arXiv:2302.11031v2 [math.GT] 1 Mar 2023

双抛物生成元子群与双曲3维流形群

SHUNSUKE SAKAI 和 MAKOTO SAKUMA

Abstract. 我们详细阐述 Agol 定理及其证明。该定理涉及双曲二桥链环群中的双子午线生成元子群，相关内容收录于他在 2001 年 Bolyai 会议上的报告幻灯片中。我们还将该定理推广到双曲三维流形群中的双抛物生成元子群，从而进一步细化了 Boileau-Weidmann 的一项结果。

1. Introduction

Adams 在 [1, 定理 4.3] 中证明，有限体积双曲 3-流形的基本群由两个抛物元素生成，当且仅当该 3-流形同胚于一个非环面链的二桥链环补空间。此外，他还证明，这一对元素由子午线组成。这细化了 Boileau-Zimmermann 的结果 [13, 推论 3.3]： S^3 中的链环是二桥链环，当且仅当其链环群由两个子午线生成。
Adams 还证明了：(i) 每个双曲二桥链群至多有有限多个两两不同的抛物生成对（按等价关系分类）[1, 推论 4.1]；(ii) 对于八字结群，上、下子午线对是按等价关系分类后仅有的抛物生成对 [1, 推论 4.6]。这里，非初等克莱因群 Γ 的抛物生成对是由两个抛物变换组成、生成 Γ的无序对。若 $\{\alpha, \beta\}$ 和 $\{\alpha', \beta'\}$是 Γ 的两个抛物生成对，则称它们等价，如果经过同时共轭后， $\{\alpha', \beta'\}$ 与 $\{\alpha^{\epsilon_1}, \beta^{\epsilon_2}\}$ 相等，其中某个 ϵ_1， $\epsilon_2 \in \{\pm 1\}$。

Agol [3] 宣布了以下定理，将这些结果推广并细化到所有由两个抛物型变换生成的非自由克莱因群。

定理 1.1 (Agol [3])。 设 Γ 是一个由两个不可交换的抛物元素生成的非自由克莱因群。则以下情况之一成立。
(1) Γ 与某个双曲的2桥链环群共轭。此外，每个双曲的2桥链环群在等价意义下恰有两个抛物生成对。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 57M50，次要分类 57K10。
*Key words and phrases.*双桥链环，交替链，抛物型变换，立方复形。

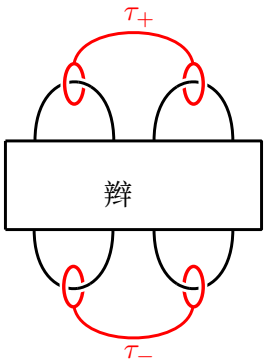


FIGURE 1. 二桥链环群的上、下子午线对。二桥链环 $L \subset S^3$ 的外部 $M(L)$中的真弧 τ_+ 和 τ_- 分别是上、下隧道。由 τ_+ 和 τ_- 表示的每个子午线对都生成链环群$G(L) = \pi_1(S^3 \setminus L)$。

(2) Γ与某个 *Heckoid* 群共轭。此外，每个 *Heckoid* 群在等价意义下都有唯一的抛物生成对。

有关该定理的明确描述（包括 Heck-oid 群的定义），请参见 Akiyoshi-Ohshika-Parker-Sakuma-Yoshida [9]和 Aimi-Lee-Sakai-Sakuma [8]（参见 Lee-Sakuma [23]）；前者和后者分别给出了非自由、双抛物生成元克莱因群分类的完整证明，以及抛物生成对分类的另一种证明。在 Parker-Tan 和 Elzenaar-Martin-Schillewaert 最近发表的有趣文章 [20] 和 [33] 中，我们可以看到许多非常漂亮的图片。这些图片由 Yasushi Yamashita 应 Caroline Series 的请求制作，生动地阐释了定理 1.1（另见 Akiyoshi-Sakuma-Wada-Yamashita [10]中的图 0.2b）。

定理 1.1(1)第二个陈述中的双曲 2-桥链环群的两个抛物生成对，是图1所示的上子午线对和下子午线对（参见第2节）。 [3] 中的结论是以下更详细结果以及 Adams 的结果 [1, 定理 43]的推论：每个双曲 2-桥链环群的抛物生成对都由子午线组成。

定理 1.2 (Agol [3])。 设 $L \subset S^3$ 是一个双曲2桥链环。那么，链环群 $G(L)$ 中任何一个既不等价于上子午线对也不等价于下子午线对的不可交换子午线对，都会生成一个几何有限的自由克莱因群。

本文的主要目的是详细阐述 Agol 对定理 1.2 的精彩证明，该证明收录于幻灯片 [3] 中。证明的一个关键要素是交替链环外部的非正曲率立方分解，其中

棋盘曲面是超平面（命题 6.1）。根据 Rubin- stein [40, p.3177], ，此类立方分解最早由 Aitchison 发现，但他没有发表这一结果。后来 D. Thurston [45] 重新发现了它们，并由 Yokota [48] 作了详细描述（参见 [5, 40, 36]）。这些立方分解在以下证明中发挥着关键作用：（i）命题 3.1，该命题指出，双曲交替链环的棋盘曲面是拟福克斯曲面；（ii）命题 7.4 和 8.3，这两个命题涉及由棋盘曲面关联的极限圆在双曲交替链环补空间的普遍覆盖 $\mathbb{H}^3$ 的理想边界 $\hat{\mathbb{C}}$ 上所围成的圆盘。利用命题 8.3，将子午线对在 $\mathbb{C}$ 上的作用应用于命题 4.11（借助 ˆ Maskit-Swarup 证明的 Klein-Maskit 组合定理的一种变体），即可完成定理 1.2 的证明。（图 16 和 17 摘自 [3]。）

在定理 1.1 和 1.2 的基础上，我们还证明了定理 1.2 的以下推广。

定理 1.3. 设 $X = \mathbb{H}^3/G$ 是一个可定向、完备的双曲3维流形，$\{\mu_1, \mu_2\}$ 是 G中的一对子午线对不交换的抛物元素，而 $\Gamma = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ 是由 $\{\mu_1, \mu_2\}$生成的 G 的子群。那么以下结论之一成立。

(1) Γ 是一个秩为2 的自由群。(2) Γ 等于 G，且它是一个双曲2桥链环群。此外，$\{\mu_1, \mu_2\}$等价于上子午线对或下子午线对。(3) Γ是 G的一个指数为2 的子群，其中 Γ 是一个由2个连通分支组成的双曲2桥链环的链环群，而 G 是射影3空间 P^3中一个有理链环的链环群。此外，作为 Γ的子集，$\{\mu_1, \mu_2\}$等价于该2桥链环群中的上子午线对或下子午线对；而作为 G的子集，$\{\mu_1, \mu_2\}$由该有理链环的子午线组成。

此外，若 X 具有有限体积，则结论 *(1)* 将由以下更精确的结论取代。

(1') Γ 是一个几何有限的秩 2 自由克莱因群。

关于 P^3 中有理链环的定义，参见定义 10.2；关于上述定理中陈述 (3) 的详细描述，参见注 10.6。本定理细化了 Boileau-Weidmann [12, 关于由有限体积、可定向、完备双曲 3-流形基本群中的两个抛物型本原元生成的子群的 2] 命题。定理 1.3 的证明基于 (i) Millichap-Worden [29] 关于二桥链环群的可交换类的结果，以及 (ii) Canary [18]的覆盖定理和 Agol [4] 与 Calegari-Gabai [17]建立的驯性定理（另见 Soma [42]和 Bowditch [15]）。

本文组织如下。第2节中，我们利用子午线对（按等价关系取商）与链环外部中的真弧（按真同伦取商）之间的对应关系，将主要的定理 1.2 改述为定理2.1

。我们还陈述定理2.2，讨论一般的交替链环；该定理已隐含在 [3] 中。第 3 节中，我们回顾一个关键事实：与双曲交替链环的素交替链环图相关联的棋盘曲面是拟福克斯的（命题 3.1）。第4节中，我们描述子午线在双曲空间 $\mathbb{H}^3$ 的理想边界 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的作用，并给出一个充分条件，使子午线对生成一个几何有限的自由克莱因群（命题 4.11）。该命题是证明定理 2.1 和 2.2 的基本工具。第5节中，我们简要回顾非正曲率空间的基本事实，这些事实将在第6节和第7节中用到。第 6 节中，我们描述交替链环外部的非正曲率立方分解（命题 6.1），并研究“棋盘格超平面”与“外围超平面”的相对位置；它们分别是双曲交替链环补空间 X 的万有覆盖 X 中棋盘曲面 ˜ 和外围环面的原像的连通分支（命题 6.6）。第7节中，我们从非正曲率立方分解的角度回顾 X 的理想多面体分解。随后，我们证明命题 7.4，讨论由棋盘超平面围成的 X 中闭半空间的相对位置 ˜。第8节中，我们利用命题 7.4 证明关键命题——命题8.3；该命题讨论由棋盘格超平面的极限圆围成、位于 $\tilde{X} = \mathbb{H}^3$ 的理想边界 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的圆盘。在第 9 节中，我们利用命题 4.11 和 8.3 证明定理 2.1 和 2.2（从而也证明定理 1.2）。第10节中，我们在介绍并研究 P^3 中的有理链环之后，证明定理 1.3。

致谢。 第二作者感谢 Ian Agol 寄来其演讲的幻灯片 [3], ，鼓励他（以及他的任何合作者）撰写证明，并介绍证明中的关键思想。他还感谢 Michel Boileau 富有启发性的交流。两位作者感谢 Iain Aitchison 向他们讲授交替链环外部的多面体分解和立方分解的关键思想，并感谢他进行的许多宝贵讨论。他们还感谢 Takuya Katayama 和 Ian Leary 就命题 6.4 进行的宝贵讨论并提供的信息。他们还要感谢 Hirotaka Akiyoshi、Tetsuya Ito、Yuya Koda、Yohei Komori、Hideki Miyachi、Makoto Ozawa 和 Yuta Taniguchi 富有启发性的交流与鼓励。第二作者获得 JSPS KAKENHI Grant Number JP20K03614 以及 Osaka Central Advanced Mathematical Institute（MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics JPMXP0619217849）的资助。

2. Reformulation of Theorem 1.2

设 L 是 S^3 中的一个链环， $X = X(L)$: $= S^3 \backslash L$ 链环补空间，且 $M = M(L)$: $= S^3 \backslash N(L)$ 的内部，即链环外部，其中 $N = N(L)$ 是 L 的一个正则邻域。 L 的链环群 $G = G(L)$ 是 $\pi_1(M)$ 的基本群 $= \pi_1(X)$。 的子午线

L 是 μ 的一个元素，它由一个基点环路表示；该基点环路在 ∂N 中自由同伦于一个子午环，即一个在 N 中围成一个本质圆盘的简单环路。

一个子午线对是 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 的子午线所组成的无序对。若对于某个 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ 和 $g \in G,\ \{\mu_1', \mu_2'\}$ 等于 $\{g\mu_1^{\varepsilon_1}g^{-1}, g\mu_2^{\varepsilon_2}g^{-1}\}$，则子午线对 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 和 $\{\mu_1', \mu_2'\}$ 是等价的。

注意，L 的子午线对集合（模等价关系）与 M 中的真路径集合（模真同伦）之间存在双射对应（参见 [1], [23, 第 2]节和引理 4.9(2)）。这里，M 中的真路径是这样的一条路径（闭区间的连续像）：它与 ∂M 恰好在端点处相交。若 M 中的两条真路径在 M 中同伦的同时保持端点包含于 ∂M这一条件，则称它们恰当同伦。

假设 L 是双曲的，即补空间 X 具有有限体积的完备双曲结构。那么，子午线对 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 是可交换的（即，$\mu_1\mu_2 = \mu_2\mu_1$）当且仅当对应的真路径是非本质的，也就是说，它与 ∂M 中的一条弧恰当同伦（参见引理 4.2）。换言之，$\{\mu_1, \mu_2\}$ 不可交换当且仅当该真路径是本质的，即不是非本质的。如果 L是一个二桥链环，且该弧与 L的上隧道或下隧道恰当同伦，那么 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成链环群 G（见图1）。因此，定理 1.2 可改述如下。

定理2.1。设 $L \subset S^3$ 是一个双曲的2-桥链环。设 γ 是链环外部 $M(L)$中的一条本质真路径，并设 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 是链环群 $G(L)$ 中由 γ表示的子午线对。假设 γ 与 L的上隧道和下隧道都不同伦。则 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成一个几何有限的秩2 自由克莱因群。

Agol 对定理2.1的证明实际上还包含了以下关于双曲交替链环的结果的证明。

定理2.2。设 $L \subset S^3$ 是一个双曲交替链环，D 是 L 的一个素交替图。设 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 是一个非交换子午线对，γ 是链环外部 $M(L)$ 中表示该对子午线对 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 的一条本质真路径。如果 γ 不与一条交叉弧（相对于图 D）恰当同伦，则 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成一个秩为2 的自由克莱因群，且该群是几何有限的。

3. Checkerboard surfaces for alternating links

在本文余下部分中，$L \subset S^3$ 表示一个双曲的交替链环，且$D \subset S^2$ 表示 L的一个素交替图；但在第6节和第7节中，我们只假设 L 是一个素交替链环。这里，若一个链环图满足以下条件，则称其为素图：(i) 它至少包含一个交叉点；(ii) 对于投影平面中的每个简单环路 α，如果 α 与该图横截地相交于恰好两个点，那么 α 围成的圆盘内不含该图的任何交叉点。需要注意的是，一个素

链环的交替图是连通的（作为平面图），且是约化的（即包含非可消交叉点）。

我们在 S^3 中选取两点 v_+ 和 v_-，并将 $S^3 \setminus \{v_+, v_-\}$ 与 $S^2 \times \mathbb{R}$ 识别，使得对于 $x \in S^2$，$\lim_{t\to\pm\infty}(x,t) = v_\pm$。图 D 被视为 $S^2 \times \{0\}$ 中的四价图，并假设 $L \subset D \times [-1,1]$。对于 D 的每个交叉 c，我们假设 $L \cap (c \times [-1,1]) = c \times \{-1,1\}$。我们称点 $c_+ := c \times 1$（分别称点 $c_- := c \times (-1)$）为 L 在 c 处的上（分别为下）交叉点，并称 $c \times [-1,1]$ 为 L 在 c 处的交叉弧。$c \times [-1,1]$ 与链环外部 M（分别与链环补空间 X）的交集，称为 M 中 c 处的交叉弧（分别称为 X 中 c 处的开交叉弧）。我们假设交叉弧 $c \times [-1,1]$ 的定向使得 c_- 和 c_+ 分别为其起点和终点。

我们还假设，在交叉球之外，L 与 D 重合；这些交叉球是 S^3 中 D交叉点处交叉弧的正则邻域。我们将 S^2 中 D 的补区域交替染成黑色和白色。于是存在紧致连通曲面 S_b（分别地，S_w），其边界为 L；在交叉球之外，它与黑色区域（分别地，白色区域）重合，并在每个交叉球内与一个扭结的矩形相交：它称为 L的黑色（分别地，白色）曲面。应注意，S_b和 S_w 沿交叉弧横截相交（参见第 6 节中的图4(a)）。此外，$(S_b \cup S_w) \setminus (S_b \cap S_w)$的连通分支与 D的区域之间存在自然的双射对应。我们有时将 S_b 和S_w 各自称为棋盘曲面，并记作 S。

对于每个棋盘曲面 S，我们假设 S 与 L 的正则邻域 N 相交于 ∂S 的一个领圈邻域，因此 $S \cap M$ 正常嵌入于 M中。我们将 $S \cap M \subset M$（分别地，$S \cap X \subset X$）称为 M中的棋盘曲面（分别地，X中的开棋盘曲面），并继续记作 S。

以下关键命题隐含于幻灯片 [3], 中，其证明遵循 Agol 的建议，由 Adams [2, 定理 1.9]给出。该证明依赖于这样一个事实：每个双曲交替链环补空间都允许一个非正曲率的立方分解，其中棋盘曲面是双曲面（见第 6 节）。除去此类分解的存在性之外，Aitchison-Rubinstein [6, 引理及其在第 146] 页的证明，已在更一般的情形下给出了实质相同的论证。一般化结果见 Futer-Kalfagianni-Purcell [21, 定理 1.6]。

命题 3.1。设 $L \subset S^3$ 为一个双曲交替链环，S 为从 L的一个素交替图 D 得到的棋盘曲面。则 S 是拟福克斯。

˜为了解释该命题的含义，令 $p_u : X \to X$ 为万有覆盖，并将链环群 $G = \pi_1(X)$与覆盖变换群 Aut($\tilde{X}$)等同。由于 L 是双曲的，$\tilde{X}$ 可与双曲空间 $\mathbb{H}^{3}$˜等同，而 $G = \text{Aut}(X)$可视为克莱因群。于是，S 是拟福克斯的，意味着 $\pi_1(S)$嵌入 $\pi_1(X) = G$，并且克莱因群 $\pi_1(S) < G <$

PSL(2, $\mathbb{C}$)满足以下条件：若 S 是可定向的，则 $\pi_1(S)$是准福克斯群（参见 [26, 第120页，定义]）；若 S 是不可定向的，则与定向双重覆盖对应的 $\pi_1(S)$的指数 2 子群是准福克斯群。由于准福克斯群在三维球 $\bar{\mathbb{H}}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ 上的作用在拓扑上与福克斯群的作用共轭（见 [26, 定理 5.31]），我们得到以下推论。

推论 3.2。设 $L \subset S^3$ 是一个双曲交替链环，S 是由 L的一个素交替图 D 得到的棋盘曲面。设 Σ 是原像 $p_u^{-1}(S) \subset \tilde{X} = \mathbb{H}^3$的一个连通分支。则 Σ 是正常嵌入于 $\mathbb{H}^3$中的一个开圆盘，并将 $\mathbb{H}^3$ 分为两个半空间，即 B^- 和 B^+，它们满足以下条件。

(1) $\mathbb{H}^3 = B^- \cup B^+$ 和 $\Sigma = B^- \cap B^+$。(2) Σ 在 $\bar{\mathbb{H}}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ 中的闭包 $\bar{\Sigma}$ 是正常嵌入于 $\bar{\mathbb{H}}^3$中的一个圆盘，且$(\bar{\mathbb{H}}^3, \bar{\Sigma})$ 与标准球对 (B^3, B^2)同胚，其中 B^3 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位3-球，B^2 是 B^3 与 x-y 平面的交集。(3) $B^\pm$ 在 $\bar{\mathbb{H}}^3$ 中的闭包 $\bar{B}^\pm$ 是3-球，满足

$$\bar{\mathbb{H}}^3 = \bar{B}^- \cup \bar{B}^+, \quad \bar{\Sigma} = \bar{B}^- \cap \bar{B}^+.$$

(4) $\partial\Sigma$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个圆，它将 $\mathbb{C}$ 分成两个圆盘 $\Delta^- := B^- \cap \mathbb{C}$ 和$\Delta^+ := \bar{B}^+ \cap \hat{\mathbb{C}}$，使得$\hat{\mathbb{C}} = \Delta^- \cup \Delta^+$ 和 $\partial\bar{\Sigma} = \Delta^- \cap \Delta^+$。

我们分别称 $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ 和 $\bar{\Sigma} \subset \bar{\mathbb{H}}^3$为棋盘平面和棋盘格$\bar{}$圆盘。$\Sigma$（或 Σ）的颜色根据相应棋盘曲面 S的颜色定义为黑色或白色。我们将由 Σ围成的每个 $B^\pm$ 称为棋盘半空间。

4. The action of meridian pairs on the ideal boundary of the hyperbolic space

在本文余下部分，为方便起见，我们假设双曲交替链环 L 是定向的，并按以下受限含义使用“子午线”和“子午线对”这两个术语：L 的一个子午线是链环群G 中的一个元素，它由一条定向闭路径表示，该路径在 ∂N 中自由同伦于一个子午环，且与 L的链接数为 $+1$ 。一个子午线对是 L 在上述受限含义下的子午线的无序对 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 。那么，按照第2节中定义的意义，两个子午线对等价，当且仅当它们同时共轭。当然，这不会影响定理 2.1 和 2.2 的内容。

回顾 $\tilde{X}$ 与一个克莱因群相区别。因此，子午线 μ 在 G 中的 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 是抛物型的，其在 $\bar{\mathbb{H}}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ 上的作用有唯一的不动点，该点位于 $\hat{\mathbb{C}}$ 中。这个点称为 μ 的抛物不动点，记作 Fix(μ)。

ˆ 令 PFix(G) $\subset \mathbb{C}$ 为 G 的抛物不动点集合，也就是 G 中抛物元素的抛物不动点集合。对每个 $p \in$PFix(G)， p 在 G 中的稳定子群 $\mathrm{Stab}_G(p)$ 是一个秩为 2 的自由阿贝尔群，属于 ∂M 某个连通分支的基本群的共轭类。由于 ∂M 的每个连通分支在同伦意义下都唯一包含一个子午圈（其与 L 的链接数为 $+1$），$\mathrm{Stab}_G(p)$ 中包含定向链环 L 的唯一子午线 μ_p。我们称 μ_p 为 p 处 L 的子午线。

引理 4.1. 映射 $\mu \mapsto \mathrm{Fix}(\mu)$ 和 $p \mapsto \mu_p$ 分别确定以下双射对应及其逆映射：

$$\{meridians\ of\ L\} \to \mathrm{PFix}(G).$$

下面的引理很容易证明。

引理 4.2. 设 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 是由链环外部 M 中的真路径 γ 表示的子午线对。那么以下条件等价。

(1) $\{\mu_1, \mu_2\}$ 可交换。(2) $\mathrm{Fix}(\mu_1) = \mathrm{Fix}(\mu_2)$。(3) γ 是非本质的。

现在我们描述子午线 μ_p 在 $\bar{\mathbb{H}}^3$ 上的作用。为此，我们假设 $X \setminus M$ 由开尖点邻域组成，因此 $\tilde{M} := p_u^{-1}(M)$ 是 $\tilde{X} = \mathbb{H}^3$ 的一个子流形，其边界由互不相交的 horosphere $\{H_p\}_{p \in \mathrm{PFix}(G)}$ 构成。注意，欧几里得环面 $H_p/\mathrm{Stab}_G(p)$ 是 ∂M 的一个连通分支，而 ∂M 的每个连通分支都具有这种形式。

