arXiv:2302.11094v1 [math.FA] 22 Feb 2023

局部双H¨lder 连续映射及其在 Besov 空间之间诱导的嵌入

Manzi Huang、Xiantao Wang、Zhuang Wang 和 Zhihao Xu

摘要

本文介绍度量空间之间的一类同胚，即局部双H¨older 连续映射。随后，建立了由 Ahlfors 正则空间之间的局部双H¨older 连续映射诱导的 Besov 空间之间的嵌入结果，将 Bj¨orn-Bj¨orn-Gill-Shanmugalingam 的相应结果（《纯粹与应用数学杂志》725：63–114，2017）予以推广。此外，本文还构造了一个例子，说明我们的嵌入结果更为一般。我们还引入了一种称为一致有界性的几何条件，用以刻画一致完美空间之间的拟对称映射何时为局部双H¨older 连续。

1 引言

近三十年来，度量测度空间上的分析一直受到广泛研究，例如 [1–3，11–13, 16, 17]。给定一个度量测度空间（Z， d_Z， ν_Z），该空间上定义的许多函数空间都已得到充分研究，例如 Sobolev 空间、Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间（参见 [6, 8–10, 20, 21, 23] 及其中的参考文献）。

给定度量空间（Z, d_Z）与（W, d_W）之间的一个同胚 f，一个自然的问题是： f 能在（Z, d_Z, ν_Z）与（W, d_W, ν_W）上的某些函数空间之间诱导出何种对应关系？当 f 是拟保角或拟对称映射时，许多函数空间中的这一问题已得到广泛研究，包括 Sobolev 空间、Besov 空间、Triebel-Lizorkin 空间以及其他相关函数空间（参见 [4, 5, 14, 18, 19, 21, 22, 26] 及其中的参考文献）。

在 Bj¨orn-Bj¨orn-Gill-Shanmugalingam[4], 最近的一项工作中，研究了这样的情况：同胚 f 是一个双 H¨older 连续映射，且底层空间是有界 Ahlfors 正则空间 (Z, d_Z, ν_Z) 和 (W, d_W, ν_W)。研究表明，通过复合， f 在适当的 s 和 s' 下，在 Besov 空间 $B^s_{p,p}(W)$ 与 $B^{s'}_{p\,p,}$ (Z) 之间诱导出一个嵌入；详细内容见 [4, 命题 7.2] 。回顾一下，对于 $\theta_1 > 0$ 和

2020 年数学主题分类：30L10，46E36。关键词：局部双 Hölder 连续映射，（幂）拟对称映射，Besov 空间，阿尔福斯正则度量空间，嵌入，一致有界性。

$\theta_2 > 0$，同胚 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 称为 (θ_1, θ_2)-双 H¨older 连续的，如果存在一个常数 $C \geq 1$，使得对所有 $x, y \in Z$，

$$C^{-1} d_Z(x,y)^{\theta_1} \leq d_W(f(x), f(y)) \leq C d_Z(x,y)^{\theta_2}. \tag{1.1}$$

特别地，若 $\theta_1 = \theta_2$，则 f 称为雪花映射。

一个有趣的问题是：如果去掉底层度量空间 (Z, d_Z) 和 (W, d_W) 有界这一假设，[4, 命题 7.2] 的结论还能保留多少？本文首先探讨这一问题。然而，底层空间的有界性假设起着关键作用，因为对于双赫尔德连续映射 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$，如果 (Z, d_Z) 是非有界的阿尔福斯正则空间，那么 f 必定是雪花映射。为避免这一限制，我们引入以下映射类。在陈述定义之前，先作如下约定：(1) 对于 (Z, d_Z) 的子集 A，用 $\operatorname{diam} A$ 表示 A的直径，即 $\operatorname{diam} A = \sup\{d_Z(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in A\}$。(2) 本文涉及的所有度量空间都假设至少包含两个点。(3) 当 (Z, d_Z) 无界时，取 $\operatorname{diam} Z = \infty$。那么，对于任意度量空间 (Z, d_Z)，$0 < \operatorname{diam} Z \leq \infty$。

定义 1.1. 设 $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ 和 $0 < r < 2 \operatorname{diam} Z$。若同胚 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 的任意一对点$x, y \in Z$ 在满足 $d_Z(x, y) < r$时都满足条件 (1.1)，则称其为局部 (θ_1, θ_2, r)-双 Hölder 连续。并称 (1.1) 中的常数 C为 f的局部双 Hölder 连续系数。

显然，每个双 Hö¨lder 连续映射都是局部双 Hö¨lder 连续的，反之则不成立（见下文例 5.2 ）。以下是定义的直接推论。

命题 1.2. (1) 若 f 是 (θ_1, θ_2)-双 Hö¨lder 连续的，且双 Hö¨lder 连续系数为 C_1，则 f的逆映射 f^{-1} 是 $(1/\theta_2, 1/\theta_1)$-双 Hö¨lder 连续的，且双 Hö¨lder 连续系数为 $C_2 = \max\{C_1^{1/\theta_1}, C_1^{1/\theta_2}\}$。

(2) 若 f 是局部 (θ_3, θ_4, r)-双 Hölder 连续的，且局部双 Hölder 连续系数为 C_3，则 f的逆映射 f^{-1} 是局部 $(1/\theta_4, 1/\theta_3, C_3^{-1} r^{\theta_3})$-双 Hölder 连续的，且局部双 Hölder 连续系数为 $C_4 = \max\{C_3^{1/\theta_3}, C_3^{1/\theta_4}\}$。

