arXiv:2302.11039v1 [math.AC] 21 Feb 2023

由匹配定义的代数的 Lefschetz 性质

Yasuhide Numata

Abstract. 本文研究完全图中由 k 条边组成的匹配的加权生成函数。我们将该生成函数的湮灭子在多项式环中的商环定义为一个 Artin Gorenstein 代数，并证明该代数具有强 Lefschetz 性质。

1. Introduction

Artin 代数的 Lefschetz 性质，是对紧致 K¨ahler 流形的上同调环所具有的、称为 Hard Lefschetz 定理的性质的一种代数抽象，另见 [1, 5]。对于一个满足 $A^{(d)} \neq 0$的分次代数 $A = \bigoplus_{d=0}^{s} A^{(d)}$，若 A 存在一个 Lefschetz 元 $l \in A^{(1)}$，使得乘法映射

$$\begin{aligned} \times l^{s-2d} \colon A^{(d)} &\to A^{(s-d)} \\ f &\mapsto f l^{s-2d} \end{aligned}$$

对每个带有 $2d \leq s$ 的 d 都是双射。关于 Artin Gorenstein 代数的强 Lefschetz 性质，已有一种利用高阶 Hessian 矩阵的判据 [8, 4], 另见引理 2.1。强 Lefschetz 性质不仅从代数理论的角度进行研究，也从组合数学的角度进行研究。最近，一些作者研究由组合多项式定义的 Artin Gorenstein 代数，并计算这些多项式的高阶 Hessian 矩阵的行列式，以证明这些代数具有强 Lefschetz 性质。例如，文献 [3, 11, 10, 7, 6], 研究了拟阵的基生成函数，而文献 [9] 研究了柏拉图立体的面所对应的加权生成函数。本文考虑完全图中由 k 条边组成的匹配生成函数，即由互不共享顶点的边集组成的生成函数。我们证明了由该加权生成函数定义的 Artin Gorenstein 代数具有强 Lefschetz 性质。

2020 年数学主题分类：05C70、05A15、13F70。关键词：Artin Gorenstein 代数；Poincar´e 对偶代数；加权生成函数。作者部分受到 JSPS KAKENHI 项目编号 JP18K03206 的资助。

本文结构如下：第 2 节回顾 Artin Gorenstein 代数的 Lefschetz 性质的定义及已知事实。第 3 节定义匹配生成函数，并计算高阶 Hessian 矩阵，以证明由匹配生成函数定义的 Artin Gorenstein 代数具有强 Lefschetz 性质。

2. Lefschetz properties and higher Hessians

设 $\mathbb{K}$ 是一个特征为 char($\mathbb{K}$) $= 0$的域。考虑变量由有限集 U 索引的多项式环$P = \mathbb{K}[x_i | i \in U]$，其中 deg($x_i$) =1。对于齐次多项式 $\Phi \in P$，我们将 Φ 的湮灭子 Ann(Φ) 定义为

$$\mathrm{Ann}(\Phi) = \{\, f \in P \mid f(\partial)\Phi = 0 \,\},$$

其中 $f(\partial)$ 是由 f 通过对每个 $i \in U$，将 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ 替换为 x_i 得到的偏导算子。由于湮灭子 Ann(Φ) 是一个齐次理想，商环 $A = P/$Ann(Φ) 是一个分次环。令 $A^{(d)}$ 为次数 d的齐次分量。假设 deg(Φ) $= s$。那么对于 $d > s$，有 $A^{(s)} \simeq A^{(0)} \simeq \mathbb{K}$ 和 $A^{(d)} = 0$。我们称由某个齐次多项式得到的商环 $A = P/$Ann(Φ) 为具有标准分次的 Artin Gorenstein代数。已知双线性映射称为庞加莱对偶，定义如下：

$$\begin{aligned} A^{(d)} \times A^{(s-d)} &\to \mathbb{K} \\ (f, g) &\mapsto f(\partial)g(\partial)\Phi \end{aligned}$$