现在，设 $S \subset X$ 是 L 的一个开棋盘曲面。我们可以假设， S 与 ∂M 的每个连通分支都横截相交于一条闭欧几里得测地线。对于每个 $p \in$ PFix(G)， $p_u^{-1}(S) \cap H_p$ 是欧几里得直线 $\{\ell_j\}_{j \in \mathbb{Z}} = \{\ell_j(p)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 的不交并，且 $\mu_p(\ell_j) = \ell_{j+1}$。设 $\Sigma_j = \Sigma_j(p)$ 为棋盘平面，它是 $p_u^{-1}(S)$ 的一个连通分支，并满足 $\ell_j \subset \Sigma_j \cap H_p$。

引理 4.3。 在上述设定下，对于每个 $p \in \mathrm{PFix}(G)$， $\Sigma_j \cap H_p = \ell_j$，且$j \in \mathbb{Z}$。换言之，棋盘平面 Σ_j $(j \in \mathbb{Z})$ 彼此不同。

证明。反设，对于某些互不相同的整数 j 和 j'， $\Sigma_j = \Sigma_{j'}$。˘ ˜˘ ˜令 Σ 为 $\Sigma_j = \Sigma_{j'}$ 与 M 的交。则 Σ 正常嵌入于 M 中，且映射 $\breve{S} := p_u(\breve{\Sigma}) = S \cap M$ 是 M 中的一个棋盘曲面。令 $\tilde{\alpha}$ 为 Σ 中连接 Σ 的边界分支 ℓ_j 和 $\ell_{j'}$ 的一条路径˘ ˘˜。由于 M 单连通，˜$\tilde{\alpha}$ 端点相对同伦于 $H_p \subset \partial M$ 中的一条路径。因此，˘ S 中的路径 $\alpha := p_u \circ \tilde{\alpha}$ 端点相对同伦于 M 内部 ∂M 中的一条路径。另一方面，由于$\ell_j \neq \ell_{j'}$， α 在˘S 中不同伦于 $\partial\breve{S}$。这与 [34, 定理 11.31] 矛盾；该定理称˘ S 是 π_1-本质的，特别是边界 π_1-单射的（见 [34, 定义 11.30]）。□

注 4.4. 上述引理的直接几何证明见命题6.6(2)。Aumann 已证明与素交替图相关联的棋盘曲面的 π_1-本质性 [11] （参见 Menasco-Thistlethwaite [28,命题 2.3]）。一般化结果见 Ozawa [31, 定理 3] 和 [32, 定理 2.8] 。

引理 4.5。 (1) 存在由 Σ_j 界定的棋盘半空间 $B_j^{\pm} = B_j^{\pm}(p)$ $(j \in \mathbb{Z})$，满足以下条件：

(a) $\bar{\mathbb{H}}^3 = \bar{B}_j^- \cup \bar{B}_j^+$和 $\bar{\Sigma}_j = \bar{B}_j^- \cap \bar{B}_j^+$。
(b) $\bar{B}_j^- \subset \bar{B}_{j+1}^-$ 和 $\bar{B}_j^+ \supset \bar{B}_{j+1}^+$。 (c) μ_p $(\bar{B}_j^{\pm}) = \bar{B}_{j+1}^{\pm}$。

(2) 令 $\Delta_j^{\pm} = \Delta_j^{\pm}(p) := \bar{B}_j^{\pm}(p) \cap \hat{\mathbb{C}}$。则 $\Delta_j^{\pm}$ 是 $\hat{\mathbb{C}}$ 中满足以下条件的圆盘。

(a) $\hat{\mathbb{C}} = \Delta_j^- \cup \Delta_j^+$和 $\partial\bar{\Sigma}_j = \Delta_j^- \cap \Delta_j^+$。
(b) $\Delta_j^- \subset \Delta_{j+1}^-$ 和 $\Delta_j^+ \supset \Delta_{j+1}^+$。 (c) $\mu_p(\Delta_j^{\pm}) = \Delta_{j+1}^{\pm}$。

在上述引理中，符号 $\pm$ 的用法如下：例如，$\mu_p(\bar{B}_j^{\pm}) = \bar{B}_{j+1}^{\pm}$ 表示对每个 $\epsilon \in \{-,+\}$，$\mu_p(\bar{B}_j^{\epsilon}) = \bar{B}_{j+1}^{\epsilon}$。本文始终采用这一约定。

证明。 由引理 4.3， $H_p \cap \Sigma_j$ 等于直线 ℓ_j。注意，直线 ℓ_j 将 H_p 分成两个闭半空间 $H_{p,\,j}^-$ 和 $H_{p,\,j}^+$，其中 $\ell_{j\pm1} \subset H_{p,\,j}^{\pm}$ （见图 2(a)）。由推论 3.2，$(\bar{\mathbb{H}}^3,\ \bar{\Sigma}_j)$ 是一个标准球对，并且存在由 Σ_j 界定的棋盘格半空间 B_j^{ϵ} $(\epsilon \in \{-,+\})$，满足条件 (1-a)，使得$H_{p,\,j}^{\epsilon} \subset \bar{B}_j^{\epsilon}$。由于 $H_{p,\,j}^- \subset H_{p,\,j+1}^-$ 且 $H_{p,\,j}^+ \supset H_{p,\,j+1}^+$，条件 (1-b) 得以满足。由于 $\mu_p(H_{p,\,j}^{\pm}) = H_{p,\,j+1}^{\pm}$，条件 (1-c) 也得以满足，从而完成了 (1) 的证明。

断言 (2) 可由 (1) 以及 $(\bar{\mathbb{H}}^3, \bar{\Sigma}_j)$ 是一个标准球对这一事实得出。□

定义 4.6。 在上述设定下， $p \in \mathrm{PFix}(G)$ 处的一个蝴蝶 $\mathrm{BF}(p)$ 是由圆盘 $\{\Delta_j^-, \Delta_{j+1}^+\} = \{\Delta_j^-(p),\ \Delta_{j+1}^+(p)\}$ 在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中构成的一对，其中某个 $j \in \mathbb{Z}$。蝴蝶的颜色 根据棋盘曲面 S 的颜色定义为黑色或白色。$\mathrm{BF}(p)$ 的底层空间 $|\mathrm{BF}(p)|$ 定义为 $|\mathrm{BF}(p)| := \Delta_j^- \cup \Delta_{j+1}^+ \subset \hat{\mathbb{C}}$ （见图 2(b)）。

应当注意，蝴蝶 $\mathrm{BF}(p)$ 由抛物不动点 p、颜色（等价地，棋盘曲面的选择 S），以及 Σ_j of $p_u^{-1}(S)$ 的一个连通分支的选择所确定，且该分支满足 $p \in \bar{\Sigma}_j$。

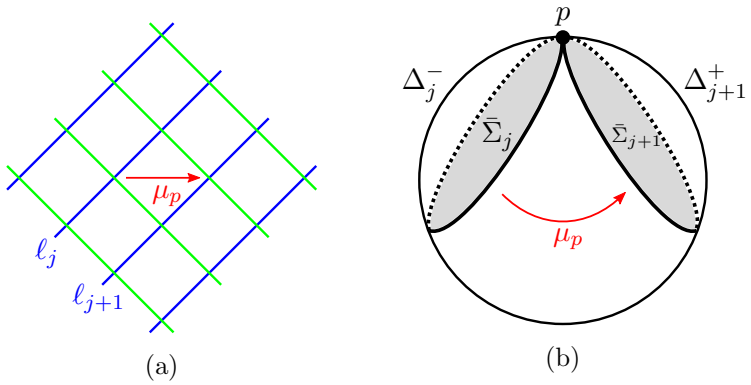


FIGURE 2. (a) μ_p在（H_p，$H_p \cap p_u^{-1}(S_b)$ $H_p \cap p_u^{-1}(S_w)$）上的作用。(b) μ_p在（$\bar{\mathbb{H}}^3$，$\{\bar{\Sigma}_j\}_j$）上的作用的粗略模型。此图并不精确。事实上，$\Delta_j^- \cap \Delta_{j+1}^+ = \partial\Delta_j^- \cap \partial\Delta_{j+1}^+$通常严格大于 $\{p\}$（参见注 4.8）。

引理 4.7。对于位于 $p \in \mathrm{PFix}(G)$处的蝴蝶 $\mathrm{BF}(p) = \{\Delta_j^-, \Delta_{j+1}^+\}$，以下结论成立。

(1) Δ_j^-和 Δ_{j+1}^+ 是$\hat{\mathbb{C}}$ 中的圆盘，且其内部不相交。(2) $\mu_p(\hat{\mathbb{C}} \setminus$内部 $\Delta_j^-) = \Delta_{j+1}^+$。

证明。 (1) 根据引理 4.5(2-a, b)，$\operatorname{int}\Delta_j^- \subset \operatorname{int}\ \Delta_{j+1}^- = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta_{j+1}^+$。因此

$$\operatorname{int}\Delta_j^- \cap \operatorname{int}\Delta_{j+1}^+ \subset (\operatorname{int}\Delta_j^-) \cap \Delta_{j+1}^+ = \emptyset.$$

(2) By Lemma 4.5(2-c), $\mu_p(\hat{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{int}\Delta_j^-) = \mu_p(\Delta_j^+) = \Delta_{j+1}^+$. □

注 4.8. 抛物不动点 p 包含于交集 $\Delta_j^- \cap \Delta_{j+1}^+ = \partial\Delta_j^- \cap \partial\Delta_{j+1}^+$中。然而，一般而言，该交集严格大于单点集 $\{p\}$；通常它是一个康托尔集（参见 [26, 定理 3.13]）。我们希望在后续论文中对该交集作更详细的描述。

现在，设 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 为一个非交换子午线对，并令 $p_i := \mathrm{Fix}(\mu_i) \in \mathrm{PFix}(G)$ $(i = 1,2)$。注意，由引理 4.1 和 4.2 可知，$p_1 \neq p_2$ 和 $\mu_i = \mu_{p_i}$ $(i = 1,2)$。于是，以下引理可由引理 4.1 立即推出。

引理 4.9. (1) 对应关系 $\{\mu_1, \mu_2\} \mapsto \{p_1, p_2\}$ 在 L 的非交换子午线对的等价类集合与 $\mathrm{PFix}(G)$ 中不同点的无序对在 G作用下的等价类集合之间建立了一一对应。

(2) 设 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 和 $\{p_1, p_2\}$ 如上所述，并设 γ 是 M 中代表对 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 的一条真路径。那么 γ 可提升为万有覆盖 $\tilde{M} \subset \tilde{X} = \mathbb{H}^3$ 中连接 *horosphere* H_{p_1} 和 H_{p_2} 的一条真路径 $\tilde{\gamma}$。反过来，若 γ 是一条

$\tilde{}$ 中的一条真路径，它是 M 中一条连接 H_{p_1} 和 H_{p_2} 的真路径 $\tilde{\gamma}$ 的像，那么 γ 代表对 $\{\mu_1, \mu_2\}$。

记号 4.10. 在上述设定下，同时考虑两个蝴蝶 BF(p_1) 和 BF(p_2) 时，我们将蝴蝶 BF(p_i) 记为 $\{\Delta_i^-, \Delta_i^+\}$，其中 $i = 1, 2$，而 Δ_i^- 和 Δ_i^+ 在定义 4.6 中分别对应于 Δ_j^- (p_i) 和 Δ_{j+1}^+(p_i)。因此 μ_i(ˆ$\mathbb{C} \setminus$ 内部 Δ_i^-) $= \Delta_i^+(i = 1, 2)$。从这个意义上说，我们将 BF(p_i) 视为 ˆ$\mathbb{C}$ 中由闭圆盘组成的有序对 (Δ_i^-，Δ_i^+)，不过仍将其记为 $\{\Delta_i^-, \Delta_i^+\}$。

定理2.1 的证明基于以下命题。

命题 4.11. 设 $L \subset S^3$ 是一个双曲交替链环，$\{\mu_1, \mu_2\}$ 是链环群 $G(L)$ 中一对子午线不交换对，$\{p_1, p_2\}$ 是相应的一对子午线抛物不动点。那么，由 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成的子群 $\Gamma = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ 是一个秩为 2 的自由克莱因群，且几何有限，前提是存在蝴蝶 $\mathrm{BF}(p_i) = \{\Delta_i^-, \Delta_i^+\}$，位于 $p_i (i = 1,2)$ 处，并满足以下条件。

> ˆ(i) 底层空间 $|\mathrm{BF}(p_1)|$ 与 $|\mathrm{BF}(p_2)|$ 在 $\mathbb{C}$中有不相交的内部，等价地，四个圆盘 Δ_1^-、Δ_1^+、Δ_2^-和 Δ_2^+有不相交的内部。ˆ(ii) 补集开集 $O := \mathbb{C} \setminus (|\mathrm{BF}(p_1)| \cup |\mathrm{BF}(p_2)|)$ 非空。

证明。由标准的乒乓论证（参见 [30, 第 4] 章，其中有精彩的阐述和精美的插图），对于 $\{\mu_1, \mu_2\}$中的任意非平凡约化字w，我们有 $w(O) \cap O = \emptyset$。因此，$G(L)$的子群 $\Gamma = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ 是秩为 2 的自由群，并且它具有非空的不连续域。由于 Maskit-Swarup [25, 定理 1]表明，具有非空不连续域的双抛物生成元克莱因群是几何有限的，故 Γ是几何有限的。□

注记 4.12. 虽然 [3]援引了 Klein-Maskit 组合定理，但我们无法确认在命题 4.11 的情形下，[24, 定理 C.2] 中的条件是否成立。这就是我们采用 Maskit 和 Swarup 的结果 [25]的原因。感谢 Yohei Komori 和 Hideki Miyachi 向我们提出这一想法。

5. Basic facts concerning non-positively curved spaces

本节回顾有关非正曲率空间的基本事实，主要依据 Bridson-Haefliger [16]。

设 $X = (X, d)$ 是一个度量空间。本文中，X中的一条测地线是指一个等距嵌入 $g : J \to X$，其中 J 是 $\mathbb{R}$ 的一个连通子集。若 J 是整个 $\mathbb{R}$ （或一个闭区间），则称 g 为一条测地线（或一条测地线段）。我们不区分测地线及其像。若每一对点都能在 X 中由一条测地线连接，则称 X 为一个测地空间。对于测地空间 X 中的点 a 和 b，我们用 $[a, b]$ 表示连接 a 和 b 的一条测地线段。符号（a, b）、$[a, b)$ 以及（a, b]）分别表示开或半开测地线段。于是，距离 $d(a, b)$ 等于测地线段 $[a, b]$ 的长度 length($[a, b]$),

（关于曲线长度的定义，参见 [16, 定义 I.1.18] 。）

若测地空间 X 满足任意测地三角形都比欧几里得平面 $\mathbb{E}^2$中的比较三角形更瘦，则称其为 *CAT(0)*空间；也就是说，测地三角形上任意两点之间的距离都小于或等于比较三角形上对应两点之间的距离。CAT(0)空间是唯一测地的，即对于每一对点，都存在唯一一条连接它们的测地线（[16, 命题 II.1.4(1)]）。若测地空间 X 在局部上是 CAT(0)空间，则称其为非正曲率 空间（参见 [16, 定义 II.1.1 和 II.1.2]）。以下（特殊情形的）Cartan–Hadamard 定理至关重要。

命题 5.1. [16, <*style id='4}*定理 *II.4.1(2)* 的特殊情形] 设 X 是一个完备、连通的度量空间。若 X 具有非正曲率，则其万有覆盖$\tilde{X}$ （赋予诱导的长度度量）是一个 *CAT(0)*空间。

若 W 是唯一测地空间 X 的子集，则称其为凸，如果对于 W中的任意不同点 a和 b，测地线段 $[a,b]$ 包含于 W中。对于完备 CAT(0) 空间 X的闭凸集 W，令 $\pi_W\colon\ X \to W$ 为投影，即对于每个 $x \in X$，$\pi_W(x)$是 W 中的唯一点，使得$d(x,\ \pi_W(x)) = d(x,\ W) :=\inf\{d(x,\ y) \mid y \in W\}$（见 [16, 命题 II.2.4]）。对于点 $x \in X \setminus W$ 和 $w \in W$，定义

$$\angle_w(x,W) := \inf\{\angle_w(x,y) \mid y \in W \setminus \{w\}\},$$

其中，$\angle_w(x,\ y)$是 $\angle_w([w,x],\ [w,y])$，即测地线段 $[w,x]$ 和 $[w,y]$ 在 w 处的亚历山德罗夫角（见 [16, 定义 I.1.12 和记号 II.3.2]）。

注 5.2. 角度 $\angle_w(x,\ W)$ 由 $(X,\ W)$ 在 w 附近的局部形状决定，具体来说：对于 w 的任意邻域 U，以及任意 $x' \in(w,\ x] \cap U$，我们有

$$\angle_w(x,W) = \angle_w(x', W\cap U) := \inf\left\{\angle_w(x',y') \mid y' \in (W\cap U)\setminus\{w\}\right\},$$

因为对于任意 $x' \in (w,\ x]$、$y \in W \setminus \{w\}$ 和 $y' \in (w,\ y]$，我们有 $\angle_w(x,\ y) =\angle_w(x',\ y')$。

引理5.3. 设 X 是一个完备 *CAT(0)* 空间，W 是 X 的闭凸子集。那么对于任意 $x \in X$ 和 $w \in W$，我们有 $w = \pi_W(x)$ 当且仅当 $\angle_w(x,\ W) \geq \frac{\pi}{2}$。

证明。必要性部分不过就是 [16, 命题 II.2.4(3)]。为证明充分性，假设不等式 $\angle_w(x,W) \geq \frac{\pi}{2}$成立，并反设 w 不同于点 $w_0 := \pi_W(x)$。令 $\Delta(\bar{x},\bar{w},\bar{w}_0) \subset \mathbb{E}^2$ 为测地三角形 $\Delta(x,w,w_0) \subset X$的比较三角形。由 [16, 命题 II.1.7(4)] 及假设可得 $\angle_{\bar{w}}(\bar{x},\bar{w}_0) \geq\angle_w(x,w_0) \geq \angle_w(x,W) \geq \frac{\pi}{2}$。由 [16, 命题 II.1.7(4) 和 II.2.4(3)]，还可得 $\angle_{\bar{w}_0}(\bar{x},\bar{w}) \geq \angle_{w_0}(x,w) \geq \frac{\pi}{2}$。因此，欧几里得三角形 $\Delta(\bar{x},\bar{w},\bar{w}_0)$ 有两个角 $\geq \frac{\pi}{2}$，矛盾。□

设 W_1 和 W_2 是完备 CAT(0) 空间 X中的闭凸子集。W_1 和 W_2 之间的距离 $d(W_1, W_2)$定义为

$$d(W_1, W_2) := \inf\{d(x_1, x_2) \mid x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}.$$

对于一对不同的点（x_1，x_2）$\in W_1 \times W_2$，测地线段 $[x_1, x_2]$ 是 W_1 与 W_2 之间的最短路径，当且仅当 d（W_1，W_2）$=$ 长度（$[x_1, x_2]$）。测地线段 $[x_1, x_2]$ 是 W_1 与 W_2 的公垂线，当且仅当 $\angle_{x_1}$（x_2，W_1）$\geq \frac{\pi}{2}$ 且$\angle_{x_2}$（x_1，W_2）$\geq \frac{\pi}{2}$。

引理 5.4。设 X 是一个完备 *CAT(0)* 空间，且 W_1 和 W_2 是 X的闭凸子集。那么，对于一对不同的点（x_1, x_2）$\in W_1 \times W_2$，测地线段 $[x_1, x_2]$ 是 W_1 与 W_2 之间的最短路径，当且仅当它是 W_1 与 W_2的公垂线。特别地，如果存在W_1 与 W_2 的公垂线，那么 d（W_1, W_2）> 0，因此 $W_1 \cap W_2 = \emptyset$。

证明。假设 $[x_1, x_2]$ 是 W_1 和 W_2的一条公垂线。考虑从 X 到闭凸集 $[x_1, x_2]$的投影 $\pi := \pi_{[x_1,x_2]}$。那么，对于任意一对点（y_1，y_2）$\in W_1 \times W_2$，由引理 5.3 的充分性部分可知 $x_1 = \pi(y_1)$，因为 $\angle_{x_1}(y_1, [x_1, x_2]) = \angle_{x_1}(x_2, y_1) \geq \angle_{x_1}(x_2, W_1) \geq \frac{\pi}{2}$。同理，$x_2 = \pi(y_2)$。由命题 II.2.4(4) [16, ，投影不会增大距离，因此我们有],

$$d(x_1, x_2) = d(\pi(y_1), \pi(y_2)) \leq d(y_1, y_2).$$

因此，$[x_1, x_2]$的长度 $= d(x_1, x_2) = d(W_1, W_2)$。充分性部分的证明至此完成。必要性部分可由引理5.3的充分性部分立即推出。□

立方复形是一种度量空间 $X = (X, d)$，由ˆ单位立方体 $X = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}(I^{n_\lambda} \times \{\lambda\})$的不交并通过等距变换粘合其面而得到。具体来说，它是 M_κ-多面体复形，具有 $\kappa = 0$，其定义见 [16, 定义 I.7.37] ，由欧几里得单位立方体构成，也就是说，定义中的 Shapes(X) 集合由欧几里得单位立方体组成。（参见 [16, 例 (I.7.40)(4)]。） X 上的度量 d 是由单位立方体的欧几里得度量诱导的长度度量（精确定义见 [16, I.7.38] ）。我们回顾以下基本事实（参见 [16, 第 97 页的定理或 I.7.33]）。

命题 5.5. 每个有限维立方复形都是完备测地空间。

当我们除了考虑度量之外，还需要考虑立方复形 X的组合结构时，就用相应的花体字母$\mathcal{X}$表示它，并将度量空间 X视为 $\mathcal{X}$的底层空间 $|\mathcal{X}|$。否则，我们不在符号上区分 X、 $\mathcal{X}$ 和 $|\mathcal{X}|$，而是根据具体情境选用合适的符号。我们也称 $\mathcal{X}$ 为度量空间X的立方分解 。

对于点 $x \in X = |\mathcal{X}|$，若从 x 出发的两条非平凡测地线之间的亚历山德罗夫角为零，则称它们定义了相同的方向。这在从x出发的非平凡测地线集合上确定了一个等价关系，而亚历山德罗夫角在等价类集合上诱导出一个度量。由此得到的度量空间称为 x 处的方向空间，记作 $S_x(X)$（参见 [16, 定义 II.3.18]）。

