arXiv:2302.11109v1 [math.GT] 22 Feb 2023

Asaeda–Przytycki–Sikora 同调的变形

ZHENKUN LI、YI XIE 和 BOYU ZHANG

Abstract. 我们定义了一族以一个参数为参的同调不变量，用于研究加厚定向曲面中的链环。它既可恢复 Asaeda–Przytycki–Sikora [APS04]同调不变量，也可恢复 Winkeler [Win21]定义的不变量。这个新不变量可视为 Asaeda–Przytycki–Sikora 同调的一种变形；它并非 Lee 型变形，因为只有当曲面不是单连通时，这种变形才是非平凡的。我们的构造受到奇异瞬子 Floer 同调中计算结果的启发。我们还证明了这个新不变量具有检测性质，这一结果强于 [LXZ22a]的主要定理。

1. Introduction

Khovanov 同调 [Kho00] 是一种链环不变量，为每个 $\mathbb{R}^3$中的定向链环赋予一个双分次同调群。Asaeda–Przytycki–Sikora [APS04] 为 $(-1,1)$提出了 Khovanov 同调的一种推广，该同调用于曲面上的丛，其中要求这些丛作为三维流形是定向的。这类 $(-1,1)$丛称为加厚曲面。当曲面为圆环时，Asaeda–Przytycki–Sikora 同调也称为环带 *Khovanov* 同调。数十年来，Khovanov 同调和 Asaeda–Przytycki–Sikora 同调一直是研究结与链环的重要工具。近年来，Winkeler[Win21] 为加厚多重带孔圆盘中的链环引入了 Khovanov 同调的另一种变体，它不同于 Asaeda–Przytycki–Sikora 不变量。

设 Σ 是一个定向曲面。本文为 $(-1,\ 1)\times\Sigma$ 中的定向链环定义了一族单参数同调不变量。作为双分次模，这个新不变量既能恢复 Asaeda–Przytycki–Sikora 同调，也能恢复 Winkeler 的不变量；它还可以解释为 Asaeda–Przytycki–Sikora 同调的一种单参数变形。由于只有当曲面具有非平凡基本群时，这种变形才是非平凡的，因此它并非 Lee 型变形。该构造的灵感来自奇异瞬子 Floer 同调的计算。我们还利用瞬子 Floer 理论证明了一个关于变形后的 Asaeda–Przytycki–Sikora 同调的检测结果，其给出的秩估计强于 [LXZ22a] 的主定理。

本文结构如下。第 2 节介绍一些记号和约定。第 3 节和第 4 节定义微分映射，并证明 $d^2=0$。第 5 节定义同调不变量，并证明其在 Reidemeister 变换下的不变性。第 6 节阐述其与瞬子 Floer 同调相关的动机，并在定理 6.1 中证明上述检测结果。

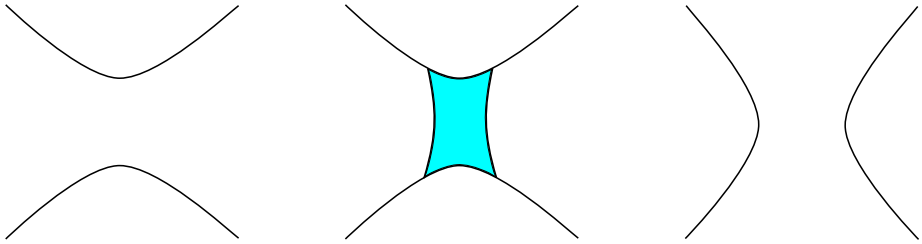

FIGURE 1. 带手术

2. NOTATION

本文中，我们用 R 表示一个固定的含幺交换环。我们用Σ 表示一个定向曲面，它可以有边界，也可以是非紧的。

对于每个嵌入的闭 1-流形 $c \subset \Sigma$，我们按如下方式为 c 赋予一个 R–模 $V(c)$ ：

(1) 若 γ 是 Σ上的一条可缩简单闭曲线，则定义 $V(\gamma)$ 为由$\mathbf{v}(\gamma)_+$ 和$\mathbf{v}(\gamma)_-$生成的自由 R–模，其中$\mathbf{v}(\gamma)_+$ 和$\mathbf{v}(\gamma)_-$ 是与 γ相关联的形式生成元。(2) 若 γ 是一条不可缩简单闭曲线，则令 o、 o' 为 γ的两种定向。定义 $V(\gamma)$ 为由$\mathbf{v}(\gamma)_o$ 和$\mathbf{v}(\gamma)_{o'}$生成的自由模，其中$\mathbf{v}(\gamma)_o$ 和$\mathbf{v}(\gamma)_{o'}$ 是形式生成元。(3) 一般而言，设 c的连通分支为 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$，定义 $V(c)$ 为$\otimes_{i=1}^{k} V(\gamma_i)$.