以下结果回答了上述问题，它为我们提供了由局部双 Hölder 连续映射诱导的 Besov 空间之间的嵌入。

定理 1.3. 假设 (Z, d_Z, ν_Z) 和 (W, d_W, ν_W) 分别是 Ahlfors Q_Z-正则空间和 AhlforsQ_W-正则空间，且具有 $Q_Z > 0$ 和 $Q_W > 0$，并设 $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $s > 0$,$s' > 0$ 和 $p \geq 1$ 为满足以下条件的常数

$$Q_Z \geq \theta_1 Q_W \quad and \quad s' \leq \theta_2 s + \frac{\theta_2 Q_W - Q_Z}{p}. \tag{1.2}$$

假设 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 是一个局部 (θ_1, θ_2, r)-biH¨older 连续映射，且 $0 < r < 2 \operatorname{diam} Z$。那么，$f$通过复合诱导出一个典范有界嵌入 $f_\#\colon B^s_{p,\,p}(W) \to B^{s'}_{p\,p,}(Z)$。

该术语已在定理 1.3 中出现，除非另有说明，本节其余部分将于第 2 节引入。

注 1.4. 定理 1.3 是对 [4, 命题 72] 的推广。这是因为当 (Z, d_Z) 有界且 $r >$ 直径 Z 时，定理 1.3 与 [4, 命题 72]一致。此外，下面的例 5.2 和注 5.3(ii) 表明，定理 1.3 比 [4, 命题 72]更一般。

众所周知，有界一致完美空间之间的拟对称映射是局部双 Hölder 连续的¨，因为由 [24, 定理 314]或 [13, 推论 115] 可知，它是双 Hölder 连续的。自然会有人问，当底层空间无界时，是否也有类似结论。然而，下面的例 5.1表明，并非每个无界一致完美空间之间的拟对称映射都是局部双 Hölder 连续的。本文的第二个目的，是刻画拟对称映射何时为局部双 Hölder 连续。在陈述我们的结果之前，先引入以下概念。

定义 1.5. 对于 $0 < r < 2\,\mathrm{diam}\ Z$，若存在常数 a 和 b，满足 $0 < a < b$，使得对所有 $x \in Z$，同胚 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 称为 r-一致有界，

$$a \le \operatorname{diam} f\big(B(x, r)\big) \le b,$$

其中 $B(x, r) = \{y \in Z\colon\ d_Z(y, x) < r\}$，即 Z 中以 x 为中心、半径为 r 的开球。

以下性质表明，在 r-一致有界性的定义中，对于拟对称映射而言，参数 r 的具体取值并不重要。

命题 1.6. 假设 (Z, d_Z) 是一个 κ-一致完美空间，满足 $\kappa > 1$，且 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 是 η-拟对称映射。若 f 对某个满足 $0 < r < 2\,\mathrm{diam}\ Z$ 的 r 是 r-一致有界的，则对任意 $s \in (0, 2\,\mathrm{diam}\, Z)$，$f$ 都是 s-一致有界的。

注意，在一致完美空间中，拟对称性蕴含幂拟对称性（见下方定理 A ）。基于一致有界性，我们得到了从无界一致完美空间到局部双 H¨older 连续的（幂）拟对称映射的如下几何刻画。

定理 1.7. 假设 (Z, d_Z) 是具有 $\kappa > 1$ 的 κ-一致完美空间，并且 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 是一个具有 $\theta \ge 1$ 和 $\lambda \ge 1$ 的 (θ, λ)-幂拟对称映射。那么，对于任意 $r \in (0, 2\,\mathrm{diam}\, Z)$，以下各条件在定量意义下等价：

(1) f 是局部 $(\theta, 1/\theta, r)$-双 H ¨older 连续的。

(2) f 是一致有界的，常数为 r。

对于两个条件，如果条件 Φ 蕴含条件 Ψ，且条件 Ψ 的数据仅取决于条件 Φ 的数据，我们就称条件 Φ 在定量意义上蕴含条件 Ψ。如果条件 Ψ 也在定量意义上蕴含条件 Φ，则称条件 Φ 与条件 Ψ 在定量意义上等价。

注 1.8. 在定理 1.7中，无法去掉 (Z, d_Z) 一致完美这一假设。例如，整数上的恒等映射 $\mathrm{id} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 在标准欧几里得距离下是 1-双 Lipschitz，因此是幂拟对称的，并且对任意 θ_1, θ_2, r)-双 H¨older 连续。然而，对于任何 $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ 和 $0 < r < 1$，它都不是 s-一致有界的，其中 $s \in (0,1)$.

