arXiv:2302.11088v2 [math.DS] 1 Aug 2023

多维博雷尔流的 Katok 特殊表示定理

康斯坦丁·斯卢茨基

摘要。Katok 特殊表示定理指出，任何自由遍历且保测度的 $\mathbb{R}^d$-流都可以实现为一个定义在 $\mathbb{Z}^d$-作用上的特殊流。这一结果将“函数下的流”构造推广到了多维情形。我们在博雷尔动力学框架下证明了卡托克定理的类似结果，并表明同样地，所有自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流都可通过采用双 Lipschitz 余循环的特殊流构造，从 $\mathbb{Z}^d$-作用中得到。

1. 引言

1.1. 概述。 Ambrose 和 Kakutani 的定理 [1,2] 通过证明任意流都存在一个截面，并且可以表示为“函数下的流”，建立了保测度 $\mathbb{Z}$-作用与 $\mathbb{R}$-流之间的联系。该构造一方面为 Kakutani 等价（亦称单调等价）理论奠定了基础 [7,11]，另一方面也为研究“函数下的流”表示中可能出现的顶函数提供了基础 [16,21]。

“函数下的流”的直观几何图景无法推广到 $\mathbb{R}^d$-流（$d \geq 2$）。不过，Katok [12] 对其进行了重新诠释，使之能够轻易适用于多维情形，并将这一构造中出现的流称为特殊流。尽管名称如此，它们并没有那么特殊，因为正如同一篇论文所证明的，每个自由遍历保测 $\mathbb{R}^d$- 流在度量意义上都与一个特殊流同构。与 Ambrose 和 Kakutani 的研究一样，这项工作为研究 Kakutani 等价的多维概念 [5] 敞开了大门，并推动了对流的铺砌 [15,22]的研究。

作为一个独立领域，博雷尔动力学可追溯至 Weiss [31] 的研究，并已发展成为动力系统中一个用途广泛的分支。这里的相空间是一个标准博雷尔空间（$X,\mathscr{B}$），即一个集合 X，它在 X 上某种波兰拓扑所诱导的 σ-代数 $\mathscr{B}$ 下具有博雷尔集。遍历理论中的一些关键结果在博雷尔动力学中有对应结论，另一些则无法推广。例如，Wagh 证明了关于 $\mathbb{R}$-流中截面存在性的 Ambrose–Kakutani 定理的博雷尔版本 [30]，表明与遍历理论中的情形一样，所有自由博雷尔 $\mathbb{R}$-流都可表示为博雷尔 $\mathbb{Z}$-作用上的“函数下的流”。同样，Rudolph二值定理 [21]也推广到了博雷尔框架 [25]。另一方面，Kakutani 等价理论呈现出不同的现象。尽管它是保测流 [9,20], 之间一种高度非平凡的等价关系，Kakutani 等价的描述集合论版本却完全退化了 [19]。

人们已经开展了大量工作来理解 $\mathbb{R}$-流的博雷尔动力学，但对于多维作用，已知的结果相对较少。本文通过证明 Katok 的特殊表示定理的类比形式确实适用于自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流，为这一方向作出了贡献。

作者部分得到了美国国家科学基金会（NSF）项目 DMS-2153981 的资助。

1.2. **论文结构**。 轨道等价的 $\mathbb{R}^d$-作用的构造通常依赖于（本质上的）超有限性，并使用流的轨道的相干且穷尽区域覆盖。这正是 Katok 上述论文所采用的方法 [12], , 相关方法也已用于描述集合论框架中（例如 [26]）。然而，对于此类相干区域的具体假设取决于特定应用。第 2 节提炼出一种部分作用的一般语言，许多上述构造都可以在其中表述。作为应用，我们证明：由自由 $\mathbb{R}$-流生成的轨道等价关系，也可以由 任意非离散非紧波兰群的自由作用生成（见定理 2.6）。这与离散群的作用形成鲜明对比：在离散群的情形下，一个保持概率测度的自由 $\mathbb{Z}$-作用只能由可 amenable 群的自由作用生成。

第 3 节完成了构造定理 3.12 所需的技术工作，即构造利普希茨映射。粗略地说，该定理表明，经过任意小的双 Lipschitz 扰动后，任意自由的 $\mathbb{R}^d$-流都具有一个整数网格——一个在 $\mathbb{Z}^d$ 作用下不变的博雷尔截面。

最后，第 4 节讨论了 Katok 特殊流构造的描述集合论版本，并在定理 4.3 中表明，任意自由的 $\mathbb{R}^d$-流确实都可以表示为由双 Lipschitz 余循环生成的特殊流，且其利普希茨常数可以任意接近 1。这给出了 Katok 特殊表示定理的一个博雷尔版本。

2. 部分作用序列

我们首先讨论适用于构造轨道等价作用的部分作用框架。本节中，X 表示一个标准博雷尔空间。

2.1. **部分作用**。 设 G 是一个标准博雷尔群，也就是说，它是一个带有标准博雷尔空间结构的群，且群运算是博雷尔的。一个**部分 G-作用**[1] 是一个二元组 (E,ϕ)，其中 E 是 X 上的博雷尔等价关系，而 $\phi\colon X \to G$ 是一个博雷尔映射，并且在每个 E-等价类上都是单射：当 xEy 时，$\phi(x) \neq \phi(y)$。当等价关系可由上下文明确时，有时也会将映射 ϕ 本身称为部分作用。

这个名称的由来基于以下观察。考虑集合

$$A_\phi = \{(g,x,y) \in G \times X \times X : xEy \text{ and } g\phi(x) = \phi(y)\}.$$

ϕ 在 E-等价类上的单射性确保：对于每个 x ∈ X 和 g ∈ G，至多存在一个 y ∈ X，使得 (g , x, y) ∈ A$_\phi$。若这样的 y 存在，我们就称 g 对 x 的作用有定义，并令 g x = y。显然，对于所有 x ∈ X，都有 (e, x, x) ∈ A$_\phi$，因此 ex = x；此外，只要所有项都有定义，就有 $g_2(g_1x) = (g_2g_1)x$。集合 A$_\phi$ 是 G ↷ X 上的全作用的图，当且仅当对于每个 x ∈ X 和 g ∈ G，都存在某个 y ∈ X，使得 (g , x, y) ∈ A$_\phi$；在这种情况下，由该作用生成的轨道等价关系与 E 相同。

例 2.1. 获得部分作用的一种简单方法是将全作用限制到某个子集。假设我们有一个自由博雷尔作用 $G \curvearrowright X$，其对应的轨道等价关系为 E_G，并假设一个博雷尔等价子关系 $E \subseteq E_G$ 存在博雷尔选择子——一个博雷尔 E-不变映射 $\pi\colon X \to X$，使得对于所有 $x \in X$，都有 $xE\pi(x)$。若 $\phi\colon X \to G$ 是由条件 $\phi(x)\pi(x) = x$ 唯一确定的映射，那么 (E,ϕ) 就是一个部分 G-作用。

例 2.1 中的子关系 E 通常与局部紧第二可数群作用的截面相关。

[1] 更准确地说，我们应将这样的（E,ϕ）称为部分自由作用。由于下文主要关注自由作用，我们在定义中省略形容词“自由”。

2.2. **局部紧第二可数群作用的镶嵌**。 考虑一个局部紧第二可数群的自由博雷尔作用 $G \curvearrowright X$。该作用的一个**截面**是一个博雷尔集 $\mathscr{C} \subseteq X$，它与每个轨道相交于一个可数的非空集合。一个截面 $\mathscr{C} \subseteq X$ 是

- **离散**，如果对于每个$x \in X$以及紧$K \subseteq G$，$Kx) \cap \mathscr{C}$都是有限的；
- U**-稀疏**，其中$U \subseteq G$是单位元的邻域；如果对于所有$c \in \mathscr{C}$，$Uc \cap \mathscr{C} = \{c\}$；

- **稀疏**，如果对于某个单位元的邻域U而言它是U-稀疏的；
- **余紧**，如果对于某个紧$K \subseteq G$，$K\mathscr{C} = X$。

令 $\mathscr{C}$为 G $\curvearrowright$X 的一个稀疏截面，它由 [13, 推论 1.2]保证存在。任意 lcsc 群 G 都存在相容的左不变适当度量 [28], ；由于作用具有自由性，任意左不变度量 d 都可以转移到轨道上，方法是对唯一满足 g x = y 的 g ∈ G，定义 dist(x, y) = d(g ,e)。现在可以通过为每个 x ∈ X 指定截面 $\mathscr{C}$中由 dist 确定的最近点 $\pi_{\mathscr{C}}$(x) ∈ $\mathscr{C}$，来定义轨道的所谓 Voronoi 镶嵌。度量的适当性保证，对于半径为 R 的球 $B_R \subseteq G$，$B_R = \{g \in G : d(g ,e) \leq R\}$；对任意 x ∈X，集合 $\mathscr{C} \cap B_R x$ 都是有限的。事实上，交集中至多有 $\lambda(B_{R+r})/\lambda(Br)$ 个点，其中 λ 是群上的哈尔测度，且 r > 0 足够小，使得当 c,c′ ∈ $\mathscr{C}$互不相同时，$Brc \cap Brc' = \varnothing$。