设 x 是立方复形 $\mathcal{X}$的一个顶点 v。那么，空间 $S_v(\mathcal{X})$ 是通过粘合空间 $\{S_{v_\lambda}(I^{n_\lambda}\times\{\lambda\})\}$得到的，其中 λ 遍历后缀集 $\hat{}\,\hat{}\,\Lambda$ 中满足 $(v_\lambda,\lambda) \in I^{n_\lambda}\times\{\lambda\} \subset X$ 经投影 $X \to X$映射到 v的元素。这里，$S_{v_\lambda}(I^{n_\lambda}\times\{\lambda\})$ 是立方体 $I^{n_\lambda}\times\{\lambda\}$ 在顶点 v_λ处的方向空间；因此它是一个全直角球面单形，即单位球面 $S^{n_\lambda-1}$ 中的一个测地单形，其所有边的长度均为 $\pi/2$。因此，$S_v(\mathcal{X})$ 具有有限维全直角球面复形的结构，即一个带有 $\kappa = 1$ 的 M_κ-多面体复形，含义如 [16, 定义 I.7.37] 所述；该复形由全直角球面单形构成。这个复形称为 $\mathcal{X}$中 v的几何链环，记作 $\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})$（见 [16, (I.7.38)]）。它带有由全直角球面单形的球面度量诱导的长度度量 $d_{\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})}$。于是有如下结论（参见 [16, 第191]页第二句）。

引理 5.6。由亚历山德罗夫角确定的度量 $d_{S_v(\mathcal{X})}$ 在 $S_v(\mathcal{X}) = \mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})$ 上等于由下式定义的度量 $d^{\pi}_{\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})}$

$$d^{\pi}_{\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})}(g_1,g_2) := \min\{d_{\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})}(g_1,g_2),\pi\}.$$

证明。根据 [16, 定理 I.7.39]，，存在一个自然等距同构 f，将开球$B_X(v,\epsilon) = \{x \in X \mid d(v,x) < \epsilon\}$映射到欧氏锥 $C_0(\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X}))$ 的锥点周围、半径相同的开球上，其中 $\epsilon > 0$为某个值。该欧氏锥建立在度量空间 $\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})$ 上。（关于欧氏锥（κ-锥，带有 $\kappa = 0$）及其锥点的定义，见 [16, 定义 I.5.6]。）度量 $d^{\pi}_{\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X})}$ 可由欧氏锥 $C_0(\mathrm{Lk}(v,\mathcal{X}))$ 的锥点周围开球的度量恢复（见 [16, 注 I.5.7]），而度量 $d_{S_v}(\mathcal{X})$ 由 $B_X(v,\epsilon)$ 上的度量确定。因此，根据等距同构 f的自然性，我们得到所需结果。□

我们回顾一下判断立方复形具有非正曲率的以下著名判据：[16, 定理 II.5。20], 其中，旗复形是一个单纯复形，其中每个两两由边相连的有限顶点集都张成一个单形。

命题 5.7（格罗莫夫旗判据）。有限维立方复形 $\mathcal{X}$是非正曲率的，当且仅当每个顶点的几何链环都是旗复形。

命题 7.4 的证明，以及 [2, 3, 6], 给出的命题 3.1 的证明，都基于素交替链环外部的非正曲率立方分解，其中棋盘曲面是超平面，也就是说，它们由立方体的中方形组成。这里，立方体的中方形 是一个中方形 ，它是正常嵌入立方体 中的正方形，与立方体 的某个面 平行，并经过中心 （12、12、12）。（超平面的精确定义见 [22,定义 2.2] 。）本节将简要介绍这些立方分解，其构造遵循 D. Thurston [45]的方法，详细描述则见 Yokota [48]（参见 [5, 40, 36]）。

对于素交替链环L的素交替图 D 中的每个交叉，考虑一个八面体，使相应的交叉弧作为其垂直中心轴（见图3）。将每个八面体在其顶部和底部顶点处截断，并沿包含其余四个顶点的水平正方形进行分割，我们在链环外部 M中得到一对立方体；其中每个立方体都沿顶部或底部的面与∂M 相交，并在垂直中方形处与棋盘曲面相交（见图4）。我们可以扩展 M 中的立方体，从而得到 M 所需的立方分解（见图3及其图注）。因此，我们得到以下命题。

命题 6.1。 设 L 是一个素交替链环， D 是 L的一个素交替图。则存在一个完备的、非正曲率的立方复形 $\mathcal{M}$ ，其底层空间是 L的外部 M ，并满足以下条件。

(1) 每个立方体 I^3 与 ∂M 相交于顶面 $I^2 \times \{1\}$ 或底面$I^2 \times \{0\}$。(2) $\mathcal{M}$ 中有超平面 $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$ ，分别代表黑白曲面的同痕类，并满足以下条件。(a) $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$ 各自与每个立方体相交于两个竖直中间正方形 $\{\frac{1}{2}\} \times I^2$和 $I \times \{\frac{1}{2}\} \times I$之一。(b) $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$ 沿着 $\mathcal{C}$ “正交地”相交：$= \mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$是表示交叉弧的测地线段的不交并。

(3) $\mathcal{M}$ 恰有两个内部顶点 v_+ 和 v_-。(4) $\mathcal{M}$ 的内部边（包含在内部$\mathcal{M}$中的边）与 D的区域之间存在双射对应：与区域 R 对应的内部边 $e(R)$ 是一条单调路径，它连接 v_+ 与 v_- ，并在单个点 $m(R)$ 处与 $\mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_w$“正交地”相交；该点位于$(\mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_w) \setminus \mathcal{C}$ 中与 R对应的连通分支内。我们称 $m(R)$ 为 R的中心。(5) 对于每个 $\epsilon \in \{+, -\}$，几何链环$\mathrm{Lk}(v_\epsilon, \mathcal{M})$ 是一个全直角球面复形，其组合结构由 S^2 的胞腔分解得到；该分解由 D的对偶图 D^* 确定，方法是将每个区域细分

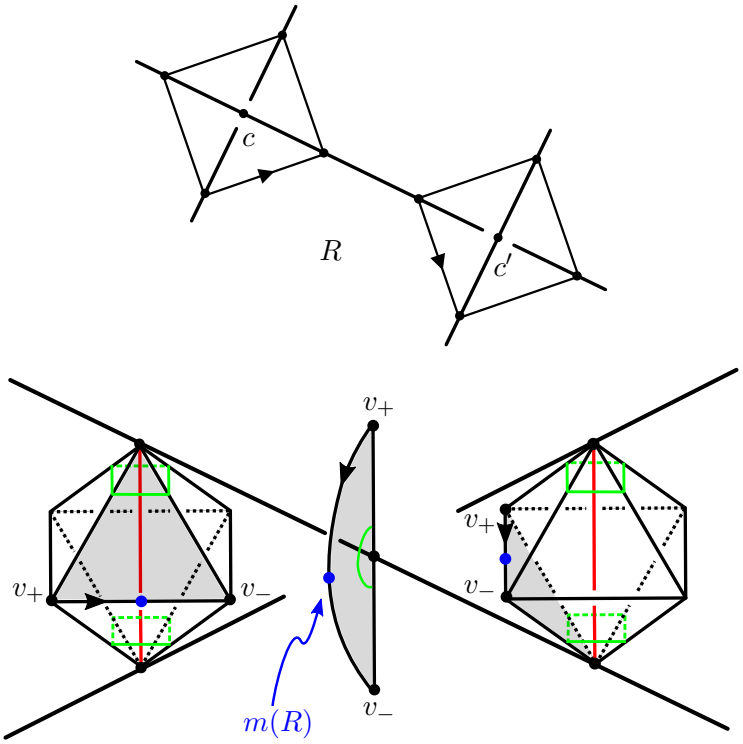


FIGURE 3. 立方复形 $\mathcal{M}$的局部图。 M 中的部分截短八面体经过展开后覆盖整个M。交叉点 c 和 c' 处八面体的阴影面与中央弓形面重合。特别地，这对八面体的水平有向边与弓形面上连接顶点 v_+ 和底点 v_-的有向边重合；该有向边单调延伸，并经过区域 R的中心m（R）。

如下。 D^* 的每个区域都包含D的唯一一个顶点，记作 c。通过取 c 与构成该区域边界的 D^*的边循环的连接，对该区域进行细分（见图5）。这里， $D^* \subset$ 中与区域 R 对偶的顶点 $m^*(R)\mathrm{Lk}(v_\pm, \mathcal{M})$ 对应于 v_ϵ处由测地线 $[v_\epsilon, m(R)]$确定的方向。

注6.2. (1) 在陈述 (2-b) 中，形容词"正交地"意指 $\mathcal{C}$ 的每个内点都有一个邻域 U，位于 $\mathcal{M}$ 中，使得三元组 $(U, U \cap \mathcal{S}_b, U \cap \mathcal{S}_w)$ 与 $(\mathbb{R}^3, 0 \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R} \times 0 \times \mathbb{R})$ 中原点的一个邻域等距。

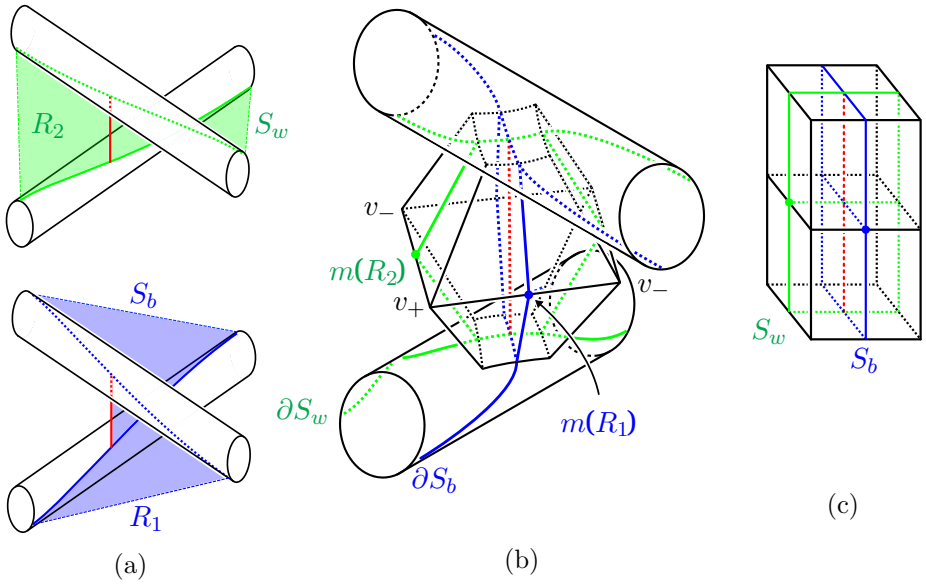


FIGURE 4. 在每个交叉处，(a) S_b 和 S_w 沿交叉弧横截相交，(b) S_b 和 S_w 各自与包含交叉弧的部分截短八面体垂直中间板相交，(c) 每个中间板在这对立方体中确定一对中方形，而这两对中方形沿立方体的垂直轴正交相交。

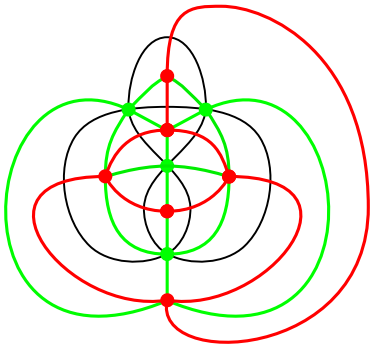


FIGURE 5. 几何链环 Lk(v_ϵ, $\mathcal{M}$)：粗红色图与粗绿色图的并集构成 Lk(v_ϵ, $\mathcal{M}$) 的 1-骨架。

(2) 在陈述 (4) 中，形容词“正交地”意指在 $\mathcal{M}$中，$m(R)$ 有一个 CAT(0)邻域 U，使得对于任意点 $x \in (e(R) \setminus \{m(R)\}) \cap U$和 $y \in ((\mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_w) \setminus \{m(R)\}) \cap U$，都有 $\angle_{m(R)}(x, y) = \pi/2$。

(3) 对于 ∂M 的每个连通分支 T，将 $\mathcal{M}$ 限制到 T 上所得的 $\mathcal{M}|_T$ 给出 T 的一个立方分解，其 1- 骨架是两条经线 ℓ_b 和 ℓ_w 的并，其中 ℓ_b 和 ℓ_w 分别平行于 $S_b \cap T$ 和 $S_w \cap T$。特别地，对于 $\mathcal{M}|_T$ 中的每个正方形 I^2，该正方形的两条对角线中恰有一条投影为子午环（参见图 2(a)）。

(4) 断言 (5) 推出以下关键事实。对于 D 中不同的区域 R_1 和 R_2，距离 $d_{\mathrm{Lk}(v_\epsilon,\mathcal{M})}(m^*(R_1)\ m^*(R_2))$ 根据 R_1 和 R_2 是否相邻，分别为 $\pi/2$ 或 $\geq \pi$。由引理 5.6 可知，这意味着亚历山德罗夫角 $\angle_{v_\epsilon}(m(R_1)\ m(R_2))$ 根据 R_1 和 R_2 是否相邻，等于 $\pi/2$ 或 π。这一事实在命题 7.4 的证明中起着关键作用。

令 $\mathcal{X}$ 为通过沿着 $\partial\mathcal{M}$ 将立方复形 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \partial\mathcal{M} \times [n, n+1]$ 粘到 $\mathcal{M}$ 上得到的立方复形。其底层空间是链环补空间 X，并且有如下关键命题。

命题 6.3。 立方复形 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{X}$ 是完备且非正曲率的。

证明。 根据命题 5.5， $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{X}$ 是完备的。由命题 6.1(5) 给出的 $\mathrm{Lk}(v_\pm, \mathcal{M})$（$= \mathrm{Lk}(v_\pm, \mathcal{X})$）的描述可知，我们可以像 [40, 命题 3.3] 的证明中那样，验证它们是旗复形。对于 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{X}$ 的任意其他顶点 v，我们容易看出， v 分别在 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{X}$ 中的几何链是旗复形。因此，根据格罗莫夫旗判据（命题 5.7）， $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{X}$ 是非正曲率的。□

设 $\mathcal{X}$（分别地， $\mathcal{M}$）为万有覆盖空间 $\tilde{X}$ 的立方分解，它由覆盖映射 $p_u : X \to X$ 将 X（分别地， $\mathcal{M}$ 的 $\tilde{M}$）的立方分解 $\mathcal{X}$ 拉回得到。于是，根据命题 6.3 和 Cartan–Hadamard 定理（命题 5.1）， $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{M}$ 是完备的 CAT(0)立方复形。

与命题 6.1(2)中一样， X 中的开棋盘曲面 S_b 和 S_w 分别同伦等价于 $\mathcal{X}$中的超平面，我们也分别将它们记作 $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$。于是， $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$ 沿着 $\mathcal{C} := \mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$正交相交；$= \mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$是表示开交叉弧的测地线的不交并。设 $\tilde{\mathcal{S}}_b := p_u^{-1}(\mathcal{S}_b)$，以及 $\tilde{\mathcal{S}}_w := p_u^{-1}(\mathcal{S}_w)$。那么， $\tilde{\mathcal{S}}_b$（分别地， $\tilde{\mathcal{S}}_w$）的每个连通分支 Σ 都是 $\mathcal{X}$ 中的一个超平面，并将其视为 $\mathcal{S}_b$（分别地， $\mathcal{S}_w$）的万有覆盖：我们称 Σ 为 $\mathcal{X}$中的一个棋盘超平面 。当然，棋盘超平面是第 3 节中定义的棋盘平面。

命题 6.4. 每个棋盘超平面 Σ 在 *CAT(0)*空间 $\tilde{\mathcal{X}}$中都是凸的。此外， Σ 将 $\mathcal{X}$ 分成两个闭凸子空间，也就是说，存在 $\tilde{\mathcal{X}}$的凸子空间 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^c$，使得 $\mathcal{X} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}^c$ 和 $\Sigma = \mathcal{B} \cap \mathcal{B}^c$。

证明。 这可由 Farley 的结果 [19, 定理 4.4], 得出，该结果受到 Sageev 对 [35] 中超平面的组合研究的启发。另一个证明见 [37, 第 4 节。3]

□

~我们将上述命题中的 $\mathcal{X}$ 的子空间 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}^c$ 称为由棋盘超平面 Σ 界定的棋盘超半空间。当然，每个棋盘超半空间都是第 3 节中定义的棋盘半空间。

我们所证明的外围平面命题，是指用 $\partial[\mathcal{B}]$ 的一个连通分支以很容易地证明该命题。

~**命题 6.5**。在上述设定下，每个外围平面 $H \subset \partial\mathcal{M}$ 在 *CAT(0)*空间 $\mathcal{X}$ 中都是~凸的。

命题 6.4 和 6.5 蕴含如下命题。

~**命题 6.6**。（1）设 Σ_1 和 Σ_2 是 $\mathcal{X}$ 中不同的棋盘格超平面。则以下情况之一成立。

（a） $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$。（b） $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 是一条测地线。此外， Σ_1 与 Σ_2 沿 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 正交相交，其含义如注*6.2(1)*中所定义。此外， $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 将 Σ_1 和 Σ_2 各自分成两个凸子空间。

~(2) 设 Σ 是 $\mathcal{X}$ 中的一个棋盘超平面， H 是一个外围平面。则以下情况之一成立。

(a) $\Sigma \cap H = \emptyset$.(b) $\Sigma \cap H$ 是一条测地线。此外， Σ 与 H 沿着 $\Sigma \cap H$ 正交相交，正如注*6.2(1)*中所定义的那样。此外， $\Sigma \cap H$ 将 Σ 和 H 各自分成两个凸子空间。

证明。除正交关系外，其余断言均由命题 6.4、6.5 以及两个凸集的交集仍为凸集这一事实得出。(1-b)中 Σ_1 与 Σ_2 的正交关系，源于 Σ_1 和 Σ_2 是超平面，因此它们的相对位置如命题 6.1(2)所述，并如图4(c)所示。(2-b)中 Σ 与 H 的正交关系，同理可由命题 6.1(1,2)和图4(c)得出。(1-b)和(2-b)中的附加断言，可通过一个与命题 6.4 的证明类似（但简单得多）的论证得出。□

以下技术推论用于第 9 节。

推论 6.7。设 Σ_1 和 Σ_2 是不同的棋盘格超平面，且 $\ell := \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ 是一条测地线。则以下结论成立。

~(1) 如果 ℓ' 是 $\mathcal{X}$ 中的一条测地线，且满足 $\ell \cap \ell' \neq \emptyset$，那么 $\ell' \subset \ell$ 或 $\ell \cap \ell'$ 是单点集。(2) 如果 ℓ' 是 Σ_i （$i = 1$ 或 2）中的一条测地线，且 $\ell \cap \ell'$ 是内部 ℓ' 中的单点集 $\{y\}$，那么 y 是 ℓ 与 ℓ' 的横截交点，并且 $\ell' \setminus \{y\}$ 的两个分支分别包含在 $\Sigma_i \setminus \ell$ 的不同连通分支中。

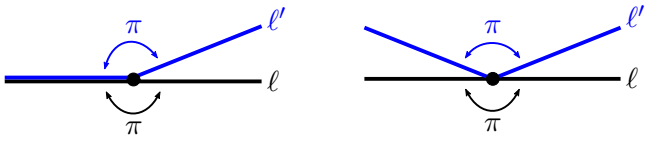


FIGURE 6. 测地线的分叉。尽管测地线在 CAT(0)空间中可能发生分叉，但在欧几里得空间中绝不会发生。

~(3) 设 H 是 $\mathcal{X}$ 中的一个外围超平面，且满足 $\ell \cap H \neq \emptyset$。那么 $\ell \cap H$ 由单个点 w 构成，并且 $\pi_H^{-1}(w) = \ell$，其中 $\pi_H : \tilde{\mathcal{X}} \to H$ 是投影。

证明。 (1) 由于 $\ell \cap \ell'$ 是 ℓ的凸子集， $\ell \cap \ell'$ 要么是单点集，要么是一条非退化测地线（即严格大于单点集的测地线）。如果 $\ell \cap \ell'$ 是一条非退化测地线，那么 ℓ' 必定包含于测地线 ℓ中，因为~ ℓ 中的每个点根据命题 6.6(1-b)和注6.2(1)在 $\mathcal{X}$ 中都有一个欧几里得邻域；并且，在欧几里得空间中，每条测地线都不会发生分叉（见图6(a)）。

(2) 这是因为点 $y \in \ell \subset \Sigma_i$ 在 Σ_i 中有一个欧几里得邻域（由命题 6.6(1-b)和注6.2(1)可知），并且欧几里得平面中的每条测地线都没有分支（见图6(b)）。

(3) 由命题 6.1(1,2)可知， ℓ 与 H 在单个点 w处正交相交，并且 $\ell \subset \pi_H^{-1}$（w）。为证明反向包含，取 π_H^{-1}（w）中的一点z（$\neq w$）。于是， $[z,w]$ 的测地线段在 w~处与 H 正交（参见引理5.3）。由于根据命题 6.6(2-b)， w 在 $\mathcal{X}$ 中有一个欧几里得邻域，因此 $[z,w]$ 中 w 的一个小邻域包含于 ℓ。因此，根据断言(1)，$[z,w] \subset \ell$。于是 $z \in \ell$，从而 π_H^{-1}（w）$= \ell$。□

以下引理将在第 8 节和第 9 节中使用。

~**引理 6.8**。 设 Σ_1 和 Σ_2 是 $\mathcal{X}$ 中不相交的棋盘格超平面。则 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$~ 将 $\mathcal{X}$ 分成三个凸子空间。具体而言，存在三个闭凸子空间 $\mathcal{B}_1$、 $\mathcal{B}_{1,\,2}$ 和 $\mathcal{B}_2$，使得

$$\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{1,2} \cup \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{1,2} = \Sigma_1, \quad \mathcal{B}_{1,2} \cap \mathcal{B}_2 = \Sigma_2, \quad \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset.$$

证明。 根据命题 6.4，存在闭凸子空间 $\mathcal{B}_i$ and $\mathcal{B}_i^{\mathsf{c}}$，使得

~ ~$\mathcal{X} = \mathcal{B}_i \cup \mathcal{B}_i^{\mathsf{c}}$且 $\Sigma_i = \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_i^{\mathsf{c}} (i = 1,$ 2)。由于 $\Sigma_1 \subset \mathcal{X} \setminus \Sigma_2 = \operatorname{int} \mathcal{B}_2 \sqcup \operatorname{int} \mathcal{B}_2^{\mathsf{c}}$，我们可以假设 $\Sigma_1 \subset \operatorname{int} \mathcal{B}_2^{\mathsf{c}}$且 $\Sigma_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$。类似地，我们可以假设 $\Sigma_2 \subset \operatorname{int} \mathcal{B}_1^{\mathsf{c}}$且 $\Sigma_2 \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset$。于是 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$与 $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial \mathcal{B}_1 \cup \partial \mathcal{B}_2$不相交，因此$\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \operatorname{int} \mathcal{B}_1 \cap \operatorname{int} \mathcal{B}_2$。所以 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$是 $\mathcal{X}$的一个既闭又开的真子集。由于 ~ $\mathcal{X}$连通，这意味着 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$。因此，令 $\mathcal{B}_{1,\,2} := \mathcal{B}_1^{\mathsf{c}} \cap \mathcal{B}_2^{\mathsf{c}}$，即可得到所需结果。□