当需要强调 Σ 的选取时，我们将 $V(c)$ 写作 $V^{\Sigma}(c)$，并分别将$\mathbf{v}(\gamma)_o$、$\mathbf{v}(\gamma)_\pm$ 写作$\mathbf{v}^{\Sigma}(\gamma)_o$、$\mathbf{v}^{\Sigma}(\gamma)_\pm$。

若 o 是 曲线 γ的一个定向，我们用 γ_o 表示相应的定向曲线 e.

3. BAND SURGERY HOMOMORPHISMS

设 c 是 Σ上的一个嵌入闭1维流形，设 b 是 Σ上的一个嵌入圆盘，使得 b 的内部与 c 不相交，且 b 的边界与 c 相交于两条弧（见图1）。沿着 b 对 c 进行手术，得到 Σ上的另一个嵌入闭1维流形，记作 c_b。我们称圆盘 b 为附着于 c的带 。

为便于后文参考，我们记录以下两个初等引理。

引理 3.1. 从 c 到 c_b 的变化有三种可能：

(1) c 的两个圆分支合并为一个圆，(2) c 的一个圆分支分裂为两个圆，

(3) c 的一个圆分支经手术改变为另一个圆。

证明。由于 $\partial b \cap c$ 包含两条弧，手术至多影响 c 的两个连通分支。如果 $\partial b \cap c$ 位于 c的两个不同连通分支上，那么手术会将这两个连通分支合并为一个圆。如果 $\partial b \cap c$ 位于 c的同一个连通分支上，那么边界

b 的定向在 $\partial b \cap c$ 的两个连通分支上分别定义了一个定向，因此我们有两条嵌入在 c 的一个连通分支 γ 中的定向弧。如果这两条弧在 γ 上诱导相同的定向，那么手术会将 c 的一个连通分支分裂为两个圆。如果这两条弧在 γ 上诱导相反定向，那么手术会将这个连通分支变为另一个圆。□

回顾一下，若 $\mathfrak{o}$ 是曲线 γ的一个定向，我们用 $\gamma_{\mathfrak{o}}$ 表示相应的定向曲线。

引理 3.2。设 γ 是连通曲面 Σ上的一条简单闭曲线，并且假设 Σ与 S^2不同胚。设 $\mathfrak{o}$、$\mathfrak{o}'$ 是 γ的两种定向。那么 $\gamma_{\mathfrak{o}}$ 和 $\gamma_{\mathfrak{o}'}$在 Σ上不同伦。

证明。若 γ 是非分离的，则存在一条定向简单闭曲线 β，使得 β 与 γ 的代数交数非零。由于同痕保持代数交数的符号，所求结论成立。

若 γ 是分离的且 $\partial\Sigma \neq \varnothing$，则 γ 的每一种定向都会给 $\Sigma\backslash\gamma$的两个连通分支排序，从而确定 $\partial\Sigma$的连通分支的一个有序划分。由于 γ 在 Σ 上的每个同痕都可以扩展为一个固定边界的 Σ的同痕，所求结论得证。

若 γ 是分离的且 Σ 是闭的，则 γ 的每一种定向都会为 $\Sigma\backslash\gamma$ 的两个连通分支确定一种排序。设 Σ_1 和 Σ_2 是由 γ 的定向 $\mathfrak{o}$ 排序的 $\Sigma\backslash\gamma$ 的两个连通分支。由于 Σ 不是球面，$H_1(\Sigma_1;\ \mathbb{Z})$ 和 $H_1(\Sigma_2;\ \mathbb{Z})$ 在 $H_1(\Sigma;\ \mathbb{Z})$ 中的像彼此不同。$H_1(\Sigma_1;\ \mathbb{Z})$ 和 $H_1(\Sigma_2;\ \mathbb{Z})$ 的像在 $\gamma_{\mathfrak{o}}$ 的同痕变换下保持不变，因此所需结果得证。□