在本文中，字母 C （有时带下标）表示一个正常数，它仅依赖于空间的给定参数，并且在不同位置可能取不同值。记号 $A \lesssim B$ （分别为 $A \gtrsim B$）表示存在常数 $C_1 \geq 1$ （分别为 $C_2 \geq 1$），使得 $A \leq C_1 \cdot B$ （分别为 $A \geq C_2 \cdot B$）。我们还称 C_1 和 C_2 为 A 和 B 的比较系数。特别地， C_1 （分别为 C_2）称为 A 和 B 的上比较系数（分别为下比较系数）。若 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$，则记作 $A \approx B$。

本文结构安排如下：第2节将介绍一些基本概念和已知结果。第3 节将用于证明定理1.3。第4节将给出命题1.6 和定理1.7 的证明；第5节将构造两个例子。

2 基本术语

本节将介绍一些必要的概念和记号。

若对每个 $x \in Z$ 和每个 $r > 0$，只要集合 $Z \setminus B(x, r)$ 非空，集合 $B(x, r) \setminus B(x, r/\kappa)$ 就非空，则称度量空间 (Z, d_Z) 关于 $\kappa > 1$ 是 κ-一致完美的。有时，如果存在某个 $\kappa > 1$，使得 Z 关于 d_Z 是 Z κ-一致完美的，则称 (Z, d_Z) 是一致完美的。

引理 2.1. 假设 (Z, d_Z) 关于 $\kappa > 1$ 是 κ-一致完美的，并令 $x \in Z$。那么，对任意 $r \in (0, 2 \operatorname{diam} Z)$，存在 $z \in Z$ 使得

$$\frac{r}{\mu} \leq d_Z(x, z) < r,$$

其中 $\mu =$ 最大值$\{8, \kappa\}$。

Proof. 令 $x \in Z$。由于 $0 < r < 2 \operatorname{diam} Z$，我们可知存在 $y \in Z$ 使得$d_Z(x, y) > r/8$。如果 $d_Z(y, x) < r$，令 $z = y$，即可知引理成立。如果$d_Z(y, x) \geq r$，则 (Z, d_Z) 的一致完美性意味着存在 $y' \in Z$ 使得

$r/\kappa \le d_Z(x,y') < r$。令 $z = y'$，同样可知引理成立。

□

若存在自同胚 η of $[0,+\infty)$，使得对任意三点 $x,y,z \in Z$，同胚 $f: (Z,d_Z) \to (W,d_W)$ 就称为 η- 拟对称映射，

$$\frac{d_W(f(x),f(z))}{d_W(f(y),f(z))} \le \eta\left(\frac{d_Z(x,z)}{d_Z(y,z)}\right). \tag{2.1}$$

特别地，若存在常数 $\theta \ge 1$ and $\lambda \ge 1$，使得

$$\eta_{\lambda,\theta}(t) = \begin{cases} \lambda t^{\frac{1}{\theta}} & \text{for } 0 < t < 1, \\ \lambda t^{\theta} & \text{for } t \ge 1, \end{cases}$$

则称 f 为 (θ,λ)-幂拟对称映射。这里，记号 $\eta_{\lambda,\ \theta}$ 表示控制函数 η 仅依赖于给定参数 θ 和 λ。

定理 A ([13, 定理 11。3])。一致完美空间上的 η-拟对称映射是定量意义下的 $(\theta,\ \lambda)$-幂拟对称映射。

下文中，我们始终用记号 (Z,d_Z,ν_Z) 表示一个度量空间 (Z,d_Z)，其上定义了博雷尔正则测度 ν_Z。度量测度空间 (Z,d_Z,ν_Z) 称为

(1) 倍增：若存在常数 $C \ge 1$，使得对所有 $x \in Z$ 和 $0 < r <$2 diam Z,

$$0 < \nu_Z(B(x,2r)) \le C\nu_Z\big(B(x,r)\big) < \infty.$$

(2) Q_Z-阿尔福斯正则，且 $Q_Z > 0$：若存在常数 $C \ge 1$，使得对所有$z \in Z$和 $0 < r <$ 2 diam Z,

$$C^{-1}r^{Q_Z} \le \nu_Z\Big(B(z,r)\Big) \le Cr^{Q_Z}.$$

众所周知，每个阿尔福斯正则空间都是倍增且一致完美的（参见 [13,第 11] 节）。

给定 $1 \le p < \infty$、$s > 0$ 和函数 $u: Z \to \mathbb{R}$，度量测度空间 (Z,d_Z,ν_Z) 上的齐次 Besov 范数定义为

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,p}(Z)} = \left(\int_Z\int_Z \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d_Z(x,y)^{sp}}\frac{d\nu_Z(x)\nu_Z(y)}{\nu_Z(B(x,d_Z(x,y)))}\right)^{1/p}. \tag{2.2}$$

我们将齐次 Besov 空间$B^s_{p,p}(Z)$ 记为 $L^p{}_{\rm loc}(Z)$ 的子空间，它由所有满足以下条件的函数 u 组成:

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,p}(Z)} < \infty.$$

我们指出，严格来说，(2.2) 实际上是 $L^p{}_{\rm loc}(Z)$ 上的半范数，因为任意常值函数的 Besov 范数都为 0。我们将 Besov 空间$B^s_{p,\ p}(Z)$ 定义为由所有满足下述条件的可测函数 $u \in L^p(Z)$ 构成的赋范空间

$$\|u\|_{B^s_{p,p}(Z)} = \|u\|_{L^p(Z)} + \|u\|_{\dot{B}^s_{p,p}(Z)} < \infty.$$

3 局部双 Hölder 连续映射及其诱导嵌入

本节旨在证明定理 1.3。在证明之前，我们需要做一些准备工作，包括以下两个辅助引理。

引理 3.1. 假设 (Z, d_Z, ν_Z) 是 Ahlfors Q_Z-正则的，且满足 $Q_Z > 0$。令 $n_0 \in \mathbb{Z}$，并对每个 $n \in \mathbb{Z}$，令 $t_n = C\sigma^n$，其中 $C > 0$ 和 $0 < \sigma < 1$。对于任意 $s > 0$ 和 $p \geq 1$，若$u \in L^p(Z)$，则

$$\|u\|^p_{B^s_{p,p}(Z)} \approx \|u\|^p_{L^p(Z)} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} t_n^{-sp} \int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(x) - u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x),$$

