$，并且

$$\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle = \mathsf{gr}\big(\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)\big),$$

其中 QSym_n^+ 表示正次数拟对称函数的集合。

证明。在整个证明过程中，记

$$I_n = \langle P_\alpha \mid \text{non-empty compositions } \alpha \text{ of length } \ell(\alpha) \leqslant n \rangle.$$

我们考虑商的 维数，其中商分别取自 R_n 、$\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$ 和 $\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$。

首先，结果 [3, 定理 1.1] 指出，$\dim(R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle)$ 是第 n 个卡特兰数$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$。公式 (6.1) 表明，对于所有合成 α，$\mathbf{h}(P_\alpha) = M_\alpha$，因此我们有

$$\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle \subseteq \mathbf{gr}(I_n),$$

从而 $\dim(R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle) \geqslant \dim(R_n/\mathbf{gr}(I_n))$。随后，Gr¨obner 基理论给出了一个线性同构

$$R_n/\mathbf{gr}(I_n) \cong R_n/I_n,$$

因此，两个商的维数相等。此外，利用定理 6.2， $P_\alpha \in \mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$ 对每个组合 α 都成立，因此

$$I_n \subseteq \mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n),$$

于是 $\dim(R_n/I_n) \geqslant \dim(R_n/\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n))$。最后，由于 $\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$ 是一个有限点集的消失理想，$\dim(R_n/\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n))$ 也等于集合 $|\mathrm{QSV}_n| = C_n$ 的大小。因此我们得到以下不等式序列

$$C_n = \dim(R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle) \geqslant \dim(R_n/\mathbf{gr}(I_n)) = \dim(R_n/I_n) \geqslant \dim(R_n/\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)) = C_n.$$

因此，上述所有维数都等于 C_n。结合包含关系 $\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle \subseteq \mathbf{gr}(I_n)$ 和 $I_n \subseteq \mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$，证明完成。□

再次运用 Gr¨obner 基理论，我们得到以下推论。

推论 6.4. 作为向量空间，有 $R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle \cong R_n/\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$ 。

注 6.5. 塔马里格定义在二叉树或任何相关的组合对象上，是一种众所周知的序（见 [17]）。它也可以定义在非交叉划分上，并具有以下性质：对于任意非交叉划分 λ，我们将 $\ell(\lambda)$ 定义为从恒等元到塔马里格中 λ 的最短路径长度。在一篇后续论文中，我们将研究次数为 $\ell(\lambda)$ 的多项式 m_λ，使得对于任意 $Q_\mu \in \mathrm{QSV}_n$，有

$$m_\lambda(Q_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{if } \mu <_w \lambda. \end{cases}$$

此外，希尔伯特级数

$$H_n(q) = \sum_\lambda q^{\ell(\lambda)}$$

对应于（分次）商 $R_n/\langle \mathrm{QSym}_n^+ \rangle$。

注记 6.6。鉴于备注 4.4，可以预期注记 3.5 中集合$\{\omega_0 w \omega_0 \mid w \in \mathrm{QSV}_n\}$ 的消失理想具有与 $\mathbf{I}(\mathrm{QSV}_n)$相似的性质，而事实确实如此。特别是，多项式 P_α 可以改写为在 $w \in \mathrm{QSV}_n$ 中每个置换 $\omega_0 w \omega_0$ 上都消失的多项式 P'_α。 P'_α的最高次齐次分量也为 M_α，由此可为该集合得到定理 6.2 和 6.3 的类似结果。这与拟对称函数环的自同构密切相关（例如，参见 [15]）。

本节余下部分补全了定理 6.3 证明中的缺漏。第 6.1 节完整介绍了多项式 P_α，第 6.2 节则描述了证明中所用的同构$R_n/\mathbf{gr}(I_n) \cong R_n/I_n$。