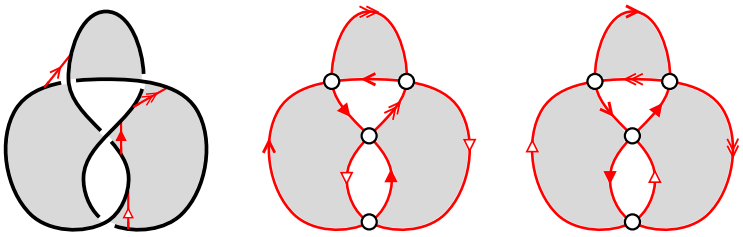


FIGURE 7. 将八字结补空间分解为一对棋盘理想多面体：阴影区域为黑色区域，未着色区域为白色区域。

7. DECOMPOSITIONS OF ALTERNATING LINK COMPLEMENTS INTO CHECKERBOARD IDEAL POLYHEDRA

我们回顾 Thurston [47], 、Menasco [27], 、Takahashi [44] 等人关于素交替链环 L 的补空间 X的（拓扑）理想多面体分解，该分解与其素交替图 D相关，并遵循 Aitchison-Rubinstein [7] 的描述（另见 [34,定理 11.6]）。

将素交替图 D 视为三维球 B^3边界上的一个四价图。于是，$(B^3,\ D)$ 被视为一个（拓扑）多面体（参见 [34,定义 1.1]）。从 $(B^3,\ D)$ 中去掉顶点后，我们得到一个（拓扑）理想多面体，记作 P(D)。 D 的每个区域 R 确定 P(D) 的一个（理想）面 $\check{}R := R \setminus \{\text{顶点}\}$，而 D的每条边 e确定 P(D) 的一条（理想）边 $\check{}e :=$ 内部 e。准备两个互不相交的 P(D) 副本 P+(D) 和 P_(D)，并按以下“齿轮规则”将它们粘合起来：对于 D的每个区域 R，将 P+(D) 的面 $\check{}R$ 与 P_(D) 的面 $\check{}R$ 按顺时针或逆时针方向旋转一条边后识别，具体方向取决于 R 是黑色还是白色（见图7）。（这里，我们采用图4(a)中的约定：黑色（分别为白色）曲面中的扭带为左手（分别为右手）。）

命题 7.1。 在上述设定下，所得空间自然同胚于 X L的补空间。此外，还满足以下条件。

(1) $P_{\pm}(D)$的一条边在 X 中的像是一条开交叉弧。此外，每条交叉弧在每个 $P_{\pm}(D)$中的原像由两条边组成。*(2)* 若 R 是 D的一个黑色区域，则 $P_{\pm}(D)$的面 $\check{}R$ 在 X 中的像等于 $S_b \setminus (S_b \cap S_w)$中与 R对应的连通分支的闭包。当 R 是一个白色区域时，也有相应的结论。*(3)* 对每个 $\epsilon \in \{+,-\}$，$P_\epsilon(D)$在 X 中的像等于 $X \setminus (S_b \cup S_w)$中包含点 v_ϵ的连通分支的闭包。

尽管从 $\mathrm{P}_{\pm}(D)$到 X 的自然映射在1-骨架上不是单射，˜但它们提升到万有覆盖 X 后，都是到其像上的同胚，而每个像都等于 $\tilde{X} \setminus p_u^{-1}(S_b \cup S_w)$的一个连通分支的闭包。因此，我们得到 $\tilde{X}$ 的一个镶嵌，它由 $\mathrm{P}_+(D)$和 $\mathrm{P}_-(D)$的副本组成，其中墙是 $p_u^{-1}(S_b \cup S_w)$，即所有棋盘平面的并集。

通过在 X 的非正曲率立方分解 $\mathcal{X}$ 以及 X 的 CAT(0)立方分解 $\mathcal{X}$ 中进行研究，我们可以将上述拓扑图景细化为下文所阐述的几何图景。

回忆一下， X 中的开棋盘曲面 S_b 和 S_w 同伦等价于非正曲率立方复形 $\mathcal{X}$ 中的超平面 $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$。它们沿着 $\mathcal{C} = \mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$ 正交相交； $\mathcal{C} = \mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$ 是表示开交叉弧的测地线的不交并。并集 $\mathcal{S}_{bw} := \mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_w$ 将 $\mathcal{X}$ 分成两个连通分支。我们分别将 $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}_{bw}$ 中包含顶点 v_+ 和 v_- 的连通分支的闭包记为 $\mathcal{P}_+$ 和 $\mathcal{P}_-$。那么， $\mathcal{P}_{\pm}$ 自然同胚于 $\mathrm{P}_{\pm}(D)$ 在 X 中的像。

在万有覆盖 $\tilde{\mathcal{X}}$ 中， $\tilde{\mathcal{S}}_b = p_u^{-1}(\mathcal{S}_b)$ 和 $\tilde{\mathcal{S}}_w = p_u^{-1}(\mathcal{S}_w)$ 都是棋盘格超平面的不交并，并且沿着 $\mathcal{C} :=$ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜ ˜ $\mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$ 正交相交。所有棋盘格超平面的并集 $\mathcal{S}_{bw} = \mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_w$ 将 $\mathcal{X}$ 分割成无穷多个“直角立方理想多面体”，由此得到以下命题。

˜ ˜ ˜**命题 7.2.** 设 $\mathcal{P}_\epsilon$ 为 $\mathcal{X} \setminus \mathcal{S}_{bw}$ 的一个连通分支的闭包，该连通分支投影˜到 $\mathcal{P}_\epsilon \subset \mathcal{X}(\epsilon \in \{+,-\})$。那么 $\mathcal{P}_\epsilon$ 自然具有一个（拓扑）理想˜多面体结构，相对于该结构，存在一个同构 $\varphi_\epsilon : \mathrm{P}(D) \to \mathcal{P}_\epsilon$，满足以下条件。

˜(1) </style}对于 的每个区域，都存在一个棋盘超平面 $(\mathcal{P}_\epsilon)$，满足以下条件。(a) $\varphi_\epsilon(\breve{}R) = \partial\tilde{\mathcal{P}}_\epsilon \cap \Sigma_R$。(b)若 R 是黑色区域，则 $p_u(\Sigma_R) = \mathcal{S}_b$，且普适覆盖投影 $p_u|_{\Sigma_R} : \Sigma_R \to \mathcal{S}_b$ 在面 $\varphi_\epsilon(\breve{}R)$ 上的限制，是到与 $\mathcal{S}_b \backslash \mathcal{C}$ 对应的连通分支的闭包上的同胚。若 R 是白色区域，也有相应的平行结论。

˜(2) 对于 D 的每个区域 R，令 $\mathcal{B}^{\mathfrak{c}}_R = \mathcal{B}^{\mathfrak{c}}_R(\mathcal{P}_\epsilon)$ 为由 Σ_R 围成且包含 $\mathcal{P}_\epsilon$ 的棋盘格超半˜ ˜空间。那么 $\mathcal{P}_\epsilon = \bigcap_R \mathcal{B}^{\mathfrak{c}}_R$，其中 R 遍历 D的各个区域。特别地， $\mathcal{P}_\epsilon$ 在 *CAT(0)*空间 $\mathcal{X}$ 中是凸的。

(3) 令 e 为 D 的一条边，并令 R_1 和 R_2 为共享 e 的 D 的区域。那么，两个面 $\varphi_\epsilon(\breve{}R_1)$ 和 $\varphi_\epsilon(\breve{}R_2)$ 沿边 $\varphi_\epsilon(\breve{}e)$正交相交。边 $\varphi_\epsilon(\breve{}e)$ 投影到 $\mathcal{X}$ 中的一条测地线，表示一条开交叉弧。

此外， φ_+ 和 φ_- 之间的关系如下所述。注意，对于 D的每个区域 R，($p_u \circ \varphi_\pm)|_{\breve{}R}$是具有相同像的同胚，因此复合映射

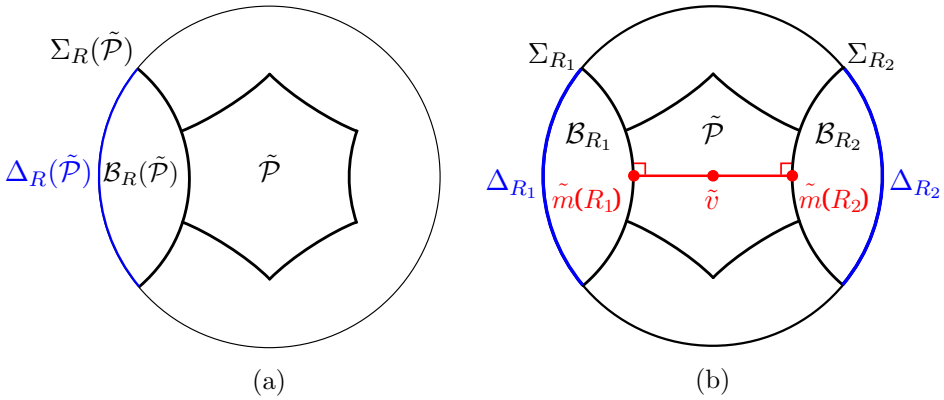


FIGURE 8. (a) $\mathcal{B}_R(\mathcal{P})$ 是 $\tilde{\mathcal{X}}$ 中由超平面 $\Sigma_R(\mathcal{P})$ 界定的棋盘超半空间，它与 $\operatorname{int}\mathcal{P}$ 不相交（这幅二维图没有体现 $\mathcal{P}$ 是一个理想多面体这一事实。）(b) 如果 R_1 和 R_2 不相邻，那么 $\angle_{\tilde{v}}(\tilde{m}(R_1)\ \tilde{m}(R_2)) = \pi$，因此 $[\tilde{m}(R_1)\ \tilde{v}] \cup [\tilde{v}, \tilde{m}(R_2)]$ 是 Σ_{R_1} 和 Σ_{R_2} 的一条公垂线。这意味着 $\mathcal{B}_{R_1}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}_{R_2}(\mathcal{P}) = \emptyset$。

$(p_u \circ \varphi_-)|_{\check{R}} \circ (p_u \circ \varphi_+)|_{\check{R}}^{-1}$ 是理想多边形 $\check{R}$ 的良定义自同构。根据 R 为黑色还是白色，这个自同构分别沿顺时针方向或逆时针方向旋转一条边。

通过在命题 6.1 的背景下考察命题 7.1，便可得到该命题。(2) 中 $\mathcal{P}_\epsilon$ 的凸性是命题 6.4 的结果。

定义与记号 7.3。我们称 $\mathcal{P}_\epsilon$ 中的一个棋盘格理想多面体为 $\mathcal{X}$。包含于 $\tilde{\mathcal{P}}_\epsilon$ 中的唯一一点 $\tilde{v}_\epsilon \in p_u^{-1}(v_\epsilon)$ 称为 $\tilde{\mathcal{P}}_\epsilon$ 的中心。当不考虑符号 ϵ 时，我们将其从记号中省略，例如 $\mathcal{P}_\epsilon$ 和 φ_ϵ。对于一个固定的棋盘格理想多面体 $\mathcal{P}$ 以及 D 的一个区域 R，我们使用以下术语和记号。

(1) $\varphi(\check{R})$ 的面称为 $\tilde{\mathcal{P}}$ 的面 R 的 $\tilde{\mathcal{P}}$。(2) 面 R 的中心 $\tilde{m}(R)$ 定义如下。根据命题 7.2(1-b)，p_u 确定了一个从 $\varphi(\check{R})$ 到包含中心 $m(R)$ 的 $\mathcal{S}_{bw} \setminus \mathcal{C}$ 连通分支闭包的同胚。于是，$\tilde{m}(R) \in \varphi(\check{R})$ 是 $m(R)$ 的原像。

(3) $\Sigma_R = \Sigma_R(\mathcal{P})$ 表示 $\tilde{\mathcal{X}}$ 中包含 $\mathcal{P}$ 的面 R 的棋盘超平面。

(4) $\mathcal{B}_R = \mathcal{B}_R(\mathcal{P})$ 和 $\mathcal{B}^{\mathsf{c}}_R = \mathcal{B}^{\mathsf{c}}_R(\mathcal{P})$ 表示 $\mathcal{X}$ 中由 $\Sigma_R(\mathcal{P})$ 围成的棋盘式超半空间，使得 $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}^{\mathsf{c}}_R(\mathcal{P})$ 和 $\mathcal{B}_R(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}^{\mathsf{c}}_R(\mathcal{P}) = \Sigma_R(\mathcal{P})$（见图 8(a)）。

于是得到以下命题，它在定理 1.2 的证明中起着关键作用。

命题 7.4. 设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ 是一个棋盘格理想多面体，R_1 和 R_2 是 D的不同区域。那么，当且仅当 R_1 和 R_2 不相邻时，$\mathcal{B}_{R_1} = \mathcal{B}_{R_1}(\mathcal{P})$ 与 $\mathcal{B}_{R_1} = \mathcal{B}_{R_2}(\mathcal{P})$ 不相交。

证明。设 $\tilde{v}$ 为 $\mathcal{P}$的中心，$\tilde{m}(R_i)$ 为 $\mathcal{P}$ ($i =$ 1, 2)的面 R_i 的中心。根据命题 6.1(4)（参见注 6.2(2)）和注 5.2，测地线段 $[\tilde{v}, \tilde{m}(R_i)]$ 垂直于 $\Sigma_{R_i} = \Sigma_{R_i}(\mathcal{P})$。注意，存在一个自然的同构 $\mathrm{Lk}(\tilde{v}, \mathcal{X}) \cong \mathrm{Lk}(v, \mathcal{M})$, 其中 $v = p_u(\tilde{v})$。因此，根据注 6.2(4)，$\angle_{\tilde{v}}(\tilde{m}(R_1)\ \tilde{m}(R_2))$等于 $\pi/2$ 或 π，具体取决于 R_1 和 R_2 是否相邻。于是，若 R_1 和 R_2 不相邻，则 $[\tilde{m}(R_1)\ \tilde{v}] \cup [\tilde{v}, \tilde{m}(R_2)]$ 是一条测地线，在其端点处垂直于棋盘格超平面 Σ_{R_1} 和Σ_{R_2}。（事实上，根据 [16, 注 I.5.7 和定理 I.7.39]，它是一条局部测地线，因此根据 [16, 命题 II.1.4(2)]，它也是一条测地线。）于是，根据引理 5.4，它是这两个超平面之间的最短路径，特别地，Σ_{R_1} 和 Σ_{R_2} 互相不相交。根据引理 6.8，$\Sigma_{R_1} \cup \Sigma_{R_2}$ 将 $\mathcal{X}$ 分成三个闭凸子空间$\mathcal{B}_1$、$\mathcal{B}_1$,2 和 $\mathcal{B}_2$，它们满足引理中的条件。由于 $\mathcal{P}$ 同时与Σ_{R_1} 和Σ_{R_2}相交，因此有$\mathcal{P} \subset \mathcal{B}_1$,2。这意味着 $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{R_i}$ ($i = 1, 2$)。因此，$\mathcal{B}_{R_1}$和 $\mathcal{B}_{R_2}$ 不相交（见图 8(b)）。

另一方面，如果区域 R_1 和 R_2 在 D 中相邻，那么 $\mathcal{P}$ 的面 R_1 和 R_2 相邻。因此，$\Sigma_{R_1} \cap \Sigma_{R_2}$ 是一条测地线（参见命题 6.6(1)），从而 $\mathcal{B}_{R_1}$ 和 $\mathcal{B}_{R_2}$ 不互不相交。□

在本节末尾，我们注意到以下观察（见图 9），该观察将在第 9 节中使用。

引理 *7.5.* 设 D 的 R_w 是一个白色区域，D 的 $R_{b,i}$ $(1 \le i \le n)$ 是与 R_w 相邻的黑色区域，并且相对于 ∂R_w 的逆时针方向，它们围绕 R_w 按此循环顺序排列。设 $\mathcal{P}_\pm \subset \mathcal{X}$ 是棋盘理想多面体，使得 $\mathcal{P}_+ \cap \mathcal{P}_-$ 是 $\mathcal{P}_+$ 和 $\mathcal{P}_-$ 的公共面 R_w。则有 $\Sigma_{R_{b,i}}(\mathcal{P}_+) = \Sigma_{R_{b,i+1}}(\mathcal{P}_-)$ 以及 $\mathcal{B}_{R_{b,i}}(\mathcal{P}_+) = \mathcal{B}_{R_{b,i+1}}(\mathcal{P}_-)$，其中索引 i 按模 n 计算。当黑色和白色互换时，类似的断言同样成立。

证明。对于 $\epsilon \in \{+, -\}$，令 φ_ϵ 为从 $\mathsf{P}(D)$ 到棋盘格理想多面体 $\tilde{\mathcal{P}}_\epsilon$ 的同构。根据假设，有 $\varphi_+(R_w) = \varphi_-(R_w)$。考虑 D 的边 $e_i := R_w \cap R_{b,i}$。由命题 7.2 的最后一个断言可知，$\varphi_+(e_i) = \varphi_-(e_{i+1})$，且它是面 $\varphi_+(R_{b,i})$ 和

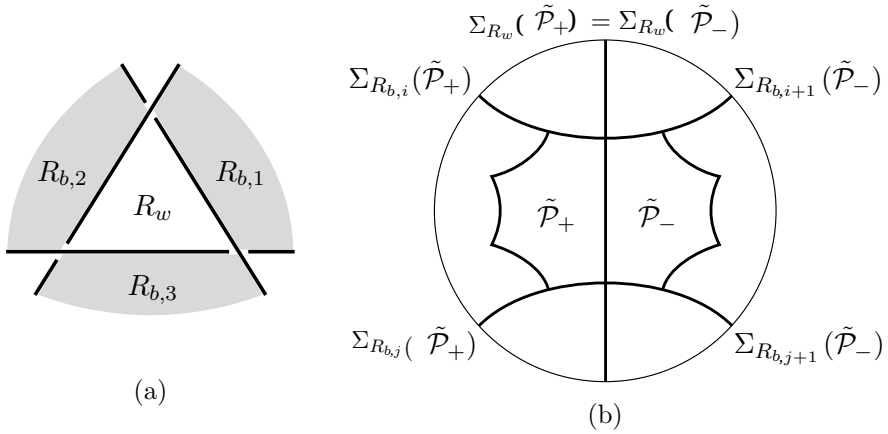


FIGURE 9. 棋盘多面体 $\mathcal{P}_+$ 和 $\mathcal{P}_-$ 共享一个面，该面包含在棋盘超平面 $\Sigma_{R_w}(\mathcal{P}_+) = \Sigma_{R_w}(\mathcal{P}_-)$中。于是 $\Sigma_{R_{b,i}}(\mathcal{P}_+) = \Sigma_{R_{b,i+1}}(\mathcal{P}_-)$。

$\varphi_-(\check{R}_{b,i+1})$。由于 $\tilde{\mathcal{P}}_\pm$ 是直角立方多面体（参见命题7.2(3)），这意味着这两个面包含在同一个棋盘超平面中，该超平面等于 $\Sigma_{R_{b,i}}(\mathcal{P}_+) = \Sigma_{R_{b,i+1}}(\mathcal{P}_-)$。由于 $\mathcal{P}_+$ 和 $\mathcal{P}_-$ 共享公共面 $\varphi_+(\check{R}_w) = \varphi_-(\check{R}_w)$，因此还有 $\mathcal{B}_{R_{b,i}}(\tilde{\mathcal{P}}_+) = \mathcal{B}_{R_{b,i+1}}(\tilde{\mathcal{P}}_-)$。□

8. Butterflies and checkerboard ideal polyhedra

给定素交替图 D 的双曲交替链环 L 的补空间 X 具有以下两种不同的几何结构：

- 完备双曲流形 $\mathbb{H}^3/G$；以及 - 由 L 的素交替图 D 构造的非正曲率立方复形 $\mathcal{X}$ 的底层空间。

我们固定同胚

$$(X, M) \cong (\mathbb{H}^3/G, (\mathbb{H}^3 \setminus \mathcal{Q})/G) \cong (|\mathcal{X}|, |\mathcal{M}|),$$

并通过这些同胚识别相关空间。这里，$\mathcal{Q}$ 是由第 4 节（引理 4.2 后的段落）引入的 horosphere $\{H_p\}_{p\in \text{P\_Fix}(G)}$ 所围成的开 horoball 的不交并。这一识别诱导出以下 G-等变的万有覆盖空间识别：

$$(\tilde{X}, \tilde{M}) = (\mathbb{H}^3, \mathbb{H}^3 \setminus \mathcal{Q}) = (|\tilde{\mathcal{X}}|, |\tilde{\mathcal{M}}|).$$

特别地，每个 horosphere $H_p \subset \mathbb{H}^3$ 都被视为包含在 $\partial\mathcal{M}$ 中的外围平面，其中 $\partial\mathcal{M}$ 是 CAT(0)空间 $\mathcal{X}$；因此我们称其为以 p 为中心的外围平面。

我们还假设，双曲流形 $X = \mathbb{H}^3/G$ （参见第3节和第4节）中的拟福克斯棋盘曲面 S_b 和 S_w 分别是非正曲率立方复形 $\mathcal{S}_b$ 和 $\mathcal{S}_w$中的超平面，

（参见第6节和第7节）。因此，每个棋盘平面 $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ 都是 CAT(0)˜立方复形 $\mathcal{X}$ 中的棋盘超平面。