需要稍加留意，以处理可能存在多个最近点的情况。例如，可以在 $\mathscr{C}$ 上选取一个博雷尔线性序，并将每个x 关联到截面中最小的 最近点（具体内容见 [23, 第 4] 节或 [17, 附录 B.2] 节）。这样便得到一个博雷尔等价关系 $E_{\mathscr{C}} \subseteq E_G$，其等价类正是沃罗诺伊镶嵌的单元：当且仅当 $\pi_{\mathscr{C}}(x) = \pi_{\mathscr{C}}(y)$ 时，$xE_{\mathscr{C}}y$。

假设作用$G \curvearrowright X$ 是自由的，便可以通过映射 $\pi_{\mathscr{C}}^{-1}(c) \ni x \mapsto \phi_{\mathscr{C}}(x) \in G$，将每个沃罗诺伊单元自然地识别为作用群的一个子集，其中 $\phi_{\mathscr{C}}(x)c = x$；这正是例 2.1 中相应的部分作用所实现的。

我们的目的是利用部分作用来定义全作用，而上面的例子似乎是在“朝错误的方向”发展。然而，关键在于，一旦有了部分作用 $\phi : X \to G$，就可以将它与任意一个博雷尔单射 $f : G \to G$ 复合，从而得到另一个不同的部分作用 $f \circ \phi$。从这个意义上说，这种模式很典型：新的部分作用往往是通过修改从全作用限制得到的部分作用来构造的。

2.3. **部分作用的收敛序列**。 只要有一列以适当意义相容的部分作用，就可以定义全作用。设G为标准博雷尔群。若X上的部分G作用序列 (E_n, ϕ_n), $n \in \mathbb{N}$满足以下性质，则称其**收敛**：

- **单调性：** 等价关系E_n 构成递增序列，即$E_n \subseteq E_{n+1}$ 对所有n均成立；

- **相容性：** 对每个n，映射$x \mapsto (\phi_n(x))^{-1}\phi_{n+1}(x)$是$E_n$-不变的；
- **穷尽性：** 对所有$x \in X$及所有$g \in G$，都存在n 和$y \in X$，使得$xE_n y$且$g\phi_n(x) = \phi_n(y)$。

利用这样的序列，可以关联一个自由的博雷尔（左）作用 $G \curvearrowright X$，称为 $(E_n, \phi_n)_n$ 的**极限**，其图为$\bigcup_n A \quad \phi_{n\circ}$ 相容性确保由 ϕ_{n+1} 定义的部分作用是由 ϕ_n 给出的部分作用的扩张。事实上，若 $xE_n y$满足 $g\phi_n(x) =$

$\phi_n(y)$，那么根据单调性，也有 $xE_{n+1}y$，并且利用相容性，

$$g\phi_{n+1}(x) = g\phi_n(x)(\phi_n(x))^{-1}\phi_{n+1}(x) = \phi_n(y)(\phi_n(y))^{-1}\phi_{n+1}(y) = \phi_{n+1}(y),$$

由此 $A_{\phi_n} \subseteq A_{\phi_{n+1}}$。若 C是一个E_n-等价类，且对于某个 $x \in C$，有 $s = (\phi_n(x))^{-1}\phi_{n+1}(x)$，那么 $\phi_{n+1}(C) = \phi_n(C)s$，因此像 $\phi_n(C)$ 在 $\phi_{n+1}(C)$ 内部向右平移。若要构造一个群的右作用，那么 $\phi_n(C)$ 应向左平移。

最后，穷尽性保证gx最终有定义：对于所有$g \in G$和$x \in X$，存在n和$y \in X$，使得 $(g, x, y) \in A_{\phi_n}$。不难验证，$\bigcup_n A_{\phi_n}$ 是一个全定义博雷尔作用$G \curvearrowright X$的图。同样容易验证，该作用是自由的，且其轨道恰好是$\bigcup_n E_n$的等价类。

尽管这一框架具有普适性，但大部分复杂性都被转移到了映射 ϕ_n 的构造上。让我们通过局部紧第二可数群的本质超有限作用来说明这些概念。

2.4. **局部紧第二可数群作用的超有限镶嵌**。在第 2.2 节的背景下，进一步假设轨道等价关系 E_G 在截面 $\mathscr{C}$ 上的限制是超有限的，也就是说，存在一个递增的有限博雷尔等价关系序列 F_n，定义在 $\mathscr{C}$ 上，使得$\bigcup_n F_n = E_G|_{\mathscr{C}}$。我们可以利用这个序列定义$xE_ny$当且仅当 $\pi_{\mathscr{C}}(x)F_n\pi_{\mathscr{C}}(y)$，由此得到递增的博雷尔等价关系序列 E_n，满足 $E_G = \bigcup_n E_n$。

等价关系 F_n 存在博雷尔横截集，也就是说，存在博雷尔集 $\mathscr{C}_n$，从每个F_n-等价类中恰好选取一个点。与第 2.2 节中的做法一样，我们可以定义$\phi_n(x)$ 为满足$g \in G$的元素，使得对于唯一满足xE_nc的$c \in \mathscr{C}_n$，有$gc = x$。这就得到一个收敛的部分G-作用序列 $(E_n, \phi_n)_n$，其极限是原作用$G \curvearrowright X$。

2.5. **重新审视部分作用**。在实际应用中，允许等价关系E_n 定义在X的真子集上通常更方便。设$X_n \subseteq X$、$n \in \mathbb{N}$均为博雷尔子集，并假设对每个n，E_n 都是X_n上的博雷尔等价关系。若对所有$m \leq n$，以下条件均成立，则称序列（E_n）$_n$ 是**单调**的：

- $E_m|_{X_m \cap X_n} \subseteq E_n|_{X_m \cap X_n}$;
- 若$x \in X_m \cap X_n$，则x 所属的整个E_m等价类都包含在X_n中。

部分作用映射 ϕ_n：$X_n \to G$，其中G与前文一样是标准博雷尔群，必须满足相容性和穷尽性的相应版本：

- **相容性**：$X_m \cap X_n \ni x \mapsto (\phi_m(x))^{-1}\phi_n(x)$ 对每个$m < n$都是E_m-不变的；
- **穷尽性**：对于每个 $x \in X$ 和 $g \in G$，存在 n 和 $y \in X_n$，使得$x \in X_n$，xE_ny，且 $g\phi_n(x) = \phi_n(y)$。

若一个部分 G-作用序列 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$ 满足上述单调性、相容性和穷尽性，则称其为**收敛**的。注意，条件 $\bigcup_n X_n = X$ 由穷尽性推出，因此集合X_n 必须覆盖整个X。

收敛序列 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$ 定义了全作用。将这一构造化简为第 2.3 节中给出的记号更简洁的构造，便可最容易地看出这一点。为此，将 E_n 扩展为定义在整个X 上的等价关系 $\hat{}E_n$，方法如下：

$$x\hat{E}_n y \iff \exists m \leq n \; xE_m y \text{ or } x = y;$$

并且通过对满足最大条件的 $m \leq n$ 进行设定，将 ϕ_n 扩展为 $\hat{}\phi_n : X \to G$，使得 $\hat{}\phi_n(x) = \phi_m(x)$，其中 $x \in X_m$；若不存在这样的 m，则令 $\hat{}\phi_n(x) = e$。容易验证，$(\hat{}E_n, \hat{}\phi_n)_n$是第 2.3 节意义下的部分$G$作用收敛序列。由该序列的**极限** 可得

部分作用序列 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$ 的极限，指的是先前定义的 $(\hat{}E_n, \hat{}\phi_n)_n$ 的极限。

注 2.2。我们将在下面的命题 2.4 中遇到这一广义表述的一个变体，即集合 X_n 呈嵌套关系：$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq\cdots$。此时，等价关系的单调性简化为$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$，而相容性则等价于映射$X_n \ni x \mapsto (\phi_n(x))^{-1}\phi_{n+1}(x) \in G$的$E_n$-不变性。

如上所述，只需将一个部分作用 $\phi : X \to G$与某个博雷尔双射$f: G \to G$复合，就可以轻松构造出新的部分作用（如果选择在不同的群中取值，也可以使用$f: G \to H$）。然而，任意双射都没有理由保持相容性，因此必须格外谨慎以维护这一性质。

此外，一般而言，我们需要对不同的f施加不同的修改E_n 类，这自然会引发一个问题：如何确保构造是以博雷尔方式进行的。在应用中，对E_n-类C施加的修改f通常取决于C 的“形状”以及其中所包含的E_m-类，但不取决于其他E_n-类。如果这样的E_n-类“构型”只有可数多个，那么只要对相同的“构型”始终施加相同的修改，所得的部分作用$f \circ \phi$ 就是博雷尔的。这个想法可以形式化如下。

2.6. 部分作用的有理序列。设 $(\mathrm{E}_n, \phi_n)_n$ 是 X 上部分作用的一个收敛序列。对于一个 E_n-类 C，令 $\mathscr{E}_m(\mathrm{C})$ 表示包含在 C 中的 E_m- 类的集合。给定两个 E_n- 类 C 和 C′，我们用 $\phi_n(\mathrm{C}) \equiv \phi_n(\mathrm{C}')$ 表示：对每个 $\mathrm{m} \le \mathrm{n}$，都存在一个双射 $\mathscr{E}_m(\mathrm{C}) \ni \mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}' \in \mathscr{E}_m(\mathrm{C}')$，使得对于所有 $\mathrm{D} \in \mathscr{E}_m(\mathrm{C})$，都有 $\phi_n(\mathrm{D}) = \phi_n(\mathrm{D}')$。像的集合 $\{\phi_n(\mathrm{D}) : \mathrm{D} \in \bigcup_{\mathrm{m} \le \mathrm{n}} \mathscr{E}_m(\mathrm{C})\}$ 构成了前文所说的 C 的“构型”。