其中比较系数取决于 n_0。

证明。以下估计可由与证明 [8,定理 5.2]或[4, 引理 5.4]类似的论证轻易得到：

$$\|u\|^p_{\dot{B}^s_{p,p}(Z)} \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n^{-sp} \int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(x) - u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x). \tag{3.1}$$

令 $n_0 \in \mathbb{Z}$。那么，估计式（3.1）表明，要证明引理中的估计，只需证明

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} t_n^{-sp} \int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(x) - u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x) \lesssim \|u\|^p_{L^p(Z)}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(x) - u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x) &\lesssim \int_Z \fint_{B(x,t_n)} (|u(x)|^p + |u(y)|^p) d\nu_Z(y) d\nu_Z(x) \\ &= \|u\|^p_{L^p(Z)} + \int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x).\end{aligned}$$

由于 (Z, d_Z, ν_Z) 是 Ahlfors Q_Z-正则的，我们知道对于任意 $y \in B(x, t_n)$，

$$\nu_Z(B(x, t_n)) \approx \nu_Z(B(y, t_n)).$$

由 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x) &\approx \int_Z \int_Z \frac{|u(y)|^p \chi_{B(x,t_n)}(y)}{\nu_Z(B(y, t_n))} d\nu_Z(y) d\nu_Z(x) \\ &= \int_Z |u(y)|^p d\nu_Z(y) \int_Z \frac{\chi_{B(x,t_n)}(y)}{\nu_Z(B(y, t_n))} d\nu_Z(x)\end{aligned}$$

$$= \|u\|^p_{L^p(Z)}.$$

因此，

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} t_n^{-sp} \int_Z \fint_{B(x,t_n)} |u(x)-u(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x) \lesssim \sum_{n=-\infty}^{n_0} t_n^{-sp} \|u\|^p_{L^p(Z)} \lesssim \|u\|^p_{L^p(Z)},$$

这正是我们所需要的，因此，引理得证。 □

引理 3.2. 假设 (Z, d_Z, ν_Z) 和 (W, d_W, ν_W) 分别是 Ahlfors Q_Z-正则空间和 AhlforsQ_W-正则空间，且分别满足 $Q_Z > 0$ 和 $Q_W > 0$。令 $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ 和$0 < r < 2\,\mathrm{diam}\, Z$。假设 $f\colon Z \to W$ 是一个局部 (θ_1, θ_2, r)-双 Hölder 连续映射，满足 $Q_Z \geq \theta_1 Q_W$。那么，对于任意 $p \geq 1$，映射 f 通过复合诱导出一个有界嵌入 $f_\#\colon L^p(W) \to L^p(Z)$。

当 Z 和 W 有界且 f 是双 H¨older 连续时，引理 3.2与 [4, 引理 7。1]一致。[4, 引理 7。1] 的证明方法同样适用于引理3.2，因此我们在此省略细节。

现在，我们准备证明定理 1.3。

定理 1.3的证明

设 (Z, d_Z, ν_Z) 和 (W, d_W, ν_W) 分别是 Ahlfors Q_Z-正则空间和 Ahlfors Q_W-正则空间，其中 $Q_Z > 0$ 和 $Q_W > 0$。假设 $f\colon (Z, d_Z) \to (W, d_W)$ 是一个局部 (θ_1, θ_2, r)-biH¨older 连续映射，且 $\theta_1 \geq \theta_2 > 0$ 和 $r \in (0, 2\,\mathrm{diam}\, Z)$。

令 $u \in B^s_{p,\,p}(W)$ 满足 $s > 0$ 且 $p \geq 1$，并令 $v = u \circ f$。由于 $u \in L^p(W)$，由引理 3.2 可得

$$\|v\|_{L^p(Z)} \lesssim \|u\|_{L^p(W)}, \tag{3.2}$$

这意味着 $v \in L^p(Z)$。

对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，令 $t_n = C\sigma^n$，其中 $C > 0$ 且 $0 < \sigma < 1$。显然，存在$n_0 \in \mathbb{Z}$，使得对于 $n \in \mathbb{Z}$，若 $n \geq n_0$，则

$$t_n < r.$$

此外，由引理 3.1 可知，对于任意 $s' > 0$,

$$\|v\|^p_{B^{s'}_{p,p}(Z)} \approx \|v\|^p_{L^p(Z)} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} I_n, \tag{3.3}$$

