arXiv:2302.11090v1 [math.CV] 22 Feb 2023

¨ α-莫比乌斯不变 Besov 空间的对偶性

包冠龙、娄增建和周晓静

摘要。对于 $1 \le p \le \infty$ 和 $\alpha > 0$，Besov 空间 B^p_α 在 α-莫比乌斯不变函数空间理论中起着关键作用。从某种意义上说，B^1_α 是最小的 α-莫比乌斯不变函数空间，B^2_α 是唯一的 α-莫比乌斯不变希尔伯特空间，而 B^∞_α 是最大的 α-莫比乌斯不变函数空间。本文借助空间 B^∞_α，在 α-莫比乌斯不变配对下，确定了 B^1_α 的预对偶空间和对偶空间。特别地，相应的确定关系是等距同构。本文还给出了 $p > 1$ 条件下 B^p_α 关于 α-莫比乌斯不变配对的对偶定理。

1. 引言

设 $\mathbb{D}$ 是复平面中的开单位圆盘。记 Aut($\mathbb{D}$) 为由将 $\mathbb{D}$ 映射到自身的单射解析函数构成的 M¨obius 群。对于 $a \in \mathbb{D}$，令

$$\sigma_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

它是一个交换 0 和 a 两点的 M¨obius 映射。众所周知,

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \{e^{i\theta}\sigma_a : \ a \in \mathbb{D} \text{ and } \theta \text{ is a real number}\}.$$

若空间 X 包含于 $H(\mathbb{D})$（即 $\mathbb{D}$ 中解析函数的集合），并配备半范数 ρ，使得对于所有 $f \in X$ 以及所有 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，都有 $f \circ \varphi \in X$ 和 $\rho(f \circ \varphi) \lesssim \rho(f)$，则称其为莫比乌斯不变空间。莫比乌斯不变函数空间理论的研究是复分析中的经典课题（参见 [3, 4, 5, 12, 13, 14, 15]）。粗略地说，根据[3, 4, 12] ，Bloch 空间 $\mathcal{B}$、狄利克雷空间 $\mathcal{D}$ 和 Besov 空间 B^1 分别构成最大的莫比乌斯不变函数空间、唯一的莫比乌斯不变希尔伯特空间以及最小的莫比乌斯不变函数空间。

2010 年数学主题分类：30H25、30H30、46E15。关键词和短语：M¨obius 群；M¨obius 不变空间；Besov 空间；Bloch 型空间。包冠龙受到国家自然科学基金委员会（编号：12271328）和广东省基础与应用基础研究基金（编号：2022A1515012117）的资助。Z. Lou 和 X. Zhou 受到国家自然科学基金委员会（编号：12071272）的资助。

对于 $\alpha > 0$，令 $\mathcal{B}_\alpha$ 为由满足下列条件的函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成的 Bloch 型空间：

$$|||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha |f'(z)| < \infty.$$

$|||\cdot|||_{\mathcal{B}_\alpha}$是 $\mathcal{B}_\alpha$上的半范数。记$\mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$为$\mathcal{B}_\alpha$中多项式的闭包。如果 $\alpha = 1$，那么 $\mathcal{B}_\alpha$ 就是 Bloch 空间 $\mathcal{B}$。由于 $\mathcal{B}$ 在 M¨obius 不变函数空间中的极大性质，K. Zhu [19] 提出了一个问题：$\mathcal{B}_\alpha$ 是否在某类解析函数空间中是极大的？为回答 K. Zhu 的问题，并理解一般解析函数空间族 $F(p,q,s)$ 的理论，R. Zhao [16] 于 1996 年引入了 f 在 $H(\mathbb{D})$中与 φ 属于 Aut($\mathbb{D}$) 时的加权复合概念。对于 $\alpha > 0$、$f \in H(\mathbb{D})$和 $\varphi \in$ Aut($\mathbb{D}$)，令

$$f \circ_\alpha \varphi(z) = \int_0^z f'(\varphi(w))(\varphi'(w))^\alpha\, dw + f(\varphi(0))(\varphi'(0))^{\alpha-1}$$

其中 $z \in \mathbb{D}$。显然，如果 $\alpha = 1$，那么 $f \circ_\alpha \varphi = f \circ \varphi$就是 f 与 φ的通常复合。设 X 是 $H(\mathbb{D})$的一个子空间，并配备半范数 ρ。按照 [16], 第 4 节的说法，若 $f \circ_\alpha \varphi \in X$ 且对所有 $f \in X$ 及所有$\varphi \in$ Aut($\mathbb{D}$)，都有 $\rho(f \circ_\alpha \varphi) \le C\rho(f)$，则称 X 是 α-M¨obius 不变的，其中 C 是一个不依赖于 f 和 φ的正数。事实上，如果上述条件对半范数 ρ成立，那么在 X 上存在另一个等价半范数 ρ'，满足对所有$f \in X$ 和 $\varphi \in$ Aut($\mathbb{D}$)，均有 $\rho'(f \circ_\alpha \varphi) = \rho'(f)$。此外，当 $\alpha = 1$时，一个 α-M¨obius 不变函数空间就是一个 M¨obius 不变函数空间。实际上，在 α-M ¨obius 不变函数空间中，R. Zhao [16] 证明了 $\mathcal{B}_\alpha$ 在某种意义下是极大的。在 [16, 第 54], 页，R. Zhao 提出了以下两个问题：哪个空间是最小的 α-M¨obius 不变函数空间？是否只有一个 α- M¨obius 不变希尔伯特空间？这两个问题最近在[6] 中得到了解答。关于 M¨obius 不变函数空间的近期研究，参见 [1, 10, 11] 。

对于 $\beta > -1$，我们记 $dA_\beta(z) = (\beta+1)(1-|z|^2)^\beta dA(z)$，其中 $dA(z) = 1/\pi dxdy$, $z = x + iy$ 是 $\mathbb{D}$ 上的归一化勒贝格测度。设$1 \le p < \infty, \alpha > 0$，且 n 是满足 $p(\alpha - 1 + n) - 1 > 0$ 的正整数。回顾一下，Besov 空间 B^p_α 是由满足以下条件的函数 f 组成的集合：f 属于 $H(\mathbb{D})$，且函数 $f^{(n)}(z)(1-|z|^2)^{\alpha-1+n}$ 属于 $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$，其中$d\lambda(z) = (1-|z|^2)^{-2}dA(z)$ 是$\mathbb{D}$上的 M¨obius 不变勒贝格测度。此外，对于 $\alpha > 0$ 和正整数 n，B^∞_α 由满足以下条件的函数 f 组成：f 属于 $H(\mathbb{D})$，且 $f^{(n)}(z)(1-|z|^2)^{\alpha-1+n}$ 在 $\mathbb{D}$ 上有界。根据[17] ，已知 B^p_α 与整数 n 的选取无关。显然，B^∞_α 是 Bloch 型空间 $\mathcal{B}_\alpha$。根据 [16]，对于每个 $f \in \mathcal{B}_\alpha$ 和 $\varphi \in$ Aut($\mathbb{D}$)，都有 $|||f\circ_\alpha\varphi|||_{\mathcal{B}_\alpha} = |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}$。由 [6], 中的定理 6.2 可知，对于任意 $p \ge 1$ 和 $\alpha > 0$，空间 B^p_α 也是 α-M¨obius 不变的。