6.1. 消失多项式 P_α。本节定义多项式 P_α 并证明定理 6.2。我们先简要回顾合成与细化序，以及它们与 QSym 的关系。

组合是一个由正整数组成的序列 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$。我们称 k 为 α 的长度，称 $d = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ 为 α的大小。组合按细化关系构成偏序：若存在一个序列 $1 = f_1 < f_2 < \cdots < f_{\ell+1} = k+1$ 使得 $\beta_i = \alpha_{f_i} + \alpha_{f_i+1} + \cdots + \alpha_{f_{i+1}-1}$，则称组合 α 细化另一个组合 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_\ell)$，此时记作 $\beta \geq \alpha$。每当有细化关系 $\beta \geq \alpha$时，我们将用记号 $f_1, f_2, \ldots, f_{\ell+1}$ 指代定义中的指标序列。

对于每个长度为 $k \geqslant 1$的组合，单项拟对称函数 $M_\alpha \in R_n$ 定义为

$$M_\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k},$$

其中求和遍历 $[n]$ 的子集 $\{i_1、\ldots、i_k\}$，并按递增顺序排列。按照相同的约定，我们将消失多项式 $P_\alpha \in R_n$ 定义为

$$P_\alpha = \sum_{\beta \geq \alpha} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \prod_{j=1}^{\ell} \Big((x_{i_j}^{\alpha_{f_j}} - i_j^{\alpha_{f_j}}) \prod_{s=f_j+1}^{f_{j+1}-1} (-i_j)^{\alpha_s} \Big).$$

虽然这个公式看起来相当繁复，但展开后便会显现出直观的组合结构。为便于说明，我们完整地计算一个例子：

$$\begin{aligned} P_{(1,2,1)}(x_1, \ldots, x_4) =& (x_1-1)(x_2^2-2^2)(x_3-3) + (x_1-1)(x_2^2-2^2)(x_4-4) \\ &+ (x_1-1)(x_3^2-3^2)(x_4-4) + (x_2-2)(x_3^2-3^2)(x_4-4) \\ &- (x_1-1)(x_2^2-2^2)2 - (x_1-1)(x_3^2-3^3)3 - (x_1-1)(x_4^2-4^2)4 \\ &- (x_2-2)(x_3^2-3^3)3 - (x_2-2)(x_4^2-4^2)4 - (x_3-3)(x_4^2-4^2)4 \\ &- (x_1-1)1^2(x_2-2) - (x_1-1)1^2(x_3-3) - (x_1-1)1^2(x_4-4) \\ &- (x_2-2)2^2(x_3-3) - (x_2-2)2^2(x_4-4) - (x_3-3)3^2(x_4-4) \\ &+ (x_1-1)1^3 + (x_2-2)2^3 + (x_3-3)3^3 + (x_4-4)4^3, \end{aligned}$$

其中，对应于相同指标 $\beta \geq (1、2、1)$ 的加项按水平方向排列并对齐分组。这些 β 的值依次为 $(1、2、1)$、$(1、3)$、$(3、1)$ 和 (4)。

命题 6.7. 对所有组合 α，$\mathsf{h}(P_\alpha) = M_\alpha$。

证明. P_α 中由 $\beta \geq \alpha$ 标记的加项的最高次数项，其次数等于 β 的长度 ℓ，因此我们可以立即舍去除 $\beta = \alpha$ 项之外的所有加项。展开这一加项后，最高次数项的形式为 $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_k}^{\alpha_k}$，每个指标子集 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ 都对应一个这样的项。□

这证明了上一节中的公式 (6.1)。现在我们开始证明定理 6.2，该定理指出，对于每个组合 α 和置换 $\sigma \in$， $P_\alpha(\sigma) = 0$ QSV$_n$。我们先证明一个特殊情形，完整证明将在引理 6.8 的证明之后给出。

引理 6.8. 假设 $\sigma \in$QSV$_n$ 至多有一个长度大于 1 的循环。那么对于所有的组合 α, $P_\alpha(\sigma) = 0$。

证明. 我们首先利用以下观察进行一个简单但重要的化简：对于任意指数 e，表达式 $(x_i^e - i^e)$ 在 $x_i = i$处为零。若 σ 是恒等元，则由此观察及 P_α的定义即可得出结论。反设不然，将 $C = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_m\}$ 记为 σ中唯一长循环的元素。由引理 3.1，我们知道$\sigma = (a_m \ \ldots \ a_2 a_1)$。于是有

$$P_\alpha(\sigma) = \sum_{\beta \geq \alpha} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n \\ i_j \in C \text{ for all } j \in [\ell]}} \prod_{j=1}^{\ell} \Big((\sigma_{i_j}^{\alpha_{f_j}} - i_j^{\alpha_{f_j}}) \prod_{s=f_j+1}^{f_{j+1}-1} (-i_j)^{\alpha_s}, \Big) \tag{6.9}$$

