arXiv:2302.11037v1 [math.CA] 21 Feb 2023

贝塞尔算子虚幂的尖锐估计

THE ANH BUI、XUEJING HUO 和 JI LI

Abstract. 令 $Lf(x) := -\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{r}{x}\frac{d}{dx}f(x) \quad x > 0, r > 0$ 为定义在 $((0,\infty), |\cdot|, x^r dx)$ 上的贝塞尔算子。本文证明了贝塞尔算子的虚幂 $L^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$ 的精确弱型 $(1,1)$ 估计。

1. Introduction

令 $r > 0$。考虑空间 $X = ((0,\infty), |\cdot|, d\mu(x))$，其中测度 $d\mu$ 由 $d\mu(x) = x^r dx$ 定义，且 $|\cdot|$ 为通常的欧几里得距离。用 $I_a(x) = \{x \in X : |x-y| < a\}$ 表示以 $x \in X$ 为中心、长度为 $2a > 0$ 的区间。不难看出

$$\mu(I_a(x)) \simeq \begin{cases} ax^r, & x > a \\ a^{r+1}, & 0 < x < a. \end{cases} \tag{1}$$

令 $n = r + 1$，可知存在 $C > 0$ 使得

$$\mu(I_{2a}(x)) \le Ca^n \mu(I_a(x)) \tag{2}$$

对所有 $x \in X$ 和 $a > 0$ 均成立。因此，空间 $((0,\infty), |\cdot|, \mu)$ 按照 Coifmann 和 Weiss 的意义是一个齐次型空间（见 [2]）。

本文考虑由 Muckenhoupt–Stein 研究的二阶贝塞尔微分算子

$$Lf(x) := -\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{r}{x}\frac{d}{dx}f(x), \quad x > 0, \tag{3}$$

[10]。与贝塞尔算子相关的调和分析是一个有趣的课题，吸引了广泛关注。例如，参见 [1, 5, 7, 11, 15] 及其中的参考文献。

根据谱理论，L 具有谱分解

$$L = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda),$$

其中 $\{E(\lambda) : \lambda \ge 0\}$ 是 L 的谱分解。若 F 是 $[0,\infty)$ 上的有界博雷尔可测函数，则算子

$$F(L) = \int_0^\infty F(\lambda) dE(\lambda)$$

在 $L^2(X)$ 上有界。下文中，我们用 $K_{F(L)}(x,y)$ 表示 $F(L)$ 的核。

本文考虑带有 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的虚幂算子 $L^{i\alpha}$。根据谱理论，有 $\|L^{i\alpha}\|_{L^2(X)\to L^2(X)} = 1$。对于 $L^{i\alpha}$ 在 $L^p(X)$ 上的有界性，其中 $p \ne 2$，若应用 [3] 中的一般谱乘子定理（另见 [7]），则对任意 $\epsilon > 0$，

$$\|L^{i\alpha}\|_{L^p(X)\to L^p(X)} \le C_\epsilon (1+|\alpha|)^{n|1/p-1/2|+\epsilon} \quad \text{for } 1 < p < \infty. \tag{4}$$

注意，在拉普拉斯算子的经典情形下，式（4）中的界 $(1+|\alpha|)^{n|1/p-1/2|+\epsilon}$ 可以替换为 $(1+|\alpha|)^{n|1/p-1/2|}$。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 42B20, 42B25. *Key words and phrases.* 尖锐估计，贝塞尔算子，虚幂算子。

本文的主要目标是证明虚幂算子 $L^{i\alpha}$ 的以下尖锐估计。

定理 1.1. 设 L 为由 (3) 定义的贝塞尔算子，且 $r>0$。那么，对于每个 $\alpha\in\mathbb{R}$，我们有

$$\|L^{i\alpha}\|_{L^1(X)\to L^{1,\infty}(X)}\lesssim(1+|\alpha|)^{n/2}. \tag{5}$$