对于 $\alpha > 0$，用 M_α 表示由可表示为如下形式的函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 构成的空间

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^z \varphi_n'(w)^\alpha \, dw, \qquad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1}$$

其中 $c_0 \in \mathbb{C}$、$\{c_n\} \in \ell^1$，且每个 $\varphi_n \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。$M_\alpha$ 上的半范数定义为

$$|||f|||_{M_\alpha} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| : \ (1.1) \text{ holds} \right\}.$$

由 [6] 可知，对于每个 $f \in M_\alpha$ 和 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，$|||f \circ_\alpha \varphi|||_{M_\alpha} = |||f|||_{M_\alpha}$，且 M_α 在所有非平凡的 α-M¨obius 不变函数空间中是最小的。根据 [6], 中的定理 3.2

$$|||f|||_{M_\alpha} \approx |f'(0)| + \int_{\mathbb{D}} |f''(z)|(1-|z|^2)^{\alpha-1} \, dA(z). \tag{1.2}$$

对所有 $f \in M_\alpha$ 均成立。f 在 M_α 中的范数为 $\|f\|_{M_\alpha} = |f(0)| + |||f|||_{M_\alpha}$。由 (1.2) 可知，$M_\alpha$ 是 Besov 空间 B^1_α。

给定 $\alpha > 0$ 和一个在 $\mathbb{D}$ 中解析的函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，我们称 $f \in H_\alpha$，如果

$$|||f|||_{H_\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)} n|a_n|^2 < \infty.$$

由 [6]、$|||f \circ_\alpha \varphi|||_{H_\alpha} = |||f|||_{H_\alpha}$，对于每个 $f \in H_\alpha$ 和 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$，$H_\alpha$ 是唯一的非平凡 α-M¨obius 不变希尔伯特空间。由 [6] 还可知，H_α 是 Besov 空间 B^2_α。

固定 $\alpha > 0$，它与空间 H_α 相关，在 $\mathbb{D}$ 上定义一个配对为

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \lim_{r \to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)} n a_n \overline{b}_n r^{2n}, \tag{1.3}$$

如果极限存在，其中 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 和 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 是在 $\mathbb{D}$ 中解析的函数。事实上，由 [6] 可知

$$\langle f \circ_\alpha \varphi, g \circ_\alpha \varphi \rangle_\alpha = \langle f, g \rangle_\alpha$$

对于所有 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。因此，我们称 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ 是一个 α-M¨obius 不变配对。

在本文中，在 α-M¨obius 不变配对下，我们给出了最小和最大 α-M¨obius 不变函数空间之间的对偶关系。相应的对应关系是等距同构。在

特别地，我们证明存在 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 属于 $B_{\alpha,\ 0}$ 且 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 属于 M_α，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\, n\overline{a}_n b_n$$

这是发散的，这意味着通过极限来定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ 是合理的。我们还研究了 B_α^p 在 $p > 1$ 时的对偶定理。

在全文中，如果存在正常数 C 使得 $a \le Cb$，我们记作 $a \lesssim b$。如果 $a \lesssim b \lesssim a$，则记作 $a \approx b$。

2. α-M¨OBIUS 不变配对与一般对偶性结果

本节中，我们给出 α-M¨obius 不变配对的一些等式，以及 α-M¨obius 不变函数空间的一个一般对偶定理。这些结果将在后续各节中发挥作用。

引理 2.1. 假设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 和 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 属于 $H(\mathbb{D})$，且极限 $\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(2\alpha)} \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{\Gamma^n} n a_n \overline{b}_n r^{2n}$ ~~存在。~~ 那么以下命题成立。

(a) *For* $\alpha > 1/2$,

$$\langle f, g\rangle_\alpha = (2\alpha-1) \lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\alpha f'(rz)\overline{(1-|z|^2)^\alpha g'(rz)}\, d\lambda(z). \quad (2.1)$$

(b) 对于 $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_\alpha &= \lim_{r\to 1^-} \Big[\int_{\mathbb{D}} f'(rz)\overline{g'(rz)} dA_{2\alpha-1}(z) \\ &\quad + \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+2)} r^2 \int_{\mathbb{D}} f''(rz)\overline{g''(rz)} dA_{2\alpha}(z) \Big]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

证明。对于 $r \in (0, 1)$，在引理 4.2 和引理 4.3]中分别用 f_r 和 g_r 替换 f 和 g，即可得到所需结果。这里 $f_r(z) = f(rz)$，且 $g_r(z) = g(rz)$。□

接下来，利用 α-M¨obius 不变配对，我们给出一个 α-M¨obius 不变函数空间的对偶空间的描述。

定理 2.2. 假设 $\alpha > 0$ 和 X 是一个配备了α-M¨obius 不变半范数 $|||\cdot|||_X$的函数空间。设多项式在 X中稠密。那么 $X/\mathbb{C}$的对偶空间 $(X/\mathbb{C})^*$ 可与满足以下条件的函数空间 $f \in H(\mathbb{D})$等同识别

$$|||f|||_{(X/\mathbb{C})^*} = \sup\{|\langle g, f\rangle_\alpha| : g \in X, |||g|||_X \le 1\} < \infty.$$

此外，$(X/\mathbb{C})^*$ 是一个 α-M¨obius 不变函数空间。

证明。设 $f \in H(\mathbb{D})$，其中 $|||f|||_{(X/\mathbb{C})^*} < \infty$。显然，$\langle \cdot, f\rangle_\alpha$ 在 $X/\mathbb{C}$ 上给出了一个有界线性泛函。

现在设 F 是 X 上的有界线性泛函，满足 $F(1) = 0$。记

$$a_n = \overline{F(z^n)}\frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{2.3}$$

并令 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$，其中 $z \in \mathbb{D}$。于是

$$|a_n| \le \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)n}\|z^n\|_X\|F\|,$$