任取一个元素 $\lambda \in R$，定义一个同态

$$T_\lambda(b) : V(c) \to V(c_b)$$

该同态与沿 b 的带手术相关。当需要强调 Σ 的选择时，我们将 $T_\lambda(b)$ 记作 $T_\lambda^{\Sigma}(b)$。

我们首先假设 ∂b 与 c 的每个连通分支都有非空交集。一般情形将在后文讨论。根据引理 3.1，若 ∂b 与 c 的每个连通分支都有非空交集，则有以下三种情形：

情形 1：c 有两个连通分支 γ_1 和 γ_2，它们在手术后合并为一个圆 $\gamma = c_b$。在这种情况下，我们定义 $T_\lambda(b)$：$V(\gamma_1) \otimes V(\gamma_2) \to V(\gamma)$ 如下：

(1) 如果 γ_1 和 γ_2 都是可缩圆，那么 γ 也是可缩的，并且我们定义$T_\lambda(b)$ 为

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\gamma_1)_+ \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_+ \mapsto \mathbf{v}(\gamma)_+, && \mathbf{v}(\gamma_1)_+ \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_- \mapsto \mathbf{v}(\gamma)_-, \\ &\mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_+ \mapsto \mathbf{v}(\gamma)_-, && \mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_- \mapsto 0. \end{aligned}$$

(2) 若 γ_1 可缩而 γ_2 不可缩，则 γ_2 与 γ同伦。Σ上存在不可缩曲线，这意味着 Σ与 S^2不微分同胚。根据引理 3.2，γ_2 的定向与其定向典范地对应

通过同痕与 γ 的定向对应。此对应定义了从 $V(\gamma_2)$到 $V(\gamma)$的典范同构，记作 ι。在此情形下，同态 $T_\lambda(b)$ 定义为

$$\mathbf{v}(\gamma_1)_+ \otimes x \mapsto \iota(x), \quad \mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes x \mapsto 0$$

对所有 $x \in V(\gamma_2)$。

(3) 若 γ_1 不可缩而 γ_2 可缩，则要求该映射关于 γ_1 和 γ_2 对称，并归结为上面的情形 (2)，从而定义 $T_\lambda(b)$ 。

(4) 若 γ_1 和 γ_2 均不可缩，而 γ_3 可缩，则 γ_1 和 γ_2 必定同伦。根据引理 3.2， γ_1 和 γ_2 的定向通过该同痕被典范地识别。令 $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ 为 γ_1的两种定向，并用相同记号表示 γ_2上相应的定向。于是映射 $T_\lambda(b)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}} \mapsto 0, && \mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}'} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}'} \mapsto 0, \\ &\mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}'} \mapsto \mathbf{v}(\gamma)_-, && \mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}'} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}} \mapsto \mathbf{v}(\gamma)_-. \end{aligned}$$

(5) 若 γ_1、 γ_2和 γ 均不可缩，令 N 为$b \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$的正则邻域。则 N是一个挖去三个圆盘的球面，且 N 的三个边界分支分别与 γ_1、 γ_2、 γ平行。由于 $N \subset \Sigma$ 有定向， N 的边界定向为 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$各自确定一个定向，我们分别将这些定向记为 $\mathfrak{o}_1, \mathfrak{o}_2, \mathfrak{o}$。将它们的相反定向记为 $\mathfrak{o}_1', \mathfrak{o}_2', \mathfrak{o}'$。于是 $T_\lambda(b)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}_1'} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}_2'} \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}(\gamma)_{\mathfrak{o}}, && \mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}_1'} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}_2} \mapsto 0, \\ &\mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}_1} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}_2'} \mapsto 0, && \mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}_1} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}_2} \mapsto 0. \end{aligned}$$

情形 2： c 包含一个连通分支 γ，而 c_b 有两个连通分支 γ_1 和 γ_2。在这种情况下，我们如下定义 $T_\lambda(b)$： $V(\gamma) \to V(\gamma_1) \otimes V(\gamma_2)$：

(1) 如果 γ_1 和 γ_2 都是可缩圆，那么 γ 也是可缩的，我们定义$T_\lambda(b)$ 如下：

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}(\gamma)_+ \mapsto \mathbf{v}(\gamma_1)_+ \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_- + \mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_+, \\ &\mathbf{v}(\gamma)_- \mapsto \mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_-. \end{aligned}$$