其中，第二个求和遍历所有未被 σ 固定的指标 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n$ 。

在证明的其余部分，我们采用约定 $a_0 = a_m$，因此对于每个 $1 \leqslant i \leqslant m$，都有 $\sigma_{a_i} = a_{i-1}$。现在展开上面的 $P_\alpha(\sigma)$ 公式，由此得到

$$P_\alpha(\sigma) = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant m} \sum_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k \\ \varepsilon_i \in \{0,1\} \\ \varepsilon_i = 1 \text{ if } j_{i-1} = j_i}} (-1)^{\sum \varepsilon_i} \, z_{j_1,\varepsilon_1}^{\alpha_1} z_{j_2,\varepsilon_2}^{\alpha_2} \cdots z_{j_k,\varepsilon_k}^{\alpha_k}, \tag{6.10}$$

其中我们记 $z_{j_i,\ \varepsilon_i} = a_{j_i - 1 + \varepsilon_i}$，于是

$$z_{j_i,\varepsilon_i} = \begin{cases} a_{j_i - 1} & \text{if } \varepsilon_i = 0, \\ a_{j_i} & \text{if } \varepsilon_i = 1. \end{cases}$$

通过证明等式 (6.10) 等于零，我们完成证明。具体而言，我们对该等式右侧的被加项构造一个符号反转对合。为此，固定两个序列 $1 \leqslant j_1 \leqslant j_2 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant m$ 和 ε_1、ε_2、.....、$\varepsilon_k \in \{0$、$1\}$，使得当 $j_{i-1} = j_i$ 时有 $\varepsilon_i = 1$，如求和式中所示。

现在令 d be 为满足 z_{j_d,ε_d} 既不是 0 也不是 m 的最大指标（若存在这样的指标），否则令其为 $d = 1$。我们通过规定 $j_i' = j_i$ 以及在 $i \neq d$ 时 $\varepsilon_i' = \varepsilon_i$，并辅以下列公式，定义两个新序列 $1 \leqslant j_1' \leqslant j_2' \leqslant \cdots \leqslant j_k' \leqslant m$和 $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_k' \in \{0, 1\}$：

$$j_d' = \begin{cases} j_d + 1 & \text{if } \varepsilon_d = 1 \text{ and } j_d \neq n \\ 1 & \text{if } \varepsilon_d = 1 \text{ and } j_d = n \\ j_d - 1 & \text{if } \varepsilon_d = 0 \text{ and } j_d \neq 1 \\ n & \text{if } \varepsilon_d = 0 \text{ and } j_d = 1 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \varepsilon_d' = \begin{cases} 1 & \text{if } \varepsilon_d = 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon_d = 1. \end{cases}$$

根据此定义可以验证，$z_{j_i,\varepsilon_i} = z_{j_i',\varepsilon_i'}$，因为所有情形下

$$j_i - 1 + \varepsilon_i \equiv j_i' - 1 + \varepsilon_i' \pmod{n}.$$

这也表明上述操作是一个对合：它不改变 d 的值；对于固定的 d，上述描述显然是一个对合。最后，

$$(-1)^{\sum \varepsilon_i'} \, z_{j_1',\varepsilon_1'}^{\alpha_1} z_{j_2',\varepsilon_2'}^{\alpha_2} \cdots z_{j_k',\varepsilon_k'}^{\alpha_k} = -(-1)^{\sum \varepsilon_i} \, z_{j_1,\varepsilon_1}^{\alpha_1} z_{j_2,\varepsilon_2}^{\alpha_2} \cdots z_{j_k,\varepsilon_k}^{\alpha_k}.$$