其中 $\|\cdot\|_X$ 是 X的范数，而 $\|F\|$ 是有界线性泛函 F的范数。注意，M_α是最小的非平凡 α-M¨obius 不变函数空间。根据 [6],中的定理 3.3

$$\|z^n\|_X \lesssim \|z^n\|_{M_\alpha}$$

对所有正整数 n均成立。显然，$\|z\|_{M_\alpha}$是一个正的常数。对于 $n \ge 2$，直接计算可得

$$\|z^n\|_{M_\alpha} \approx n(n-1)\int_{\mathbb{D}} |z|^{n-2}(1-|z|^2)^{\alpha-1}\,dA(z) \approx n^{2-\alpha},$$

其中可比的正数常数仅依赖于 α。因此，

$$|a_n| \lesssim \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)n}n^{2-\alpha}\|F\|$$

对所有正整数 n。注意到函数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)\,n}n^{2-\alpha}z^n$属于 $H(\mathbb{D})$。因此 $f \in H(\mathbb{D})$。对于任意多项式 $g(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n$，其中 N为正整数，由 (2.3) 可得

$$\begin{aligned} F(g) &= b_0F(1) + \sum_{n=1}^{N} b_nF(z^n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} b_n\overline{a_n}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)n}{\Gamma(n+2\alpha-1)} \\ &= \langle g, f\rangle_\alpha. \end{aligned}$$

由于多项式在 X 中稠密，我们看到，对于所有 $h \in X$，$F(h) = \langle h, f\rangle_\alpha$。因此，$(X/\mathbb{C})^*$ 可以与满足 $|||f|||_{(X/\mathbb{C})^*} < \infty$ 的函数 $f \in H(\mathbb{D})$ 所构成的空间等同起来。

α-M¨obius 不变性以及 $\langle \cdot, \cdot\rangle_\alpha$ 和 $|||\cdot|||_X$ 的性质表明，$|||\cdot|||_{(X/\mathbb{C})^*}$是 $(X/\mathbb{C})^*$的 α-M¨obius 不变半范数。证明完毕。□

定理 2.2 将 [4] 中从 M¨obius 不变函数空间到 α-M¨obius 不变函数空间的经典对偶性结果推广到了每个 $\alpha > 0$。

3. 与最小和最大 α-M ¨OBIUS 不变函数空间相关的对偶定理

在本节中，对于每个 $\alpha > 0$，我们证明 $M_\alpha/\mathbb{C}$ 的对偶空间可与 $\mathcal{B}_\alpha/\mathbb{C}$ 等同，而 $M_\alpha/\mathbb{C}$ 的预对偶空间可与 $\mathcal{B}_{\alpha,\,0}/\mathbb{C}$ 等同。相应的等同关系都是等距同构。为清楚起见，我们将以有界线性泛函的概念陈述这些结果。

我们首先考察如下 (1.3) 中极限的存在性。

引理 3.1. 设 $\alpha > 0$。对于 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 属于 $\mathcal{B}_\alpha$ 且 $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 属于 M_α，令

$$h(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\, n a_n \overline{b_n} r^{2n}.$$

则极限 $\lim_{r\to 1^-} h(r)$ 存在。

证明。对于 $r \in (1/2, 1)$，由 (2.2) 可得

$$h(r) = \int_{\mathbb{D}} f'(rz)\overline{g'(rz)}\,dA_{2\alpha-1}(z) + \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+2)} r^2 \int_{\mathbb{D}} f''(rz)\overline{g''(rz)}\,dA_{2\alpha}(z).$$

结合加权 Bergman 空间和 Bloch 型空间通过高阶导数的刻画（参见 [18, 19]），可知

$$\begin{aligned}
|h(r)| \lesssim & |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} \int_{\mathbb{D}} |g'(rz)|\,dA_{\alpha-1}(z) \\
& + \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+2)} |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} \int_{\mathbb{D}} |g''(rz)|\,dA_{\alpha-1}(z) \\
\lesssim & |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} \int_{\mathbb{D}} |g''(rz)|\,dA_\alpha(z) + \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+2)} |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} |||g_r|||_{M_\alpha} \\
\lesssim & |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} |||g_r|||_{M_\alpha} \le C |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} |||g|||_{M_\alpha}, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

其中 C 是仅依赖于 α 的正常数。

设 r_1、r_2 是区间（$1/2, 1$）中的任意实数。请记住（3.1）以及

$$g_{r_1}(z) - g_{r_2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (r_1^n - r_2^n) z^n.$$

我们推得

$$\begin{aligned}|h(r_1)-h(r_2)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\,na_n\overline{b_n}(r_1^{2n}-r_2^{2n})\right| \\ &= \lim_{s\to 1^-}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\,na_n\overline{b_n}(r_1^{2n}-r_2^{2n})s^{2n}\right| \\ &\le C|||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}|||g_{r_1}-g_{r_2}|||_{M_\alpha}.\end{aligned}$$

注意，当 $|r_1-r_2|\to 0$ 时，$|||g_{r_1}-g_{r_2}|||_{M_\alpha}$ 一致趋于 0。于是，当 $|r_1-r_2|\to 0$ 时，$|h(r_1)-h(r_2)|\to 0$ 一致成立。因此，极限 $\lim_{r\to 1^-}h(r)$ 存在。□

下述结果表明，$M_\alpha/\mathbb{C}$ 的对偶空间可通过等距同构与 $\mathcal{B}_\alpha/\mathbb{C}$ 识别。

定理 3.2. 对于 $\alpha>0$，下列陈述成立。

(a) 对任意 $f\in\mathcal{B}_\alpha$，$\langle\cdot,\ f\rangle_\alpha$ 在 M_α 上定义一个有界线性泛函。此外，

$$|||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}=\sup\{|\langle g,f\rangle_\alpha|: g\in M_\alpha, |||g|||_{M_\alpha}\le 1\}. \tag{3.2}$$

(b) 若 F 是定义在 M_α 上的有界线性泛函，且 $F(1)=0$，则存在一个函数 $f\in\mathcal{B}_\alpha$，使得对所有 $g\in M_\alpha$，$F(g)=\langle g,f\rangle_\alpha$。此外，

$$|||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}=\sup\{|F(g)|: g\in M_\alpha, |||g|||_{M_\alpha}\le 1\}. \tag{3.3}$$

证明。(a) 设 $f\in\mathcal{B}_\alpha$。由引理 3.1，$\langle g,$ 因此对于任意 $g\in M_\alpha$，$f\rangle_\alpha$ 都有定义。显然，$\langle\cdot,f\rangle_\alpha$ 在 M_α 上定义了一个线性泛函。

对于 $\alpha>0$ 和 $\zeta\in\mathbb{D}$，我们断言

$$\langle I_{\alpha,\zeta},f\rangle_\alpha=(|\zeta|^2-1)^\alpha\overline{f'(\zeta)}, \tag{3.4}$$