(2) 如果 $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ 中一个是可缩的，另一个是不可缩的，不失一般性，假设 γ_1 是可缩的， γ_2 是不可缩的。那么 γ 与 γ_2同伦，且 γ 和 γ_2 的定向可被典范地识别。设 $\mathfrak{o}$、 $\mathfrak{o}'$为 γ的两种定向，并用相同的记号表示 γ_2对应的定向。定义映射 $T_\lambda(b)$ 如下：

$$\mathbf{v}(\gamma)_{\mathfrak{o}} \mapsto \mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}}, \quad \mathbf{v}(\gamma)_{\mathfrak{o}'} \mapsto \mathbf{v}(\gamma_1)_- \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}'}.$$

(3) 如果 γ_1 和 γ_2 都是不可缩的，而 γ 是可缩的，那么 γ_1和 γ_2 彼此同伦，且 γ_1 的定向与 γ_2 的定向可被典范地识别。令 $\mathfrak{o}$， $\mathfrak{o}'$ 为 γ_1 的定向，并对 γ_2 的定向采用相同记号。定义映射 $T_\lambda(b)$ 为

$$\mathbf{v}(\gamma)_+ \mapsto \mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}'} + \mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}'} \otimes \mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}}, \quad \mathbf{v}(\gamma)_- \mapsto 0.$$

(4) 如果 γ，γ_1，γ_2 都是不可缩的，令 N 为 $b\cup\gamma$ 的正则邻域。那么 N 是一个挖去三个圆盘的球面，且 N 的三个边界分支分别与 γ_1、γ_2、γ 平行。N 的边界定向在 γ_1，γ_2，γ 上分别诱导出一个定向，记为 $\mathfrak{o}_1$，$\mathfrak{o}_2$，$\mathfrak{o}$。将它们的相反定向记为 $\mathfrak{o}_1'$，$\mathfrak{o}_2'$，$\mathfrak{o}'$。定义映射 $T_\lambda(b)$ 为

$$\mathbf{v}(\gamma)_{\mathfrak{o}'}\mapsto\lambda\cdot\mathbf{v}(\gamma_1)_{\mathfrak{o}_1}\otimes\mathbf{v}(\gamma_2)_{\mathfrak{o}_2},\quad \mathbf{v}(\gamma)_{\mathfrak{o}}\mapsto 0.$$

情形3：c 和 c_b 都恰有一个连通分支。在这种情形下，定义 $T_\lambda(b)$ 为零。

一般地，假设 $c=c^{(1)}\sqcup c^{(2)}$，使得 ∂b 与 $c^{(2)}$ 不相交，且与 $c^{(1)}$的每个连通分支都相交，我们将带手术同态 $T_\lambda(b)\colon V_\lambda(c)\to V_\lambda(c_b)$ 定义为

$$T_\lambda(b)=T_\lambda(b)|_{V(c^{(1)})}\otimes\mathrm{id}\,|_{V(c^{(2)})}. \tag{3.1}$$

注释 3　.3. 在上述定义中，系数 λ 仅出现在情形1(5)和2(4).

4. Commutativity of band surgery homomorphisms

本节的主要结果是以下命题。

命题 4.1。设 c 是 Σ上的一个嵌入闭 *1*维流形，并设 b_1 和b_2 是附着于 c的两个互不相交的带。那么对所有 $\lambda\in R$,

$$T_\lambda(b_1)\circ T_\lambda(b_2)=T_\lambda(b_2)\circ T_\lambda(b_1). \tag{4.1}$$

4.1. 亏格为零情形。我们首先在 Σ 是球面或有限开孔球面时证明 (4.1)。这里的论证受到 Winkeler [Win21]工作的启发。

引理 4.2。若 Σ 是球面或有限开孔球面，则方程 (4.1) 成立。

证明。若 Σ 是球面或圆盘，则每条曲线都是可缩的，因此引理 3.1 中的情形 (3) 不可能出现。在这种情况下，我们对 $T_\lambda(b)$ 的定义不依赖于 λ，且与标准 Khovanov理论中的合并与分裂映射定义一致。因此方程 (4.1) 成立。

当 Σ 有 $n\geqslant 2$ 个边界分支时，我们将 Σ 视为一个圆盘 B，去掉其中的 $n-1$ 个内部圆盘$B_1,\ldots,B_{n-1}$。假设 Σ的定向定义如下：∂B 上的边界定向为逆时针定向，而 ∂B_i 上的边界定向为顺时针定向。