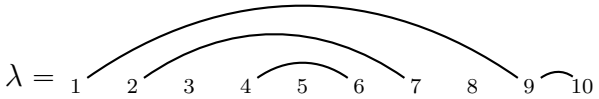
因此， $P_\alpha(\sigma)$ 中的所有项都与其在此对合下的像相消，证明完毕。□

在本节的其余部分，我们将说明一般情形如何由引理 6.8 推出。首先，设 λ 为一个非交叉划分，并固定 $[n]$的一个子集 $\{i_1$、i_2、.....、$i_\ell\}$。相对于 $\{i_1$、i_2、.....、$i_\ell\}$，将 λ 的最左嵌套分支定义为 λ 中最左侧的连通分支，该分支包含某个元素 i_j，并且在其弧之间没有其他具备这一性质的连通

分支“嵌套”其中。形式化地，若将该分支记为 C，则 C 由以下性质定义：

(i) $C \cap \{i_1、i_2、\ldots\ldots、i_\ell\} \neq \varnothing$；(ii) 对所有满足 $\min(C) \leqslant i_j \leqslant \max(C)$ 的 $j \in [\ell]$，都有 $i_j \in C$；以及 (iii) 若 $D \neq C$ 是满足 (i) 和 (ii) 的连通分支，则 $\max(C) < \min(D)$。

例如，利用非交叉划分

$\lambda =$ 

相对于集合 $\{1、3、4、5、8\}$，λ 的最左嵌套分支是 $\{5\}$；相对于集合 $\{1、2、8、10\}$，λ 的最左嵌套分支是 $\{2、7\}$。

定理 6.2 的证明。σ 的循环所构成的非交叉结构将在证明中起关键作用。令 λ 为这样的非交叉划分：$\sigma = Q_\lambda$，其定义见第 3 节。

我们将仔细考察表达式

$$P_\alpha(\sigma) = \sum_{\beta \geq \alpha} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \prod_{j=1}^{\ell} \Big((\sigma_{i_j}^{\alpha_{f_j}} - i_j^{\alpha_{f_j}}) \prod_{s=f_j+1}^{f_{j+1}-1} (-i_j)^{\alpha_s} \Big), \tag{6.11}$$

并证明它可以拆分为若干加项，每一项都含有形如$P_{\alpha'}(\tau)$的因子，其中 α' 是另一个组合，而 $\tau \in \mathrm{QSV}_n$ 是 σ的一个循环，将其视为一个固定所有其他点的置换。引理 6.8 表明每个 $P_{\alpha'}(\tau) = 0$，因此这就完成了证明。

现在我们来分析 $P_\alpha(\sigma)$；回想一下证明之前给出的最左嵌套分支的定义。公式 (6.11) 中的每个加项都对应于选择一个组合$\beta \geq \alpha$以及 $[n]$的一个子集 $\{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}$。令 C为相对于该子集而言，λ的最左嵌套分支，并令 p 和 q 分别表示指标 i_j 在 λ中位于分支 C 左侧和右侧的数量。因此，$i_p < \min(C)$, $i_{\ell-q+1} > \max(C)$，且$\{i_{p+1}, \ldots, i_{\ell-q}\} \subseteq C$。用另外四个集合记录这一配置的具体信息：

$$\begin{aligned} F_{\text{left}} &= \{f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}\}, \\ F_{\text{right}} &= \{f_{\ell-q+1}, \ldots, f_{\ell+1}\}, \\ I_{\text{left}} &= \{i_1, \ldots, i_p\}, \text{ and} \\ I_{\text{right}} &= \{i_{\ell-q+1}, \ldots, i_\ell\}. \end{aligned}$$

每个加项与一个元组 $(C, F_{\text{left}}, F_{\text{right}}, I_{\text{left}}, I_{\text{right}})$ 的对应关系都是唯一确定的，因此构成了 $P_\alpha(\sigma)$ 的加项的一个划分。利用这一划分，我们写作

$$P_\alpha(\sigma) = \sum_{\text{tuples}} P_\alpha^{(C, F_{\text{left}}, F_{\text{right}}, I_{\text{left}}, I_{\text{right}})}$$