其中

$$I_{\alpha,\zeta}(z)=:\int_0^z\sigma_\zeta'(w)^\alpha\,dw,\ \ z\in\mathbb{D}.$$

首先考虑 $\alpha>\frac{1}{2}$ 的情形。由 (2.1) 和著名的再生公式（参见 [18, 命题 4.23]），可得

$$\begin{aligned}\langle f,I_{\alpha,\zeta}\rangle_\alpha &= (2\alpha-1)(|\zeta|^2-1)^\alpha\lim_{r\to 1^-}\int_{\mathbb{D}}\frac{f'(rz)(1-|z|^2)^{2\alpha-2}}{(1-r\zeta\overline{z})^{2\alpha}}dA(z) \\ &= (|\zeta|^2-1)^\alpha\lim_{r\to 1^-}f'(r^2\zeta) \\ &= (|\zeta|^2-1)^\alpha f'(\zeta),\end{aligned}$$

这就得到了公式 (3.4)。接下来考虑所有 $\alpha > 0$ 的情形。由 (2.2),

$$\begin{aligned}\langle f, I_{\alpha,\zeta}\rangle_\alpha =&(|\zeta|^2-1)^\alpha \lim_{r\to 1^-}\Big[\int_{\mathbb{D}} \frac{f'(rz)}{(1-r\zeta\overline{z})^{2\alpha}} dA_{2\alpha-1}(z)\\ &+\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+2)} 2\alpha\zeta r^2 \int_{\mathbb{D}} \frac{f''(rz)}{(1-r\zeta\overline{z})^{2\alpha+1}} dA_{2\alpha}(z)\Big].\end{aligned}$$

注意， $f\in\mathcal{B}_\alpha$ 和 $\zeta\in\mathbb{D}$。由勒贝格控制收敛定理可得

$$\begin{aligned}\langle f, I_{\alpha,\zeta}\rangle_\alpha &= (|\zeta|^2-1)^\alpha\Big[\int_{\mathbb{D}} \frac{f'(z)}{(1-\zeta\overline{z})^{2\alpha}} dA_{2\alpha-1}(z)\\ &\quad+\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+2)} 2\alpha\zeta \int_{\mathbb{D}} \frac{f''(z)}{(1-\zeta\overline{z})^{2\alpha+1}} dA_{2\alpha}(z)\Big]\\ &=: G(\alpha).\end{aligned}$$

记 $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: \Re(z)>0\}$ 为右半平面。众所周知，伽马函数在 Ω 上是解析函数。因此， G 可延拓为 Ω 上的解析函数。对于固定的 $\zeta\in\mathbb{D}$，记 $G_1(\beta)=(|\zeta|^2-1)^\beta f'(\zeta)$。显然，$G_1$ 也是 Ω 上的解析函数。我们已经证明，当 β 是 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 中任意实数时， $G(\beta)=G_1(\beta)$。根据解析函数的唯一性，我们得到对于所有 $\beta\in\Omega$， $G_1(\beta)=\overline{G(\beta)}$。因此，当 $\alpha>0$ 且 $\zeta\in\mathbb{D}$时，我们的结论成立。

假设 $g\in M_\alpha$。那么存在 $c_0\in\mathbb{C}$、 $\{c_n\}\in\ell^1$ 和 $\{\zeta_n\}\subseteq\mathbb{D}$，使得

$$g(z)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty} c_n I_{\alpha,\zeta_n}(z),\qquad z\in\mathbb{D}.$$

因此，

$$\begin{aligned}|\langle g,f\rangle_\alpha| &\le \sum_{n=1}^{\infty}|c_n||\langle f, I_{\alpha,\zeta_n}\rangle_\alpha|\\ &\le \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|\sup_{\zeta\in\mathbb{D}}|\langle f, I_{\alpha,\zeta}\rangle_\alpha|.\end{aligned}$$

对 g 的所有表示取下确界，可得

$$|\langle g,f\rangle_\alpha|\le |||g|||_{M_\alpha}\sup_{\zeta\in\mathbb{D}}|\langle f, I_{\alpha,\zeta}\rangle_\alpha|. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 可知

$$|\langle g,f\rangle_\alpha|\le |||g|||_{M_\alpha}||||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}. \tag{3.6}$$

因此， $\langle\cdot,f\rangle_\alpha$ 在 M_α上定义了一个有界线性泛函。

显然，由(3.6)可得

$$\sup\{|\langle h, f\rangle_\alpha| : h \in M_\alpha, |||h|||_{M_\alpha} \le 1\} \le ||||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}.$$

注意，对于任意 $\zeta \in \mathbb{D}$，都有 $|||I_{\alpha,\,\zeta}|||_{M_\alpha} \le 1$。于是

$$||||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |\langle f, I_{\alpha,\zeta}\rangle_\alpha| \le \sup\{|\langle h, f\rangle_\alpha| : h \in M_\alpha, |||h|||_{M_\alpha} \le 1\}.$$

因此

$$|||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup\{|\langle h, f\rangle_\alpha| : h \in M_\alpha, |||h|||_{M_\alpha} \le 1\}.$$

(b) 假设 F 是 M_α 上的有界线性泛函，且 $F(1) = 0$。令

$$a_n = \overline{F(z^n)}\frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

并令 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$，对任意 $z \in \mathbb{D}$ 均成立。注意，多项式在 M_α 中稠密。由命题 2.2 的证明可知，$f \in H(\mathbb{D})$ 且 $F(h) = \langle h$，对所有 $h \in M_\alpha$ 均成立。

对于任意 $\zeta \in \mathbb{D}$ 和 $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\zeta}(z) &= (|\zeta|^2-1)^\alpha \int_0^z \frac{1}{(1-\overline{\zeta}w)^{2\alpha}}dw \\ &= (|\zeta|^2-1)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)}\overline{\zeta}^{n-1}z^n. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} F(I_{\alpha,\zeta}(z)) &= (|\zeta|^2-1)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)}\overline{\zeta}^{n-1}F(z^n) \\ &= (|\zeta|^2-1)^\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n\overline{a_n}\overline{\zeta}^{n-1} \\ &= (|\zeta|^2-1)^\alpha \overline{f'(\zeta)}. \end{aligned}$$

于是,

$$|||f|||_{\mathcal{B}_\alpha} = \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |F(I_{\alpha,\zeta})| \le \|F\| \sup_{\zeta\in\mathbb{D}} |||I_{\alpha,\zeta}|||_{M_\alpha} \le ||F||.$$

因此 $f \in \mathcal{B}_\alpha$。由于 $F(g) = \langle g,\ f\rangle_\alpha$ 对所有 $g \in M_\alpha$ 均成立，由 (3.2) 可得 (3.3) 也成立。证明完毕。□

下述定理表明，$M_\alpha/\mathbb{C}$ 的预对偶空间可认定为 $\mathcal{B}_{\alpha,\,0}/\mathbb{C}$。相应的认定也是一个等距同构。