回顾一下，当需要强调曲面 Σ 时，我们分别将 $V(c)$、$\mathbf{v}(\gamma)_{\mathfrak{o}}$、$\mathbf{v}(\gamma)_\pm$、$T_\lambda(b)$ 记作 $V^\Sigma(c)$、$\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_{\mathfrak{o}}$、$\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_\pm$、$T_\lambda^\Sigma(b)$。

对于每个嵌入闭1维流形 $c\subset\Sigma$，定义一个同构 $\Phi\colon V^B(c)\to V^\Sigma(c)$ 如下。对于 c 的每个连通分支 γ，若 γ 在 Σ中可缩，则定义

$$\Phi(\mathbf{v}^B(\gamma)_\pm)=\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_\pm.$$

若 γ 在 Σ中不可缩，令 $\mathfrak{o}$ 表示 γ的逆时针定向，令 $\mathfrak{o}'$表示 γ的顺时针定向，并定义

$$\Phi(\mathbf{v}^B(\gamma)_+)=\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_{\mathfrak{o}},\quad \Phi(\mathbf{v}^B(\gamma)_-)=\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_{\mathfrak{o}'}.$$

由于 $T^B_\lambda(b)$ 不依赖于 λ，我们将其记为 $T^B(b)$。于是

$$\Phi \circ T^B(b) \circ \Phi^{-1}$$

是从 $V^\Sigma(c)$ 到 $V^\Sigma(c_b)$的同态。

对于每个 $i \in \{1, \ldots, n-1\}$，按如下方式定义 $V^\Sigma(c)$ 上的分次。若圆 γ是 Σ上的可缩曲线，则定义$\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_\pm$ 的次数为零。若 γ 不可缩，则对 γ的每个定向 $\mathfrak{o}$，定义 $\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_\mathfrak{o}$ 的次数为$\gamma_\mathfrak{o}$ 绕 B_i的旋转数。这里，我们对旋转数的约定是：逆时针定向的旋转数总是非负的。将一组生成元的张量积的分次定义为每个生成元分次之和。

通过检查 $T_\lambda(b)$定义中的所有情形，可以直接验证映射 $T^\Sigma(b)$ 保持上述所有 $n-1$ 分次。此外，对于每个 $i \in\{1, \ldots, n-1\}$，映射 $\Phi\circ T^B(b)\circ\Phi^{-1}$ 不会增加 i^{th} 分次。保持所有 $n-1$ 分次的 $\Phi \circ T^B(b) \circ \Phi^{-1}$ 的分量等于映射 $T^\Sigma_1(b)$；当 $\lambda = 1$时，该映射就是映射 T^Σ_λ。由于 B上的 $T^B(b_1) \circ T^B(b_2) = T^B(b_2) \circ T^B(b_1)$，我们得出 (4.1) 对 T^Σ_1成立。

为证明（4.1）对一般的 λ 成立，定义 $T^\Sigma_\delta = T^\Sigma_1 - T^\Sigma_0$。于是

$$T^\Sigma_\lambda = T^\Sigma_0 + \lambda \cdot T^\Sigma_\delta.$$

我们如下定义 $V^\Sigma(-)$ 上的另一种分次。如果圆 γ 是 Σ 上的一条可缩曲线，则定义 $\mathbf{v}_\Sigma(\gamma)_\pm$ 的次数为 0。如果 γ 是不可缩的，则对于 γ 的每个定向 $\mathfrak{o}$，当 $\mathfrak{o}$ 为逆时针定向时，定义 $\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_\mathfrak{o}$ 的次数为 1；当 $\mathfrak{o}$ 为顺时针定向时，定义 $\mathbf{v}^\Sigma(\gamma)_\mathfrak{o}$ 的次数为 -1。将一组生成元的张量积的分次定义为每个生成元分次之和。

通过检查 T^Σ_λ 定义中的所有情形，可以直接验证，在上述分次下，映射 T^Σ_0 是次数为 0 的齐次映射，而 T^Σ_δ 是次数为 -1 的齐次映射。由于（4.1）对 $\lambda = 1$ 成立，我们有

$$\begin{aligned}
T^\Sigma_0(b_1) \circ T^\Sigma_0(b_2) &= T^\Sigma_0(b_2) \circ T^\Sigma_0(b_1) \\
T^\Sigma_\delta(b_1) \circ T^\Sigma_0(b_2) + T^\Sigma_0(b_1) \circ T^\Sigma_\delta(b_2) &= T^\Sigma_\delta(b_2) \circ T^\Sigma_0(b_1) + T^\Sigma_0(b_2) \circ T^\Sigma_\delta(b_1) \\
T^\Sigma_\delta(b_1) \circ T^\Sigma_\delta(b_2) &= T^\Sigma_\delta(b_2) \circ T^\Sigma_\delta(b_1)
\end{aligned}$$