非退化。有时，代数 A 也称为庞加莱对偶代数。对于具有标准分次的 Artin Gorenstein代数，以下是关于乘法映射$\times l^{s-2d}$为双射的判据：$A^{(d)} \to A^{(s-d)}$

引理 2.1（[8, 4]）。设 $\Phi \in P$为次数s的齐次多项式。设 $A^{(d)}$ 为商环 $A =P/$Ann(Φ) 中次数为 d的齐次元素集合。假设 $B \subset P$ 的像构成 $\mathbb{K}$-向量空间 $A^{(d)}$的一组基。设 H为矩阵（$F(\partial)F'(\partial)\Phi)_{F,\ F' \in B}$。对于 $l = \sum_{j \in U} a_j x_j \in A^{(1)}$，乘法映射 $\times l^{s-2d}$: $A^{(d)} \to A^{(s-d)}$ 是双射，当且仅当 det(H)$|_{\forall i,\ x_i = a_i} \neq 0$。

我们称矩阵 H 为关于基 B 的 d 次 Hessian矩阵。由引理 2.1，若某个 d 次 Hessian矩阵的行列式是非零多项式，则诱导双射乘法映射 $\times l^{s-2d}$: $A^{(d)} \to A^{(s-d)}$ 的元素 $l \in A^{(1)}$ 构成 $A^{(1)}$ 中的一个开稠密子集。因此，当且仅当所有满足 $2d \leq s$ 的 d 对应的 d 次 Hessian矩阵都是非零多项式时， A 具有强 Lefschetz 性质。

在 [3], 中，研究了由拟阵的基生成函数定义的Artin Gorenstein 代数的Lefschetz性质。在 [3], 初等对称多项式的扩展摘要 [2] 中，

以作为均匀拟阵基生成函数的初等对称多项式为例进行讨论。

例 2.2。对于集合 U，我们将 $\binom{U}{k}$ 定义为由 k 个元素组成的 U 的子集的集合。我们将 k 阶初等对称多项式 $e_k(x_i|i \in U)$ 定义为

$$e_k(x_i|i \in U) = \sum_{S \in \binom{U}{k}} x^S,$$

其中 $x^S = \prod_{i \in S} x_i$。根据 [3, 定理 4.3]，$A = P/\operatorname{Ann}(e_k(x_i|i \in U)) = \bigoplus_{i=0}^{k} A^{(i)}$ 具有强 Lefschetz 性质。此外，如果 $2d \leq k$，则所有次数为 d 的单项式的像构成 $A^{(d)}$ 这一 $\mathbb{K}$-向量空间的一个基。因此，希尔伯特级数 $h = (h_0, \ldots, h_k)$ 为

$$\left(\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \ldots, \binom{k}{k}\right)$$

其中 h_d 是 $\mathbb{K}$-向量空间 $A^{(d)}$ 的维数。下列矩阵是一个 d 阶 Hessian矩阵

$$\left(\partial^S \partial^{S'} e_k(x_i|i \in U)\right)_{S,S' \in \binom{U}{d}},$$

其中 $\partial^S = \prod_{i \in S} \partial_i$。由于代数 A 具有强 Lefschetz 性质，行列式是一个非零多项式。如果 $k = 2d$，则有

$$\partial^S \partial^{S'} e_{2d}(x_i|i \in U) = \begin{cases} 1 & (S \cap S' = \emptyset) \\ 0 & (S \cap S' \neq \emptyset) \end{cases}$$

对于 S、$S' \in \binom{U}{d}$。在这种情况下，第 d 个 Hessian矩阵的行列式（它也是 Poincar´e 对偶性$A^{(d)} \times A^{(d)} \to \mathbb{K}$的表示矩阵）是一个非零常数。