通过插值，对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $1<p<\infty$，我们有

$$\|L^{i\alpha}\|_{L^p(X)\to L^p(X)}\lesssim(1+|\alpha|)^{n|1/p-1/2|}. \tag{6}$$

在 [2] 中，对于满足二阶高斯上界的非负自伴算子，已证明了这样一个尖锐估计，但底层空间必须满足多项式体积增长。由于贝塞尔情形下的测度 $d\mu$ 不满足 [2], 中的多项式体积增长，因此定理 1.1 并非 [14] 中结果的推论。

本文的组织结构如下。第 2 节中，我们回顾贝塞尔算子函数演算的一些基本性质。定理 1.1 的证明将在第 3 节给出。

记号。本文中，我们用 C 表示正的常数，它们与所涉及的主要参数无关，且其取值可能在每次出现时有所变化。写作 $f\lesssim g$ 意味着 $f\le Cg$。我们还用 $f\sim g$ 表示 $C^{-1}g\le f\le Cg$。

设 I 是 X 中的一个区间。若未作特别说明，这意味着 $I=I_{r_I}(x_I)$。对于每个 $\lambda>0$ 及每个区间 I，记 $\lambda I=I_{\lambda r_I}(x_I)$。对于 $j\in\mathbb{N}$ 和一个区间 $I\subset X$，我们写作

$$S_j(I)=2^j\backslash 2^{j-1}I\quad j\ge 1,$$

并令 $S_0(I)=I$。

2. Preliminaries

注意，由于贝塞尔算子 L 是一个非负自伴算子，它生成半群 e^{-tL}，其中 $t>0$。此外，半群 e^{-tL} 的核 $p_t(x,y)$ 满足高斯上界，即存在 C、$c>0$，使得

$$|p_t(x,y)|\le\frac{C}{\mu(I_{\sqrt{t}}(x))}\exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{ct}\Big)$$

对所有 x、$y\in X$ 和 $t>0$。

作为 [13, 引理 7]（另见 [14, 引理 2]）的推论，我们有：

引理 2.1. 设 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 是一个偶函数，满足 $\operatorname{supp}\varphi\subset(-1,1)$ 且 $\hat{}\,\varphi=2\pi$。记 Φ 为 φ 的傅里叶变换。那么，$\Phi(t\sqrt{L})$ 的核 $K_{\Phi(t\sqrt{L})}$ 满足

$$\operatorname{supp}K_{\Phi(t\sqrt{L})}\subset\{(x,y)\in X\times X:|x-y|\le t\}, \tag{7}$$

and

$$|K_{\Phi(t\sqrt{L})}(x,y)|\lesssim\frac{1}{\mu(I_t(x))} \tag{8}$$

对所有 x、$y\in X$ 和 $t>0$ 均成立。

值得注意的是，与经典情形类似，L 的谱乘子可以通过傅里叶-贝塞尔变换定义。我们首先回顾傅里叶-贝塞尔$\widehat{\ }$变换的概念。例如参见 [7, 11]。令 $f(\lambda)$ $\lambda>0$表示函数 $f\in L^1(X)$的傅里叶-贝塞尔变换。即

$$\widehat{f}(\lambda)=\int_0^\infty f(x)\phi_\lambda(x)d\mu(x), \tag{9}$$

其中，$\phi_\lambda(x) = a(r)(\lambda x)^{-(r-1)/2}J_{(r-1)/2}(x)$，$x \geq 0$，$a(r) = 2^{(r-1)/2}\Gamma((r+1)/2)$，且 J_ν 表示 ν 阶第一类贝塞尔函数。函数 ϕ_λ、$\lambda > 0$ 是贝塞尔算子 L的特征函数。众所周知，

$$L\phi_\lambda = \lambda^2\phi_\lambda, \quad \lambda > 0.$$

例如，参见 [9, 12]。

我们还有

$$f(x) = a(r)^{-1}\int_0^\infty \widehat{f}(\lambda)\phi_\lambda(x)d\mu(\lambda), \tag{10}$$