我们称部分作用序列 $(E_n, \phi_n)_n$ 是**有理的**，如果对每个n，都存在一个博雷尔E_n-不变分划$X = \bigsqcup_k Y_k$，使得对每个k，对于所有E_n-等价类$C, C' \subseteq Y_k$，均有 $\phi_n(C) \equiv \phi_n(C')$。

注2.3. 这一有理性概念可原样应用于第 2.5 节所述的部分作用收敛序列 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$。可以验证，序列 $(\hat{}E_n, \hat{}\phi_n)$ 有理，当且仅当该序列有理。

2.7. **生成流等价关系**。作为部分作用形式体系的一项应用，我们证明，任何由自由博雷尔 $\mathbb{R}$-流给出的轨道等价关系，也可以由任意非离散非紧波兰群的自由作用生成。为此，我们需要以下将 $\mathbb{R}$-流表示为部分 $\mathbb{R}$-作用极限的方法。

命题 2.4。X 上的任意自由博雷尔 $\mathbb{R}$-流都可以表示为收敛有理序列的部分 $\mathbb{R}$-作用的极限 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$，使得

（*1*）X_n 和 E_n 都是递增的：$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots$ </style}以及 EE⋯；（见注 *2.2*）（*2*）每个 E_{n+1}-类包含有限多个 E_n-类；（*3*）每个 E_0-类的基数为连续统基数；（*4*）对于每个 E_{n+1}-类 C，集合 $C \setminus X_n$ 的基数为连续统基数。

证明。任意 $\mathbb{R}$-流都存在一个有理的[2] $(-4,4)$-稀疏截面（见 [24, 第 2] 节），记为 $\mathscr{C}$。令 $(E_{\mathscr{C}}, \phi_{\mathscr{C}})$ 为第 2.2 节定义的部分 $\mathbb{R}$-作用。如果

[2]这里，截面的有理性意味着 $\mathscr{C}$ 中任意两点之间的距离都是有理数。更一般地，对于一个 $\mathbb{R}d$-作用，其截面 $\mathscr{C}$的有理性意味着：对于某些 c、$c\prime \in \mathscr{C}$，只要 $c + r = c\prime$，就有 $r \in \mathbb{Q}d$。

D是一个 $E_{\mathscr{C}}$-等价类，那么 $\phi_{\mathscr{C}}(D)$ 是一个区间。对于 $\epsilon>0$，令 D^{ϵ} 由满足以下条件的那些 $x\in D$ 组成：$\phi_{\mathscr{C}}(x)$ 距离 $\phi_{\mathscr{C}}(D)$ 的边界点至少有 ϵ。换言之，D^{ϵ} 是将等价类 D 的两端各缩去 ϵ 后得到的。

将轨道等价关系限制到 $\mathscr{C}$ 上是超有限的。这一事实在更广泛的局部紧阿贝尔群 [4] 的作用情形下也成立。具体而言，对于 $\mathbb{R}$-流，$E|_{\mathscr{C}}$由首次回归映射生成——该映射是 $\mathscr{C}$ 上的一个博雷尔自同构，它按照 $\mathbb{R}$-流的顺序，将 $\mathscr{C}$ 中的点映射到下一个点。除了那些 $\mathscr{C}$ 恰好具有最大点或最小点的轨道之外，首次回归映射都有定义且可逆。显然，空间中后一部分存在一个博雷尔选择子，因此是光滑的，故不会影响该等价关系的超有限性。剩下的只需回忆一个标准事实：$\mathbb{Z}$-作用的轨道等价关系是超有限的（例如，参见 [6, 定理 5.1]），因此限制 $E|_{\mathscr{C}}$ 也是超有限的。

特别地，我们可以将 $\mathbb{R}$-流表示为如第 2.4 节所述的部分作用收敛序列 $(E'_n,\phi'_n)_n$ 的极限。注意，由 $\mathscr{C}$ 的有理性可知，$(E'_n,\phi'_n)_n$ 必然是有理的。这样的序列满足条件 (2) 和 (3)，但不满足条件 (4)。我们通过缩小等价类来实现真包含，从而解决这一问题。设 $(\epsilon_n)_n$ 是一个严格递减的正实数序列，使得 $1>\epsilon_0$ 且 $\lim_n \epsilon_n=0$。令 $X'_n=\bigcup D^{\epsilon_n}$，其中并集遍历所有 $E_{\mathscr{C}}$-等价类 D。注意，集合 X'_n 无法覆盖 X，因为任何 $E_{\mathscr{C}}$-等价类的边界点都不属于任何 X'_n。令 $Y=X\setminus\bigcup_n X'_n$，并令 $X_n=X'_n\cup Y$。显然，$(X_n)_n$ 是递增的博雷尔集序列，且 $\bigcup_n X_n=X$。

最后，令 $E_n=E'_n|_{X_n}$和 $\phi_n\colon X_n\to\mathbb{R}$为 $\phi'_n|_{X_n}$。由部分 $\mathbb{R}$-作用构成的序列 $(X_n,E_n,\phi_n)_n$满足该命题的条件。□

由自由博雷尔 $\mathbb{R}$-流产生的所有非光滑轨道等价关系彼此博雷尔同构 [14, 定理 3]。定理 2.6 将证明，这个轨道等价关系也可以由任意非紧且非离散的波兰群的自由作用生成。

设G是一个群。若存在由G的元素构成的序列 $(g_n)_n$，使得对所有$m\neq n$，都有$Ag_m\cap Ag_n=$，则称集合$A\subseteq G$**有无穷多个两两不交的右平移**。

引理 2.5。设 G 是一个非紧波兰群。存在单位元的一个邻域 $V\subseteq G$，使得对于任意有限集合 $F\subseteq G$，集合 VF 都有无穷多个两两不交的右平移。

证明。我们先介绍 Solecki [27, 引理 1.2] 和 Uspenskij [29]分别证明的紧致性刻画：波兰群 G 非紧，当且仅当存在单位元的邻域 $U\subseteq G$，使得对所有有限 $F_1,F_2\subseteq G$，都有 $F_1UF_2\neq G$。取单位元的一个对称邻域 $V\subseteq G$，使得 $V^2\subseteq U$。我们断言，这样的集合 V 具有所需性质。取有限 $F\subseteq G$，令 $g_0=e$，并按以下方式归纳地选取 g_n。令 $F_1=F^{-1}$，且 $F_{2,n}=F\cdot\{g_k\colon k<n\}$。U 的定义性质保证存在 $g_n\notin F_1UF_{2,n}$。于是，平移集 $(VFg_n)_n$两两不交；因为若 $VFg_m\cap VFg_n\neq$，对 $m<n$，则 $g_n\in F^{-1}V^{-1}VFg_m\subseteq F_1UF_{2,n}$，这与构造矛盾。□

定理 2.6。设 E 是 X 上由自由博雷尔 $\mathbb{R}$-流给出的轨道等价关系。任意非离散非紧波兰群 G 都存在一个自由博雷尔作用 $G\curvearrowright X$，使得 $E_G=E$。

证明。设 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$ 是如命题 2.4 中所述的部分 $\mathbb{R}$-作用的一个收敛序列，并设 $V \subseteq G$ 如引理 2.5 所给定。选取 G 中的一个可数稠密集 $(h_n)_n$，使得 $\bigcup_n V h_n = G$。由于部分 $\mathbb{R}$-作用序列是有理的，对于每个 n，可选取一个博雷尔 E_n-不变划分 $X_n = \bigsqcup_k Y_{n,k}$，使得对于所有 E_n-等价类 C、$C' \subseteq Y_{n,k}$，都有 $\phi_n(C) \equiv \phi_n(C')$。我们构造一个部分 G-作用的收敛序列 $(X_n, E_n, \psi_n)_n$，使得对于每个 n 和 k，都存在 G 的一个有限集 $F \subseteq$，满足 $\{h_i : i < n\} \subseteq F$，并且对于所有 E_n-等价类 $C \subseteq Y_{n,k}$，都有 $\psi_n(C) = V F$。

对于任意 E_0类 C，$\phi_0(C) \subseteq \mathbb{R}$ 和 $V \subseteq G$ 都是具有相同基数的博雷尔集。因此，我们可以选取一个博雷尔双射 $f_k : \phi_0(C) \to V$，其中 $C \subseteq Y_{0,k}$。对于归纳构造的基础，我们令 $\psi_0|_{Y_k} = f_k \circ \phi_0$。假设 $\psi_m : X_m \to G$，$m \le n$ 已经构造完成。

现在构造 ψ_{n+1}。令 C 为一个 E_{n+1}类，并令 $D_1, \dots, D_l$ 为包含于 C 中的 E_n类的完整列表。根据归纳假设，存在有限集 $\tilde{F}_1, \dots, F_l \subseteq G$，使得 $\psi_n(D_i) = V F_i$。令 $F = \bigcup_{i \le l} F_i$。根据 V 的选取，存在元素 $g_1, \dots, g_l \in G$，使得 $V F g_i$ 对于 $1 \le i \le l$ 两两不交。选取一个足够大的有限 $\tilde{F} \subseteq G$，使得 $F g_i \subseteq F$、$\{h_i : i < n+1\} \subseteq F$ 以及 $V F \setminus \bigcup_{i \le l} V F g_i$的基数为连续统基数（例如，可以通过确保 $V F$ 内还包含 $V F$ 的另一个不交平移来实现后者）。注意，根据命题 2.4 所保证的性质，$\phi_{n+1}(C \setminus X_n) = \phi_{n+1}(C) \setminus \bigcup_{i \le l} \phi_{n+1}(D_i)$ 的基数为连续统基数。任取一个博雷尔双射

$$f : \phi_{n+1}(C) \setminus \bigcup_{i \le l} \phi_{n+1}(D_i) \to V F \setminus \bigcup_i \psi_n(D_i) g_i$$