3. Weighted generating functions of matchings

本文中，我们只考虑简单无向图。因此，顶点集为 U 的图的一条边被视为 $\binom{U}{2}$ 中的一个元素。此外，我们假设顶点集 U 是整数集 $\mathbb{Z}$ 的一个非空有限子集。我们将完全图 K_U 定义为顶点集为 U、边集为 $\binom{U}{2}$ 的图。对于一个图，如果一组边中的任意两条不同边都不共享顶点，则称这组边为该图中的一个匹配。换言之，图的边集的子集 M 是一个匹配，当且仅当 e、$e' \in M$ 和 $e \neq e'$ 蕴含 $e \cap e' = \emptyset$。我们将 $\mathcal{M}(U)$ 定义为 K_U 中匹配的集合。我们还将集合 $\mathcal{M}(U, k)$ 定义为 $\{ M \in \mathcal{M}(U)$ 中由含有 k 条边的匹配组成的集合 $| \, |M| = k \}$。对于满足 $|U| = u$ 的有限集 U，有 $|\mathcal{M}(U, k)| = \binom{u}{2k}(2k-1)!!$。对于满足 $V = \{ v_1 < \ldots < v_{2d} \}$ 的集合 $V \subset U$，我们将 $M(V)$ 定义为匹配 $\{ \{ v_{2i-1}, v_{2i} \} \mid i = 1, \ldots, d \} \in \mathcal{M}(V, d) \subset \mathcal{M}(U, d)$。

我们将 P_U 定义为多项式环 $\mathbb{K}[x_e | e \in \binom{U}{2}]$，其变量对应于完全图 K_U 中的边。我们将 $\Phi_{U,k}$ 的加权生成函数定义为 $\mathcal{M}(U,k)$:

$$\Phi_{U,k} = \sum_{M \in \mathcal{M}(U,k)} x^M \in P_U.$$

根据定义，$\Phi_{U,\ k}$ 是一个次数为 k 的平方自由对称齐次多项式。我们定义 $A_{\Phi_{U,\ k}}$ 为商环 $P_U/\operatorname{Ann}(\Phi_{U,\ k})$。我们的主要结果如下:

定理 3.1（主要结果）。对于有限集 U，Artinian Gorenstein 代数 $A_{\Phi_{U,\ k}}$ 具有强 Lefschetz 性质，其 Lefschetz 元为 $l = \sum_{e \in \binom{U}{2}} x_e$。

为了证明主要定理，我们先证明以下引理:

引理 3.2。设 V 是 U 的子集，且满足 $|V| = 2d$。对于匹配 $M \in \mathcal{M}(V, d)$，$\partial^M \Phi_{U,\ k} = \Phi_{U \setminus V,\ k-d}$。

证明。由于映射

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(U \setminus V, k-d) &\to \left\{ \tilde{M} \in \mathcal{M}(U,k) \;\middle|\; M \subset \tilde{M} \right\} \\ M' &\mapsto M' \cup M \end{aligned}$$

是双射，因此通过直接计算可得该等式。 □

引理 3.3. 设

$$\begin{aligned} G_0 &= \left\{ x_e^2 \;\middle|\; e \in \binom{U}{2} \right\}, \\ G_1 &= \left\{ x^S \;\middle|\; S \subset \binom{U}{2} \textit{ is not a matching in } K_U \right\}, \\ G_2 &= \left\{ x^M - x^{M'} \;\middle|\; M, M' \in \mathcal{M}(V,d) \textit{ for some } V \in \binom{U}{2d} \right\}. \end{aligned}$$

湮灭子 $\operatorname{Ann}(\Phi_{U,k})$ 包含 $G = G_1 \cup G_1 \cup G_2$。

证明。由于 $\Phi_{U,k}$ 是一个平方自由多项式，显然湮灭子 $\operatorname{Ann}(\Phi_{U,k})$ 包含 G_0。由于匹配的子集也是匹配，若 S 不是匹配，则不存在包含 S 的匹配。因此，湮灭子 $\operatorname{Ann}(\Phi_{U,k})$ 包含 G_1。对于$M, M' \in \mathcal{M}(V, d)$，由引理 3.2 可得

$$(\partial^M - \partial^{M'})\Phi_{U,k} = \Phi_{U \setminus V, k-d} - \Phi_{U \setminus V, k-d} = 0$$

对于 $V \in \binom{U}{2d}$ 和 $M, M' \in \mathcal{M}(V, d)$。因此，湮灭子 $\operatorname{Ann}(\Phi_{U,k})$ 包含 G_2。 □