对于一个棋盘格理想多面体 $\tilde{\mathcal{P}} \subset \tilde{\mathcal{X}} = \mathbb{H}^3$，令 ˆ $\mathcal{P}$ 为 $\tilde{\mathcal{P}}$ 在 $\bar{\mathbb{H}}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \hat{\mathbb{C}}$ 中的闭包。那么，同构 $\varphi : \mathrm{P}(D) \to \tilde{\mathcal{P}}$ （拓扑理想多面体之间）可延拓为同构 ˆ$\varphi : (B^3, D) \to \hat{\mathcal{P}}$ （拓扑˜ ˜多面体之间），因为 $X \setminus M$ 与以 PFix(G) 中各点为中心的开 horoball$\mathcal{Q}$ 的不相交族相对应。对于 D 的每个顶点 c，理想点 p:= ˆ$\varphi(c)$˜ 属于 PFix(G)，我们称 p 为与 c 相对应的 $\mathcal{P}$ 理想顶点。我们也称 c 为与理想顶点 p 相对应的 D 顶点，该理想顶点属于 $\mathcal{P}$。

我们沿用定义与记号 7.3 中对 CAT(0) cubed˜ 复形 $\mathcal{X}$ 内对象的记号，为双曲空间闭包 $\bar{\mathbb{H}}^3$ 中的对象引入以下记号（参见图 8(a)）。

˜ ˜**记号8.1**。设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ 是一个棋盘格理想多面体， R 是图 D的一个区域。

(1) $\bar{\Sigma}_R = \bar{\Sigma}_R(\tilde{\mathcal{P}})$表示在 $\bar{\mathbb{H}}^3$ 中正常嵌入的棋盘圆盘，它是 $\Sigma_R(\tilde{\mathcal{P}}) \subset \tilde{\mathcal{X}} = \mathbb{H}^3$的闭包。(2) $\bar{\mathcal{B}}_R = \bar{\mathcal{B}}_R(\tilde{\mathcal{P}})$和 $\bar{\mathcal{B}}^c_R = \bar{\mathcal{B}}^c_R(\tilde{\mathcal{P}})$表示 $\bar{\mathbb{H}}^3$ 中的两个三维球，它们分别是棋盘超半空间 $\mathcal{B}_R(\mathcal{P})$和 $\mathcal{B}^c_R(\mathcal{P})$的˜ ˜闭包。注意，
˜ ¯ ˜ ¯ ˜ ¯ ˜ ¯ ˜$\mathcal{P} \subset \mathcal{B}^c_R(\mathcal{P})$和 $\mathcal{B}_R(\mathcal{P}) \cap \mathcal{B}^c_R(\mathcal{P}) = \Sigma_R(\mathcal{P})$。
˜ ˆ˜ ¯ ˜ ˆ (3) $\Delta_R(\mathcal{P})$表示 $\mathbb{C}$ 中的圆盘，由 $\Delta_R(\mathcal{P}) := \mathcal{B}_R(\mathcal{P}) \cap \mathbb{C}$定义。

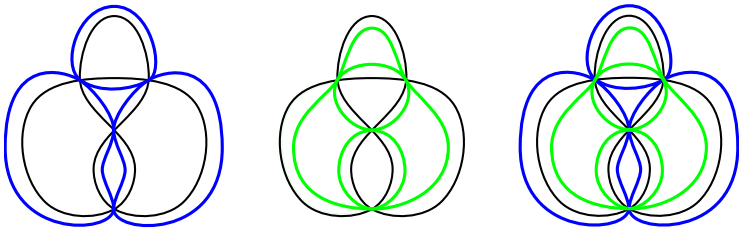
于是我们得到如下引理。

˜ ˜**引理 8.2**。设 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_2$ 是棋盘理想多面体，且 R_1 和 R_2 是 D的区域。如果 $\mathbb{H}^3$ 中的棋盘超半空间 $\mathcal{B}_{R_1}(\tilde{\mathcal{P}}_1)$ 和 $\mathcal{B}_{R_2}(\tilde{\mathcal{P}}_2)$ ˜ ˜ ˆ不相交，那么圆盘 $\Delta_{R_1}(\mathcal{P}_1)$ 和 $\Delta_{R_2}(\mathcal{P}_2)$ 在 $\mathbb{C}$中的内部不相交。

证明。根据推论 3.2，具有 $\mathcal{B}_{R_i} = \mathcal{B}_{R_i}(\tilde{\mathcal{P}}_i)$ 的对 $(\bar{\mathbb{H}}^3, \bar{\mathcal{B}}_{R_i})$ 同胚于单位三维球 B^3 在 $\mathbb{R}^3$ 中的标准对 (B^3, B^3_+) 以及闭上半球 $B^3_+ = \{(x, y, z) \in B^3 \mid z \geq 0\}$ $(i = 1, 2)$。因此，点 $x \in \hat{\mathbb{C}}$属于 $\Delta_{R_i} := \Delta_{R_i}(\tilde{\mathcal{P}}_i)$ 的内部，当且仅当存在 U 的一个邻域，使其在 $\bar{\mathbb{H}}^3$中包含 x，且 $U \cap \mathbb{H}^3 \subset \mathcal{B}_{R_i}$ $(i = 1, 2)$。所以， x 属于 int $\Delta_{R_1} \cap$ int Δ_{R_2}，当且仅当存在 U 的一个邻域，使其在 $\bar{\mathbb{H}}^3$ 中包含 x，且 $U \cap \mathbb{H}^3 \subset \mathcal{B}_{R_1} \cap \mathcal{B}_{R_2}$。因此，如果$\mathcal{B}_{R_1} \cap \mathcal{B}_{R_2} = \emptyset$，则 int $\Delta_{R_1} \cap$ int $\Delta_{R_2} = \emptyset$。□

命题 7.4 与引理 8.2 一起推出以下命题，该命题在定理2.1的证明中起着关键作用。

˜ ˜**命题8.3**。设 $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$ 是一个棋盘格理想多面体，且 R_1 和 R_2 ˜ ˜是 D 的不同区域。若 R_1 和 R_2 不相邻，则 $\Delta_{R_1}(\mathcal{P})$ 与 $\Delta_{R_2}(\mathcal{P})$ˆ在 $\mathbb{C}$ 中有不相交的内部。



(a) (b) (c)

FIGURE 10. 在图 D的每个区域 R 周围画一个圆 C_R，使得 C_R 界定一个包含 R 的圆盘，并穿过 ∂R上的顶点。图（a）和（b）分别展示了圆 $\{C_R\}$，其中 R分别遍历黑色或白色区域。将这两幅图叠加后，我们得到图（c）。根据 [3], ，图（c）“展示”了极限圆$\{\partial_\infty$（Σ_R（$\mathcal{P}$））的交叉模式，其中 R 遍历 D的区域。

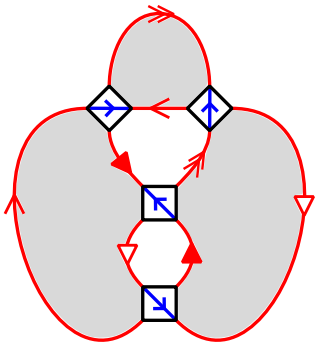


FIGURE 11. 棋盘格理想多面体 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_+$的截断 $\mathcal{P}_0$。正方形中的蓝色对角弧投影为子午线。

注记8.4。引理 8.2 和命题8.3的逆命题也成立。实际上，命题8.3只反映了 Agol的幻灯片 [3], 中一个非常有趣的论述的一小部分，我们将其解读如下。Aitchison 和 Rubinstein（参见 [6]）研究了 CAT(0)空间的理想边界 $\partial_\infty\mathcal{X}$ 上棋盘格超平面 $\{\partial_\infty\Sigma\}$ 的极限圆的交叉模式：在 D 的每个区域 周围画一个圆，那么极限圆 $\{\partial_\infty(\Sigma_R(\mathcal{P}))\}_R$ 在 $\partial_\infty\mathcal{X}$ 中“具有这种交叉模式”（见图10）。我们希望在后续论文中对这一论述作出更详细的解释。

在定理2.1的证明中，反复用到以下关于蝴蝶的刻画。

引理 8.5. 设 $p \in \mathrm{PFix}(G)$ 是一个抛物不动点，$\mathcal{P}$ 是一个以 p 为理想顶点的理想棋盘多面体。设 c 是 D 中对应于 p的顶点，$\{R^-, R^+\}$ 是一对包含 c 且颜色相同的区域。那么，如有必要，将 $R^{\pm}$ 替换为 $R^{\mp}$ 后，这对 $\{\Delta_{R^-}(\tilde{\mathcal{P}})\ \Delta_{R^+}(\tilde{\mathcal{P}})\}$ 便在 p 处构成一个蝴蝶 $\mathrm{BF}(p)$（见记号4.10）。反过来，每个蝴蝶都能以这种方式得到。

证明。考虑沿外围平面 $\{H_p\}$ 截断 $\mathcal{P}$ 后得到的紧致直角多面体 $\mathcal{P}_0$（见图 11）。于是，对于 $\mathcal{P}$ 的每个理想顶点 p，交集 $\mathcal{P}\cap H_p$ 在 $\partial\mathcal{P}_0$ 中形成一个正方形，其中一条对角线投影为一条子午线（见图 11）。利用这一事实，我们可以看到，子午线 $\mu_p \in G$ 将棋盘超平面 $\Sigma_{R^-}(\mathcal{P})$ 映射到棋盘超平面 $\Sigma_{R^+}(\tilde{\mathcal{P}})$；必要时可用 $R^{\mp}$ 替换 $R^{\pm}$。我们还可以看到 μ_p 将球对 $(\mathcal{B}_{R^-}(\mathcal{P})\ \mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{R^-}(\mathcal{P}))$ 映射到球对 $(\mathcal{B}^{\mathrm{c}}_{R^+}(\mathcal{P})\ \mathcal{B}_{R^+}(\mathcal{P}))$。这意味着 $\{\Delta_{R^-}(\mathcal{P})\ \Delta_{R^+}(\mathcal{P})\}$ 是 p 处的一个蝴蝶。

为证明逆命题，设 $\mathrm{BF}(p) = \{\Delta_j^-, \Delta_{j+1}^+\} = \{\Delta_j^-(p)\ \Delta_{j+1}^+(p)\}$ 是一个蝴蝶，其中采用定义 4.6 中的记号。考虑外围平面（或 horosphere）$H_p \subset p_u^{-1}(\partial\mathcal{M})$中的无限条带，它由直线 $\ell_j(p) = \Sigma_j(p) \cap H_p$和 $\ell_{j+1}(p) = \Sigma_{j+1}(p)\cap H_p$ 围成（见图 2）。设 $\mathcal{P}$ 是一个棋盘格理想多面体，其一个理想顶点为 p，且 $\mathcal{P}\cap H_p$ 是包含在该条带中的正方形。那么，D 中存在区域 R^- 和 R^+，它们包含与 $\mathcal{P}$的理想顶点相对应的 D 的顶点 c，使得 $\Sigma_j(p) = \Sigma_{R^-}(\mathcal{P})$且 $\Sigma_{j+1}(p) = \Sigma_{R^+}(\mathcal{P})$。由此可得 $\mathrm{BF}(p) = \{\Delta_j^-, \Delta_{j+1}^+\} = \{\Delta_{R^-}(\tilde{\mathcal{P}})\ \Delta_{R^+}(\tilde{\mathcal{P}})\}$。□

在本小节末尾，我们证明以下关于双曲交替链环的素交替图的初等引理，该引理将在第 9 节中使用。

引理 8.6。设 D 是双曲交替链环 $L \subset S^3$ 的一个素交替图。则有以下结论。

(1) D 至少有三个黑色区域。(2) 假设 D 恰有三个黑色区域。则存在一个白色区域 R_w，使得 R_w 是一个二边形，且与 R_w 相邻的黑色区域彼此不同（准确地说，包含 R_w 的两条边之一的黑色区域彼此不同）。(3) 假设 D 恰有四个黑色区域。则存在一个白色区域 R_w，使得以下情况之一成立：***(a)*** R_w 是一个二边形，且与 R_w 相邻的黑色区域彼此不同；或 ***(b)*** R_w 是一个 3 边形，且与 R_w 相邻的黑色区域均彼此不同。

交换黑色和白色后，相应的陈述同样成立。

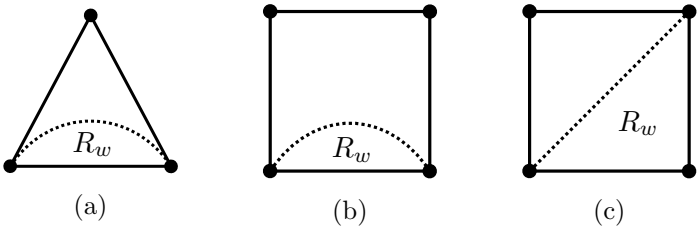


FIGURE 12. 对偶于黑色区域的平面图。 $\mathcal{G}$ 的补区域 R_w 确定了所需的白色区域 R_w。

证明。 令 $\mathcal{G}$ 为一个平面图，其顶点为黑色区域，边对应于交叉点。注意， $\mathcal{G}$ 是连通的，且既没有环边，也没有割边，因为图 D 是连通的且为素图。

(1) 利用上述观察，我们看到 D 至少有两个黑色区域。如果 D 只有两个黑色区域，那么 L 就是$(2, \pm n)$-环面链，其中 n 是 $\mathcal{G}$的边数，这与假设矛盾。因此， D 至少有三个黑色区域。

(2) 假设 D 恰好有三个黑色区域。那么，利用上述观察，我们看到 $\mathcal{G}$ 有一个3-圈。如果 $\mathcal{G}$ 等于该3-圈，那么 L 就是$(2, \pm 3)$-环面结，这与假设矛盾。因此，存在一条额外的边，所以 $\mathcal{G}$ 有重边。于是我们看到，由最内侧的一对重边确定的白色区域 R_w满足所需条件（见图12(a)）。

(3) 假设 D 恰有四个黑色区域。那么，与 (2) 中一样，我们看到 $\mathcal{G}$ 有一个 4-环。由于 L是双曲的， $\mathcal{G}$ 严格大于这个 4-环。因此，我们看到 $\mathcal{G}$ 的某个补区域是二边形或三角形。于是，由补二边形或三角形确定的白色区域 R_w满足所需条件 (a) 或 (b)，视具体情况而定（见图12 (b,c)）。□

9. PROOF OF THEOREM 2.1 AND 2.2

本节先证明定理2.2，然后证明定理2.1。

定理*2.2*的证明。设 L、 D、 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 和 γ 如定理的设定所述，并令 $\{p_1, p_2\}$ 为与 $\{\mu_1, \mu_2\}$对应的一对抛物不动点（参见引理 4.9(1)）。我们将 γ 视为处于非正曲率立方复形 $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$中。于是， γ 在万有覆盖 $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$ 中的一个提升 $\tilde{\gamma}$ 连接外围平面 H_{p_1} 和 H_{p_2} ，它们的中心分别为 p_1 和 p_2（参见引理 4.9(2)）。我们可以假设 $\tilde{\gamma}$ 满足以下条件。

(A1) $\tilde{\gamma}$ 是一条正常嵌入于 $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$、与 $\mathcal{C} = \mathcal{S}_b \cap \mathcal{S}_w$ 不相交且与 $\mathcal{S}_{bw} = \mathcal{S}_b \cup \mathcal{S}_w$横截的弧。此外，对于 $i = 1,2$，端点$x_i := \partial\tilde{\gamma} \cap H_{p_i}$与直线族 $\mathcal{S}_{bw} \cap H_{p_i}$不相交（见图 2(a)）。

˜ ˜ ˜(A2) $\tilde{\gamma} \cap \mathcal{S}_{bw} = \tilde{\gamma} \cap (\mathcal{S}_{bw} \setminus \mathcal{C})$的基数 $\iota(\tilde{\gamma})$在所有正常嵌入于 $\mathcal{M}$ 、连接$\mathcal{M}$ 的边界分支 H_{p_1} 和 H_{p_2} 并满足条件 (A1) 的弧˜中最小。

我们给 $\tilde{\gamma}$ 定向，使 $x_1 \in H_{p_1}$ 和 $x_2 \in H_{p_2}$ 分别为起点和终点。

在本文余下部分，我们采用以下术语。对于连通拓扑空间 Y 及其连通子空间 Y_1、 Y_2 和 Z，若 Y_1 和 Y_2 包含在 $Y \setminus Z$的不同连通分支中，我们称 Z 分离 Y_1 和 Y_2 （在 Y中）。若 Y_1 和 Y_2 包含在 $Y \setminus Z$的不同连通分支的闭包中，我们称 Z 弱分离 Y_1 和 Y_2 （在 Y中）。

情形 I. ι（$\tilde{\gamma}$） > 0。在讨论此情形的整个过程中，测地线均指相对于立方复形 $\mathcal{X}$ 的 CAT(0) 度量而言的测地线˜。

引理 9.1. 任意棋盘超平面与 $\tilde{\gamma}$ 至多相交于一点。

证明. 假设存在一个与 $\tilde{\gamma}$ 相交于多个点的棋盘超平面 Σ。取 $\tilde{\gamma}$ 与 Σ的两个相邻交点 z_1 和 z_2 ，令 $\tilde{\gamma}_0$ 为由 z_1 和 z_2界定的 $\tilde{\gamma}$ 的子弧。由于 Σ 是凸的（命题 6.4），测地线段 $[z_1, z_2]$ 包含在 Σ中。

断言 9.2。 如果一个不同于 Σ 的棋盘超平面 Σ' 与 $[z_1, z_2]$ 相交，那么 ***(i)*** $\Sigma' \cap [z_1, z_2]$ 在 (z_1, z_2) 中由一个横截交点组成，并且 ***(ii)***Σ' ∩ 内部 $\tilde{\gamma}_0 \neq \emptyset$。

证明。 设 $\Sigma' \neq \Sigma$ 是一个与 $[z_1, z_2]$ 相交的棋盘超平面。于是 ℓ :
$= \Sigma \cap \Sigma' \supset [z_1, z_2] \cap \Sigma' \neq \emptyset$, 因此 ℓ 是一条与 $[z_1, z_2]$ 相交的测地线（参见命题 6.6(1)）。由于根据条件 (A1)， z_1， $z_2 \notin \ell$ ，由推论 6.7(1) 可知， $\Sigma' \cap [z_1, z_2] = \ell \cap [z_1, z_2]$ 是某个 $y \in (z_1, z_2)$ 的单点集 $\{y\}$ 。根据推论 6.7(2)， $[z_1, z_2] \setminus \{y\}$ 的两个分支分别包含于 $\Sigma \setminus \ell$ 的不同连通分支中。因此条件 (i) 成立。这也意味着 Σ' 分隔了 $\tilde{\gamma}_0$ 的端点 z_1 和 z_2。因此 (ii) 也成立。□

令 $\tilde{\gamma}'$ 为通过将 $\tilde{\gamma}_0$ 替换为 $[z_1, z_2]$ ，然后利用 Σ的正则邻域将 $[z_1, z_2]$ （所得弧中的一个邻域）从 Σ上推离而得到的弧。则 $\tilde{\gamma}'$ 与 $\tilde{\gamma}$恰当同伦，我们可以假设 $\tilde{\gamma}'$ 满足条件（A1）。此外，断言 9.2 蕴含 ι（$\tilde{\gamma}'$） $\leq \iota$（$\tilde{\gamma}$） $- 2$，矛盾。□

现在我们证明一个用于处理情形 1的关键引理。

引理 9.3。 任何与 $\tilde{\gamma}$ 相交的棋盘超平面都会在 $\mathcal{X}$中将 H_{p_1} 与H_{p_2} 分开。

证明。 设 Σ 是与 $\tilde{\gamma}$ 相交的棋盘超平面。由引理 9.1 和条件 (A1) 可知， $\Sigma \cap \tilde{\gamma}$ 仅由一个横截交点 $z \in$ 构成，该交点位于 $\tilde{\gamma}$ 的内部。因此，我们只需证明 Σ 与 H_{p_1} 和 H_{p_2} 不相交。反设

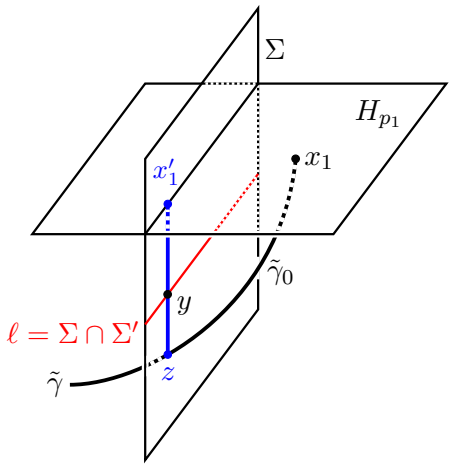


FIGURE 13. 如果棋盘超平面 $\Sigma' \neq \Sigma$ 与 $[x_1', z]$相交，那么它会分隔 H_{p_1} 和 z，因此也与 $\tilde{\gamma}_0$相交。

Σ 与 H_{p_1} 和 H_{p_2} 中的一个相交，不妨设为 H_{p_1}（见图13）。设 $\tilde{\gamma}_0$ 是 $\tilde{\gamma}$ 上由 $\tilde{\gamma}$ 的起点 $x_1 \in H_{p_1}$ 和交点 $z \in \Sigma \cap \tilde{\gamma}$ 所界定的子弧。设 $x_1' \in \Sigma \cap H_{p_1}$ 是 z 在 CAT(0)空间 Σ 中到测地线 $\Sigma \cap H_{p_1}$ 的投影。由于 Σ 与 H_{p_1} 正交相交（命题 6.6(2)），我们可知测地线段 $[x_1', z]$ 与 H_{p_1} 正交相交。因此，由引理5.3，x_1' 是 z 在 CAT(0)空间 $\mathcal{X}$ 中到 H_{p_1} 的 ˜ 投影。

断言9.4。如果一个不同于 Σ 的棋盘超平面 Σ' 与 $[x_1', z]$相交，那么 *(i)* $\Sigma' \cap [x_1', z]$ 由 (x_1', z) 中的一个横截交点构成，且 *(ii)*Σ' 内部 $\tilde{\gamma}_0 \neq \emptyset$。