定理 3.3。对于 $\alpha > 0$，以下陈述成立。

(a) 对于任意 $f \in M_\alpha$, $\langle \cdot, f\rangle_\alpha$，在 $\mathcal{B}_{\alpha,\,0}$ 上定义了一个有界线性泛函。此外,

$$|||f|||_{M_\alpha} = \sup\{|\langle h, f\rangle_\alpha| : h \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||h|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\}. \tag{3.7}$$

（b）若 F 是 $\mathcal{B}_{\alpha,\,0}$ 上的有界线性泛函，且 $F(1) = 0$，则存在一个函数 $f \in M_\alpha$，使得 $F(h) = \langle h,\ f\rangle_\alpha$ 对所有 $h \in \mathcal{B}_{\alpha,\,0}$ 都成立。此外,

$$|||f|||_{M_\alpha} = \sup\{|F(h)| : h \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||h|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\}. \tag{3.8}$$

证明。（a）请记住，$\mathcal{B}_{\alpha,\,0}$ 是 $\mathcal{B}_\alpha$ 的子集。对于 $f \in M_\alpha$，由定理 3.2 的（a）部分的证明可立即得到，$\langle \cdot,\ f\rangle_\alpha$ 在 $\mathcal{B}_{\alpha,\,0}$ 上定义了一个有界线性泛函。根据 Hahn-Banach 定理的一个著名推论（参见 [8, 推论 4.8.6]），我们知道

$$|||f|||_{M_\alpha} = \text{上确界}\Big\{\frac{|\phi(f)|}{\|\phi\|_{(M_\alpha/\mathbb{C})^*}} :$$
$$\phi \text{ is a bounded linear functional on } M_\alpha/\mathbb{C},\ \phi(1) = 0, \text{ and } \phi \neq 0\Big\}.$$

结合定理 3.2，我们得到

$$|||f|||_{M_\alpha} = \sup_{h\neq 0} \frac{|\langle h, f\rangle_\alpha|}{|||h|||_{\mathcal{B}_\alpha}} \tag{3.9}$$

因此,

$$\sup\{|\langle h, f\rangle_\alpha| : h \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||h|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\} \le |||f|||_{M_\alpha}. \tag{3.10}$$

注意，$\langle \cdot, f\rangle_\alpha$ 在$\mathcal{B}_{\alpha,0}$上定义了一个有界线性泛函。此外，给定$r \in (0, 1)$, 每个 h_r 都属于$\mathcal{B}_{\alpha,0}$，只要 $h \in \mathcal{B}_\alpha$。因此，对于任意$0 < r < 1$ 和 $h \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned}|\langle h, f_r\rangle_\alpha| =& |\langle h_r, f\rangle_\alpha| \\ \le& |||h_r|||_{\mathcal{B}_\alpha} \sup\{|\langle g, f\rangle_\alpha| : g \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||g|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\} \\ \le& |||h|||_{\mathcal{B}_\alpha} \sup\{|\langle g, f\rangle_\alpha| : g \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||g|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\}.\end{aligned}$$

结合式 (3.9)，可得

$$|||f_r|||_{M_\alpha} \le \sup\{|\langle g, f\rangle_\alpha| : g \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||g|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\},$$

这意味着

$$|||f|||_{M_\alpha} \le \sup\{|\langle g, f\rangle_\alpha| : g \in \mathcal{B}_{\alpha,0}, |||g|||_{\mathcal{B}_\alpha} \le 1\}. \tag{3.11}$$

由 (3.10) 和 (3.11)，可得 (3.7)。

（b）写出

$$b_n = \overline{F(z^n)}\frac{\Gamma(n + 2\alpha - 1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)n},\ \ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

并令 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ 对 $z \in \mathbb{D}$ 成立。请记住，多项式在 $\mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$ 中稠密。根据命题 2.2 的证明，$f \in H(\mathbb{D})$ 和 $F(h) = \langle h$，对所有 $h \in \mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$ 均成立。

对于 $0 < r < 1$，显然有 $f_r \in M_\alpha$。对于 $g \in \mathcal{B}_\alpha$，显然有$g_r \in \mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$。我们推得hat

$$|\langle g, f_r\rangle_\alpha| = |\langle g_r, f\rangle_\alpha| = |F(g_r)| \leq \|F\|||g_r|||_{\mathcal{B}_\alpha} \leq \|F\|||g|||_{\mathcal{B}_\alpha}$$

对所有 $g \in \mathcal{B}_\alpha$ 都成立。结合 (3.9)，可得 $|||f_r|||_{M_\alpha} \leq \|F\|$ 对所有$r \in (0, 1)$ 都成立。因此 $f \in M_\alpha$。由 (3.7) 可知 (3.8) 也成立。证明完毕。□

注 1. 定理 3.2 和定理 3.3 将文献 [4] 中相应的结果从 M¨obius 不变函数空间推广到了 α-M ¨obius 不变函数空间。不过，定理 3.3 的证明与 [4], 中的证明不同；该文通过证明 M_1 在 $\mathcal{B}_{1,\ 0}/\mathbb{C}$ 的对偶空间中弱-* 稠密且弱-*闭而得到了该结果（参见 [4, 第 124] 页）。

备注 2. K. Zhu [19] 在另一种配对下建立了 Bergman 空间 A^1 与 Bloch 型空间 $\mathcal{B}_\alpha$ 之间的对偶性结果，其中相关的对应关系仅在等价范数意义下成立，而不是等距的。

备注 3. 显然，定理 3.2 和定理 3.3 中 (b) 部分的函数 f 在模去常数的意义下是唯一的。

由定理 3.2 的证明可知,

$$\begin{aligned} |\langle f, g\rangle_\alpha| &= |\lim_{r\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\, n a_n \overline{b}_n r^{2n}| \\ &\leq |||f|||_{\mathcal{B}_\alpha}|||g|||_{M_\alpha} \end{aligned}$$

对所有 $f \in \mathcal{B}_\alpha$ 和 $g \in M_\alpha$均成立。自然会问，在定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ 时，是否可以通过在求和中取 $r = 1$ 而省略该极限。利用定理 3.2，我们将在下面的定理 3.4 中对此问题给出否定答案。对于正整数 k，在本文中，记 S_k 为将 $H(\mathbb{D})$ 中的每个函数映射到其 k 阶泰勒多项式的算子。

定理 3.4. 对于 $\alpha > 0$，存在 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 属于 $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ 以及$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 属于 M_α，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\, n \overline{a}_n b_n$$

是发散的。

证明。我们沿用 [2, 第 18] 页中的思路。假设结论不成立。对于 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 属于 $\mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$ 以及每个正整数 k，定义

$$F_k(g) = \sum_{n=1}^{k} \frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\, n\overline{a}_n b_n,$$