其中 $P_\alpha^{(C, F_{\text{left}}, F_{\text{right}}, I_{\text{left}}, I_{\text{right}})}$表示在上述过程中确定元组$(C, F_{\text{left}}, F_{\text{right}}, I_{\text{left}}, I_{\text{right}})$ 的 $P_\alpha(\sigma)$ 中所有项的总和，而求和遍历所有与 $P_\alpha(\sigma)$的某个加项相对应的元组。

现在我们证明，上述每个加项 $P^{(C,\ F_{\text{left}}\ F_{\text{right}}\ I_{\text{left}}\ I_{\text{right}})}_{\alpha}$,,,都以一种可预测的方式因式分解。分别将 F_{left}、 F_{right}、 I_{left}和 I_{right}中的元素按递增顺序编号为

$$\begin{aligned} F_{\text{left}} &= \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_p, \underline{f}_{p+1}\}, \\ F_{\text{right}} &= \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_{q+1}\}, \\ I_{\text{left}} &= \{\underline{i}_1, \dots, \underline{i}_p\}, \text{ and} \\ I_{\text{right}} &= \{\overline{i}_1, \dots, \overline{i}_q\}. \end{aligned}$$

为了使这些集合来自 $P_\alpha(\sigma)$ 的一个实际加项，必须满足

$$1 = \underline{f}_1 < \cdots < \underline{f}_p < \underline{f}_{p+1} < \overline{f}_1 < \overline{f}_2 < \cdots < \overline{f}_{q+1} = k+1,$$

and

$$1 \leqslant \underline{i}_1 < \cdots \underline{i}_p < \min(C) \leqslant \max(C) < \overline{i}_1 < \cdots < \overline{i}_q \leqslant n.$$

事实上， $P_\alpha(\sigma)$ 的每个加项，只要它出现在 $P^{(C,\ F_{\text{left}}\ F_{\text{right}}\ I_{\text{left}}\ I_{\text{right}})}_{\alpha}$，，，中，就对应一个被 β' 细化的组合

$$\alpha' = (\alpha_{\underline{f}_{p+1}}, \dots, \alpha_{\overline{f}_1 - 1})$$

以及一个包含于 C 的指标集合 $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{\ell'} \leqslant n$，其中 ℓ' 是 β' 的长度。这个对应关系是一一对应的，并且有

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(C,F_{\text{left}},F_{\text{right}},I_{\text{left}},I_{\text{right}})} = &\left(\prod_{j=1}^{p}\left((\sigma_{\underline{i}_j}^{\alpha_{\underline{f}_j}} - i_j^{\alpha_{\underline{f}_j}})\prod_{s=\underline{f}_j+1}^{\underline{f}_{j+1}-1}(-\underline{i}_j)^{\alpha_s}\right)\right) \\ &\left(\prod_{j=1}^{q}\left((\sigma_{\overline{i}_j}^{\alpha_{\overline{f}_j}} - \overline{i}_j^{\alpha_{\overline{f}_j}})\prod_{s=\overline{f}_j+1}^{\overline{f}_{j+1}-1}(-\overline{i}_j)^{\alpha_s}\right)\right) \\ &\left(\sum_{\beta'\geq\alpha'}\ \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{\ell'}\leqslant n \\ i_j\in C \text{ for all } j\in[\ell']}}\ \prod_{j=1}^{\ell'}\left((\sigma_{i_j}^{\alpha_{f_j}} - i_j^{\alpha_{f_j}})\prod_{s=f_j+1}^{f_{j+1}-1}(-i_j)^{\alpha_s}\right)\right) \end{aligned}$$

其中，上述最后一个因子中出现的数 f_j 对应于细化关系 $\beta' \geq \alpha'$。

总之，令 τ 为如下定义的置换：当 $i \in C$ 时， $\tau_i = \sigma_i$；对于所有其他 $i \in [n]$， $\tau_i = i$。那么 $\tau \in \mathsf{QSV}_n$，并且 τ 有一个长度大于 1 的单循环。此外，上述 $P^{(C,\ F_{\text{left}}\ F_{\text{right}}\ I_{\text{left}}\ I_{\text{right}})}_{\alpha}$，，，的最后一个因子，恰好是方程（6.9）中给出的 $P_{\alpha'}(\tau)$ 的表达式。引理 6.8 指出 $P_{\alpha'}(\tau) = 0$，因此证明完毕。□