并通过条件 $\psi_{n+1}|_{D_i} = \psi_n|_{D_i} \cdot g_i$ 和 $\psi_{n+1}|_{C \setminus \bigcup_{i \le l} D_i} = f \circ \phi_{n+1}$ 来定义 ψ_{n+1}。与基例一样，同一个修改 f适用于所有满足 $\phi_{n+1}(C) \equiv \phi_{n+1}(C')$ 的等价类 E_{n+1}-类 C, C'，这确保了构造的博雷尔性。

现在很容易验证，$(X_n, E_n, \psi_n)_n$ 是一个收敛的部分 G-作用序列，因此其极限是 $G \curvearrowright X$ 上的自由博雷尔作用，并且 $E_G = E$。□

注记2.7. 定理 2.6 凸显了它与离散群作用的区别，因为保持有限测度的自由博雷尔 $\mathbb{Z}$-作用不能由非 amenable 群的自由博雷尔作用生成（例如，参见 [32, 命题 4.3.3] 或 [10, 命题 2.5(ii)]）。

然而，如果我们考虑不具有任何有限不变测度的超有限等价关系，那么对于 $\mathbb{Z}$-作用，我们确实有相应的类似结果。存在一个在同构意义下唯一的、非光滑的超有限博雷尔等价关系，它不具有任何有限不变测度；该关系可以实现为任意无限可数群 [6, 的自由作用所诱导的轨道等价关系2]命题 11。

3. 利普希茨映射

本节的目标是证明定理 3.12，该定理表明，任何自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流都与一个带有整数网格的流双 Lipschitz 轨道等价。第 3.1–3.3 节将建立构造这类轨道等价所需的工具。这些章节中的引理所陈述的 Lipschitz 条件，验证起来简单而常规。因此，为求简洁，我们省略相关论证。

回顾一下，度量空间 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 之间的映射 $f : X \to Y$ 若对所有 $x_1, x_2 \in X$ 都满足 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le K\, d_X(x_1, x_2)$，则称其为 K-Lipschitz 映射；若 f 是单射、K_2-Lipschitz，且 f^{-1} 是 K_1^{-1}-Lipschitz，则称其为 (K_1, K_2)- 双 Lipschitz，这等价于以下表述：

$$K_1 d_X(x_1, x_2) \le d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le K_2 d_X(x_1, x_2) \quad \text{for all } x_1, x_2 \in X.$$

Lipschitz 映射 f的**利普希茨常数**是使f成为K-Lipschitz 映射的最小K。

3.1. **关联集**。 给定两个利普希茨映射$f\colon A \to A'$和$g\colon B \to B'$，它们在交集$A \cap B$上相同，则映射$f \cup g\colon A \cup B \to A' \cup B'$一般而言可能不是利普希茨映射。满足以下条件即可确保$f \cup g$是利普希茨映射，且其利普希茨常数不超过f和g的常数中的较大者。

定义 3.1。 设(X,d)是一个度量空间，且A、$B \subseteq X$是它的子集。若对于所有$x \in A$和$y \in B$，都存在$z \in A \cap B$，使得$d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$，则称A和B是**关联的**。

引理 3.2。 设(X,d)是一个度量空间，$f\colon A \to A'$，$g\colon B \to B'$是X的子集之间的K-利普希茨映射，并且假设$f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$。若$A$和$B$关联，则$f \cup g\colon A \cup B \to A' \cup B'$是$K$-利普希茨映射。

回忆一下，度量空间(X,d)称为**测地**的，如果对于所有点x、$y \in X$，它们之间都存在一条测地线——一个等距映射$\tau\colon [0, d(x,y)] \to X$，满足$\tau(0) = x$且$\tau\big(d(x,y)\big) = y$。对于测地度量空间，只要一个闭集的边界包含于另一个闭集中，闭集A、$B \subseteq X$总是相连的。集合A的边界记作∂A，$\operatorname{int} A$表示A的内部。

引理 3.3. 设(X,d)是一个测地度量空间。如果$A, B \subseteq X$是闭集，且满足$\partial A \subseteq B$，那么A和B相连。

3.2. **归纳步骤**。 以下引理概括了构造后续定理 3.12 时的归纳步骤。

引理 3.4。 设(X,d)是一个测地度量空间，且$A \subseteq X$是一个闭集。假设$(A_i)_{i=1}^n$是A的两两不交闭子集，且$h_i\colon A_i \to A_i$是(K_1,K_2)-双 *Lipschitz* 映射，并且对每个$1 \le i \le n$，$h_i|_{\partial A_i}$都是恒等映射。映射$g\colon A \to A$定义为

$$g(x) = \begin{cases} h_i(x) & \text{if } x \in A_i, \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

是(K_1,K_2)-双 *Lipschitz* 映射。

3.3. **Lipschitz 位移**。 设$(X, \|\cdot\|)$是一个赋范空间，并设$A \subseteq X$是一个闭有界子集。我们先介绍一个关于恒等映射的 Lipschitz 扰动的基本且众所周知的观察。

引理 3.5。 若$\xi\colon A \to X$是一个 *K-Lipschitz* 映射，$K < 1$，则$A \ni x \mapsto x + \xi(x) \in X$是$(1-K, 1+K)$-双 *Lipschitz* 映射。

在第 3.3 节余下部分中，我们固定一个向量$v \in X$以及一个实数$K > \|v\|$。设函数$f_{A,K,v}\colon A \to X$定义如下：

$$f_{A,K,v}(x) = x + \frac{d(x,\partial A)}{K} v,$$

其中$d(x,\partial A)$表示x到A的边界的距离。此函数（以及稍后将引入的变体）是$(1 - K^{-1}\|v\|, 1 + K^{-1}\|v\|)$-双 Lipschitz。为简化记号，我们令$\alpha^+ = 1 + K^{-1}\|v\|$和$\alpha^- = 1 - K^{-1}\|v\|$。

引理 3.6. 函数$f_{A,K,v}$是一个到A上的(α^-, α^+)-双利普希茨同胚。

固定一个实数$L > 0$，并令$A^L = \{x \in A\colon d(x, \partial A) \ge L\}$为距$A$的边界至少$L$个距离单位的元素所组成的集合。

引理 3.7。 $f_{A,\ K,\ \nu}\restriction_{A^L} = f_{A^L,\ K,\ \nu + LK^{-1}\nu}$ 以及 $f_{A,\ K,\ \nu}(A^L) = A^L + LK^{-1}\nu$。

截断平移函数 $h_{A,K,\nu,L} : A \to X$定义如下

$$h_{A,K,\nu,L}(x) = \begin{cases} f_{A,K,\nu}(x) & \text{for } x \in A \setminus A^L, \\ x + LK^{-1}\nu & \text{for } x \in A^L. \end{cases}$$

引理 3.8. 函数 $h_{A,K,\nu,L}$ 是一个从其映到 A 的(α^-, α^+)-双 *Lipschitz* 同胚。

3.4. **与网格流的利普希茨等价**。 映射 $h_{A,K,\nu,L}$ 可用于证明，任意自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流都与一个容许整数网格的流双 Lipschitz 等价。这就是定理 3.12 的内容，不过首先我们要表述构造所需的部分作用性质。这是对所谓无分层 toast 构造的一种改编，该构造已在 [8]中宣布。 [18, 附录 A] 中给出的针对 $\mathbb{Z}^d$-作用的证明，可以迁移到 $\mathbb{R}^d$-流。

在本文其余部分中，我们固定 $\mathbb{R}^d$ 上的一个范数 $\|\cdot\|$，并令 $d(x,y) = \|x - y\|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上相应的度量。回忆一下，$B_R(r) \subseteq \mathbb{R}^d$表示以 $r \in \mathbb{R}^d$为中心、半径为 R的闭球。

引理 3.9。 设 $K > 0$ 为正实数。标准博雷尔空间 X 上的任意自由 $\mathbb{R}^d$-流都是部分作用的有理收敛序列的极限 $(X_n, E_n, \phi_n)_n$ *(见第 2.5 节)*，并且对每个 E_n-等价类 C，

(1) $\phi_n(C)$ 是 $\mathbb{R}^d$中的闭有界子集，且 $B_K(0) \subseteq \phi_n(C)$*; (2)* 包含于 C 中的 E_m-等价类的集合，$m \le n$，是有限的；*(3)* 对任意满足 $D \subseteq C$ 的 E_m-等价类 D，$d(\phi_n(D), \partial\phi_n(C)) \ge K$。

在概述证明之前，我们需要引入一些记号。设 $E_1, \ldots, E_n$ 分别是 $X_1, \ldots, X_n$上的等价关系。用 $E_1 \vee \cdots \vee E_n$表示由 E_i生成的$\bigcup_{i \le n} X_i$上的等价关系 E；也就是说，只要存在 $x_1, \ldots, x_m$，并且对每个 $1 \le i \le m$，都存在 $1 \le j(i) \le n$，使得对所有$1 \le i < m$，$x_1 = x$、$x_m = y$ 且 $x_i E_{j(i)} x_{i+1}$，就有 $x E y$。