证明。设 $\Sigma' \neq \Sigma$ 是与 $[x_1', z]$相交的棋盘超平面。于是，如断言 9.2 的证明中所述，$\ell := \Sigma \cap \Sigma'$是一条与 $[x_1', z]$相交的测地线。由条件 (A1)，$z \notin \ell \cap \tilde{\gamma}$，根据推论 6.7(1)，$\ell \cap [x_1', z]$ 是某个 $y \in [x_1', z)$ 的单点集 $\{y\}$。若 $y = x_1'$，则 $\{x_1'\} = H_{p_1} \cap \Sigma \cap \Sigma'$，因此由推论6.7(3)，$[x_1', z] \subset \pi_{H_{p_1}}^{-1}(x_1') = \ell$，这与 $z \notin \ell \cap \tilde{\gamma}$这一事实矛盾。因此，对于某个 $y \in (x_1', z)$，$\ell \cap [x_1', z]$是单点集 $\{y\}$。所以，由推论 6.7(2)，我们得到结论 (i)。这也意味着 x_1' 和 z 属于$\Sigma \setminus \ell$的不同连通分支，因此 Σ' 将 $x_1' \in H_{p_1}$ 和 z分开。此外，如下所示，Σ' 与 H_{p_1} 不相交。反设 $\Sigma' \cap H_{p_1} \neq \emptyset$。那么 Σ' 与 H_{p_1}正交相交（命题 6.6(2)），由断言 9.4 之前的论证可知，在 CAT(0)空间 Σ'中，y在 $\Sigma' \cap H_{p_1}$ 上的投影 y_1，等于在 CAT(0) 空间 $\mathcal{X}$ 中，y 在 H_{p_1}上的 ˜ 投影，而这又等于 x_1'。因此 $x_1' = y_1$ 属于 Σ'，从而 $x_1' \in \Sigma' \cap \Sigma = \ell$，这与$[x_1', z] \cap \Sigma' = \{y\} \subset (x_1', z)$这一事实矛盾。因此，所需的结论是 Σ' 与 H_{p_1} 不相交。由于 Σ'

将 $x_1' \in H_{p_1}$ 和 z分开，这意味着 Σ' 将 H_{p_1} 和 z分开。由于 $\tilde{\gamma}_0$ 连接点 $x_1 \in H_{p_1}$ 和 z，$\tilde{\gamma}_0$ 必与 Σ'相交。因此结论 (ii) 成立。□

令 $\tilde{\gamma}'$ 为通过将 $\tilde{\gamma}_0$ 替换为 $[x_1', z]$，再将 $[x_1', z]$（即所得弧中的一个邻域）从 Σ 推开的方式由 $\tilde{\gamma}$ 得到的一条弧。则 $\tilde{\gamma}'$ 与 $\tilde{\gamma}$ 恰当同伦，因此我们可以假设 $\tilde{\gamma}'$ 满足条件 (A1)。此外，断言9.4表明 $\iota(\tilde{\gamma}') \leq \iota(\tilde{\gamma}) - 1$，矛盾。□

令 y_1 为 $\tilde{\gamma}$ 与 $\mathcal{S}_{bw}$ 的第一个交点，令 $\mathcal{P}_1$ 为包含 $\tilde{\gamma}$ 中由 x_1 和 y_1 界定的子弧的棋盘格理想多面体。类似地，令 y_2 为 $\tilde{\gamma}$ 与 $\mathcal{S}_{bw}$ 的最后一个交点，令 $\mathcal{P}_2$ 为包含 $\tilde{\gamma}$ 中由 x_2 和 y_2 界定的子弧的棋盘格理想多面体（见图 14(a)）。（若 $\iota(\tilde{\gamma}) = 1$，则 $y_1 = y_2$，但 $\tilde{\mathcal{P}}_1 \neq \tilde{\mathcal{P}}_2$。）对于 $i = 1, 2$，回忆同构 $\hat{\mathcal{P}}_i \cong (B^3, D)$，并令 $\hat{c}_i$ 为 D 中与 $\mathcal{P}_i$ 的理想顶点 p_i 对应的顶点；再令 R_i 为 D 中满足 $\Sigma_{R_i} = \Sigma_{R_i}(\mathcal{P}_i)$ 包含 y_i 的区域（定义与记号 7.3）。注意，根据引理 9.3，区域 R_i 不包含顶点 c_i。

为简单起见，假设 R_1 是一个黑色区域。对于 $i = 1, 2$，令 $R_i^{\pm}$为包含交叉 c_i 的 D 的黑色区域，并考虑 $\mathbb{C}$ 中的圆盘$\Delta_{R_i^{\pm}} := \hat{\Delta}_{R_i^{\pm}}(\mathcal{P}_i)$（参见记号8.1和图 8(a)）。根据引理 8.5，$\mathrm{BF}(p_i) := \{\Delta_{R_i^-}, \Delta_{R_i^+}\}$ 在 p_i 处形成一个蝴蝶（如有必要，可用 $R_i^{\mp}$替换 $R_i^{\pm}$）。设$\Sigma_{R_i^{\pm}} := \Sigma_{R_i^{\pm}}(\mathcal{P}_i)$且$\mathcal{B}_{R_i^{\pm}} := \mathcal{B}_{R_i^{\pm}}(\mathcal{P}_i)$（参见图 14(a)）。于是有以下引理。

引理9.5。(1) $\mathcal{B}_{R_2^-} \cup \mathcal{B}_{R_2^+} \subset \mathcal{B}_{R_1}$，其中 $\mathcal{B}_{R_1} = \mathcal{B}_{R_1}(\mathcal{P}_i)$
(2) $\mathcal{B}_{R_1^-} \cup \mathcal{B}_{R_1^+}$ 与$\mathcal{B}_{R_2^-} \cup \mathcal{B}_{R_2^+}$ 不相交。(3) $\Delta_{R_2^-} \cup \Delta_{R_2^+} \subset \Delta_{R_1}$，其中 $\Delta_{R_1} = \Delta_{R_1}(\mathcal{P}_1)$。(4) $|\mathrm{BF}(p_1)| = \Delta_{R_1^-} \cup \Delta_{R_1^+}$ 与 $|\mathrm{BF}(p_2)| = \Delta_{R_2^-} \cup \Delta_{R_2^+}$ 的内部不相交。

证明。（1）对于每个 $\epsilon \in \{-, +\}$，Σ_{R_1} 与 $\Sigma_{R_2^\epsilon}$ 不同，因为 $\Sigma_{R_2^\epsilon} \cap H_{p_2} \neq \emptyset$，而根据引理 9.3，$\Sigma_{R_1} \cap H_{p_2} = \emptyset$。这意味着 Σ_{R_1} 与 $\Sigma_{R_2^\epsilon}$ 不相交（因为它们是 $p_u^{-1}(\mathcal{S}_b)$ 的不同连通分支）。根据引理 6.8，不相交的并集 $\Sigma_{R_1} \sqcup \Sigma_{R_2^\epsilon}$ 将 $\mathcal{X}$ 分成三个闭凸子空间 $\mathcal{B}_1$、$\mathcal{B}_{1,2}$ 和 $\mathcal{B}_2$，使得 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_{1、2} = \Sigma_{R_1}$、$\mathcal{B}_{1、2} \cap \mathcal{B}_2 = \Sigma_{R_2^\epsilon}$ 和 $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$。令 δ 为正方形 $H_{p_2} \cap \mathcal{P}_2$ 中的一条弧，它连接 x_2 与 $H_{p_2} \cap \Sigma_{R_2^\epsilon}$ 中的一个点 z_2（参见图 2(a)），并令 $\tilde{\gamma}_{1,2}$ 为 δ 与 $\tilde{\gamma}$ 被 y_1 和 x_2 围成的子弧的并（见图 14(b)，其中假设 ϵ 为 $+$）。那么 $\tilde{\gamma}_{1,2}$ 是 $\mathcal{X}$ 中连接 y_1 和 z_2 的一条弧，使得 $\tilde{\gamma}_{1、2} \cap \Sigma_{R_1} = \{y_1\}$ 以及 $\tilde{\gamma}_{1、2} \cap \Sigma_{R_2^\epsilon} = \{z_2\}$。因此，$\tilde{\gamma}_{1,2}$ 包含于 $\mathcal{B}_{1,2}$。这意味着 $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{B}_{1,2}$，因为 $\mathrm{int}\ \mathcal{P}_2 \cap (\Sigma_{R_1} \cup \Sigma_{R_2^\epsilon}) = \emptyset$ 且 $\mathrm{int}\ \mathcal{P}_2 \cap \mathrm{int}\ \tilde{\gamma}_{1,2} \neq \emptyset$。因此我们有 $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{R_2^\epsilon}$。另一方面，我们有 $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{B}_1$，因为 $\tilde{\gamma}_{1、2} \subset \mathcal{B}_{1,2}$，且 $\tilde{\gamma}$ 在 y_1 处与 Σ_{R_1} 横截相交；所以 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{R_1}^{\mathfrak{c}} := \mathcal{B}_{R_1}^{\mathfrak{c}}(\mathcal{P}_1)$。因此 $\mathcal{B}_{R_1}^{\mathfrak{c}} \cap \mathcal{B}_{R_2^\epsilon} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$，从而 $\mathcal{B}_{R_2^\epsilon} \subset \mathcal{B}_{R_1}$。

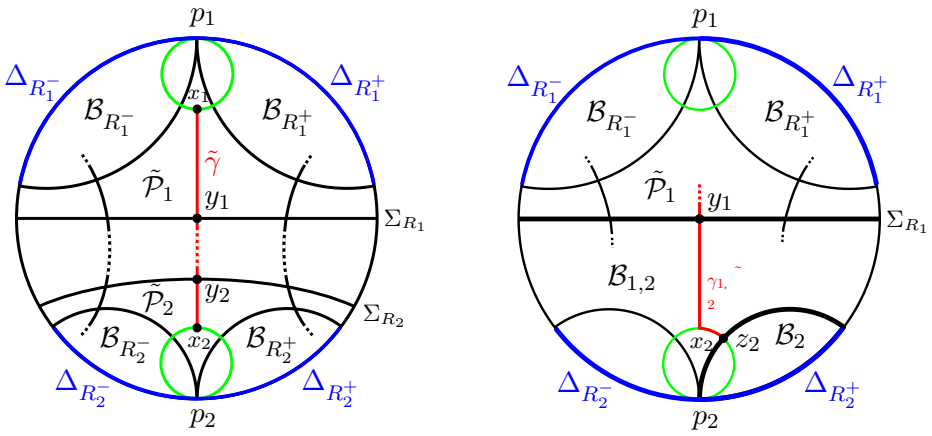


FIGURE 14. (a) 棋盘超平面 $\Sigma_{R_1}(\mathcal{P}_1)$ 将 $\mathcal{B}_{R_1^-} \cup \mathcal{B}_{R_1^+}$ 与 $\mathcal{B}_{R_2^-} \cup \mathcal{B}_{R_2^+}$ 分隔开。注意，$\mathcal{B}_{R_1} = \mathcal{B}_{R_1}(\mathcal{P}_1)$ 是 $\tilde{\mathcal{X}} = \mathbb{H}^3$ 中位于 Σ_{R_1} "下方"的区域。(b) 弧 $\tilde{\gamma}_{1,2}$，即弧 $\delta \subset H_{p_2}$ 与由 y_1 和 x_2 界定的 $\tilde{\gamma}$ 子弧的并，只在端点处与 Σ_{R_1} 和 $\Sigma_{R_2^\epsilon}$ 相交。这里 $\epsilon = +$。

（2）由于黑色区域 R_1 不包含 c_1，它与黑色区域 $R_1^\pm$ 不同。因此，根据命题 7.4，$\mathcal{B}_{R_1^\pm}$ 与 $\mathcal{B}_{R_1}$ 不相交。由于根据（1），$\mathcal{B}_{R_2^-} \cup \mathcal{B}_{R_2^+} \subset \mathcal{B}_{R_1}$，这意味着 $\mathcal{B}_{R_1^\pm}$ 与 $\mathcal{B}_{R_2^-} \cup \mathcal{B}_{R_2^+}$ 不相交。

(3) 由 (1)，我们有 $\Delta_{R_2^-} \cup \Delta_{R_2^+} = (\mathcal{B}_{R_2^-} \cap \mathbb{C}) \cup (\mathcal{B}_{R_2^+} \cap \mathbb{C}) \subset \mathcal{B}_{R_1} \cap \mathbb{C} = \Delta_{R_1}$。(4) 这由 (2) 和引理 8.2 得出。 □

引理 9.6. 开集 $O := \mathbb{C} \setminus (|\mathrm{BF}(p_1)| \cup |\mathrm{BF}(p_2)|)$ 非空。

证明。首先，假设 D 有多于 3 个黑色区域。取 D 中一个不同于 R_1 和 $R_1^\pm$ 的黑色区域 R_b。根据命题8.3，圆盘 $\Delta_{R_b} := \Delta_{R_b}(\tilde{\mathcal{P}}_1)$ 的内部与圆盘 Δ_{R_1} 和 $\Delta_{R_1^\pm}$ 不相交。由于 $\Delta_{R_2^-} \cup \Delta_{R_2^+} \subset \Delta_{R_1}$ 根据引理9.5(3)，这意味着开圆盘 $\operatorname{int} \Delta_{R_b}$ 与 $\Delta_{R_1} \cup \Delta_{R_1^-} \cup \Delta_{R_1^+} \supset \Delta_{R_1^-} \cup \Delta_{R_1^+} \cup \Delta_{R_2^-} \cup \Delta_{R_2^+} = |\mathrm{BF}(p_1)| \cup |\mathrm{BF}(p_2)|$ 不相交（见图 15(a)）。因此，$\operatorname{int} \Delta_{R_b} \subset O$，从而 O 非空，证毕。

接下来假设 D 至多有3个黑色区域。那么，根据引理 8.6(2)，D恰有三个黑色区域，$\{R_{b,j}\}_{1 \le j \le 3} = \{R_1, R_1^-, R_1^+\}$ 以及一个白色二边形 R_w。我们可以假设 $R_{b,1}$ 与 R_w 不相邻。令 $\mathcal{P}_1'$ 为棋盘格理想多面体，使得 $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_1'$ 是对应于 R_w 的公共面。设 $\Delta_{R_{b,j}} := \Delta_{R_{b,j}}(\mathcal{P}_1)$，以及 $\Delta'_{R_{b,j}} := \Delta_{R_{b,j}}(\mathcal{P}_1')$（$1 \le j \le 3$）。（见图 15(b)。）

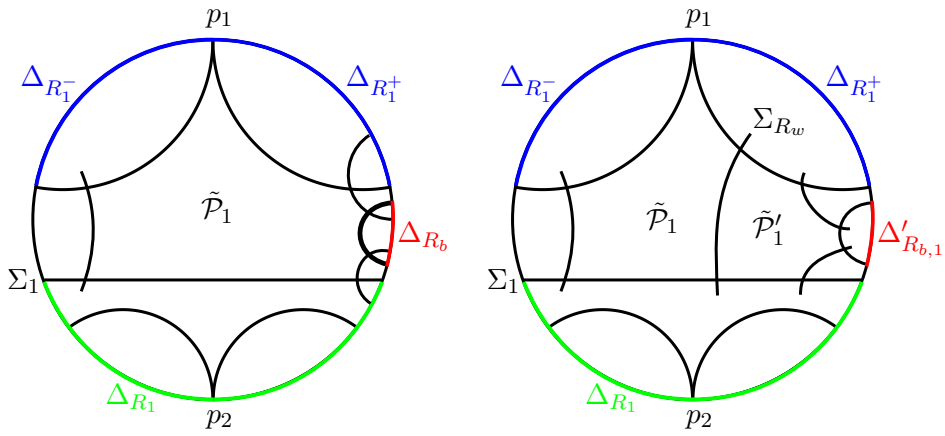


FIGURE 15. (a) 如果 D 有超过 3 个黑色区域，那么对于一个不同于 R_1 和 $R_1^{\pm}$的黑色区域 R_b，开圆盘 $\operatorname{int}\Delta_{R_b}$ 与 $|\mathrm{BF}(p_1)|\cup|\mathrm{BF}(p_2)|$不相交。(b) 如果 D恰有 3 个黑色区域，那么对于不与白色二边形 R_w 相邻的黑色区域 $R_{b,1}$，开圆盘 $\operatorname{int}^{\Delta'_{R_{b,1}}}$（其中 $\Delta'_{R_{b,1}} = \Delta_{R_{b,1}}(\mathcal{P}'_1)$）与$|\mathrm{BF}(p_1)|\cup|\mathrm{BF}(p_2)|$不相交。

断言9.7。 圆盘 $\Delta'_{R_{b,1}}$ 的内部与 $\cup_{j=1}^{3}\Delta_{R_{b,j}} = \Delta_{R_1}\cup\Delta_{R_1^-}\cup\Delta_{R_1^+}$ 不相交。

证明。由引理 7.5 和记号8.1(3)，我们得到$\Delta'_{R_b,2} = \Delta_{R_b,3}$以及$\Delta'_{R_b,3} = \Delta_{R_b,2}$。因此，由命题8.3，内部$\Delta'_{R_b,1}$与$\Delta'_{R_b,3}\cup\Delta'_{R_b,2} = \Delta_{R_b,2}\cup\Delta_{R_b,3}$不相交。此外，如下所述，内部$\Delta'_{R_b,1}$也与$\Delta_{R_b,1}$不相交。由于$R_b$、1和 R_w不相邻，命题 7.4意味着$\mathcal{B}_{R_b,1}(\mathcal{P}_1)\cap\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}_1) = \emptyset$.因此$\mathcal{B}_{R_b,1}(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{X}\setminus\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}_1) =$内部$\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}'_1)$。类似地，$\mathcal{B}_{R_b,1}(\mathcal{P}'_1) \subset$内部$\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}_1)$。由于内部$\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}_1)$和内部$\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}'_1) =$内部$\mathcal{B}_{R_w}(\mathcal{P}_1)$不相交，$\mathcal{B}_{R_b,1}(\mathcal{P}_1)$和$\mathcal{B}_{R_b,1}(\mathcal{P}'_1)$不相交。由引理 8.2，这意味着$\Delta_{R_b,1}$和$\Delta'_{R_b,1}$的内部不相交，因此内部$\Delta'_{R_b,1}$与$\Delta_{R_b,1}$不相交。□

由于 $\Delta_{R_2^-}\cup\Delta_{R_2^+}\subset\Delta_{R_1}$ 根据引理9.5(3)，断言9.7推出开圆盘 $\operatorname{int}^{\Delta'_{R_{b,1}}}$ 与 $\Delta_{R_1^-}\cup\Delta_{R_1^+}\cup\Delta_{R_2^-}\cup\Delta_{R_2^+} = |\mathrm{BF}(p_1)|\cup|\mathrm{BF}(p_2)|$不相交。因此 $\operatorname{int}^{\Delta'_{R_{b,1}}}\subset O$，故 O 非空，正如所需。□

由此，我们证明了这对蝴蝶 $\mathrm{BF}(p_1)$ 和 $\mathrm{BF}(p_2)$ 满足命题 4.11 中的条件。因此，$\{\mu_1,\mu_2\}$ 生成一个秩2自由克莱因群

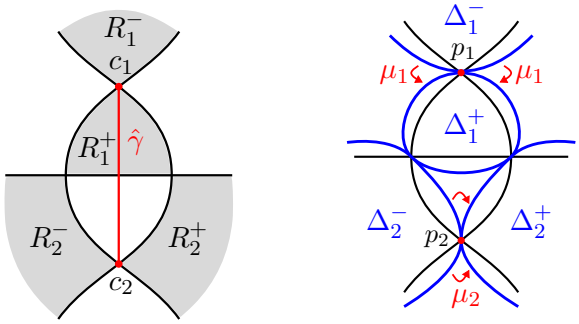


FIGURE 16. 蝴蝶 BF(p_1) 和 BF(p_2)，以及子午线 μ_1 和 μ_2的作用，在情形 $\omega(\hat{\gamma}) > 0$中。这里，我们采用注记8.4和图10中描述的极限圆模型图。

，且该群是几何有限的。这就完成了情形 I 下定理2.2 的证明，其中 $\iota(\tilde{\gamma}) > 0$。

~ ~ ~情形II。 $\iota(\tilde{\gamma}) = 0$。在此情形下，真弧 $\tilde{\gamma} \subset \mathcal{M}$ 包含于某个理想棋盘多面体 $\mathcal{P} \cap \mathcal{M}$ $\tilde{\mathcal{P}}$中。回忆同构 $\hat{\varphi} : (B^3, D) \to \hat{\mathcal{P}}$，其中 $\hat{\mathcal{P}}$ 是 $\tilde{\mathcal{P}}$ 在 $\mathbb{H}^3$ 中的闭包（第8节）。我们通过该同构将 $\hat{\mathcal{P}}$ 与 (B^3, D) 等同。令 c_i 为 D 的顶点，它对应于 $\hat{\mathcal{P}}(i = 1, 2)$ 的理想顶点 p_i。于是，子午线对 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 的等价类由对子 $\{c_1, c_2\}$确定。令 $\hat{\gamma}$ 为 ∂B^3 中的一条弧，连接 c_1 和 c_2，使得 $\hat{\gamma}$ 与 D 的顶点集仅在端点处相交，并且 int $\hat{\gamma}$ 与 D横截。于是， $\tilde{\gamma}$ 的真同伦类由 $\hat{\gamma}$表示。我们假设 int $\hat{\gamma} \cap D$ 的基数$\omega(\hat{\gamma})$取最小值。

子情形II-1。 $\omega(\hat{\gamma}) > 0$。对于 $i = 1, 2$，设 R_i^-和 R_i^+是包含顶点 c_i的黑色区域。根据引理8.5， $\{\Delta_{R_i^-}, \Delta_{R_i^+}\}$ 在 p_i 处形成一个蝴蝶 BF(p_i)（见图16）。

断言9.8。 四个黑色区域 R_1^-、 R_1^+、 R_2^-和 R_2^+互不相同。

证明。 反设这四个区域之间存在重叠。由于 $R_i^- \neq R_i^+$对于 $i = 1, 2$，我们有 $R_1^{\epsilon_1} = R_2^{\epsilon_2}$，其中某个 $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-, +\}$。于是顶点 c_1 和 c_2 包含在同一个区域 $R_1^{\epsilon_1} = R_2^{\epsilon_2}$ 中。因此，这两个顶点之间存在一条位于该区域内的弧，这与假设 $\omega(\hat{\gamma}) > 0$矛盾。□

根据断言9.8和命题8.3，蝴蝶 BF(p_1) 和 BF(p_2) 的内部不相交。此外，以下引理成立。

引理 9.9. 开集 $O := \mathbb{C} \setminus (|\mathrm{BF}(p_1)| \cup |\mathrm{BF}(p_2)|)$ 非空。