其中

$$I_n = t_n^{-s'p} \int_Z \fint_{B(x,t_n)} |v(x)-v(y)|^p d\nu_Z(y) d\nu_Z(x).$$

下面我们将估计 I_n。为此，我们首先估计该积分

$$i_n = \fint_{B(x,t_n)} |v(x) - v(y)|^p d\nu_Z(y).$$

由于对任意 $n \geq n_0$、$t_n < r$，由 f 的局部双 Hölder 连续性可推知，存在 $C_0 \geq 1$，使得

$$f(B(x,t_n)) \subset B(f(x), C_0 t_n^{\theta_2}).$$

然后，由 (Z, d_Z, ν_Z) 的 Ahlfors 正则性可得

$$\begin{aligned} i_n &\approx \frac{1}{t_n^{Q_Z}} \int_Z |v(x) - u \circ f(y)|^p \chi_{B(x,t_n)}(y) d\nu_Z(y) \\ &\leq \frac{1}{t_n^{Q_Z}} \int_Z |v(x) - u \circ f(y)|^p \chi_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})}(f(y)) d\nu_Z(y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

由于 $v \in L^p(Z)$，我们知道 $v(x)$ 对几乎处处的 $x \in Z$ 都是有限的。由于

$$\begin{aligned} \int_W |v(x) - u(y')|^p \chi_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})}(y') d\nu_W(y') \lesssim |v(x)|^p \nu_W(B(f(x), C_0 t_n^{\theta_2})) \\ + \int_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})} |u(y')|^p d\nu_W(y'), \end{aligned}$$

由 (W, d_W, ν_W) 的 Ahlfors 正则性可知，对几乎处处的 $x \in Z$，作为 y' 的函数，$|v(x) - u(y')|^p \chi_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})}(y')$ 属于 $L^1(W)$。由引理3.2 可知，对几乎处处的 $x \in Z$，

$$\int_Z |v(x) - u \circ f(y)|^p \chi_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})}(f(y)) d\nu_Z(y) \lesssim \int_W |v(x) - u(y')|^p \chi_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})}(y') d\nu_W(y'),$$

因此，我们由 (3.4) 推得

$$i_n \lesssim t_n^{\theta_2 Q_W - Q_Z} \fint_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})} |v(x) - u(y')|^p d\nu_W(y').$$

这正是我们所要的。

由于$u \in B^s_{p,\ p}(W)$，由引理3.1 可知，对于任意 $n \geq n_0$,

$$\int_W \fint_{B(x',C_0 t_n^{\theta_2})} |u(x') - u(y')|^p d\nu_W(y') d\nu_W(x') < \infty,$$

这表明 $\fint_{B(x',C_0 t_n^{\theta_2})} |u(x') - u(y')|^p d\nu_W(y')$ 作为 $L^1(W)$ 的函数属于 x'。再次由引理 3.2，可得

$$I_n \lesssim t_n^{-s'p + \theta_2 Q_W - Q_Z} \int_Z \fint_{B(f(x),C_0 t_n^{\theta_2})} |u \circ f(x) - u(y')|^p d\nu_W(y') d\nu_Z(x)$$

$$\lesssim t_n^{-s'p+\theta_2 Q_W - Q_Z} \int_W \fint_{B(x', C_0 t_n^{\theta_2})} |u(x') - u(y')|^p d\nu_W(y') d\nu_W(x').$$

假设 t 帽 s 和 s' 满足关系式（1.2）。于是我们知道，对于任意 $n \geq n_0$ ，

$$t_n^{-s'p+\theta_2 Q_W - Q_Z} \leq r^{\theta_2(Q_W+sp)-s'p-Q_Z} (t_n^{\theta_2})^{-sp}.$$

这意味着

$$I_n \lesssim (t_n^{\theta_2})^{-sp} \int_W \fint_{B(x', C_0 t_n^{\theta_2})} |u(x') - u(y')|^p d\nu_W(y') d\nu_W(x').$$

将 I_n 的估计代入（3.3），由引理 3.1可得

$$\|v\|^p_{B^{s'}_{p,p}(Z)} \lesssim \|u\|^p_{B^s_{p,p}(W)}.$$

Let

$$f_\#(u) = u \circ f.$$

于是我们证明了： $f_\# : B^s_{p,\ p}(W) \to B^{s'}_{p\ p,}(Z)$ 是一个有界嵌入。 □

4 幂拟对称性、局部双 Hölder 连续性与一致有界性

本节旨在证明命题 1.6 和定理 **1**。 7.

命题 **1.6** 的证明。 由 f 是 r-一致有界这一假设可知，存在常数 $a > 0$ 和 $b > 0$ ，使得对所有 $x \in Z$,

$$a \leq \operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \leq b. \tag{4.1}$$

设 $x \in Z$和 $s \in (0,\ 2\operatorname{diam} Z)$。要证明 f是 s-一致有界的，只需考虑两种情况： $s > r$ 和 $s < r$。对于第一种情况，由以下事实可得$B(x,\ r) \subset B(x,\ s)$ 以及 (4.1) 可知

$$\operatorname{diam} f(B(x,s)) \geq \operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \geq a. \tag{4.2}$$

若 $B(x,\ s) \setminus B(x,\ r) = \emptyset$，显然，由 (4.1) 可得

$$\operatorname{diam} f(B(x,s)) = \operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \leq b, \tag{4.3}$$

并且，如果 $B(x,s) \setminus B(x,r) \neq \emptyset$，则由 (Z, d_Z) 的一致完美性可知，存在 $z \in B(x,r)$，使得

$$\frac{r}{\kappa} \leq d_Z(x,z) < r.$$

这表明，对于任意 $y \in B(x,s)$,

$$\frac{d_Z(x,y)}{d_Z(x,z)} \le \frac{\kappa s}{r}.$$

那么， η-拟对称性 f 给出

$$\frac{d_W(f(x),f(y))}{d_W(f(x),f(z))} \le \eta\left(\frac{\kappa s}{r}\right),$$