若 E 是 $Y \subseteq X$ 上的等价关系且 $K > 0$，我们在 $Y^{+K} = \{x \in X : \operatorname{dist}(x, y) \le K \text{ for some } y \in Y\}$ 上定义关系 E^{+K}，规定 $x_1 E^{+K} x_2$ 当且仅当存在 $y_1, y_2 \in Y$，使得 $\operatorname{dist}(x_1, y_1) \le K$、$\operatorname{dist}(x_2, y_2) \le K$ 且 $y_1 E y_2$。注意，一般而言，如果两个 E-等价类在“加厚”后连通，E^{+K}可能不是等价关系。然而，若对所有不同的 E-等价类 C_1, C_2，均有 $\operatorname{dist}(C_1, C_2) > 2K$，则 E^{+K}是等价关系。

引理 *3.9* 的证明。首先取一个增长足够快的半径序列 a_n（例如，$a_n = K1000^{n+1}$ 增长得足够快），然后利用 [3] 选取（另见 [18, 引理 A.2]）一列博雷尔 $Ba_n(0)$-稀疏截面 $\mathscr{C}_n \subseteq X$，使得

$$\forall x \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists^\infty n \text{ such that } \operatorname{dist}(x, \mathscr{C}_n) < \epsilon a_n, \tag{1}$$

其中 $\operatorname{dist}(x, \mathscr{C}_n) = \inf\{\operatorname{dist}(x, c) : c \in \mathscr{C}_n\}$，而 $\exists^\infty$ 表示“存在无穷多个”。不失一般性，我们可以假设截面 $\mathscr{C}_n$ 是有理的，其含义是：若 $c_1 + r = c_2$ 对于某个 $c_1, c_2 \in \bigcup_n \mathscr{C}_n$成立，则 $r \in \mathbb{Q}^d$。通过将 $\mathscr{C}_n$ 中的元素移动任意小的距离即可实现这一点（见 [24, 引理 2.4]），且不会破坏等式 **(1)** 中给出的性质。截面的有理性保证了下文构造的部分作用序列是有理的。

现在归纳地定义X_n和E_n，基例为$X_0 = \mathscr{C}_0 + Ba_0/10(0)$，且$x E_0 y$当且仅当存在$c \in \mathscr{C}_0$使得$x, y \in c + Ba_0/10(0)$。对于归纳步骤，首先~ ~ ~给定$X_n = \mathscr{C}_n + Ba_n/10(0)$和$E_n$，其定义与基例类似：$x E_n y$当且

仅当存在某个 c ∈ $\mathscr{C}_n$ 使得 dist(x,c) ≤ a$_n$/10 且 dist(y,c) ≤ a$_n$/10。令 E$'_n$ = $\tilde{}$E$_n$ ∨ E $^+$Kn $_{-1}$ ∨ ⋯ ∨ E$_0^{+K}$，并令 X ′n = $\tilde{}$X$_n$ ∪ ⋃$^{n-1}$i=0X $^+$K i 为 E ′n 的定义域。最后，令 X$_n$为 $\tilde{}$X$_n$ 的 E$'_n$-饱和，即 x ∈X$_n$ 当且仅当存在 y ∈ $\tilde{}$X$_n$ 使得 xE ′n y。设 E$_n$ = E$'_n|_{X_n}$。

下面给出对一个 E_n-类的另一种描述。首先取一个 $\tilde{}E_n$-类C_n，然后将所有与C_n相交的 E_{n-1}^{+K}-类 D依次与其合并。将所得的 $\tilde{}E_n \vee E^{+K}{}_{n-1}$-类记为$C_{n-1}$。接下来，我们加入所有与$C_{n-2}$相交的 E_{n-2}^{+K}-类，从而得到一个$\tilde{}E_n \vee E_{n-1}^{+K} \vee E_{n-2}^{+K}$-类 C_{n-2}。该过程最终得到一个E_n-类 C_0。

通过归纳地检验很容易看出，任意 E_n-类 C的直径满足 diam(C) ≤a_n/3，因此，由 $\mathscr{C}_n$的某种性质，对于任意两个不同的E_n-类 C_1,C_2，都有 dist(C_1,C_2) ≥ a_n/3 ≫ 2K。后者表明，E_n^{+K}是X^{+K_n}上的等价关系。

序列 (X_n,E_n)$_n$ 的单调性由构造显然可知。等式 (1) 对于证明以下事实至关重要：$\bigcup_n X_n = X$。事实上，对于每个 $x \in X$，都存在某个$\tilde{}n$，使得 dist(x,$\mathscr{C}_n$) < a_n/10，因此也有 $x \in X_n \subseteq X_n$。

映射 ϕ_n: $X_n \to \mathbb{R}^d$ 用于定义部分 $\mathbb{R}^d$-作用，其定义为满足条件 $\phi_n(x)c = x$的唯一 c ∈ $\mathscr{C}_n$，其中 $cE_n x$。注意，对于任意包含于某个 E_n-等价类 C 中的 n，m <n，都有 $D^{+K} \subseteq C$，而由构造可知，D 是一个 E_n-等价类；因此，d($\phi_n(D)$,$\partial\phi_n(C)$) ≥ K。因此，部分作用的收敛序列 (X_n,E_n,ϕ_n)$_n$ 满足所需性质。□

设 $\mathfrak{F}_1$ 和 $\mathfrak{F}_2$ 是定义在X 上的自由 $\mathbb{R}^d$-流，并生成相同的轨道等价关系，即$E_{\mathfrak{F}_1} = E_{\mathfrak{F}_2}$。设 $\rho = \rho_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$: $\mathbb{R}^d \times X \to \mathbb{R}^d$是相应的余循环映射，其定义是：对于$x \in X$和$r \in \mathbb{R}^d$，满足条件$x +_2 r = x +_1 \rho(r,x)$。若余循环 ρ 满足如下条件，则称其为(K_1,K_2)-双 Lipschitz 的：对所有$x \in X$，映射 $\rho(\cdot,x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$均满足该条件：

$$K_1||r_2 - r_1|| \le ||\rho(r_2,x) - \rho(r_1,x)|| \le K_2||r_2 - r_1||. \tag{2}$$

由于 $\rho(r_2,x) - \rho(r_1,x) = \rho(r_2 - r_1, x +_1 r_1)$，余循环的 Lipschitz 条件 (2) 可以等价且更简洁地表述为

$$K_1 \le \frac{||\rho(r,x)||}{||r||} \le K_2 \quad \text{for all } x \in X \text{ and } r \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}. \tag{3}$$

注 3.10。 注意，余循环 $\rho_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ 和 $\rho_{\mathfrak{F}_2,\mathfrak{F}_1}$ 通过以下恒等式相联系

$$\rho_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}(\rho_{\mathfrak{F}_2,\mathfrak{F}_1}(r,x),x) = r \qquad \text{and} \qquad \rho_{\mathfrak{F}_2,\mathfrak{F}_1}(\rho_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}(r,x),x) = r.$$

特别地，如果 $\rho_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ 是（K_1,K_2）-双 Lipschitz 的，那么 $\rho_{\mathfrak{F}_2,\mathfrak{F}_1}$ 是（K_2^{-1}，K_1^{-1}）-双 Lipschitz 的。

定义 3.11。 设 $\mathfrak{F}$ 是 X 上的一个自由 $\mathbb{R}^d$-流。该流 $\mathfrak{F}$ 的一个**整数网格** 是一个 $\mathbb{Z}^d$-不变的博雷尔子集$Z \subseteq X$，它与流的每个轨道的交集都是一个 $\mathbb{Z}^d$-轨道。换言之，$Z + \mathbb{R}^d = X$，$Z + \mathbb{Z}^d = Z$，并且对于所有满足$z_1 E_{\mathfrak{F}} z_2$ 的Z 中的$z_1,z_2 \in$，都有$z_1 + \mathbb{Z}^d = z_2 + \mathbb{Z}^d$。

并非每个流都存在整数网格，但如下述定理所示，每个流都与一个存在整数网格的流双 Lipschitz 等价。

定理 3.12。 设 X 上有一个自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流 $\mathfrak{F}_1$。对于任意 $\alpha > 1$，存在 X 上一个自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流 $\mathfrak{F}_2$，它存在整数网格，与 $\mathfrak{F}_1$ 诱导相同的轨道等价，即 $E_{\mathfrak{F}_1} = E_{\mathfrak{F}_2}$，且其关联余循环 $\rho_{\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2}$ 是 (α^{-1}，α)- 双 *Lipschitz* 的。

证明。 取足够大的R，使球$B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^d$满足 $\mathbb{Z}^d + B_R(0) = \mathbb{R}^d$。选取$K > 0$足够大，以确保 $\alpha^- = 1 - K^{-1}R > \alpha^{-1}$，因此也有 $\alpha^+ = 1 + K^{-1}R < \alpha$。令 ($X_n$,$E_n$,$\phi_n$)$_n$ 为针对所选K，由引理 3.9 生成的一个有理收敛序列的部分作用