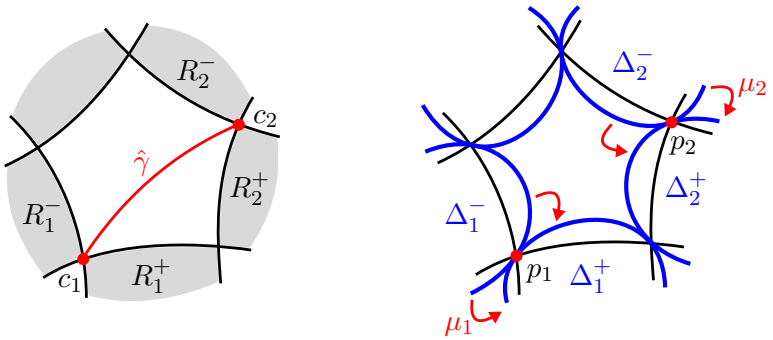


FIGURE 17. p_1的蝴蝶和p_2的蝴蝶，以及子午线 μ_1 和 μ_2的作用，在情形 $\omega(\hat{\gamma})=0$ 且 γ 不是交叉弧时。这里，我们采用注记8.4和图10中描述的极限圆模型图。

证明。 此引理的证明与引理 9.6 的证明类似。如果 D 有超过四个黑色区域，那么一个不同于 $R_1^{\pm}$和 $R_2^{\pm}$的黑色区域 R_b 会给出一个非空开圆盘 $\operatorname{int}\Delta_{R_b}$，根据命题 8.3，它与 $|\mathrm{BF}(p_1)|\cup|\mathrm{BF}(p_2)|$ 不相交。因此，我们可以假设 D 恰有四个黑色区域。于是，根据引理 8.6(3)，存在一个白色区域 R_w，它要么是一个二边形，要么是一个三边形。无论哪种情况，都存在一个黑色区域，记作 $R_{b,\,1}$，它与 R_w不相邻。令 $\mathcal{P}_1'$ 为棋盘格理想多面体，使得 $\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_1'$ 是对应于 R_w的公共面。那么，如断言 9.7的证明所示，我们看到开圆盘 $\operatorname{int}^{\Delta_{R_{b,\,1}}}(\mathcal{P}_1')$ 与$|\mathrm{BF}(p_1)|\cup|\mathrm{BF}(p_2)|$不相交。□

因此，p_1和p_2这一对蝴蝶满足命题 4.11中的条件。因此，$\{\mu_1,\mu_2\}$ 生成一个几何有限的秩2自由克莱因群。这就完成了定理2.2在 $\iota(\tilde{\gamma})=0$且 $\omega(\hat{\gamma})>0$情形下的证明。

子情形 II-2。 $\omega(\hat{\gamma})=0$。在此情形下，D 存在一个区域 R，其中包含$\hat{\gamma}$以及顶点 c_1 和 c_2。根据定理的假设，回想一下，γ 不与交叉弧恰当同伦。这意味着，$\hat{\gamma}$ 不可能相对于端点同伦于 R 的一条边（即，顶点 c_1 和 c_2 在 ∂R中不相邻），因为对于 D的任意一条边 e，复合映射 $p_u\circ\varphi\colon \mathrm{P}(D)\to p_u(\mathcal{P})\subset X$ 将理想边$\check{e}$ 映射为一条开交叉弧（参见命题7.2(3)和图7）。

为简单起见，假设 R 是一个白色区域。对于 $i=1,\,2$，令 $R_i^{\pm}$为包含交叉 c_i 的黑色区域。根据引理 8.5，$\{\Delta_{R_i^-},\Delta_{R_i^+}\}$ 在p_i 处构成一个蝴蝶 $\mathrm{BF}(p_i)$（见图17）。

断言 9.10. 四个黑色区域 R_1^-、 R_1^+、 R_2^- 和 R_2^+ 彼此不同。

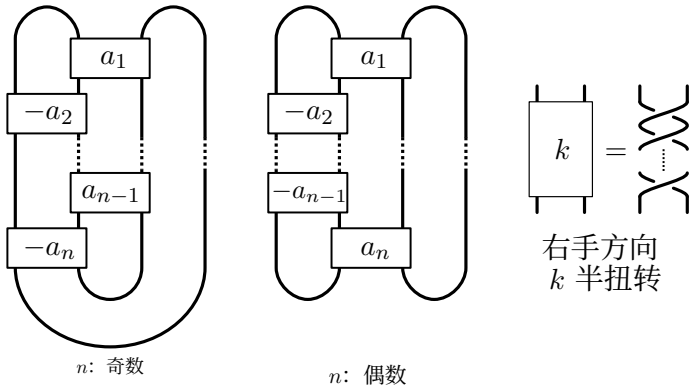


FIGURE 18. 双曲二桥链环的 D 标准素交替图 L

证明。 反设这 4 个区域之间存在重叠。那么，如断言9.8的证明所示，对于某个 ϵ_1, $\epsilon_2 \in \{-,+\}$，有 $R_1^{\epsilon_1} = R_2^{\epsilon_2}$。由于 c_1 和 c_2 在 ∂R 中不相邻，边 $e_i := R \cap R_i^{\epsilon_i} (i = 1, 2)$ 彼此不同。因此，我们可以在白色区域 R 与黑色区域 $R_1^{\epsilon_1} = R_2^{\epsilon_2}$ 的并集中找到一条简单环路 C，它与 D 横截地相交于恰好两点，一点位于内部 e_1，另一点位于内部 e_2。由于 $e_1 \neq e_2$，由 C 围成的两个圆盘都包含 D 的一个顶点。这与图 D 的素性矛盾。□

引理 9.9 的证明在当前情形下仍然成立，因此我们看到，开集 $O = \mathbb{C} \setminus (|\mathrm{BF}(p_1)| \cup |\mathrm{BF}(p_2)|)$ 非空。因此，蝴蝶 $\mathrm{BF}(p_1)$ 与 $\mathrm{BF}(p_2)$ 这一对满足命题 4.11 中的条件。因此， $\{\mu_1, \mu_2\}$生成一个秩2自由克莱因群，且该群是几何有限的。

定理2.2的证明至此完成。 □

定理*2.1*的证明。 设 $L \subset S^3$ 是一个双曲二桥链环， γ 是链环外部 M中的一条本质真路径， $\{\mu_1, \mu_2\}$ 是链环群 G 中的一个非交换子午线对，由 γ表示； $\{p_1, p_2\}$ 是相应的一对抛物不动点。假设 γ 与 L的上隧道或下隧道不同伦。我们证明， $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成一个几何有限的秩2自由克莱因群。

如有必要，可取 L 的镜像，因此不妨假设 L 有图18所示的素交替图 D，其中（a_1， a_2，……， a_n）是一个正整数序列，且 $n \geq 2$、 $a_1 \geq 2$ 和 $a_n \geq 2$。 D 由 n 个扭转区域 A_1， A_2， $\cdots$， A_n 组成，其中 A_i 根据 i 为奇数还是偶数，包含右手方向或左手方向的半扭转。由定理2.2可知，我们只需处理 γ 是相对于图 D 的交叉弧这一情形。令 A_i 为包含与交叉弧 γ 对应的交叉点的扭转区域。若 $i = 1$ 或 n，则 γ 同伦等价于上隧道或下隧道。因此， $2 \leq i \leq n-1$。

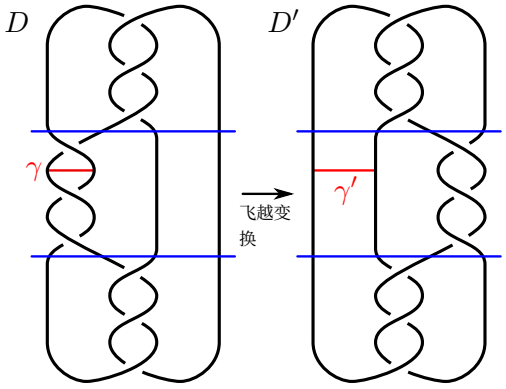


FIGURE 19. 飞越变换将图 D 中的交叉弧 γ 映射为新图 D'中一条非交叉弧。

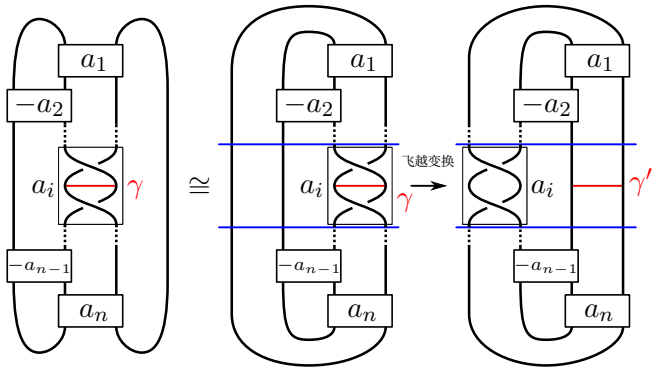


FIGURE 20. 如果 i 是偶数，则先通过 S^2 中的环境同痕将 D 变为中间图，然后应用飞越变换。

假设 i 为奇数。按照图19所示，对 D 作飞越变换，并令 D' 为变换后得到的素交替图。交叉弧 γ 在飞越变换下的像是一条弧 γ'，它包含在 D' 的一个区域 R' 中，使得多面体（B^3，D'）中相应的弧 $\hat{}\gamma'$ 连接 R' 的交叉点 c_1' 和 c_2'，而这两个交叉点在 $\partial R'$ 中不相邻。因此，我们可以应用定理2.2证明中的子情形 II-2 的论证，证明 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成一个几何有限的秩为 2 的自由群。

假设 i 是偶数。则我们首先按照图20所示，通过 S^2 中的环境同痕（这不是 $\mathbb{R}^2$ 中的环境同痕）来修改 D，然后按照图20应用飞越变换。接着，我们可以再次应用定理2.2证明中的子情形 II-2的论证，从而得到相同的结论。

至此，定理2.1的证明完成。 □

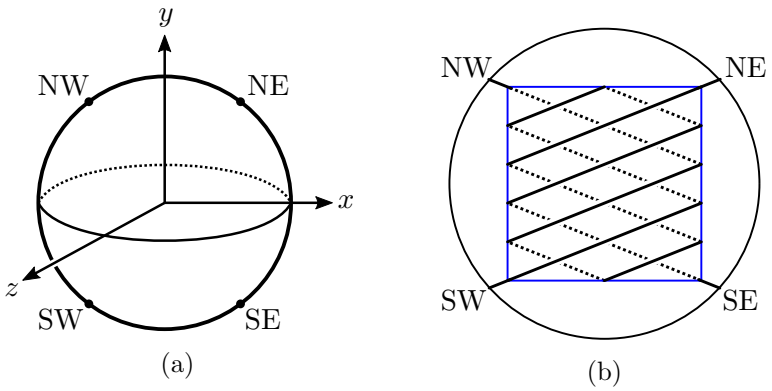


FIGURE 21. (a) 带有四个标记点集合 P^0 的三维球 $\boldsymbol{B}^3$。(b) 有理缠结 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r))$，其中有 $r = 2/5$。注意，竖直轴是 y 轴，而不是 z 轴。

10. RATIONAL LINKS IN THE PROJECTIVE 3-SPACE AND THE PROOF OF THEOREM 1.3

本节首先在 P^3 中定义有理链环（定义 10.2），并介绍其基本性质，包括分类和双曲化（命题10.3和10.5）。然后，我们在注 10.6 中详细阐述定理 1.3(3)，并证明该定理。

我们按照 [14, 第 18] 章和 [9,第 2] 节回顾有理缠结的定义。设 $\boldsymbol{B}^3 := \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 2\}$ 是$\mathbb{R}^3 \subset \hat{\mathbb{R}}^3 := \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 中的圆形三维球，其边界包含由四个标记点组成的集合 P^0

$$\mathrm{SW} := (-1,-1,0), \quad \mathrm{SE} := (1,-1,0), \quad \mathrm{NE} := (1,1,0), \quad \mathrm{NW} := (-1,1,0).$$

对于 $r \in \hat{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$，斜率为 r 的有理缠结是弧对 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r))$，其中$t(r)$ 是正常嵌入于 $\boldsymbol{B}^3$ 中的弧对，使得 $t(r) \cap \partial\boldsymbol{B}^3 = \partial t(r) = P^0$，如图 21(b) 所示。图中的“枕头套”是商空间 $(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{Z}^2)/\mathcal{J}$，其中 $\mathcal{J}$ 是欧几里得平面 $\mathbb{R}^2$ 的等距变换群，由绕 $\mathbb{Z}^2$ 中各点的 π 旋转生成；枕头套上的弧对是 $\mathbb{R}^2$ 中斜率为 r 且经过 $\mathbb{Z}^2$ 中各点的直线在商空间中的像。我们可以安排$t(r)$，使其在分别绕 x 轴、 y 轴和 z 轴的 π 旋转 h_x、 h_y 和 $h_z = h_x h_y$ 下保持不变。

斜率为 r 的二桥链环 $(S^3,\ K(r))$ 是通过沿 $\partial\boldsymbol{B}^3$ 上的恒等映射，将 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r))$ 和 $(-\boldsymbol{B}^3,\ t(\infty))$（各取互不相交的副本）粘合而得到的。（这里 $\boldsymbol{B}^3$ 继承了 $\hat{\mathbb{R}}^3$ 的自然定向。）因此我们可以将其视为

$$K(r) = t(r) \cup \iota(t(\infty)) \subset \boldsymbol{B}^3 \cup \iota(\boldsymbol{B}^3) = \hat{\mathbb{R}}^3,$$

其中 ι 是 $\hat{\mathbb{R}}^3$ 在 $\partial \boldsymbol{B}^3$ 中的反演。令 $\mathcal{D}$ 为法雷剖分，即由理想三角形构成的上半空间 $\mathbb{H}^2$ 的镶嵌；这些理想三角形是通过反复沿边反射理想顶点为 0，1，$\infty \in \mathbb{Q}$ 的 $\hat{}$ 理想三角形得到的。令 Aut($\mathcal{D}$) 为 $\mathcal{D}$ 的自同构群，Aut$^+$($\mathcal{D}$) 为 Aut($\mathcal{D}$) 的保定向子群。以下命题借助 Thurston 对 Haken 流形的统一化定理 [46]，（应用于二桥链环补空间），重新表述了 (i) Schubert [41] 建立的二桥链环分类，以及 (ii) Menasco [27, 推出的交替链环补空间双曲化结果（推论 2] ）。

命题 *10.1. (1)* 对于两个有理数 $r, r' \in \hat{\mathbb{Q}}$，存在一个同胚 $\psi: S^3 \to S^3$，使得 $\psi(K(r)) = K(r')$，当且仅当存在一个元素 $\xi \in Aut(\mathcal{D})$ 将 $\{r, \infty\}$ 映射到 $\{r', \infty\}$。此外，ψ 可取为保向的，当且仅当以下条件之一成立：*(i)* ξ 是保向的，且 $(\xi(r)\ \xi(\infty)) = (r', \infty)$；或 *(ii)* ξ 是反向的，且 $(\xi(r)\ \xi(\infty)) = (\infty, r')$。

(2) $K(r)$ </style>是双曲的，当且仅当 $(\infty, r) \geq 3$，其中 d 是 $\mathcal{D}$的1骨架中的边路径距离。

现在，我们定义 P^3 中的有理链环，并陈述其基本性质。

ˆ定义 10.2. 对于 $r \in \mathbb{Q}$，斜率为 r 的射影3空间P^3中的有理链环是由 $(P^3, K_P(r)) := (\boldsymbol{B}^3, t(r))/\sim$构成的一对，其中 $\sim$ 对每个 $x \in \partial \boldsymbol{B}^3$ 都将 x 与 $-x$ 识别。$K_P(r)$ 在 P^3 的万有覆盖 S^3 中的原像 $\tilde{K}_P(r)$ 称为 $K_P(r)$ 的覆盖链环。

命题 *10.3.* P^3 中有理链环 $K_P(r)$ 的覆盖链环等价于 2-桥链环 $K(\tilde{r})$，其中 $\tilde{r} = \eta_r(r)$，这里 η_r 是 $Aut^+(\mathcal{D})$ 的一个元素，满足 $\eta_r(-r) = \infty$。（换言之，$\tilde{r}$ 的特征是，对于某个 $\eta_r \in Aut^+(\mathcal{D})$，$(\tilde{r}, \infty) = (\eta_r(r)\ \eta_r(-r))$。）

这里，我们假设 P^3 继承了 $\boldsymbol{B}^3 \subset \hat{\mathbb{R}}^3 \cong S^3$的自然定向，因此覆盖映射 $S^3 \to P^3$ 是保向的。定向三维流形中的两个链环若存在一个将其中一个映到另一个的环境流形保向同胚，则称它们等价 。

命题 *10.3* 的证明。将 $S^3 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ 识别为圆 $S_1^1 := S^3 \cap (\mathbb{C} \times 0)$ 与圆 $S_2^1 := S^3 \cap (0 \times \mathbb{C})$ 的球面联结 $S_1^1 * S_2^1$（参见 [16,定义 I.5.13]）。于是，我们可以将 $\hat{\mathbb{R}}^3$ 识别为 S^3，使其满足以下条件（见图 22(a)）。

(1) 大圆 $\partial \boldsymbol{B}^3 \cap \{y = 0\}$ 被识别为 S_1^1，紧化后的y-轴被识别为 S_2^1。此外，$\boldsymbol{B}^3$ 被识别为球面联结$S_1^1 * J_2$，其中 $J_2 := \{(0, z_2) \in S_2^1 \mid -\pi/2 \leq \arg(z_2) \leq \pi/2\}$。

(2) $\hat{\mathbb{R}}^3$的 π-旋转 h_x、h_y、h_z 分别被识别为 S^3 上由下式定义的对合：

$$h_x(z_1,z_2)=(\bar{z}_1,\bar{z}_2),\quad h_y(z_1,z_2)=(-z_1,z_2),\quad h_z(z_1,z_2)=(-\bar{z}_1,\bar{z}_2).$$

(3) 设 f 为覆盖 $S^3\to P^3$ 的覆盖变换群的生成元，其中覆盖由 $f(z_1,z_2)=(-z_1,-z_2)$ 给出。则在 $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上，f 是对径映射 $(x,y,z)\mapsto(-x,-y,-z)$ 与在 $\partial\boldsymbol{B}^3$ 中的反演 ι 的复合。

于是，$K_P(r)\subset P^3$ 的覆盖链环 $\tilde{K}_P(r)\subset S^3$ 为 $\tilde{K}_P(r)=t(r)\cup f(t(r))\subset \boldsymbol{B}^3\cup f(\boldsymbol{B}^3)=S^3$，且在 $\mathrm{Isom}^+(S^3)$ 的子群 $\langle h_x,h_y,f\rangle\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ 的作用下保持不变。注意，$f(t(r))=fh_z(t(r))$，其中 fh_z 由 $fh_z(z_1,z_2)=(\bar{z}_1,-\bar{z}_2)$ 给出，是 $S^3=S_1^1*S_2^1$ 的 π 次旋转，其轴为球面联结 $S_1^0*iS_2^0$，其中 $S_1^0=\{(\pm1,0)\}$ 且 $iS_2^0=\{(0,\pm i)\}$。在 $\hat{\mathbb{R}}^3$ 上观察，fh_z 的轴是大圆 $\partial\boldsymbol{B}^3\cap\{z=0\}$，它经过集合 P^0。因此，fh_z 在 $(S^3,\tilde{K}_P(r))$ 上的作用与图 2(b) 所示的对合共轭，其中 $K_P(r)$ 表示为两个斜率为 r 的有理缠结的“和”。注意，图中的右侧有理缠结对应于 $(\boldsymbol{B}^3,t(-r))$ 经反演 ι 后的像。因此，$(S^3,\tilde{K}_P(r))\cong(\boldsymbol{B}^3,t(r))\cup\iota(\boldsymbol{B}^3,t(-r))$。

现在，令 $\eta_r\in\mathrm{Aut}^+(\mathcal{D})$，并令 $\tilde{r}\in\hat{\mathbb{Q}}$ 满足 $(\tilde{r},\infty)=(\eta_r(r)\ \eta_r(-r))$。回顾同构 $\mathrm{Aut}^+(\mathcal{D})\cong\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$，并令 $A\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 为与 η_r 对应的矩阵。于是，线性映射 $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 将斜率为 r（分别为 $-r$）的直线映射到斜率为 $\tilde{r}$（分别为 ∞）的直线。因此，A 诱导出枕头套 $(\mathbb{R}^2,\mathbb{Z}^2)/\mathcal{J}$ 的保定向自同胚，将“斜率”为 r（分别为 $-r$）的一对真弧映射到斜率为 $\tilde{r}$（分别为 ∞）的一对真弧。该同胚通过自然识别 $(\partial\boldsymbol{B}^3,P^0)\cong(\mathbb{R}^2,\mathbb{Z}^2)/\mathcal{J}$，诱导出 $(\partial\boldsymbol{B}^3,P^0)$ 的保定向自同胚。利用对于每个 $s\in\mathbb{Q}$，$t(s)\subset\boldsymbol{B}^{3\wedge}$ 都是边界平行的这一事实，我们可以将该同胚扩张为从 $(S^3,\tilde{K}_P(r))\cong(\boldsymbol{B}^3,t(r))\cup\iota(\boldsymbol{B}^3,t(-r))$ 到 $(S^3,K(\tilde{r}))=(\boldsymbol{B}^3,t(\tilde{r}))\cup\iota(\boldsymbol{B}^3,t(\infty))$ 的保向同胚。□

注记 10.4. 利用 [39, 引理 II.3.3(3) 的证明和图 II.3.4], , 我们得到 $\tilde{r}$ 的以下表达式。考虑一个连分数展开

$$r=a_0+[a_1,a_2,\cdots,a_n]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

Then

$$\tilde{r}=\begin{cases}(-1)^{n-1}[a_n,\cdots,a_1,2a_0,a_1,\cdots,a_n] & \text{if } a_0\neq0,\\ (-1)^{n-1}[a_n,\cdots,a_2,2a_1,a_2,\cdots,a_n] & \text{if } a_0=0.\end{cases}$$