几乎处处成立，其中 $f, \widehat{f} \in L^1(X)$。

以下普朗歇尔公式成立：

$$\|f\|_2 = a(r)^{-1}\|\widehat{f}(\lambda)\|_2. \tag{11}$$

对于任意 $\mathtt{b}$ 有界函数 m 在 $(0,\infty)$ 上，我们现在定义傅里叶-贝塞尔乘子算子

$$(T_m f)\widehat{\ } = m\widehat{f}.$$

根据谱理论，我们有

$$m(\sqrt{L})f = T_m f. \tag{12}$$

对于 $y \in X$，广义平移 τ^y 定义为

$$\tau^y f(x) = \int_{|x-y|}^{x+y} f(z)dW_{x,y}(z),$$

其中 $dW_{x,\,y}(z) = dW_{x,\,y}(z)$ 和 $dW_{x,\,y}(z)$ 是支撑在区间 $[|x-y|, x+y]$ 上的一维概率测度，定义为

$$dW_{x,y}(z) = c(r)\frac{\Delta(x,y,z)^{r-2}}{(xyz)^{r-1}}\,d\mu(z),$$

其中 $c(r) = 2^{r-2}\Gamma((r+1)/2)\Gamma(r/2)^{-1}\pi^{-1/2}$，而 $\Delta(x,y,z)$ 表示三边长分别为 x、y、z 的三角形面积。已知对于所有 $1 \leq p \leq\infty$，τ^y 是 $L^p(X)$ 上的压缩算子。更确切地说，我们有

$$\|\tau^y f\|_{L^p(X)} \leq \|f\|_{L^p(X)} \tag{13}$$

对于所有 $f \in L^p(X)$ $p \in [1,\infty]$ 和 $y \in X$。

现在，我们通过如下方式定义两个适当函数 f 和 g 的广义卷积：

$$f * g(x) = \int_X \tau^x f(y)g(y)d\mu(y) = \int_X \tau^y f(x)g(y)d\mu(y).$$

显然，$f * g(x) = g * f(x)$，并且

$$(f * g)\widehat{\ }(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x).$$

3. Sharp estimates for the imaginary powers $L^{i\alpha}$

本节旨在证明定理 1.1。

定理 1.1 的证明：我们遵循 [6] 中的标准策略（另见 [8, 4, 2]）。我们需要证明

$$\mu\big(\{|L^{i\alpha}f| > \lambda\}\big) \lesssim (1+|\alpha|)^{n/2}\frac{\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}$$

对所有 $f \in L^1(X)$ 和 $\lambda > 0$。

固定 $f \in L^1(X)$ 和 $\lambda > 0$。根据 Calder´on-Zygmund 分解，我们可以将 $f = g + \sum_k b_k$ 分解为： $g + b$ ，使得好部分 g 和坏坏 b 满足以下条件:

$$|g(x)| \lesssim \lambda \text{ for a.e. } x \in X, \quad \|g\|_{L^1(X)} \lesssim \|f\|_{L^1(X)}, \tag{14}$$

and

(i) 对某个区间 $I_k \subset X$ 及每个 k， $\operatorname{supp} b_k \subset I_k$ ；

(ii) $\|b_k\|_{L^1(X)} \leq \lambda\mu(I_k)$;

(iii) $\sum_k \mu(I_k) \lesssim \frac{\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}$;

(iv) $\sum_k \chi_{2I_k} \lesssim 1$。

例如参见 [2]。

按照惯例，我们记作

$$\mu\Big(\Big\{|L^{i\alpha} f| > \lambda\Big\}\Big) \leq \mu\Big(\Big\{|L^{i\alpha} g| > \lambda/2\Big\}\Big) + \mu\Big(\Big\{|L^{i\alpha} b| > \lambda/2\Big\}\Big).$$

与好部分相关的项可通过标准论证进行估计。利用切比雪夫不等式以及 $L^{i\alpha}$ 的 L^2-有界性,

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\Big\{|L^{i\alpha} g| > \lambda/2\Big\}\Big) &\lesssim \frac{\|L^{i\alpha} g\|_2^2}{\lambda^2} \\
&\lesssim \frac{\|g\|_2^2}{\lambda^2} \\
&\lesssim \frac{\lambda \|g\|_{L^1(X)}}{\lambda^2} \\
&\lesssim \frac{\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}.
\end{aligned}$$