其中 $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 属于 M_α。因此，每个 F_k 都定义了一个作用于 M_α 上的有界线性泛函。根据我们的假设，一致有界原理表明 $\{||F_k||\}$ 是一个有界序列。注意，$F_k(g) = \langle g, S_k f\rangle_\alpha$。由定理 3.2，$|||S_k f|||_{\mathcal{B}_\alpha} \leq ||F_k||$. 因此，对于每个 $f \in B_{\alpha,\ 0}$，$\{|||S_k f|||_{\mathcal{B}_\alpha}\}$ 也是一个有界序列。再次应用一致有界原理可知，$\{\|S_k\|\}$ 是有界的，其中 S_k 被视为作用于 $\mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$上的算子。因此，存在一个与 k无关的正数常量 C，使得

$$\|S_k f\|_{\mathcal{B}_\alpha} \leq C\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}$$

对所有 $f \in B_{\alpha,\ 0}$均成立。但是，存在一些属于 $\mathcal{B}_{\alpha,\ 0}$ 的函数，其泰勒多项式在范数意义下发散（参见 [19, 第 1159] 页）。我们由此得到矛盾。这就完成了证明。□

4. 当 $p > 1$ 时，α-M¨obius 不变 B_α^p 空间的对偶性

对于 $p > 1$ 和 $\alpha > 0$，本节旨在证明，在α-M¨obius 不变配对下，$B_\alpha^p/\mathbb{C}$ 的对偶空间可识别为$B_\alpha^q/\mathbb{C}$，其中 q满足 $1/p+1/q = 1$，且相应的识别在等价范数意义下成立。

研究具有 $p > 1$ 和 $\alpha > 0$的 Besov 空间 B_α^p 时，较简单的情形是 $p\alpha > 1$。在这种情形下，B_α^p 是由满足以下条件的函数 f 在 $H(\mathbb{D})$ 中构成的空间：

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)(1-|z|^2)^\alpha|^p d\lambda(z) < \infty.$$

为涵盖 $p\alpha < 1$的情形，我们可以将 B_α^p 描述为由满足以下条件的函数 f 在 $H(\mathbb{D})$ 中构成的空间：

$$|||f|||_{B_\alpha^p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f''(z)(1-|z|^2)^{\alpha+1}|^p d\lambda(z)\right)^{1/p} < \infty. \tag{4.1}$$

f 在 B_α^p 中的一个范数为

$$\|f\|_{B_\alpha^p} = |f(0)| + |f'(0)| + |||f|||_{B_\alpha^p}.$$

对于 $q > 0$ 和 $\beta > -1$，回顾一下，Bergman 空间 A_β^q 由满足以下条件的 $H(\mathbb{D})$ 中的函数 f 组成：

$$\|f\|_{A_\beta^q}^q = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q (1-|z|^2)^\beta dA(z) < \infty.$$

根据 (4.1)，对于 $p>1$ 和 $\alpha>0$，$f\in B^p_\alpha$ 当且仅当 $f''\in A^p_{p(\alpha+1)-2}$。

本节中，我们对主要结果的证明涉及 Besov 空间的系数乘子性质。设 $\mathbb{D}$ 中有两个解析函数空间 X 和 Y，若复数列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ 满足：每当 $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n\in X$ 时，函数 $\sum_{n=0}^\infty \lambda_n a_n z^n$ 都属于 Y，则称其为从 X 到 Y 的系数乘子。用 (X,Y) 表示从 X 到 Y 的系数乘子集合。关于 $\mathbb{D}$ 中解析函数空间之间系数乘子的理论，可参阅近期出版的一本著作 [9]。

令 BV 为有界变差复数列的经典空间；也就是说，

$$BV=\left\{\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty:\ |\lambda_0|+\sum_{n=0}^\infty|\lambda_{n+1}-\lambda_n|<\infty\right\}.$$

以下结果归功于 S. Buckley、P. Koskela 和 D. Vukoti´c [7]。

定理 A. 设 X 是 $\mathbb{D}$ 中的一个解析函数巴拿赫空间，并且对每个 $f\in X$，泰勒多项式序列 $\{S_nf\}_{n=1}^\infty$ 都在 X 的范数下收敛到 f。那么 $BV\subseteq(X,X)$；若对合 $Tf(z)=f(-z)$ 在 X 上有界，则该包含关系为严格包含。

我们还需要以下众所周知的结果（参见[18]中的推论 3.13）。

定理B. 设 a、b、α 为实参数，$1\le p<\infty$，且

$$Tf(z)=(1-|z|^2)^a\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^b}{(1-z\overline{w})^{2+a+b}}f(w)dA(w).$$

那么，算子 T 在 $L^p(\mathbb{D},dA_\alpha)$ 上有界，当且仅当 $-pa<\alpha+1<p(b+1)$。

对于 $g\in B^p_\alpha$ 和 $f\in B^q_\alpha$，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，我们给出 $\langle g,\ f\rangle_\alpha$ 的一个新公式如下。

引理 4.1. 设 $p>1$、$\alpha>0$，且 q 为满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的实数。令 $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n$ 属于 B^q_α，并令 $g(z)=\sum_{n=0}^\infty b_nz^n$ 属于 B^p_α。那么以下极限

$$\lim_{r\to1^-}\sum_{n=1}^\infty\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}nb_n\overline{a}_nr^{2n}\tag{4.2}$$

存在且

$$\langle g,f\rangle_\alpha=b_1\overline{a}_1+\int_{\mathbb{D}}m''_{g,\alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z),\tag{4.3}$$

其中

$$m_{g,\alpha}(z)=\frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+2\alpha-1}{n-1}b_nz^n.$$

证明。注意到 $g\in B^p_\alpha$ 当且仅当 $g''\in A^p_{p\ (\alpha+1)\ -2}$。由 [20,推论 4] 可知, B^p_α 中每个函数的泰勒多项式序列都依范数收敛。令 $\lambda_0=\lambda_1=0$，并在 $n=2$时令 $\lambda_n=\frac{n+2\alpha-1}{n-1}$，$\cdots$。容易验证，序列 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 属于 BV。由定理 A，$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是 B^p_α的系数乘子。由闭图定理可得$|||m_{g,\ \alpha}|||_{B^p_\alpha}\lesssim\|g\|_{B^p_\alpha}$ 对所有 $g\in B^p_\alpha$均成立。

对于 $f\in B^q_\alpha$，令 $F_f(g)=\int_{\mathbb{D}}m''_{g,\ \alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)$, 其中$g\in B^p_\alpha$。于是由 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}|F_f(g)|&\le\left(\int_{\mathbb{D}}|f''(z)|^q(1-|z|^2)^{q(\alpha+1)}d\lambda(z)\right)^{1/q}\\&\quad\times\left(\int_{\mathbb{D}}|m''_{g,\alpha}(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+1)}d\lambda(z)\right)^{1/p}\\&\le|||f|||_{B^q_\alpha}|||m_{g,\alpha}|||_{B^p_\alpha}\lesssim|||f|||_{B^q_\alpha}\|g\|_{B^p_\alpha},\end{aligned}\tag{4.4}$$