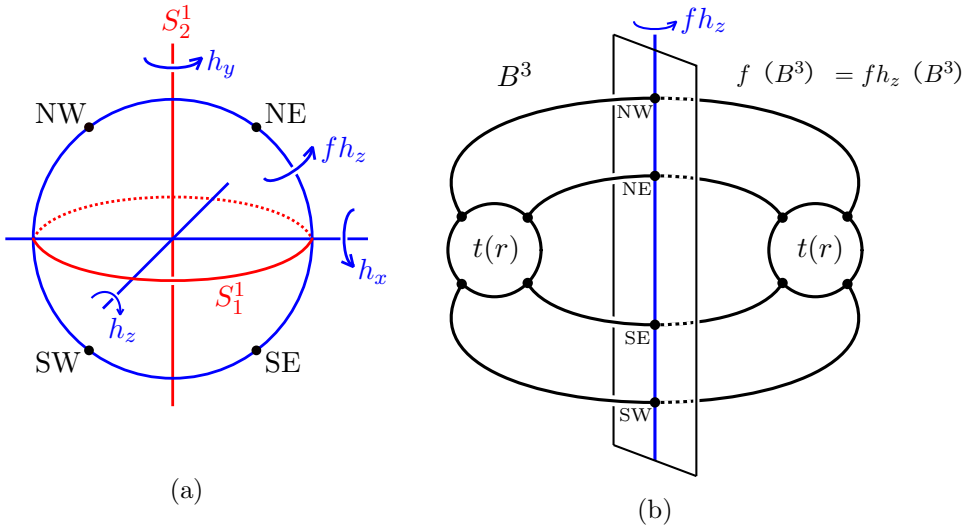


FIGURE 22. 在（a）中， π-旋转 fh_z 的轴是大圆$\partial \boldsymbol{B}^3 \cap \{z=0\}$，并且经过四个标记点。在（b）中，$\partial B^3$ 是中央垂直平面， fh_z 的轴是垂直线。自由对合 f 是 π-旋转 fh_z和 h_z的复合，其中 Fix(fh_z) $\cup$ Fix(h_z)构成一个霍普夫链环。

此外，若 $\tilde{r}=\tilde{q}/\tilde{p}$ 且最大公约数$(\tilde{p},\tilde{q})=1$，则 $\tilde{q}^2\equiv 1$ （模 $2\tilde{p}$）。

命题10.1和10.3推出了关于P^3中有理链环的以下命题。

命题10.5。 (1) $K_P(r)$ </style>是平凡的（即，它在 P^3中界定一个圆盘），当且仅当$r=0$ 或 ∞。

(2) 对于 $r, r' \in \hat{\mathbb{Q}}$，存在一个同胚 $\psi\colon P^3 \to P^3$，使得 $\psi(K_P(r)) = K_P(r')$ 当且仅当 $r'=\pm r$ 或 $\pm 1/r$。此外， ψ 可以选为保向的，当且仅当 $r'=r$ 或 $-1/r$。

(3) $K_P(r)$ 当且仅当 $\min(d(0,r)\ d(\infty,r)) \geq 2$ 时是双曲的，等价地， $r \notin \mathbb{Z}\cup\{\infty\}\cup\{1/p \mid p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$。

证明。 (1) 回忆一下， $t(r)$ 在 $\boldsymbol{B}^3$ 中边界平行，也就是说，存在一对不相交圆盘 Δ，位于 $\boldsymbol{B}^3$ 中，使得 $t(r) \subset \partial\Delta$ 且 cl($\partial\Delta \setminus t(r)$) $= \Delta \cap \partial \boldsymbol{B}^3$。若$r=0$ 或 ∞，则对径映射交换 cl($\partial\Delta \setminus t(r)$) 的分支，因此 Δ 下降为 P^3 中由 $K_P(r)$ 界定的圆盘。故若 $r=0$ 或 ∞，则 $K_P(r)$ 是平凡的。反过来，假设 $K_P(r)$ 是平凡的。那么它的覆盖链环$K(\tilde{r})$ 是二分支平凡链环，因此 $\tilde{r}=\infty$。由命题 10.3 可知，这意味着 $r=0$ 或 ∞。

(2) 若 $r' = -1/r$，则 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r'))$ 可由 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r))$ 绕 z 轴旋转 $\pi/2$ 得到。由于该变换在 $\partial\boldsymbol{B}^3$ 上的限制与对径映射可交换，它诱导出一个保向同胚 $\psi: P^3 \to P^3$，满足 $\psi(K_P(r)) = K_P(r')$。类似地，若 $r' = -r$，则 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r'))$ 可由 $(\boldsymbol{B}^3,\ t(r))$ 关于 xy 平面的反射得到。由于该变换在 $\partial\boldsymbol{B}^3$ 上的限制与对径映射可交换，它诱导出一个反向同胚$\psi: P^3 \to P^3$，满足 $\psi(K_P(r)) = K_P(r')$。(2) 的充分性由这两个观察得出。

接下来，我们证明（2）的必要性部分。由（1）可设 r 和 r' 均不等于 0 或 ∞。则有以下结论。

（a）设 $\nu_0 \in$Aut($\mathcal{D}$) 是关于 Farey 边 0∞ 的 $\mathcal{D}$ 反射，即 ν_0 是 Aut($\mathcal{D}$) 中满足对任意 $x \in \mathbb{Q}$ 都有 $\nu_0(x) = -x$ 的$\hat{}$元素。那么，对于任意 $\hat{}r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, \infty\}$，$\nu_0$ 是 $\mathcal{D}$ 中交换 r 与 $-r$ 的唯一反射。$\hat{}$（b）若 $\xi \in$Aut($\mathcal{D}$) 与 ν_0 交换，则 ξ 在 $\mathbb{Q}$ 上的作用由 $\xi(x) = x$、$-x$、$1/x$ 或 $-1/x$ 给出。这里，ξ 保向当且仅当 $\xi(x) = x$ 或 $-1/x$。

$\hat{}$ 观察（a）表明，对于任意 $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0, \infty\}$，若 η_r 是 Aut$^+$($\mathcal{D}$) 中满足 $(\eta_r(r)\ \eta_r(-r)) = (\tilde{r}, \infty)$ 的元素，则 $\nu_r := \eta_r\nu_0\eta_r^{-1}$ 是 $\mathcal{D}$ 中交换 $\tilde{r}$ 与 ∞ 的唯一反射。

现在假设存在一个同胚 $\psi: P^3 \to P^3$，使得 $\psi(K_P(r)) = K_P(r')$，其中 $r, r' \in \hat{}\mathbb{Q} \setminus \{0, \infty\}$。那么 ψ 可提升为一个同胚 $\tilde{\psi}: S^3 \to S^3$，它将 $K_P(r)$ 的覆盖链环 $K(\tilde{r})$ 映到 $K_P(r')$ 的覆盖链环 $K(\tilde{r}')$。根据命题 10.1(1)，存在一个自同构 $\xi \in$ Aut($\mathcal{D}$)，它将 $\{\tilde{r}, \infty\}$ 映到$\{\tilde{r}', \infty\}$。由反射 ν_r 和 $\nu_{r'}$的唯一性可知，$\nu_{r'} = \xi\nu_r\xi^{-1}$。同样，由反射 ν_0的唯一性，这又意味着 ν_0被 $\xi_0 := \eta_{r'}^{-1}\xi\eta_r$ 共轭后得到 ν_0，也就是说，ν_0 和 ξ_0 可交换。因此，根据观察 (b)，$\hat{}$ ξ_0 在 $\mathbb{Q}$ 上的作用由 $\xi_0(x) = x, -x, 1/x$ 或 $-1/x$给出。另一方面，$r' = \eta_{r'}^{-1}(\tilde{r}')$等于 $\eta_{r'}^{-1}(\xi(\tilde{r})) = \eta_{r'}^{-1}(\xi(\eta_r(r))) = \xi_0(r)$ 或 $\eta_{r'}^{-1}(\xi(\infty)) = \eta_{r'}^{-1}(\xi(\eta_r(-r))) = \xi_0(-r)$。由于 ξ_0 等于上述四个变换之一，我们看到，所需的 r' 等于 $\pm r$ 或 $\pm 1/r$。至此，(2) 的第一个断言得证。利用命题 10.1(1) 的第二个断言细化上述论证，即可证明 (2) 的第二个断言。

(3) 由于 $K_P(r)$ 是双曲的当且仅当 $K(\tilde{r})$ 是双曲的，命题 10.1(2) 表明，$K_P(r)$ 是双曲的当且仅当 $d(\infty, \tilde{r}) \geq 3$。另一方面，由于 Farey 边 0∞ 分隔了 $-r$ 和 r，我们有

$$d(\infty, \tilde{r}) = d(-r, r) = 2\min(d(\infty, r), d(0, r)).$$

因此，$K_P(r)$ 是双曲的，当且仅当 $\min(d(\infty, r)\ d(0, r)) \geq 2$。显然，后一条件等价于条件 $r \notin \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{1/p \mid p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$。□

根据命题10.5，我们得到定理 1.3 的陈述 (3) 的如下描述。

注 10.6. 在定理 1.3(3)的设定下，以下结论成立。 $X = \mathbb{H}^3/G$是 P^3中的双曲有理链环 $K_P(r)$的补空间，其中某个 $r \in \hat{\mathbb{Q}} \setminus (\mathbb{Z} \cup \{\infty\} \cup \{1/p \mid p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\})$； $\Gamma = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ 是 G 的指数 2 子群； $\mathbb{H}^3/\Gamma$ 是二桥链环 $K(\tilde{r})$的补空间，其中 $\tilde{r}$ 的特征为：对某个 $\eta \in \mathrm{Aut}^+(\mathcal{D})$，$(\tilde{r}, \infty) = (\eta(r)\ \eta(-r))$。在群 $\Gamma = \pi_1(S^3 \setminus K(\tilde{r}))$中，$\{\mu_1, \mu_2\}$ 等价于二桥链环 $K(\tilde{r})$ 的上子午线对或下子午线对。在群 $G = \pi_1(P^3 \setminus K_P(r))$中， $\{\mu_1, \mu_2\}$ 是有理链环$K_P(r)$ 的一个子午线对，且 $G/\langle \mu_1, \mu_2 \rangle \cong \pi_1(P^3) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

以下命题利用 Millichap-Worden [29,推论1.2] 关于双曲二桥链环的可交换类的结果得出，在定理1.3的证明中起着关键作用。

命题*10.7.* 如果双曲二桥链环 $K(\tilde{r})$ 的补空间非平凡地覆盖一个可定向的完备双曲流形 X，那么 X 是 P^3中的某个双曲有理链环 $K_P(r)$ 的补空间，且 $K(\tilde{r})$ 是 $K_P(r)$ 的覆盖链环。因此，该覆盖是二重覆盖，并且 $\tilde{r}$ 由如下性质刻画：对于某个 $\eta \in Aut^+(\mathcal{D})$，$(\tilde{r}, \infty) = (\eta(r)\ \eta(-r))$。此外， $K(\tilde{r})$ 的链环群的上、下子午线对在 $\pi_1(X)$ 中的像是 $K_P(r)$ 的子午线对。

证明。 根据 [29, 推论 1.2], ，若双曲二桥链环补空间非平凡地覆盖某个双曲流形 X ，则该覆盖为正则覆盖。双曲二桥链环补空间的等距群已由 [8, 命题 4.1] 计算（参见 [38, 定理 4.1]）。正如 Boileau-Weidmann [12, 引理 15],所指出的，该计算表明：（i）当 $\tilde{r} = \tilde{q}/\tilde{p}$ 时，带有 $\tilde{r} = \tilde{q}/\tilde{p}$ 的双曲二桥链环 $K(\tilde{r})$的补空间存在保定向自由等距，当且仅当 $\tilde{q}^2 \equiv 1$(模 $2\tilde{p}$)；（ii）任何这样的双曲二桥链环补空间都存在唯一的保定向自由等距。事实上，对于这样的二桥链环 $K(\tilde{r})$，其保定向等距群 $\mathrm{Isom}^+(S^3 \setminus K(\tilde{r}))$ 同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$。此外，它扩展为由 $\{h_x, h_y, f\}$生成的 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$-作用 $(S^3, K(\tilde{r}))$，如图22所示；我们很容易验证， f 是唯一一个在链环补空间（以及 S^3上）自由作用的元素。（Bonahon-Siebenmann [14,第 18] 章对将链环对称性描述为 S^3的刚体运动作了很好的说明。）这一事实结合命题 10.3 即得第一个断言。最后一个断言显然成立。□

定理 *1.3* 的证明。 令 $X = \mathbb{H}^3/G$ 和 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 如定理 1.3 中所述，并令 $\Gamma = \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ 为由 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 生成的 G 的子群。由于 $\Gamma < G$ 无挠，定理 1.1 蕴含 Γ 要么是秩为 2 的自由群，要么是双曲 2-桥链环群。在前一种情况下，结论 (1) 成立。在后一种情况下，

$X = \mathbb{H}^3/G$ 被双曲二桥链补空间 $\mathbb{H}^3/\Gamma$ 覆盖。因此，根据命题10.7，要么 (i) $\Gamma = G$，且由定理 1.2（或定理 1.1）可得结论 (2) 成立；要么 (ii) Γ 是 G 的真子群，且结论 (3) 成立。至此，定理 1.3 的第一个断言得证。

为了证明第二个断言，假设 $X = \mathbb{H}^3/G$ 具有有限体积，且 Γ 是秩为 2 的自由群。反设 Γ 是几何无限的。由于覆盖 $p : \hat{} X = \mathbb{H}^3/\Gamma \to X = \mathbb{H}^3/G$ 的陪域 X 具有有限体积^，且根据驯性定理（[4, 15, 17, 42]），X 是驯的，Canary 的覆盖定理 [18] 表明，X 有一个有限覆盖 X'，它纤维化于圆上，使得与纤维子群相关联的 X' 的覆盖 X_S 满足以下条件之一。

^(a) $X = X_S$。^(b) X 是一个扭曲的 I-丛，其双重覆盖为 X_S。

^ 首先假设 $X = X_S$。那么存在一个有限余体积的福克斯群 Γ_0，使得 (i) 双曲曲面 $\mathbb{H}^2/\Gamma_0$ 与纤维化于 S^1 上的丛 X' 的纤维曲面 S 同胚；(ii) 存在一个同构 $\rho : \Gamma_0 \to \Gamma$，它是严格保型的，也就是说，对于 $g \in \Gamma_0 < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$，当且仅当 g 是抛物型时，$\rho(g)$ 才是抛物型。由于 Γ由两个抛物元素生成，S 必定是一个三穿孔球面。这与假设 S 是 X' 的纤维曲面相矛盾，因为三穿孔球面不允许存在伪阿诺索夫同胚。

^ 接下来假设 X 是一个扭曲的 I-丛，且其双覆盖为 X_S。那么存在一个非定向双曲曲面 $F = \mathbb{H}^2/\Gamma_0$，其中 $\pi_1(F) \cong \Gamma_0 <\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2) < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$，以及一个严格保型同构 $\rho : \Gamma_0 \to \Gamma$。^（这里，$F$ 与扭曲的 I-丛 X 的底空间同胚。）这与以下事实矛盾：不存在基本群由周边元素生成的非定向曲面。因此，Γ 是几何有限的。□

References

[1] C. Adams, *Hyperbolic 3-manifolds with two generators* **4** 1996 1 2, , 181 206 《通讯：分析与几何》（），第 期，–。[2] C. Adams, *Noncompact Fuchsian and quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic 3-manifolds*, 《代数几何与拓扑》**7**（2007），565–582。[3] I. Agol, *The classification of non-free 2-parabolic generator Kleinian groups*, 2001 年 7 月在奥斯汀美国数学学会会议和布达佩斯博尧伊会议上所作报告的幻灯片，匈牙利布达佩斯。[4] I. Agol, *Tameness of hyperbolic 3-manifolds*, arXiv:math/0405568。[5] I. R. Aitchison、E. Lumsden 和 J. H. Rubinstein, *Cusp structures of alternating links*, 《数学发明》**109**（1992），第 3 期，473–494。[6] I. R. Aitchison 和 J. H. Rubinstein, *An introduction to polyhedral metrics of nonpositive cur-vature on 3-manifolds*, 《低维流形几何》，2（达勒姆，1989），127–161，伦敦数学学会讲义系列，**151**，剑桥大学出版社，剑桥，1990。

[7] I. R. Aitchison 和 J. H. Rubinstein, *Combinatorial cubings, cusps and dodecahedral knots*, Topology' 90（俄亥俄州哥伦布，1990），17–26，俄亥俄州立大学数学研究所出版物，1，de Gruyter，柏林，1992。[8] S. Aimi、D. Lee、S. Sakai 和 M. Sakuma, *Classification of parabolic generating pairs of Kleinian groups with two parabolic generators* **52** 2020 477 511 ，《的里雅斯特大学数学研究所学报》（），–。[9] H. Akiyoshi、K. Ohshika、J. Parker、M. Sakuma 和 H. Yoshida, *Classification of non-free Kleinian groups generated by two parabolic transformations* **374** ，《美国数学会会刊》（2021），第 3 期，1765–1814。[10] H. Akiyoshi、M. Sakuma、M. Wada 和 Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)* **1909**, 2007 ，《数学讲义》，Springer，柏林，。[11] R. J. Aumann, *Asphericity of alternating knots*，《数学年刊》（第 2 辑）64（1956），374–392。[12] M. Boileau 和 R. Weidmann, *The structure of 3-manifolds with two-generated fundamental group* **44** 2005 2, 283 320 ，《拓扑学》（），第 期，–。[13] M. Boileau 和 B. Zimmermann, *The π-orbifold group of a link*，《数学杂志》200（1989），187–208。[14] F. Bonahon 和 L. Siebenmann, *New geometric splittings of classical knots, and the classifi-cation and symmetries of arborescent knots*, http://www-bcf.usc.edu/~fbonahon/Research/ Publications.html[15] B. H. Bowditch, *Notes on tameness*，《数学教学》56（2010），229–285。[16] M. Bridson 和 A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*，《数学科学基础丛书》319，Springer-Verlag，柏林，1999。xxii+643 页。[17] D. Calegari 和 D. Gabai, *Shrinkwrapping and the taming of hyperbolic 3-manifolds*，《美国数学会杂志》19（2006），385–446。[18] R. D. Canary, *A covering theorem for hyperbolic 3-manifolds and its applications*，《拓扑学》35（1996），第 3 期，751–778。[19] D. Farley, *A proof of Sageev's theorem on hyperplanes in CAT(0) cubical complexes*，《拓扑学与几何群论》，127–142，《数学与统计学进展丛书》，184，Springer，[Cham], 2016。[20] A. Elzenaar、G. Martin、J. Schillewaert, *Approximations of the Riley slice* 2111 03230 , arXiv: 。[ ] math.GT。[21] D. Futer、E. Kalfagianni 和 J. Purcell, *quasi-fuchsian state surfaces*，《美国数学会会刊》366（2014），第 8 期，4323–4343。[22] F. Haglund 和 D. Wise, *Special cube complexes*，《几何与泛函分析》17（2008），第 5 期，1551–1620。[23] D. Lee 和 M. Sakuma, *Parabolic generating pairs of genus-one 2-bridge knot groups*，《结理论及其分支》25（2016），1650023, 21 页。[24] B. Maskit, *Kleinian groups*，《数学科学基础丛书》287，Springer-Verlag，柏林，1988 +326 。xiv B. Maskit 和 G. Swarup, *Two parabolic generator Kleinian groups*, [25]《以色列数学杂志》64（1988），第 3 期，257–266（1989）。[26] K. Matsuzaki 和 M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*，《牛津数学专著丛书》。牛津科学出版物。牛津大学出版社克拉伦登出版社，纽约，1998。x+253 页。[27] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*，《拓扑学》23（1984），第 1 期，37–44。[28] W. Menasco 和 M. Thistlethwaite, *The classification of alternating links*，《数学年刊》（第 2 辑）138（1993），第 1 期，113–171。[29] C. Millichap 和 W. Worden, *Hidden symmetries and commensurability of 2-bridge link complements* **285** 2016 453 484 ，《太平洋数学杂志》（），–。[30] D. Mumford、C. Series 和 D. Wright, *Indra's pearls. The vision of Felix Klein*，剑桥大学出版社，纽约，2002。xx+396 页。

[31] M. Ozawa, *Non-triviality of generalized alternating knots*, 《结理论及其分支》15 (2006), no. 3, 351–360. [32] M. Ozawa, *Essential state surfaces for knots and links* **91** 2011 3, , 《澳大利亚数学会杂志》 ( ), no. – , 391–404. [33] J. Parker and S. P. Tan, *Caroline Series and Hyperbolic Geometry*, 《美国数学会通报》70 (2023), no. 3, 380–389. [34] J. S. Purcell, *Hyperbolic knot theory*, 数学研究生教材, 209. American Math- ematical Society, 罗得岛州普罗维登斯, 2020. xviii+369 pp. [35] M. Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved cube complexes*, 《伦敦数学会会刊》(3) 71 (1995), no. 3, 585–617. [36] S. Sakai, *A characterization of alternating link exteriors in terms of cubed complexes*, 《结理论及其分支》27 (2018), no. 8, 1850047, 8 pp. [37] S. Sakai and M. Sakuma, *Combinatorial local convexity implies convexity in finite dimensional CAT(0) cubed complexes* 2302 10500 2 [ ] , arXiv: . v math.GT . [38] M. Sakuma, *The geometries of spherical Montesinos links*, 《神户数学杂志》 7 (1990), 167–190. [39] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements* **21** 1995 393 439 , 《日本数学杂志》(N.S.) ( ), – . [40] M. Sakuma and Y. Yokota, *An application of non-positively curved cubings of alternating links*, 《美国数学会会刊》146 (2018), no. 7, 3167–3178. [41] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, 《数学杂志》65 (1956), 133–170. [42] T. Soma, *Existence of ruled wrappings in hyperbolic 3-manifolds*, 《几何与拓扑》10 (2006), 1173–1184. [43] StackExchanges, *Convex subcomplexes of CAT*(0) *cubical complexes*, https://mathoverflow. net/questions/194235/convex-subcomplexes-of-cat0-cubical-complexes [44] M. Takahashi, *On the concrete construction of hyperbolic structures of* 3*-manifolds*, 《筑波数学杂志》 9 (1985), no. 1, 41–83. [45] D. Thurston, *Hyperbolic volume and the Jones polynomial*, 格勒诺布尔暑期学校“Invariants des noeuds et de vari´et´es de dimension 3”讲座笔记，1999年6月，可从 http://pages.iu.edu/∼dpthurst/speaking/Grenoble.pdf 获取。 [46] W. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, 《美国数学会通报》(N.S.) 6 (1982), no. 3, 357–381. [47] W. Thurston, *The geometry and topology of three-manifolds*, 可从 http://library.msri.org/books/gt3m/ 获取。[48] Y. Yokota, *On the complex volume of hyperbolic knots*, 《结理论及其分支》20 (2011), 955–976.

Gifu Higashi High School, 4-17-1, noisshiki, Gifu City 500-8765, Japan*Email address*: shunsuke463@gmail.comAdvanced Mathematical Institute,
Osaka Metropolitan University, 3-3-138, Sugi-moto, Sumiyoshi, Osaka City 558-8585, JapanDepartment of Mathematics, Faculty of Science, Hiroshima University,
Higashi-Hiroshima, 739-8526, Japan*Email address*: sakuma@hiroshima-u.ac.jp