6.2. Gr¨obner 基理论与最高次数齐次理想。本节中，我们运用 Gr¨obner 基理论证明，对于所有理想 $I \subseteq R_n$，都存在一个向量空间同构

$$R_n/I \cong R_n/\mathsf{gr}(I).$$

本节的这一结果及其他结果并非新成果，在许多标准教材中都能找到（例如，参见 [7]）。不过，我们在此给出一个简明的论述，以便广大读者更容易理解定理 6.2 的证明。

对于任意 $f \in R_n$，令 $\mathsf{lt}(f)$ 表示相对于分次字典序项序的 f 的首项。对于理想 $I \subseteq R_n$，将 I 的初始理想定义为

$$\mathsf{in}(I) = \langle \mathsf{lt}(f) \mid f \in I \rangle.$$

命题 6.12. 设 I 是 R_n的一个理想。那么 $\mathsf{in}(\mathsf{gr}(I)) = \mathsf{in}(I)$。

证明。直接验证可知，对任意 $f \in I$，都有 $\mathsf{lt}(f) = \mathsf{lt}(\mathsf{h}(f))$，因此 $\mathsf{in}(\mathsf{gr}(I)) \supseteq \mathsf{in}(I)$。为了证明另一个方向的包含关系，注意到

$$\mathsf{gr}(I) = \mathbb{Q}\text{-span}\{\mathsf{h}(f) \mid f \in I\}.$$

现在固定一个单项式$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \in \mathsf{in}(\mathsf{gr}(I))$，使得

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} = \mathsf{lt}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \mathsf{h}(f_i) \right)$$

对于某些 $f_1, \ldots, f_k \in I$以及 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Q}$。由于我们的项序尊重次数，不失一般性，假设每个 f_i的次数都是 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。因此

$$\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \mathsf{h}(f_i) \right) = \mathsf{h}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i f_i \right),$$

结合前面的说明，即完成证明。 □

所需的同构由一系列同构 $R_n/\mathsf{gr}(I) \cong R_n/\mathsf{in}(I) \cong R_n/I$ 推出，这些同构由命题 6.12 保证存在。下一个结果是 Gro¨obner 基理论中的经典论述。

命题 6.13. 对于 I R_n的所有理想，都存在线性同构 $R_n/I \cong R_n/\mathsf{in}(I)$。特别地， R_n –$\mathsf{in}(I)$ 中的单项式在两个商中都下降为线性基。

证明。令 M 表示 R_n 中不包含于 $\mathsf{in}(I)$的单项式集合。为了说明 M 下降为 $R_n/\mathsf{in}(I)$的基，注意到所有单项式构成 R_n的一个基，并且

$$\mathsf{in}(I) = \mathbb{Q}\text{-span}\{\mathsf{lt}(f) \mid f \in I\}.$$

为了证明类似的陈述 $R_n/I,$，我们首先指出 I的 Gr¨obner 基的存在性：这是 I的一个生成集 g_1、...、 g_k，满足 $\langle \mathsf{lt}(g_1)$、$\mathsf{lt}(g_2)$、...、$\mathsf{lt}(g_k) \rangle = \mathsf{lt}(I)$。对于任意 $f \in R_n$，使用这一 Gr¨obner 基进行除法算法，将得到 f （模 I）的一个代表元，它是 M中各元素的线性组合，因此我们得到一个生成集。此外， M （模 I）是线性无关的：任意来自 M 的非零线性组合的首项都属于 M，因此任何此类线性组合都不能包含于 I中。因此， M 下降为商 R/I的一个基。□

注 6.14。利用命题 6.13, [3, 定理 4.1] 的方法，可为商 $R_n/\langle \mathsf{QSym}_n^+ \rangle$ 给出一个显式的基，因此也可为 $R_n/\mathsf{I}(\mathsf{QSV}_n)$ 给出一个显式的基。