因此，我们得到

$$d_W(f(x),f(y)) \le \eta\left(\frac{\kappa s}{r}\right) \operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \le \eta\left(\frac{\kappa s}{r}\right) b.$$

这意味着

$$\operatorname{diam} f(B(x,s)) \le \eta\left(\frac{\kappa s}{r}\right) b. \tag{4.4}$$

对于剩下的情形，即 $s < r$，事实 $B(x,s) \subset B(x,r)$ 导致

$$\operatorname{diam} f(B(x,s)) \le \operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \le b. \tag{4.5}$$

若 $B(x,r) \setminus B(x,s) = \emptyset$，显然，

$$\operatorname{diam} f(B(x,s)) = \operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \ge a, \tag{4.6}$$

并且如果 $B(x,\ r) \setminus B(x,\ s) \neq \emptyset$，那么按照 (4.4) 的证明中类似的推理可得

$$\operatorname{diam} f(B(x,s)) \ge \frac{a}{\eta\left(\frac{\kappa r}{s}\right)}. \tag{4.7}$$

现在，我们由 (4.2)–(4.7) 得出，对所有 $x \in Z$,

$$a_1 \le \operatorname{diam} f(B(x,s)) \le b_1,$$

其中

$$a_1 = \min\left\{a,\ \frac{a}{\eta\left(\frac{\kappa r}{s}\right)}\right\} \text{ and } b_1 = \max\left\{b,\ \eta\left(\frac{\kappa s}{r}\right) b\right\}.$$

这表明 f 是 s 一致有界的。 □

定理的证明 1.7。 (1) $\Rightarrow$ (2)。假设 f 是局部（θ, $1/\theta$, r）双 Hölder 连续的，且 $\theta \ge 1$ 以及 $0 < r < 2$ 直径 Z。那么存在 $C \ge 1$ 使得对于任意 $x \in Z$ 以及任意 $y \in B(x,\ r)$,

$$C^{-1} d_Z(x,y)^{\theta} \le d_W(f(x),f(y)) \le C d_Z(x,y)^{1/\theta}, \tag{4.8}$$

这导致

$$\operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \le 2Cr^{1/\theta}.$$

此外，由引理2.1 可知，存在 $z \in Z$ 使得

$$\frac{r}{\mu} \le d_Z(x,z) < r,$$

其中 $\mu =$ 最大值$\{8,\kappa\}$。于是（4.8）得到

$$\operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big) \ge d_W(f(x),f(z)) \ge \frac{r^\theta}{\mu^\theta C}.$$

这表明 f 是 r-一致有界的。

（2） $\Rightarrow$ （1）。假设 f是 r-一致有界的，且 $0 < r < 2$直径为 Z。该假设意味着存在两个常数 $a > 0$ 和 $b > 0$，使得对于任意 $\xi \in Z$,

$$a \le \operatorname{diam} f(B(\xi,r)) \le b. \tag{4.9}$$

令 $x \in Z$。由引理2.1，可知存在 $\zeta \in Z$ 使得

$$\frac{r}{\mu} \le d_Z(x,\zeta) < r, \tag{4.10}$$

其中 $\mu =$ 最大值$\{8,\kappa\}$。我们断言

$$\frac{a}{3\lambda\mu^\theta} \le d_W(f(x),f(\zeta)) \le b. \tag{4.11}$$

(4.11) 的右侧不等式可直接由 (4.9) 得出。为证明左侧不等式，令 $\zeta_1 \in B(x,r)$ 满足

$$d_W(f(x),f(\zeta_1)) \ge \frac{1}{3}\operatorname{diam} f\big(B(x,r)\big),$$

于是，由 (4.9) 可得

$$d_W(f(x),f(\zeta_1)) \ge \frac{a}{3}.$$

由于

$$\frac{d_Z(x,\zeta_1)}{d_Z(x,\zeta)} \le \mu,$$

根据假设， f 是关于 $\theta \ge 1$ 和$\lambda \ge 1$ 的（θ， λ）-幂拟对称映射，因此我们知道

$$\frac{d_W(f(x),f(\zeta_1))}{d_W(f(x),f(\zeta))} \le \lambda\mu^\theta.$$

因此

$$d_W(f(x),f(\zeta)) \geq \frac{1}{\lambda\mu^\theta} d_W(f(x),f(\zeta_1)) \geq \frac{a}{3\lambda\mu^\theta},$$

这正是我们所需要的。因此，式（4.11）中的估计得证。

设 $y \in Z$ 满足

$$d_Z(x,y) < r.$$

若 $d_Z(x,y) \geq d_Z(x,\zeta)$，则 $r/\mu \leq d_Z(x,y) < r$。由式（4.11）可得 t

$$\frac{a}{3\lambda(r\mu)^\theta} d_Z(x,y)^\theta \leq \frac{a}{3\lambda\mu^\theta} \leq d_W(f(x),f(y)) \leq b \leq \frac{b\mu^{\frac{1}{\theta}}}{r^{\frac{1}{\theta}}} d_Z(x,y)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4.12}$$