根据引理 3.3，若 $2d \le k$，则 $\left\{ x^{M(V)} \,\middle|\, V \in \binom{U}{2d} \right\}$ 的像生成 $\mathbb{K}$-向量空间 $A^{(d)}_{V\,k}$,。为了证明该集合线性无关，我们计算以下矩阵的行列式:

$$H_{U,k,d} = \left(\partial^{M(V)} \partial^{M(V')} \Phi_{U,k} \right)_{V,V' \in \binom{U}{2d}}.$$

引理 3.4。设 V、$V' \in \binom{U}{2d}$，其中 $2d \le k$ 和 $|U| = u$。对于 $M \in \mathcal{M}(V、\ d)$ 以及 $M' \in \mathcal{M}(V'、\ d)$,

$$\partial^M \partial^{M'} \Phi_{U,k} = \begin{cases} \Phi_{U\setminus(V\cup V'),k-2d} & (V \cap V' = \emptyset) \\ 0 & (V \cap V' \neq \emptyset). \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \partial^{M'} \partial^M \Phi_{U,k}|_{\forall e,\ x_e=1} &= \begin{cases} \binom{u-2d}{2k-4d}(2k-4d-1)!! & (V \cap V' = \emptyset) \\ 0 & (V \cap V' \neq \emptyset) \end{cases} \\ &= \binom{u-2d}{2k-4d}(2k-4d-1)!! \partial^{V'} \partial^V e_{2d}(x_i | i \in U). \end{aligned}$$

证明。由引理 3.2，我们有

$$\partial^M \Phi_{U,k} = \Phi_{U\setminus V,k-d}.$$

如果 $V \cap V' \neq \emptyset$，则 $U \setminus V$ 不包含 V'。因此，任何匹配 ˇ$M \in \mathcal{M}(U \setminus V)$ 都不包含 $M' \in \mathcal{M}(V'、\ 2k)$。在此情况下，$\partial^M \partial^{M'} \Phi_{U,\ k} = 0$ 如果 $V \cap V' = \emptyset$，则 $\partial^{M'} \Phi_{U\setminus V,\ k-d} = \Phi_{U\setminus(V\cup V')\ k-2d}$由引理 3.2。由于对于有限集 S，$|\mathcal{M}(S、\ k)| = \binom{|S|}{2k}(2k-1)!!$，因此在此情况下我们有 $\partial^{M'} \partial^M \Phi_{U,\ k}|_{\forall e,\ x_e=1} = \binom{u-2d}{2k-4d}(2k-4d-1)!!$。由于

$$\partial^S \partial^{S'} e_{2d}(x_i | i \in U) = \begin{cases} 1 & (S \cap S' = \emptyset) \\ 0 & (S \cap S' \neq \emptyset) \end{cases}$$

对于 S、$S' \in \binom{U}{d}$，我们有

$$\partial^{M'} \partial^M \Phi_{U,k}|_{\forall e,\ x_e=1} = \binom{u-2d}{2k-4d}(2k-4d-1)!! \partial^{V'} \partial^V e_{2d}(x_i | i \in U)$$

对于 $M \in \mathcal{M}(V, d)$ 和 $M' \in \mathcal{M}(V', d)$。 □

由引理 3.4 可得

$$\det(H_{U,k,d})|_{\forall e,\ x_e=1} = c \det\left(\partial^{V'} \partial^V e_{2d}(x_i | i \in U) \right)_{V,V' \in \binom{U}{2d}},$$

其中 $c = (\binom{u-2d}{2k-4d}(2k-4d-1)!!)(\ \binom{u}{2d}$ 且 $u = |U|$。由于如例 2.2 所示，行列式 det $\left(\partial^{V'} \partial^V e_{2d}(x_i | i \in U)\right)_{V,\ V' \in \binom{U}{2d}}$ 不为零，因此行列式 det($H_{U,\ d,\ k}$)$|_{\forall e,\ \ x_e=1}$ 是一个非零常数。由于 det($H_{U,\ d,\ k}$) 是一个非零多项式，$\left\{ x^{M(V)} \,\middle|\, V \in \binom{U}{2d} \right\}$ 的像线性无关。因此得到以下推论。