对于坏部分，定义

$$\theta = \frac{1}{4M\sqrt{1+|\alpha|}},$$

其中 M 是一个正整数，稍后将固定，并令 Φ 为引理 2.1 中的函数。然后我们令 $\Phi(\theta r_{I_k} t) = \Phi(\theta r_{I_k} t)$。于是有

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\Big\{|L^{i\alpha} b| > \lambda/2\Big\}\Big) &\leq \mu\Big(\Big\{\Big|L^{i\alpha}\Big[\sum_k \Big(I - \big(I - \Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M\Big) b_k\Big]\Big| > \lambda/4\Big\}\Big) \\
&\quad + \mu\Big(\Big\{\Big|\sum_k L^{i\alpha}\big(I - \Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M b_k\Big| > \lambda/4\Big\}\Big) \\
&=: E_1 + E_2.
\end{aligned}$$

为了估计项 E_1，注意到

$$\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L}) := I - \big(I - \Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M = \sum_{k=1}^{M} c_k [\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})]^k,$$

其中 c_k 是系数。

由引理 2.1,

$$K_{\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})}(\cdot,\cdot) \subset \{(x,y) : d(x,y) < r_{I_k}/2\},$$

这意味着

$$\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L}) b_k \subset 2I_k, \tag{15}$$

and

$$\begin{aligned}\sup_{x\in 2I_k}|K_{\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})}(x,y)| &\lesssim \sup_{x\in 2I_k}\frac{1}{\mu(I_{\theta r_{I_k}}(x))}\\ &\lesssim \sup_{x\in 2I_k}\frac{\theta^{-n}}{\mu(I_{r_{I_k}}(x))}\simeq\frac{\theta^{-n}}{\mu(I_k)},\end{aligned}\tag{16}$$

其中，第二个不等式中用到了 (2)。

由此可得

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_k\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\Big\|_\infty &\lesssim \sum_k\|\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\|_\infty\\ &\lesssim\sum_k\frac{\theta^{-n}}{\mu(I_k)}\|b_k\|_{L^1(X)}.1_{2I_k}\\ &\lesssim\lambda\theta^{-n},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_k\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\Big\|_{L^1(X)} &\lesssim \sum_k\|\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\|_{L^1(X)}\\ &\lesssim\sum_k\|b_k\|_{L^1(X)}\\ &\lesssim\|f\|_{L^1(X)},\end{aligned}$$

其中，在第二个不等式中，我们利用了 $\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})$ 的 L^1 有界性，这由引理 2.1 推出。

因此，由切比雪夫不等式、 $L^{i\alpha}$ 的 L^2 有界性、(iv)、(15)、(16) 和 (ii)，可得

$$\begin{aligned}E_1&\lesssim\frac{\big\|\sum_k\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\big\|_2^2}{\lambda^2}\\ &\lesssim\frac{\big\|\sum_k\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\big\|_2^2}{\lambda^2}\\ &\lesssim\frac{\lambda\theta^{-n}\big\|\sum_k\Psi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})b_k\big\|_{L^1(X)}}{\lambda^2}\\ &\lesssim\frac{\theta^{-n}\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}\\ &\simeq(1+|\alpha|)^{n/2}\frac{\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}.\end{aligned}$$

剩下的任务是估计 E_2。为此，我们写作

$$\begin{aligned}E_2&\le\mu\Big(\bigcup_k 4I_k^*\Big)+\mu\Big(\Big\{x\notin\bigcup_k 4I_k^*:\Big|\sum_k L^{i\alpha}\big(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M b_k(x)\Big|>\lambda/4\Big\}\Big)\\ &=: E_{21}+E_{22},\end{aligned}$$

其中 $I_k^*=\sigma I_k$，且 $\sigma=\sqrt{1+|\alpha|}$。

由 (2) 和 (iii)，

$$\begin{aligned}E_{22}&\le\sum_k\mu(4I_k^*)\\ &\lesssim\sigma^n\sum_k\mu(I_k)\\ &\lesssim(1+|\alpha|)^{n/2}\frac{\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}.\end{aligned}$$