若 $d_Z(x,y) < d_Z(x,\zeta)$，由 f 为 (θ,λ)-幂拟对称的假设可知

$$\lambda^{-1}\left(\frac{d_Z(x,y)}{d_Z(x,\zeta)}\right)^\theta \leq \frac{d_W(f(x),f(y))}{d_W(f(x),f(\zeta))} \leq \lambda\left(\frac{d_Z(x,y)}{d_Z(x,\zeta)}\right)^{1/\theta},$$

进而，由式（4.10）和（4.11）可得

$$\frac{a}{3\lambda^2(r\mu)^\theta} d_Z(x,y)^\theta \leq d_W(f(x),f(y)) \leq \frac{\lambda b\mu^{\frac{1}{\theta}}}{r^{\frac{1}{\theta}}} d_Z(x,y)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{4.13}$$

现在，由式（4.12）和（4.13）可得 f 是局部 $(\theta,1/\theta,r)$-双H¨older 连续的，因此定理得证。 □

5 个例子

作为定理 1.7 的一个应用，本节构造两个例子。第一个例子给出了无界一致完美空间之间的拟对称映射，但该映射不是局部双 H¨older 连续的。第二个例子构造了无界阿尔福斯正则空间之间的局部双 H¨older 连续映射，但该映射并非双 H¨older 连续。这个例子连同下面的注记 5.3(ii)，还说明定理 1.3 比 [4, 命题 72] 更一般。

例 5.1。设 f 为 $(\mathbb{R}^2,|\cdot|)$ 上的径向拉伸 $f(x) = |x|x$，其中 $|\cdot|$ 表示通常的欧几里得度量。那么 f 是一个幂拟对称映射，但不是局部双 H¨older 连续的。

证明。由 [25, 第 49] 页或第 [15, 页 309] 可知，f 是一个拟共形映射。一个基本事实是，维数至少为二的欧几里得空间上的拟共形自映射是拟对称的，参见例如 Gehring [7] 或 Heinonen-Koskela [16]。由此可知，f 是一个拟对称映射。根据定理 A，我们知道 f 是幂拟对称的。关于拟共形映射的定义，感兴趣的读者可参阅 [16, 25] 。

反设 f 是局部双 H¨older 连续的。由定理1.7 和命题1.6， f 必定是一致 1 有界的。然而，对于任意的 $(n,\ 0)\ \in \mathbb{R}^2$ 满足$n \in \mathbb{N}$，直接计算可得

$$\operatorname{diam} f\left(B\big((n,0),1\big)\right) \geq (n+1)^2 - n^2 = 2n+1,$$

这与一致有界条件相矛盾。因此，我们得出结论： f 不是局部双H¨lder连续的。

□

例 5.2. 设 f 是 $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ 的如下自同胚:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{\frac{1}{2}}, & 0 < |x| < 1, \\ x, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

则以下陈述成立。

(1) f 是幂拟对称的。

(2) f 是局部双H¨lder连续的。(3) 对任意 $\theta_1 > 0$ 和 $\theta_2 > 0$， f 都不是 (θ_1, θ_2)-双H¨lder连续的。

证明。 (1) 例中的陈述 (1) 可由与例 5.1的证明中类似的论证得到。

(2) 为证明 f 是局部双 Hölder 连续的¨，由定理1.7，只需证明f 是 r-一致有界的，其中某个 $r > 0$。取 $r = 2$。根据 f 的定义，显然对于任意 $x \in \mathbb{R}^2$,

$$2 \leq \operatorname{diam} f(B(x,2)) \leq 6.$$

这意味着 ， f 是一致有界的，因而是局部双 H¨older 连续的 .

(3) 反设 f 对某些满足 $\theta_1 \geq \theta_2 > 0$ 的 θ_1 和 θ_2 是 (θ_1, θ_2)-双 H¨older 连续的。则 f 是雪花映射，因为 $(\mathbb{R}^2, |\cdot|)$ 无界。也就是说，存在常数 $C \geq 1$ 和 $\theta > 0$ ，使得对于任意一对 x 和 y,

$$C^{-1}|x-y|^{\theta} \leq |f(y) - f(x)| \leq C|x-y|^{\theta}.$$

然而，对于任意满足 $|x| < 1$ 的 x ,

$$|f(x) - f(0)| = |x|^{\frac{1}{2}},$$

这意味着 $\theta = \frac{1}{2}$ ；并且对于任意满足 $|x| \geq 1$ 的 x ,

$$|f(x) - f(0)| = |x|,$$

这表明 $\theta = 1$。由此矛盾可知，对于任意 $\theta_1 > 0$ 和 $\theta_2 > 0$， f 都不是 (θ_1, θ_2)-双H¨lder 连续的。

□

注 5.3。 (i) 按照例 5.2 中命题 (2) 和 (3) 证明里的论证，不难证明例 5.2 中的映射 f 是局部 (1, 1 2, 2)-双H¨lder 连续的。此处省略详细计算。

(ii) 众所周知， $\mathbb{R}^2$ 是 2-阿尔福斯正则的。设 $s>0$、 $s'>0$ 和 $p\geq 1$ 为满足$(s-2s')$ $p\geq 2$的参数。于是可见，定理1.3 中的所有假设均已满足。因此，由定理1.3可推知， f 通过复合诱导出一个典范有界嵌入$f_{\#}:B^{s}_{p,\ p}(\mathbb{R}^2)\to B^{s'}_{p\,p,}\ (\mathbb{R}^2)$。