对于一个E_n-等价类C，令C'表示所有距C的边界至少K远的$x \in C$的集合：

$$C' = \{x \in C : d(\phi_n(x), \partial\phi_n(C)) \geq K\}.$$

如果 D 是一个 E$_m$-等价类，且 D ⊆C，那么引理 3.9 的第 (3) 项保证包含关系 D ⊆C ′。令 X ′n =⋃C ′，其中并集取遍所有 E$_n$-等价类 C，并设 E$'_n$ =E$_n|_{X}$′n ,$\phi'_n = \phi_n|_{X}$′n。注意，(X ′n,E$'_n$,ϕ'_n)$_n$是一个部分作用的有理收敛序列，其极限为流 $\mathfrak{F}_1$。流 $\mathfrak{F}_2$ 将构造为部分作用 (X ′n,E$'_n$,ψ_n) 的极限，其中映射 ψ_n将归纳地定义，并且对所有 E$_n$-等价类 C，均满足 ψ_n(C ′) = ϕ_n(C ′)。集合 Z$_n$ = $\psi_n^{-1}(\mathbb{Z}^d)$ 将满足：当 m ≤n 时，Z$_m$ ∩X ′n ⊆Z$_n$；而 Z =⋃n Z $_n$ 将是 $\mathfrak{F}_2$ 的整数网格。

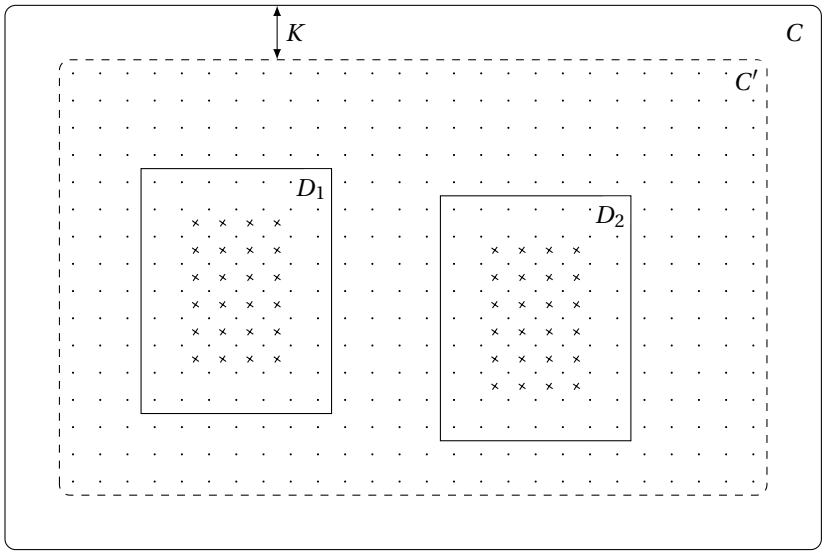

图 1. 整数网格的构造

作为构造的基础步骤，令 $\psi_0 = \phi'_0$ 和 $Z_0 = \psi_0^{-1}(\mathbb{Z}^d)$。接下来，考虑一个典型的 E_l-等价类 C，其中包含 $D_1,...,D_l$，它们是其中所有 E_0-等价类的完整列表（见图 1）。考虑集合 $\tilde{Z}_{C'} = \phi_1^{-1}(\mathbb{Z}^d) \cap C'$，它是 C_l内部的整数网格（图 1 中以点标出）。每个 D_i-等价类都带有在前一阶段构造的网格 $\tilde{Z}_{D'i} = \psi_0^{-1}(\mathbb{Z}^d) \cap D'_i$（图 1 中以叉号标出）。部分作用的相干条件保证存在某些 $s_i \in \mathbb{R}^d$、$i \leq l$，使得

$$\phi_1(D'_i) = \phi_0(D'_i) + s_i = \psi_0(D'_i) + s_i.$$

一般而言，网格 $\tilde{Z}_{C'}$不包含 $\tilde{Z}_{D'}$i，但对于每个 i ≤l，我们都可以找到一个范数为 ||v$_i$|| ≤R 的向量 v$_i \in \mathbb{R}^d$，使得 $\tilde{Z}_{D'}$i +$_1$v$_i$ ⊆ $\tilde{Z}_{C'}$。更准确地说，我们取 v$_i$为 B$_R$ (0) 中的任意向量，使得 s$_i$ +v$_i \in \mathbb{Z}^d$，根据 R 的选取，这样的向量确实存在。令 h$_i$: ϕ_1 (D$_i$) →ϕ_1(D$_i$) 为函数 h$_{\phi_1}$(D$_i$),K，v$_i$,K，它根据引理 3.8 是 (α^-, α^+)-双 Lipschitz 的。最后，定义 g$_1$: ϕ_1(C′) → ϕ_1(C′) 为

$$g_1(r) = \begin{cases} h_i(r) & \text{if } r \in \phi_1(D_i), \\ r & \text{otherwise.} \end{cases}$$

引理 3.4 专门用于证明 g_1 是 (α^-,α^+)-双 Lipschitz 的。我们令$\psi_1|_{C'} = g_1 \circ \phi_1|_{C'}$。注意到

$$\begin{aligned}\psi_1(D_i') &= g_1\circ\phi_1(D_i') = h_i\circ\phi_1(D_i') = \phi_1(D_i') + KK^{-1}v_i \\ &= \phi_0(D_i') + s_i + v_i = \psi_0(D_i') + s_i + v_i,\end{aligned} \tag{4}$$

这验证了相容性，并且鉴于$s_i+v_i\in\mathbb{Z}^d$，对所有$i \le l$，有 $\psi_1^{-1}(\mathbb{Z}^d)\cap D'_i = \psi_0^{-1}(\mathbb{Z}^d)\cap D'_i$。

虽然我们给出了在单个E_1-等价类C上 ψ_1 的定义，但同样的构造也可以通过序列部分作用的有理性，以博雷尔方式应用于所有E_1-等价类C，正如我们在定理 2.6 中所做的那样。令$Z_1 = \psi_1^{-1}(\mathbb{Z}^d)$，则根据式（4），$Z_0\cap X_1 \subseteq Z_1$。

一般的归纳步骤类似。假设我们已构造出$k \le n$的映射 ψ_k。一个<style id='E'>E$_{n+1}$-等价类C包含有限个子等价类$D_1,\dots,\ D_l$，其中D_i是一个E^{m_i}-等价类，$m_i < n$，并且对于某个$m_i < m < n$，没有任何D_i包含在更大的E^m-等价类中。根据相容性和归纳假设，存在$s_i\in\mathbb{R}^d$、$i \le l$，使得

$$\phi_{n+1}(D_i') = \phi_{m_i}(D_i') + s_i = \psi_{m_i}(D_i') + s_i.$$

选取向量 $v_i \in B_R(0)$，使其满足 $s_i + v_i \in \mathbb{Z}^d$；令 $h_i\colon \phi_{n+1}(D_i) \to \phi_{n+1}(D_i)$ 为$h_{\phi_{n+1}(D_i),K,v_i,K}$，并定义一个 (α^-,α^+)-双 Lipschitz 函数 g_{n+1}，如下：

$$g_{n+1}(r) = \begin{cases} h_i(r) & \text{if } r\in\phi_{n+1}(D_i),\\ r & \text{otherwise.}\end{cases}$$

最后，令 $\psi_{n+1}|_{C'} = g_{n+1}\circ\phi_{n+1}|_{C'}$，并利用部分作用序列的有理性，将此定义扩展为一个博雷尔映射 $\psi_{n+1}\colon X'_{n+1}\to\mathbb{R}^d$。映射 $(\psi_k)_{k\le n+1}$ 的相容性，以及当 $m \le n+1$ 时包含关系 $Z_m\cap X'_{n+1}\subseteq Z_{n+1}$，均可由式 (4) 的类似结果推出。

还需检验所得余循环 $\rho_{\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2}$ 是否满足双 Lipschitz 条件。处理余循环 $\rho_{\mathfrak{F}_2,\mathfrak{F}_1}$ 会更容易；对于 x、$x+r\in X'_n$，它满足

$$\rho_{\mathfrak{F}_2,\mathfrak{F}_1}(r,x) = g_n(\phi_n(x)+r) - g_n(\phi_n(x)),$$

因此是（α^-，α^+）-双 Lipschitz 的，因为g_n也是如此。因此，$\rho_{\mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_1}$也是（$\alpha^{-1}$，$\alpha$）-双 Lipschitz 的，因为根据$K$的选取，$\alpha^{-1} < \alpha^- < \alpha^+ < \alpha$。最后，我们应用注 3.10 得出，$\rho_{\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{F}_2}$ 也是（α^{-1}，α）-双 Lipschitz 的。□

将 $\mathfrak{F}_2$ 的作用限制在整数网格Z上，我们得到以下推论。

推论 3.13。设 $\mathfrak{F}$ 是 X 上的一个自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流。对于任意 $\alpha > 1$，存在一个截面 $Z \subseteq X$，以及 Z 上的一个自由 $\mathbb{Z}^d$-作用 T，使得余循环$\rho = \rho_{\mathfrak{F}},\ T\colon \mathbb{Z}^d\times X \to \mathbb{R}^d$由 $Tnx = x + \rho(n,\ x)$ 给出，且为$(\alpha^{-1},\ \alpha)$-双 *Lipschitz*。

4. 特殊表示定理

本节的主要目标是表述并证明 Katok 特殊表示定理的一个博雷尔版本 [12]，该定理将自由 $\mathbb{R}^d$流与自由 $\mathbb{Z}^d$作用联系起来。我们已经完成了证明定理 3.12 的大部分工作，现在只需在博雷尔背景下定义特殊表示，并将其与我们先前的框架联系起来。