对于项 E_{22}，由切比雪夫不等式，

$$\begin{aligned} E_{22} &\lesssim \frac{\Big\| \sum_k L^{i\alpha}\big(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M b_k\Big\|_{L^1(X\setminus \cup_k 4I_k^*)}}{\lambda} \\ &\lesssim \frac{\sum_k \|L^{i\alpha}\big(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M b_k\|_{L^1(X\setminus 4I_k^*)}}{\lambda}. \end{aligned}$$

只需证明对每个 k,

$$\sup_{y\in I_k}\int_{X\setminus 4I_k^*} |K_{L^{i\alpha}\left(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\right)^M}(x,y)|d\mu(x) \lesssim (1+|\alpha|)^{n/2}, \tag{17}$$

其中 $K_{L^{i\alpha}\left(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\right)^M}(x,y)$ 是 $L^{i\alpha}\big(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\big)^M$ 的核。

一旦证明了（17），我们便得到

$$\begin{aligned} E_{22} &\lesssim (1+|\alpha|)^{n/2}\frac{\sum_k \|b_k\|_{L^1(X)}}{\lambda} \\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{n/2}\frac{\|f\|_{L^1(X)}}{\lambda}, \end{aligned}$$

这就完成了证明。

现在证明命题 (17)。为此，取一个偶函数 $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$，其支集包含于 $\{\xi:\ 1/4\le|\xi|\le 4\}$，且在 $\{\xi:\ 1/2\le|\xi|\le 2\}$ 上满足 $\psi=1$，使得

$$\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\psi(2^{-\ell}x)=1, \qquad x\neq 0.$$

Set

$$F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x)=\psi(2^{-\ell}x)x^{2i\alpha}(1-\Phi_{\theta,r_{I_k}}(x))^M$$

从而

$$x^{2i\alpha}(1-\Phi_{\theta,r_{I_k}}(t))^M=\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x), \quad x\neq 0.$$

于是，对每个 k 和 $y\in I_k$，有

$$\int_{X\setminus 4I_k^*}|K_{L^{i\alpha}\left(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\right)^M}(x,y)|d\mu(x)\le\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_{X\setminus 4I_k^*}|K_{F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(\sqrt{L})}(x,y)|d\mu(x),$$

其中 $K_{F_{\ell,\ \theta,\ r_{I_k}}(\sqrt{L})}(x,y)$ 是 $F_{\ell,\ \theta,\ r_{I_k}}(\sqrt{L})$ 的核。

根据 (12),

$$F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(\sqrt{L})f=T_{F_{\ell,\theta,r_{I_k}}}f.$$

由此可得

$$K_{F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(\sqrt{L})}(x,y)=\tau^y k_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x),$$

其中

$$k_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x)=\widehat{F}_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x):=a(r)^{-1}\int_0^\infty F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(\lambda)\phi_\lambda(x)\lambda^r d\lambda.$$

因此，对于每个 k 和 $y\in I_k$,

$$\int_{X\setminus 4I_k^*}|K_{L^{i\alpha}\left(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\right)^M}(x,y)|d\mu(x)\le\sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_{X\setminus 4I_k^*}|\tau^y k_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x)|d\mu(x).$$

对每个 k 和 $y\in I_k$，令 $A_k=\{z:\ z>\sigma r_{I_k}\}$。则对 $y\in I_k$ 和 $x\in X\setminus 4I_k^*$，我们有

$$\tau^y[k_{\ell,\theta,r_{I_k}}.1_{X\setminus A_k}](x)=0. \tag{18}$$

事实上，若 $z \in 1_{X\setminus A_k}$，即 $z \le \sigma r_{I_k}$，则只要 $x \in X\setminus 4I_k^*$和 $y \in I_k$，就有 $z < |x-y|$。由此得到（18）。因此，对每个 k 和 $y \in I_k$,

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus 4I_k^*} |K_{L^{i\alpha}\left(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\right)^M}(x,y)|d\mu(x) &\le \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_{X\setminus 4I_k^*}|\tau^y[k_{\ell,\theta,r_{I_k}}.1_{A_k}](x)|d\mu(x)\\ &\le \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_X |[k_{\ell,\theta,r_{I_k}}.1_{A_k}](x)|d\mu(x)\\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}\int_{x>\sigma r_{I_k}}|k_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x)|d\mu(x),\end{aligned} \tag{19}$$