References

[1] M. Aguiar、N. Bergeronand F. Sottile，《组合 Hopf 代数与广义德恩-索默维尔关系》，组合数学，142-=1 (2006年) 1–30。[2] J. C. Aval、N. Bergeron，《卡塔兰路径与拟对称函数》。美国数学会会刊 131(4) (2003) 1053–1062。[3] J. C. Aval、F. Bergeron、N. Bergeron，《拟对称函数理想与 S_n 的超协变多项式》。数学进展 181 (2) (2004) 353–367。

[4] M. von Bell、R. Gonz´alez D'Le´on、C. Mayorga、A. Francisco A. 和 M. Yip，《关于流多面体的带框三角剖分、 ν-Tamari 格与杨氏格》，S´em. Lothar. Combin. 85B (2021年) 第42篇，12页。[5] Philippe Biane。《交叉与划分的一些性质》。离散数学 175 (1997年) 41-53。[6] Francesco Brenti 和 Anders Bj¨orner。《Coxeter 群的组合学》。德国：Springer Berlin Heidelberg，2010年。[7] D. Cox、J. Little、D. O'Shea，《理想、代数簇与算法：计算代数几何与交换代数导论》。Springer Science & Business Media；2013年3月9日。[8] R. Ehrenborg 和 E. Steingr´ımsson。《置换的超越集》，Adv. Appl. Math. 24 (2000年)，284–299。[9] A. M .Garsia 和 C. Procesi。《关于某些分次 S_n-模与 q-Kostka 多项式》，Adv. Math. 94-1 (1992年) 82–138。[10] I. M. Gessel，《多部分 P-划分与斜 Schur 函数的内积》。组合学与代数（科罗拉多州博尔德，1983年），Contemp. Math., 34 (1984年) 289–317。[11] Thomas Gobet 和 Nathan Williams。《非交叉划分与布鲁哈特序》。欧洲组合学杂志 53 (2016年) 8-34。[12] D. Grinberg，《拟对称函数研究》，博士论文——麻省理工学院（2016年），302页。http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/104468。[13] F. Hivert，《Hecke 代数、差分算子与拟对称函数》，Adv. Math., 155-2 (2000年) 181–238。[14] J. E. Humphreys，《反射群与 Coxeter 群》，剑桥高等数学研究丛书，29，(1990年) 204页。[15] W. Jia、Z. Wang 和 H. Yu，《拟对称函数 Hopf 代数的刚性》，Electron. J. Combin. 26-3 (2019年) 第3.4篇，26。[16] S. X. Li，《对角拟对称函数的理想与商》。Elec. J. Comb., 第24卷，第3期，P3.3。10.37236/6658。[17] F. M¨uller-Hoissen、J. M. Pallo 和 J. Stasheff（编），《结合子多面体、Tamari 格及相关结构》，数学进展丛书 299，Birkh¨auser（2012年），436页。 [https://doi.org/10.1007/978- 3-0348-0405-9[18] K. Luoto、S. Mykytiuk 和 S. van Willigenburg，《拟对称 Schur 函数导论》，《Hopf 代数、拟对称函数与杨氏组合图表》，Springer，纽约（2013年），89页。[19] S. K. Mason，《拟对称函数的近期趋势》，《代数组合学近期趋势》，Assoc. Women Math. Ser., 16 (2019年) 239–279。[20] Jon McCammond，《出人意料之处的非交叉划分》。Amer. Math. Monthly 113, 7 (2006)，598-610。[21] I. G. Macdonald，《Schubert 多项式札记》。Publications LACIM，第6卷，Universit´e du Qu´ebec `a Montr´eal，(1991年) [ISBN 978-2-89276-086-6]。[22] R. P. Stanley，《有序结构与划分》，美国数学会回忆录 119 (1972年)。[23]R. P. Stanley，《枚举组合学》。第2卷。剑桥高等数学研究丛书，第62卷，剑桥大学出版社，剑桥，（1999年）。 [及其 Catalan 补编 https://math.mit.edu/∼rstan/ec/catadd.pdf[24] Matthew Zinno。《来自辫群的 Temperley–Lieb 基》。结理论及其影响杂志 11, 4 (2002年) 575-599。

Dept. of Math. and Stat., York University, Toronto, Ontario M3J 1P3, CANADA电子邮件地址：bergeron@yorku.ca，lgagnon@yorku.ca