4.1. **余循环**。给定一个博雷尔作用$G \curvearrowright X$，取值于群H的（博雷尔）**余循环**是一个（博雷尔）映射 $\rho : G \times X \to H$，它满足**余圈恒等式**:

$$\rho(g_2 g_1, x) = \rho(g_2, g_1 x)\rho(g_1, x) \quad \text{for all } g_1, g_2 \in G \text{ and } x \in X.$$

本节主要关注阿贝尔群 $\mathbb{Z}^d$ 和 $\mathbb{R}^d$，因此余圈恒等式将采用加法形式书写。若余圈 ρ: G × X → H 满足对所有 g $\neq e_G$和所有 x ∈X，均有 ρ(g , x) $\neq e_H$，则称其为单射，其中 e_G和 e_H分别是相应群的单位元。进一步假设群 G 和 H 都是局部紧的。若对所有 x ∈X，lim$g\to\infty$ ρ(g , x) = +∞趋于无穷，便称 ρ逃向无穷；这里的含义是：对于任意紧集 $K_H \subseteq$ H，都存在紧集 $K_G \subseteq$G，使得只要 g $\notin K_G$，就有 ρ(g , x) $\notin K_H$。

例4.1. 假设 a_H: H $\curvearrowright$X 和 a_G: G $\curvearrowright$Y，Y ⊆X 是群 G 和 H 在标准博雷尔空间上的自由作用，并且轨道等价关系满足包含关系 $E_G \subseteq E_H$。对于每个 y ∈Y 和 g ∈G，都存在唯一的 ρ_{a_H}，使得 a_G(g , y) ∈H，且 $a_H(\rho_{a_H}, a_G(g, y), y) = a_G(g, y)$。映射 (g , y) ↦ ρ_{a_H},a_G (g , y) 是一个单射博雷尔余圈。我们在第3.4节中已经见过这一思想的两个实例。

4.2. **函数下的流**。博雷尔 ℝ-流与 ℤ-作用通过“函数下的流”构造紧密相连。令 $T: Z \to Z$ 为标准博雷尔空间上的自由博雷尔自同构，并令 $f: Z \to \mathbb{R}^{>0}$ 为正博雷尔函数。在空间 $X = \{(z,t) : z \in Z, 0 \le t < f(z)\}$ 上，可以自然地定义一个流 $\mathfrak{F}$: ℝ $\curvearrowright X$，使其位于 f 的图之下。对于正数 r，作用 $(z,t) + r$ 的定义如下：将点 (z, t) 向上移动r 个单位，直到到达 f 的图；然后跳到点 $(Tz,0)$，并继续向上流动，直到到达 f 在 Tz 处的图，依此类推。更形式化地说，

$$(z, t) + r = \left(T^k z, t + r - \sum_{i=0}^{k-1} f(T^i z)\right)$$

对于满足 $\sum^{k-1}{}_{i=0} f(T^i z) \le t + r < \sum^{k}{}_{i=0} f(T^i z)$ 的唯一 $k \ge 0$；当$r \le 0$时，作用通过“向后流动”来定义，即:

$$(z, t) + r = \left(T^{-k} z, t + r + \sum_{i=1}^{k} f(T^{-i} z)\right)$$

对于满足 $0 \le t + r + k\sum_{i=1} f(T^{-i} z) < f(T^{-k} z)$ 的$k \ge 0$。只要T轨道内的纤维累积长度无限，该作用就是良定义的：

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(T^i z) = +\infty \quad \text{and} \quad \sum_{i=0}^{\infty} f(T^{-i} z) = +\infty \quad \text{for all } z \in Z. \tag{5}$$

“函数下的流”这一颇具吸引力的几何图景无法推广到更高维度，但可以将其解释为所谓的特殊流构造，该构造由 [12]提出。

4.3. **特殊流**。设T是标准博雷尔空间Z上的一个自由 $\mathbb{Z}^d$作用，并设 $\rho : \mathbb{Z}^d \times Z \to \mathbb{R}^d$是一个博雷尔余圈。可以构造一个 $\mathbb{Z}^d$作用$\hat{}T$，即所谓的主$\mathbb{R}^d$扩张，它定义在$Z \times \mathbb{R}^d$上，其定义为$\hat{}T_n(z,r) = (T_n z, r + \rho(n, z))$。由余圈恒等式可轻易验证该作用满足作用公理。虽然作用T通常具有复杂的动力学，但只要余圈 ρ逃逸至无穷，作用$\hat{}T$就存在一个博雷尔截面。

引理 4.2。若余圈 ρ 满足$\lim_{n\to\infty}||\rho(n,z)|| = +\infty$ 对所有 $z \in Z$ 均成立，则作用$\hat{T}$ 存在一个博雷尔截面。

证明。令 $Y_k = \{(z,r) \in Z \times \mathbb{R}^d : ||r|| \le k\}$。我们声称，$\hat{T}$ 的每个轨道与 Y_k 的交集都是有限集（可能为空）。事实上，趋于无穷大的余循环值意味着，对于任意 $(z,r) \in Z \times \mathbb{R}^d$，都存在一个足够大的数 N，使得当 $||r + \rho(n,z)|| > k$ 时，$||n|| \ge N$。特别地，$||n|| \ge N$ 意味着 $\hat{T}_n(z,r) = (T_n z, r + \rho(n,z)) \notin Y_k$。因此，$(z,r)$ 的轨道与 Y_k 的交集是有限的。

令 $Y = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \big(Y_k \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{T}_n Y_{k-1}\big)$。$\hat{T}$的每个轨道与 Y的交集都是有限且必非空的集合，因此 $E^{\hat{T}}|_Y$ 是一个有限博雷尔等价关系。$E^{\hat{T}}|_Y$ 的博雷尔截面也是 $\hat{T}$作用的截面。□

现在假设余循环 ρ 满足引理 4.2 的假设，因此$X = (Z \times \mathbb{R}^d)/E^{\hat{T}}$作为因子映射 $\pi : Z \times \mathbb{R}^d \to X$的推前，具有标准博雷尔空间的结构；该映射将每个点映到其$E^{\hat{T}}$-等价类。

在$Z \times \mathbb{R}^d$上存在一个自然的 $\mathbb{R}^d$-流 $\hat{\mathfrak{F}}$，它通过平移第二个坐标来作用：$(z,r) +^{\hat{}}_{\mathfrak{F}} s = (z, r+s)$。此流与 $\mathbb{Z}^d$-作用 $\hat{T}$可交换，因此投影为X上的流 $\mathfrak{F}$，该流由条件 $\pi((z,r) +^{\hat{}}_{\mathfrak{F}} s) = \pi(z,r) +_{\mathfrak{F}} s$给出。我们称 $\mathfrak{F}$为由余循环 ρ生成的、位于T之上的**特殊流**。T的自由性蕴含 $\mathfrak{F}$的自由性。

上述构造同样适用于遍历理论的情形，此时空间Z带有一个由 ν 给出的有限测度，且该测度在作用T下保持不变。ν与 $\mathbb{R}^d$上的勒贝格测度的乘积诱导出X上的测度 μ，该测度在流 $\mathfrak{F}$下保持不变。此外，只要余循环 ρ 按照 [12, 条件 (J)（第 122] 页）的意义可积，μ 就是有限的。Katok特殊表示定理断言，除去一个零测集，任何自由遍历保测流都可以通过这一过程得到。此外，可以选取余循环使其为双 Lipschitz，且其利普希茨常数可任意接近 1。

稍后将会证明，在描述集合论的框架下，这样的表示结果仍然成立，而且每个自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流都博雷尔同构于某个自由博雷尔 $\mathbb{Z}^d$-作用上的特殊流。此外，正如 Katok 在原著中所做的那样，定理 4.3 对生成该流的余循环提供了重要的控制，将 $\mathbb{Z}^d$-作用的动力学与其所产生的流的动力学紧密联系起来。不过，首先我们将用不同的术语重新诠释这一构造。

4.4. 由容许余循环生成的流。将映射 $Z \ni z \mapsto (z,0) \in Z \times \{0\}$记为 ι。若余循环 ρ是单射，则 $\pi \circ \iota : Z \to \pi(Z \times \{0\}) = Y$ 是一个双射，并且 Y 与 $\mathfrak{F}$ 的每条轨道都相交于一个非空可数集合。可通过 $\pi \circ \iota$将 Z 上的 $\mathbb{Z}^d$-作用 T 转移到 Y 上，从而得到一个自由的 $\mathbb{Z}^d$-作用 $T' = \pi \circ \iota \circ T \circ \iota^{-1} \circ \pi^{-1}$。令$\rho' = \rho_{T',\mathfrak{F}} : \mathbb{Z}^d \times Y \to \mathbb{R}^d$为作用 $\pi \circ \iota \circ T \circ \iota^{-1} \circ \pi^{-1}$的余循环；换言之

$$T'_n(y) = (\pi \circ \iota \circ T_n \circ \iota^{-1} \circ \pi^{-1})(y) = y +_{\mathfrak{F}} \rho'(n,y) \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z}^d \text{ and } y \in Y. \tag{6}$$