这意味着 F_f是 B^p_α上的有界线性泛函。注意，由于 $r\to1^-$，$\|g_r-g\|_{B^p_\alpha}\to0$。我们得到 $\lim_{r\to1^-}F_f(g_r)=F_f(g)$；也就是说,

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to1^-}\int_{\mathbb{D}}m''_{g_r,\alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)\\&=\int_{\mathbb{D}}m''_{g,\alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z).\end{aligned}\tag{4.5}$$

我们还可以看到

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to1^-}\int_{\mathbb{D}}m''_{g_r,\alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)\\&=\lim_{r\to1^-}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(2\alpha)(n+2\alpha-1)}{\Gamma(2\alpha+1)}n^2(n-1)r^nb_n\overline{a_n}\int_0^1(1-t)^{2\alpha}t^{n-2}dt\\&=\lim_{r\to1^-}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}nb_n\overline{a}_nr^n\\&=\lim_{r\to1^-}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}nb_n\overline{a}_nr^{2n}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

同理,

$$\int_{\mathbb{D}}m''_{g,\alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}nb_n\overline{a}_n.\tag{4.7}$$

因此,

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\,nb_n\overline{a}_n r^{2n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\,nb_n\overline{a}_n. \quad (4.8)$$

由 (4.5) 和 (4.6)，(4.2) 中的极限存在。由 (4.7) 和 (4.8)，我们得到 (4.3)。证明完毕。□

注4。令 $p>1$、 $\alpha>0$，并令 q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。假设 $f\in B_\alpha^q$ 且 $g\in B_\alpha^p$。由 (4.8)，在定义 $\langle g$、 $f\rangle_\alpha$ 时，可以通过在求和中取 $r=1$ 而去掉极限。这不同于定理 3.4。造成这一差异的原因之一是，在 $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ 中存在一些函数，其泰勒多项式在范数下发散，而 B_α^p 中任意函数的泰勒多项式序列都在范数下收敛。

由引理 4.1及其证明，我们得到以下结论，这是 $\langle\cdot$、 $\cdot\rangle_\alpha$ 的一种新表示。

命题4.2. 假设 $\alpha>0$， $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 和 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ 都属于 $H(\mathbb{D})$，且极限 $\lim_{r\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha-1)}\,nb_n\overline{a}_nr^{2n}$ 存在。那么

$$\langle g,f\rangle_\alpha=b_1\overline{a_1}+\lim_{r\to1^-}\int_{\mathbb{D}}m''_{g_r,\alpha}(z)\overline{f''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z).$$

~对于 $p>1$， $\alpha>0$，记 B_α^p 满足 $h(0)=h'(0)=0$的函数 $h\in B_\alpha^p$ 所构成的集合。现在我们陈述并证明本节的主要结果。

定理4.3. 假设 $p>1$、 $\alpha>0$，且 q 是满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$的实数。那么对于任意 $f\in B_\alpha^q$， $\langle\cdot$定义了 B_α^p上的一个有界线性泛函。反过来，若 F 是 B_α^p 上的有界线性泛函，且 $F(1)=0$，则存在一个函数 $f\in B_\alpha^q$，使得对所有 $g\in B_\alpha^p$， $F(g)=\langle g,\ f\rangle_\alpha$。此外，存在与 f 无关的正常数 C_1 和 C_2，使得

$$C_1|||f|||_{B_\alpha^q}\le\sup\{|F(g)|:\ g\in\widetilde{B}_\alpha^p,\ |||g|||_{B_\alpha^p}\le1\}\le C_2|||f|||_{B_\alpha^q}. \quad (4.9)$$

证明。设 $f\in B_\alpha^q$ 和 $g\in B_\alpha^p$。由引理 4.1， $\langle g$定义中的极限 $f\rangle_\alpha$存在。显然， $\langle\cdot f\rangle_\alpha$在 B_α^p上定义了一个线性泛函。由 (4.3) 和 (4.4)，可得

$$|\langle g,f\rangle_\alpha|\lesssim|f'(0)||g'(0)|+|||f|||_{B_\alpha^q}\|g\|_{B_\alpha^p}. \quad (4.10)$$

因此，线性泛函 $\langle\cdot,f\rangle_\alpha$ 在 B_α^p 上也是有界的。

另一方面，假设 F 是 B_α^p 上的有界线性泛函，且满足 $F(1) = 0$。令

$$a_n = \overline{F(z^n)}\frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{n!\,\Gamma(2\alpha)n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

并令 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ for $z \in \mathbb{D}$。已知多项式在 B_α^p 中稠密。由命题 2.2 的证明可知，$f \in H(\mathbb{D})$ 和 $F(g) = \langle g,$ 对所有 $g \in B_\alpha^p$ 均成立。接下来我们证明 f 属于 B_α^q。

对于 $g \in \widetilde{B}_\alpha^p$，令

$$G(g)(z) = (1-|z|^2)^{\alpha+1} m''_{g,\alpha}(z).$$

由引理 4.1 的证明可知，$|||m_{g,\alpha}|||_{B_\alpha^p} \lesssim |||g|||_{B_\alpha^p}$ 对所有 $g \in B_\alpha^p$ 均成立。因此，$\sim$ $\sim G$ 是从 B_α^p 到 $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ 的有界映射。记 $G(B_\alpha^p)$ 为 $\sim$ $\sim G$ 的像。于是 $G\colon B_\alpha^p \to G(B_\alpha^p)$ 是双射。照常将 G 的逆~映射记为 G^{-1}。于是 $F \circ G^{-1}$ 是 $G(B_\alpha^p)$ 上的有界线性泛函。根据 Hahn-Banach 延拓定理，存在函数 φ 属于 $L^q(\mathbb{D}, d\lambda)$，使得

$$F \circ G^{-1}(k) = \int_{\mathbb{D}} k(z)\overline{\varphi(z)}d\lambda(z)$$

~对于所有 k 属于 $G\left(B_\alpha^p\right)$，

且

$$\|F \circ G^{-1}\| = \|\varphi\|_{L^q(\mathbb{D}, d\lambda)}. \tag{4.11}$$

~因此，对于 $g \in B_\alpha^p$，我们得到

$$\begin{aligned} F(g) &= F \circ G^{-1}(G(g)) \\ &= \int_{\mathbb{D}} G(g)(z)\overline{\varphi(z)}d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\alpha+1} m''_{g,\alpha}(z)\overline{\varphi(z)}d\lambda(z). \end{aligned} \tag{4.12}$$