推论 3.5. $A_{U,\ k}$ 在 $2k \leq |U|$ 下的希尔伯特级数为

$$\left(\binom{2k}{0}, \binom{2k}{2}, \binom{2k}{4}, \ldots, \binom{2k}{2k}\right)$$

由于集合 $\left\{ x^{M(V)} \middle| V \in \binom{U}{2d} \right\}$ 的像构成了 $\mathbb{K}$-向量空间 $A^{(d)}_{V\,k,}$ 的一组基，因此矩阵$H_{U,d,k}$ 是 d 阶 Hessian 矩阵，对应于 $A^{(d)}_{V\,k}$,对d 而言，其中 $2d \leq k$。由引理 2.1 可知，$A_{V,k}$具有强 Lefschetz 性质，这就是我们的主要结果定理 3.1。

References

[1] Tadahito Harima、Toshiaki Maeno、Hideaki Morita、Yasuhide Numata、Aki- hito Wachi 和 Junzo Watanabe，《Lefschetz 性质》，数学讲义，第 2080 卷，施普林格，海德堡，2013 年，URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-38206-2。MR 3112920[2] Toshiaki Maeno 和 Yasuhide Numata，Sperner 性质、拟阵与有限维 Gorenstein 代数，《热带几何与可积系统》，Contemp. Math.，第 580 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2012 年，第 73–84 页，URL https://doi.org/10.1090/conm/580/11496。MR 2985388

[3] ———，与拟阵相关的 Sperner 性质和有限维 Gorenstein 代数，《J. Commut. Algebra》8（2016），第 4 期，549–570，URL https://doi.org/10.1216/JCA-2016-8-4-549。MR 3566530[4] Toshiaki Maeno 和 Junzo Watanabe，Artin Gorenstein 代数的 Lefschetz 元与齐次多项式的 Hessian，《Illinois J. Math.》53（2009），第 2 期，591–603，URL http://projecteuclid.org/euclid.ijm/ 1266934795。MR 2594646[5] Juan Migliore 和 Uwe Nagel，综述文章：弱与强 Lefschetz 性质巡礼，《 J. Commut. Algebra 》 5（2013），第 3 期，329–358，URL https://doi.org/10.1216/JCA-2013-5-3-329。MR 3161738[6] Satoshi Murai、Takahiro Nagaoka 和 Akiko Yazawa，拟阵生成多项式对数凹性的严格性，《J. Combin. Theory Ser. A》181（2021），论文编号 105351，22 页，URL https://doi.org/10.1016/j.jcta. 2020.105351。MR 4223331[7] Takahiro Nagaoka 和 Akiko Yazawa，基尔霍夫多项式的严格对数凹性及其在强 Lefschetz 性质中的应用，《J. Algebra》577（2021），175–202，URL https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2021. 01.037。MR 4234203[8] Junzo Watanabe，关于齐次多项式 Hessian 的一则注记，《女王大学曲线研讨会》，第 XIII 卷，《女王大学纯数学与应用数学论文集》，第 119 卷，女王大学，金斯顿，安大略省，2000 年，第 171–178 页。[9] Akiko Yazawa，关于与正多面体面偏序集相关的 Artin Gorenstein 代数，2020 年，预印本 arXiv:2011.13732。[10] Akiko Yazawa，完全图和完全二部图 Hessian 矩阵的特征值，《J. Algebraic Combin.》54（2021），第 4 期，1137–1157，URL https://doi.org/10.1007/s10801-021-01041-x。MR 4348920[11] ———，树的生成函数 Hessian 矩阵的特征值，其中包含 k 个分支，《Linear Algebra Appl.》631（2021），48–66，URL https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.08.017。MR 4308087

(Y. NUMATA) Department of Mathematics, Hokkaido University, Sap-poro, Japan.电子邮箱地址：nu@math.sci.hokudai.ac.jp