若 $y = (\pi \circ \iota)(z)$ 且 $z \in Z$，则式（6）变为

$$\pi(T_n z, 0) = \pi(z, \rho'(n,y)).$$

由于 $\pi(T_n z, 0) = \pi(z, \rho(-n, T_n z)) = \pi(z, -\rho(n,z))$，我们得出 $\rho'(n,y) = -\rho(n,z)$，其中 $y = (\pi \circ \iota)(z)$。特别地，Y是流 $\mathfrak{F}$ 的离散截面，正因为 ρ 逃逸至无穷远。

反之，若 $\mathfrak{F}$ 是标准博雷尔空间 X 上的任意自由 $\mathbb{R}^d$-流，且 $Z \subseteq X$ 是一个离散截面，其上有一个 $\mathbb{Z}^d$-作用 T，那么 $\mathfrak{F}$ 同构于由余循环 $-\rho_{T,\mathfrak{F}}$ 生成的、定义在 T 上的特殊流（该余循环必为单射）。

我们称余循环 ρ 为**可容许的**，如果它既是单射的，又趋于无穷远。上述两段的讨论可以概括为：除余循环的符号变换外，将一个流表示为由可容许余循环生成的特殊流，与在该流的离散截面上找到一个自由 $\mathbb{Z}^d$-作用是等价的。

例如，给定任意自由的 $\mathbb{Z}^d$-作用 T在 Z上的作用，我们可以考虑余循环 $\rho(n,z) = -n$，其中对于所有 $z \in Z$和 $n \in \mathbb{Z}^d$均成立。于是，集合 $Y = \pi(Z \times\{0\})$ 是该流的整数网格 $\mathfrak{F}$ （定义 3.11 所述意义下）。反过来，任何具有整数网格的流都同构于由此类余循环生成的特殊流。

4.5. **特殊表示定理**。 将任意 $\mathbb{R}^d$-流的轨道等价关系限制在一个截面上，会得到一个超有限等价关系 [10, 定理 1.16], 因此可以通过一个自由博雷尔$\mathbb{Z}^d$-作用将其实现为轨道等价关系（只要受限的等价关系是无周期的）。由于任何自由流都存在一个离散的（事实上是稀疏的）无周期截面，因此它同构于某个由 某个 作用生成的、以 某个 余循环为基础的特殊流。然而，一般而言， $\mathbb{Z}^d$-轨道的结构与流的相应轨道几乎没有关系。定理 3.12 和推论 3.13 使我们能够改进这一点，并找到一个由双 Lipschitz 余循环生成的特殊表示。

作为比较，Katok定理 [12] 可以用本节的术语表述如下。

定理 (Katok)**：** 任取 $\alpha > 1$。标准勒贝格空间上的任意自由遍历保测 $\mathbb{R}^d$流，都同构于一个特殊流；该特殊流建立在由一个 $(\alpha^{-1},\ \alpha)$双 *Lipschitz* 余循环生成的自由遍历保测 $\mathbb{Z}^d$作用之上。

与所有遍历理论结果一样，这里的同构理解为除去一个零测集后成立。现在，我们可以用博雷尔版本的Katok特殊表示定理作结；该定理适用于所有自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$流，并在所有轨道上建立同构。

定理 4.3。 任取 $\alpha > 1$。任意自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$流都同构于一个特殊流；该特殊流建立在由一个 $(\alpha^{-1},\ \alpha)$双 *Lipschitz* 余循环生成的自由博雷尔 $\mathbb{Z}^d$作用之上。

证明。 设 $\mathfrak{F}$ 是 X 上的一个自由博雷尔 $\mathbb{R}^d$-流。推论 3.13 给出了一个截面 $Z \subseteq X$, 以及其上的一个 $\mathbb{Z}^d$-作用 T，使得余循环 $\rho_{\mathfrak{F},\ T}\colon\ \mathbb{Z}^d \times X \to \mathbb{R}^d$ 是 (α^{-1}, α)-双 Lipschitz 的。根据第 4.4 节中的讨论，这给出了将该流表示为由余循环 $-\rho_{\mathfrak{F},\ T}$生成的、在 T 上的特殊流；该余循环同样是 (α^{-1}, α)-双 Lipschitz 的。□

参考文献

[1] Warren Ambrose, 《遍历流的表示》, 《数学年刊》第二辑**42** (1941), 723– 739.[2] Warren Ambrose 和 Shizuo Kakutani, 《可测流的结构与连续性》, 杜克数学杂志**9**(1942), 25–42.[3] Charles M. Boykin 和 Steve Jackson, 《博雷尔有界性与格舍入性质》, Contempo- rary Mathematics (Su Gao, Steve Jackson 和 Yi Zhang 编), 第425卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2007年, 第113–126页。[4] Michael R. Cotton, 《阿贝尔群作用与超光滑等价关系》, 纯粹与应用逻辑年刊**173** (2022), 第8期, 103122.[5] Andrés del Junco 和 Daniel J. Rudolph, 《遍历$_n$ 作用的 Kakutani 等价》, 《遍历理论与动力系统》**4** (1984), 第1期, 89–104.[6] Randall Dougherty、Steve Jackson 和 Alexander S. Kechris, 《超有限博雷尔等价关系的结构》, 《美国数学会汇刊》**341** (1994), 第1期, 193–225。

[7] 雅各布·费尔德曼，新的 K-自同构与 Kakutani 的一个问题，《以色列数学杂志》24 (1976), 第1期，16–38。MR 0409763[8] Su Gao、Steve Jackson、爱德华·克罗恩和布兰登·休厄德，强制构造与可数博雷尔等价关系，《符号逻辑杂志》87 (2022), 第3期，873–893。MR 4472517[9] Marlies Gerber 和 Philipp Kunde, Kakutani 等价关系的反分类结果，2021年9月，评论：72页，3幅图。[10] Steve Jackson、Alexander S. Kechris 和阿兰·卢沃，可数博雷尔等价关系，《数学逻辑杂志》2 (2002), 第1期，1–80。[11] 阿纳托尔·B·卡托克，遍历理论中的单调等价，Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Seriya Matem- aticheskaya 41 (1977), 第1期，104–157, 231。MR 0442195[12] ———, 多维群作用的特殊表示定理，《动力系统，第一卷——华沙》，1977年，第117–140页。《Astérisque》，第49号。MR 0492181[13] Alexander S. Kechris，局部紧群作用的可数截面，《遍历理论与动力系统》12 (1992), 第2期，283–295。[14] ———, 局部紧群作用的可数截面。II，《美国数学会院刊》120 (1994), 第1期，241–247。[15] Bryna Kra、Anthony Quas 和 Ay.se ،Sahin， ℝd 作用的 Rudolph 两步编码定理与 Alpern 引理，《美国数学会汇刊》367 (2015), 第6期，4253–4285。MR 3324927[16] 乌尔里希·克伦格尔，关于 Rudolph 对无周期流的表示，《庞加莱研究所年刊·B辑（新系列）》12 (1976), 第4期，319–338。[17] François Le Maître 和康斯坦丁·斯卢茨基，流的 L^1 全群，2021年8月。[18] 安德鲁·S·马克斯和斯宾塞·T·昂格尔，博雷尔圆形求积，《数学年刊》186 (2017), 第2期，581–605。[19] 本杰明·D·米勒和Christian Rosendal，描述性 Kakutani 等价，《欧洲数学会杂志》(JEMS) 12 (2010), 第1期，179–219。[20] 唐纳德·S·奥恩斯坦、Daniel J. Rudolph 和本杰明·魏斯，保测变换的等价性，《美国数学会回忆录》37 (1982), 第262号，xii+116。MR 653094[21] Daniel J. Rudolph，遍历流的二值阶梯编码，《数学杂志》150 (1976), 第3期，201–220。[22] ———，ℝn 的矩形铺砌与自由的 ℝn-作用，《动力系统（马里兰州大学公园市，1986–87）》，《数学讲义》，第1342卷，Springer，柏林，1988年，第653–688页。[23] 康斯坦丁·斯卢茨基，多维博雷尔流的勒贝格轨道等价：铺砌图册，《遍历理论与动力系统》37 (2017), 第6期，1966–1996。MR 3681992[24] ———, 关于博雷尔流的时间变换等价，《数学基础》247 (2019), 第1期，1–24。MR 3984276[25] ———, 博雷尔流的正则截面，《欧洲数学会杂志》(JEMS) 21 (2019), 第7期，1985–2050。MR 3959857[26] ———, 多维博雷尔流的光滑轨道等价，《数学进展》381 (2021), 论文编号107626，22页。MR 4215747[27] Sławomir Solecki，非紧及非局部紧波兰群的作用，《符号逻辑杂志》65 (2000), 第4期，1881–1894。MR 1812189[28] Raimond A. Struble，局部紧群上的度量，《数学汇刊》28 (1974), 217–222。[29] Vladimir V. Uspenskij，极小拓扑群的子群，《拓扑学及其应用》155 (2008), 第14期，1580–1606。MR 2435151[30] Vivek M. Wagh，Ambrose 流表示定理的描述性版本，印度科学院《院刊·数学科学》98 (1988), 第2-3期，101–108。[31] 本杰明·魏斯，可测动力学，《现代分析与概率会议》（康涅狄格州纽黑文，1982），《当代数学》，第26卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1984年，第395–421页。[32]罗伯特·J·齐默尔，遍历理论与半单群，《数学专著》，第81卷，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1984年。MR 776417

数学系爱荷华州立大学，爱荷华州 州立 大学，411 莫里尔 路号，艾姆斯，爱荷华州50011邮编电子邮箱地址：kslutsky@gmail.com