致谢

第二作者（X. Wang）受到国家自然科学基金（编号 12071121）的部分资助，第三作者（Z. Wang）受到国家自然科学基金（编号 12101226）的部分资助。

参考文献

[1] A. Bj¨orn 和 J. Bj¨orn，《度量空间上的非线性势理论》，EMS 数学论丛第 17 卷。欧洲数学会（EMS），苏黎世，2011 年。xii+403 页。1[2] A. Bj¨orn、J. Bj¨orn 和 N. Shanmugalingam，《度量空间上 p-调和函数的狄利克雷问题》，《纯粹与应用数学杂志》556（2003），173–203。1[3] A. Bj¨orn、J. Bj¨orn 和 N. Shanmugalingam，《倍增度量测度空间及其双曲填充上的延拓与迹结果》，J. Math. Pures Appl. 159（2022），196–249。1[4] A. Bj¨orn、J. Bj¨orn、T. Gill 和 N. Shanmugalingam，《康托集与树上的几何分析》，《纯粹与应用数学杂志》725（2017），63–114。1，2，3，6，7，12[5] G. Bourdaud 和 W. Sickel，《Besov 空间中的变量替换》，Math. Nachr. 198（1999），19–39。1[6] M. Bourdon 和 H. Pajot，《上同调与 Besov 空间》，《纯粹与应用数学杂志》558（2003），85–108。1[7] F. W. Gehring，《拟共形映射的定义与例外集》，Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 281（1960），1–28。12[8]A. Gogatishvili、P. Koskela 和 N. Shanmugalingam，《定义在度量空间上的 Besov 空间的插值性质》，Math. Nachr. 283（2010），215–231。1，6

[9] A. Gogatishvili、P. Koskela 和 Y. Zhou，《度量测度空间上 Besov 空间与 Triebel-Lizorkin 空间的刻画》，Forum Math. 25（2013），787–819。1[10] P. Haj lasz，《任意度量空间上的 Sobolev 空间》，Potential Anal. 5（1996），403–415。1[11] P. Haj lasz，《度量测度空间上的 Sobolev 空间》，载于《流形、图与度量空间上的热核与分析》（巴黎，2002），Contemp. Math. 338，美国数学会，普罗维登斯（2003），173–218。1[12] P. Haj lasz 和 P. Koskela，《满足 Poincar´e 不等式的 Sobolev 空间》，Mem. Amer. Math. Soc.（2000），第 688 号，x+101 页。1[13] J. Heinonen，《度量空间上的分析讲义》，Universitext。Springer-Verlag，纽约，2001 年。x+140 页。1，3，5[14] J. Heinonen、T. Kilpel¨ainen 和 O. Martio，《非线性势理论中的调和态射》，Nagoya Math. J. 125（1992），115–140。1[15] J. Heinonen、T. Kilpel¨ainen 和 O. Martio，《退化椭圆方程的非线性势理论》，Dover Publications, Inc.，米尼奥拉，纽约州，2006 年。12[16] J. Heinonen 和 P. Koskela，《受控几何度量空间中的拟共形映射》，Acta Math. 181（1998），1–61。1，12[17] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. Tyson，《度量测度空间上的 Sobolev 空间：一种基于上梯度的方法》。剑桥：剑桥大学出版社，2015 年。1[18] S. Hencl 和 L. Kleprl´ík，《 q-拟共形映射与 Orlicz-Sobolev 空间中函数的复合》，Illinois J. Math. 56（2012），931–955。1[19] P. Koskela、J. Xiao、Y. Zhang 和 Y. Zhou，《 Q-空间上的拟共形复合问题》，J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 19（2017），1159–1187。1[20] P. Koskela、D. Yang 和 Y. Zhou，《通过广义Littlewood-Paley函数刻画 Haj lasz-Sobolev 空间与 Triebel-Lizorkin 空间》，J. Funct. Anal. 258（2010），2637–2661。1[21] P. Koskela、D. Yang 和 Y. Zhou，《Besov 空间与 Triebel-Lizorkin 空间的逐点刻画及拟共形映射》，Adv. Math. 226（2011），3579–3621。1[22] H. M. Riemann，《有界平均振荡函数与拟共形映射》，Comment. Math. Helv. 49（1974），260–276。1

[23] N. Shanmugalingam，牛顿空间：将 Sobolev 空间推广到度量测度空间，Rev. Mat. Iberoam. 243-279，第 16 卷，2000 年。1[24] P. Tukia 与 J. V¨ais¨al¨a，度量空间的拟对称嵌入，Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 5（1980），97-114。3[25] J.V¨ais¨al¨a，关于 n-维拟共形映射的讲义，数学讲义，第 229 卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1971 年。12[26] S. K. Vodopyanov，齐性群映射与函数空间嵌入，Sibirsk. Mat. Zh. 30（1989），25-41。1

地址：MOE-LCSM，湖南师范大学数学与统计学院，中华人民共和国湖南省长沙市 410081。

Manzi Huang，电子邮箱：
mzhuang@hunnu.edu.cn
Xiantao Wang，电子邮箱：
xtwang@hunnu.edu.cn
Zhuang Wang，电子邮箱：
zwang@hunnu.edu.cnZhihao Xu，电子邮箱：734669860xzh@hunnu.edu.cn