其中，在第二个不等式中我们用到了 (13)。

利用 Plancherel 定理 (11)，对于固定的 $s_0 \in 2\mathbb{N}, s_0 > n/2$,

$$\begin{aligned}\|(1+(2^\ell x)^2)^{s_0/2}k_{\ell,\theta,r_{I_k}}\|_2 &= \|[(1+2^{2\ell}L)^{s_0/2}F_{\ell,\theta,r_{I_k}}]\widehat{\ }\,\|_2\\ &= a(r)^{-1}\|(1+2^{2\ell}L)^{s_0/2}F_{\ell,\theta,r_{I_k}}\|_2.\end{aligned}$$

利用如下形式

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - \frac{r}{x}\frac{d}{dx},$$

并且由于 supp $F_{\ell,\theta,r_{I_k}} \subset [2^{\ell-1}, 2^{\ell+1}]$ with $F_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x) = \psi(2^{-\ell}x)x^{2i\alpha}(1-\Phi_{\theta,r_{I_k}}(x))^M$，我们有以下有用的观察:

- 若对函数 $\psi(2^{-\ell}x)$ 作用算子 d/dx 或 r/x，则会得到一个因子$\simeq 2^\ell$;
- 若对函数 $x^{2i\alpha}$ 应用算子 d/dx 和 r/x，则分别得到因子 $\simeq \alpha 2^\ell$ 和$\simeq 2^\ell$。在这两种情况下，该因子都被 $(1+|\alpha|)2^\ell$ 控制;
- 由于 Φ 是一个偶 Schwartz 函数，且 $\Phi(0) = 1$ 和 $\Phi'(0) = 0$，因此 $1-\Phi(t) \simeq t^2$ 当 $t \to 0$时成立。于是，若对 $(1-\Phi_{\theta,r_{I_k}}(x))^M$ 应用算子 d/dx 和 r/x，则会得到一个小于或等于 $\min\{1,(2^\ell\theta r_{B_k})^{2M}\}$（的某个倍数）的因子。

考虑到这些说明，可以验证

$$\begin{aligned}\|(1+2^{2\ell}L)^{s_0/2}F_{\ell,\theta,r_{I_k}}\|_2 &\lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}\Big(\int_{2^{\ell-1}}^{2^{\ell+1}} d\mu(x)\Big)^{1/2}\\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}2^{\ell n/2}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\},\end{aligned}$$

这意味着

$$\|(1+(2^\ell x)^2)^{s_0/2}k_{\ell,\theta,r_{I_k}}\|_2 \lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}2^{\ell n/2}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}.$$

结合 H¨older 不等式可得，对每个 k,ℓ,

$$\begin{aligned}&\int_{x>\sigma|y-x_{I_k}|}|k_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x)|d\mu(x)\\ &\le \|(1+(2^\ell x)^2)^{s_0/2}k_{\ell,\theta,r_{I_k}}\|_2\Big(\int_{x>\sigma r_{I_k}}(1+(2^\ell x)^2)^{-s_0}d\mu(x)\Big)^{1/2}\\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}2^{\ell n/2}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}\Big(\int_{x>\sigma r_{I_k}}(1+(2^\ell x)^2)^{-s_0}d\mu(x)\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

通过直接计算，我们得到

$$\Big(\int_{x>\sigma r_{I_k}}(1+(2^\ell x)^2)^{-s_0}d\mu(x)\Big)^{1/2} \le (\sigma r_{I_k})^{n/2}(2^\ell\sigma r_{I_k})^{-s_0}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_{x>\sigma r_{I_k}} |k_{\ell,\theta,r_{I_k}}(x)|d\mu(x) &\lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}(2^\ell\sigma r_{I_k})^{n/2}(2^\ell\sigma r_{I_k})^{-s_0}\\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}(2^\ell\sigma r_{I_k})^{-(s_0-n/2)}\\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{s_0}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}(2^\ell\theta r_{I_k})^{-(s_0-n/2)}(\theta^{-1}\sigma)^{-(s_0-n/2)}\\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{n/2}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}(2^\ell\theta r_{I_k})^{-(s_0-n/2)},\end{aligned}$$