注意

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|(1-|z|^2)^{\alpha-1}dA(z) \\ \leq\ &\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|(1-|z|^2)^{-1}dA(z) \\ \leq\ &\left[\int_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^p d\lambda(z)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^q d\lambda(z)\right]^{\frac{1}{q}} < \infty. \end{aligned}$$

那么，我们可以通过以下方式定义单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的解析函数 f_1

$$f_1(z) = (2\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)(1-|w|^2)^{\alpha-1}}{(1-z\overline{w})^{2+2\alpha}}dA(w).$$

设 f_2 为满足 $f_2'' = f_1$的函数。那么

$$\begin{aligned}&(1-|z|^2)^{\alpha+1}f_2''(z)\\ =\ &(1-|z|^2)^{\alpha+1}(2\alpha+1)\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{\alpha-1}\varphi(w)}{(1-z\overline{w})^{2+2\alpha}}dA(w).\end{aligned}\tag{4.13}$$

由于 $-q(\alpha+1) < -1 < q\alpha$，由定理B可得

$$\int_{\mathbb{D}}\left|(1-|z|^2)^{\alpha+1}f_2''(z)\right|^q d\lambda(z) \lesssim \int_{\mathbb{D}}|\varphi(z)|^q d\lambda(z).$$

将此与 (4.11) 结合，得到

$$|||f_2|||_{B_\alpha^q} \lesssim \|F\circ G^{-1}\| \lesssim \|G^{-1}\|\,\|F\|.\tag{4.14}$$

˜由 (4.12) 和 (4.13)，对于 $g \in B_\alpha^p$，可知

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{D}} m_{g,\alpha}''(z)\overline{f_2''(z)}(1-|z|^2)^{2\alpha}dA(z)\\ =\ &\int_{\mathbb{D}}(1-|w|^2)^{\alpha-1}\overline{\varphi(w)}dA(w)(2\alpha+1)\int_{\mathbb{D}}\frac{m_{g,\alpha}''(z)(1-|z|^2)^{2\alpha}}{(1-\overline{z}w)^{2+2\alpha}}dA(z)\\ =\ &\int_{\mathbb{D}} m_{g,\alpha}''(w)(1-|w|^2)^{\alpha-1}\overline{\varphi(w)}dA(w) = F(g).\end{aligned}$$

˜将此与引理 4.1 结合，得到 $F(g) = \langle g, f_2\rangle_\alpha$ 对所有 $g \in B_\alpha^p$ 均成立。我们还证明了，对于所有 $g \in B_\alpha^p$，$F(g) = \langle g, f\rangle_\alpha$ 均成立。请记住 (4.3)。于是 $f(z) - f(0) - f'(0)z = f_2(z) - f_2(0) - f_2'(0)z$。由 (4.14)，$f \in B_\alpha^q$ 且 $|||f|||_{B_\alpha^q} \lesssim \|F\|$。由此结合 (4.10)，得到 (4.9)。证明完毕。□

致谢。

作者谨向Kehe Zhu教授致谢，感谢他就这一主题进行的有益讨论。

数据可用性。

本研究期间生成或分析的所有数据均收录于本文及其参考文献中。

利益冲突。

作者声明，他们不存在利益冲突。

参考文献

[1] A. Aleman 和 A. Mas，《解析函数巴拿赫空间的加权保角不变性》，J.Funct.Anal., 280 (2021)，论文编号 108946，共 35 页。[2] J. Anderson、J. Cluenie 和 Ch. Pommerenke，《关于布洛赫函数与正规函数》，J.ReineAngew.Math., 270 (1974), 12–37。[3] J. Arazy 和 S. Fisher，《狄利克雷空间在 M¨obius 不变希尔伯特空间中的唯一性》，IllinoisJ.Math., 29 (1985)，449–462。

[4] J. Arazy、S. Fisher 和 J. Peetre，《M¨obius 不变函数空间》，J.ReineAngew. Math., 363 (1985)，110–145。[5] R. Aulaskari、J. Xiao 和 R. Zhao，《$BMOA$ 与 UBC 的子空间与子集》，《分析》15 (1995)，101–121。[6] 包冠龙和 K. Zhu，《M¨obius 群在解析函数上的作用》，StudiaMath., 260 (2021)，207–228。[7] S. Buckley、P. Koskela 和 D. Vukoti´c，《分数阶积分、微分与加权 Bergman 空间》，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 126 (1999)，369–385。[8] A. Friedman，《现代分析基础》，多佛出版社，纽约，1982。[9] M. Jevti´c、D. Vukoti´c 和 M. Arsenovi´c，《Hardy 空间与 Bergman 型空间的泰勒系数及系数乘子》，施普林格，查姆，2016。.[10] H. Kaptano˘glu 和 A. Ureyen，《单位圆盘上的 M¨obius 不变调和函数空间》，Anal.Math., 48 (2022)，85–109。.[11] H. Kaptano˘glu 和 A. Ureyen，《实单位球上的 Kelvin-M¨obius 不变调和函数空间》，J.Math.Anal.Appl., 503 (2021)，论文编号 125298，共 23 页。[12] L. Rubel 和 R. Timoney，《Bloch 空间的一种极值性质》，Proc. Amer. Math.Soc., 75 (1979)，45–49。[13] H. Wulan 和 K. Zhu，《M¨obius 不变 $\mathcal{Q}_K$ 空间》，施普林格，查姆，2017。[14] 肖建，《全纯 $\mathcal{Q}$ 类》，施普林格，LNM 1767，柏林，2001。[15] 肖建，《几何 $\mathcal{Q}_p$ 函数》，Birkh¨auser 出版社，巴塞尔—波士顿—柏林，2006。[16] R. Zhao，《一般函数空间族》，Ann.Acad.Sci.Fenn.Math.Diss., 105 (1996)，共 56 页。[17] R. Zhao 和 K. Zhu，《$\mathbb{C}^n$ 单位球中的 Bergman 空间理论》，Mem. Soc. Math.France, 115，2008。[18] K. Zhu，《函数空间中的算子理论》，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2007。[19] K. Zhu，《解析函数的 Bloch 型空间》，RockyMountainJ.Math., 23 (1993)，1143–1177。[20] K. Zhu，《Bloch 空间的对偶性与泰勒级数的范数收敛》，Michigan Math.J., 38 (1991)，89–101。

数学系，汕头大学，汕头 515063，广东，中国电子邮件地址：glbao@stu.edu.cn数学系，汕头大学，汕头 515063，广东，中国电子邮件地址：zjlou@stu.edu.cn数学系，汕头大学，汕头 515063，广东，中国电子邮件地址：
18xjzhou@stu.edu.cn