其中，在最后一个不等式中，我们用到了事实 $\theta^{-1}\sigma = (1+|\alpha|)$。

代入（19），得到

$$\begin{aligned}\int_{X\setminus 4I_k^*} |K_{L^{i\alpha}\left(I-\Phi(\theta r_{I_k}\sqrt{L})\right)^M}(x,y)|d\mu(x) &\lesssim \sum_{\ell\in\mathbb{Z}}(1+|\alpha|)^{n/2}\min\{1,(2^\ell\theta r_{I_k})^{2M}\}(2^\ell\theta r_{I_k})^{-(s_0-n/2)}\\ &\lesssim (1+|\alpha|)^{n/2},\end{aligned}$$

只要 $2M > s_0 - n/2$。

Th是 comp letes 我们的证明。 □

致谢。T. A. Bui 和 J. Li 获得澳大利亚研究委员会研究基金 ARC DP220100285 的资助。

References

[1] J. Betancor、A. Castro 和 J. Curbelo，多维贝塞尔算子的谱乘子，《傅里叶分析与应用杂志》 17 2011 932 975 [1] ( )，–。

[2] R.R. Coifman 和 G. Weiss，哈代空间的扩展及其在分析中的应用，*Bull. Amer. Math. Soc.* ( )，–。83 1977 569 645 [1, 2, 3, 4]

[3] X.T. Duong、E.M. Ouhabaz 和 A. Sikora，普朗歇尔型估计与尖锐谱乘子。《泛函分析杂志》 196 2002 443 485 [1] ( )，–。

[4] X. T. Duong 和 A. McIntosh，不规则区域上具有非光滑核的奇异积分算子，《伊比利亚美洲数学评论》 15 1999 233 265 [3] ( )，–。

[5] J. Dziubanski、M. Preisner 和 B. Wrobel，汉克尔变换的多变量 Hörmander 型乘子定理，《傅里叶分析与应用杂志》 19 2013 417 437 [1] ( )，–。

[6] C. Fefferman，强奇异卷积算子的不等式，《数学学报》 124 1970 9 36 [3] ( )，–。

[7] J. Gosselin 和 K. Stempak，傅里叶-贝塞尔乘子的弱型估计，《美国数学会会刊》106 (1989 655 662 [1, 2])，–。

[8] W. Hebisch，广义海森堡群上的乘子定理，《数学讨论》 65 1993 231 239 [3] ( )，–。

[9] N.N. Lebedev，，*Special Functions and Their applications* 1972 [3] Dover，纽约，。

[10] B. Muckenhoupt 和 E. M. Stein，经典展开及其与共轭调和函数的关系，《美国数学会汇刊》 118 1965 17 92 [1] ( )，–。

[11] K. Stempak，傅里叶-贝塞尔变换的 Littlewood-Paley 理论，《巴黎科学院报告》 303 1986 15 18 [1, 2] ( )，–。

[12] E.C. Titchmarsh，*Introduction to the Theory of Fourier Integrals* 1937 [3] ，Clareoton出版社，牛津，。

[13] A. Sikora，黎斯变换、高斯界与波动方程方法，《数学杂志》( )，第 3 期，643 662–。

[14] A. Sikora 和 J. Wright，拉普拉斯算子的虚幂，《美国数学会会刊》129 (2001)，1745– 1754 [2] 。

[15] G.N. Watson，*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*，剑桥大学出版社，剑桥（1966）。[1] 24[2] 2004

School of Mathematical and Physical Sciences, Macquarie University, NSW 2109, Australia
Email address: the.bui@mq.edu.au

School of Mathematical and Physical Sciences, Macquarie University, NSW 2109, Australia
Email address: xuejing.huo@students.mq.edu.au

School of Mathematical and Physical Sciences, Macquarie University, NSW 2109, Australia
Email address: ji.li@mq.edu.au