因此，（4.1）对所有 $\lambda \in R$ 都成立。 □

由于以下引理，引理 4.2 可用于验证（4.1）在正亏格曲面上的成立性。

引理 4.3。设 Σ 是一个定向曲面，$\Sigma' \subset \Sigma$ 是一个嵌入曲面，其定向由 Σ诱导。设 Σ' 到 Σ 的嵌入是 π_1–单射。设 c是 Σ' 中的一个嵌入闭 *1*–流形，且 b_1、b_2 是附着于c的 Σ' 中的两条互不相交的带。那么

$$T^{\Sigma'}_\lambda(b_1) \circ T^{\Sigma'}_\lambda(b_2) = T^{\Sigma'}_\lambda(b_2) \circ T^{\Sigma'}_\lambda(b_1)$$

在 $V_{\Sigma'}(c)$ 上，当且仅当

$$T_\Sigma(b_1) \circ T_\Sigma(b_2) = T_\Sigma(b_2) \circ T_\Sigma(b_1)$$

在 $V_\Sigma(c)$ 上。

证明。 由于 Σ' 到 Σ 的嵌入是 π_1–单射，因此对于每个嵌入的 1 维流形 $c \subset \Sigma'$，都存在从 $V_{\Sigma'}(c)$ 到 $V_\Sigma(c)$ 的典范同构，它将 $V_{\Sigma'}(c)$ 的生成元映射到 $V_\Sigma(c)$ 中对应的生成元；此同构与 $T_\lambda^{\Sigma'}$ 和 T_λ^{Σ} 相容，故引理得证。□

4.2. 亏格一情形。 现在我们证明当 Σ 是环面或有限多个穿孔环面时的命题 4.1。令 Σ_0 为一个环面，并设 $\Sigma = \Sigma_0 \backslash \{p_1, \dots, p_n\}$ 满足 $n \geqslant 0$。令 c, b_1, b_2 如命题 4.1 中所述。根据 T_λ 的定义，不失一般性，我们可以假设 c 的每个连通分支都与 $\partial(b_1 \cup b_2)$ 有非平凡交点。

引理 4.4。 假设每条与 $c \cup b_1 \cup b_2$ 不相交的简单闭曲线 $\gamma_0 \subset \Sigma_0$ 在 Σ_0 中都是可缩的。那么，除去 Σ_0 的保向微分同胚意义下，c、b_1、b_2 作为 Σ_0 的子集只有 *8* 种可能的构型，如图 *2* 所示。

对于图 2 中的每种情况，环面 Σ_0 是将圆环的两个边界分支粘合而得到的商空间。蓝色曲线表示 1 维流形 c，而圆盘 b_1 和 b_2 定义为红色弧的加厚。

证明。 我们讨论以下几种情况：

如果 c 包含两个圆 γ_1、γ_2，且它们都可缩，令 D_1，$D_2 \subset \Sigma$ 表示分别由 γ_1、γ_2 围成的圆盘。那么 $D_1 \cup D_2 \cup b_1 \cup b_2$ 是一个圆盘或圆环，因此在 $c \cup b_1 \cup b_2$ 的补集中存在一条可缩的圆 γ_0，这与假设矛盾。

如果 c 包含两个圆 γ_1、γ_2，且 γ_1 和 γ_2 均不可缩，那么 γ_1 和γ_2 必定彼此平行。补集 $\Sigma_0 \backslash (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ 包含两个连通分支。如果 $\Sigma_0 \backslash (c \cup b_1 \cup b_2)$ 中的每条简单闭曲线在 Σ_0中都可缩，那么 b_1和 b_2 的内部必定位于 $\Sigma_0 \backslash (\gamma_1 \cup \gamma_2)$的不同连通分支中，并且对于每个 i，∂b_i 都必须与 c 的两个连通分支相交。因此，在 Σ_0的保向微分同胚意义下，该构型由图 2 的情形（1）给出。

如果 c 包含两个圆 γ_1、γ_2，其中 γ_1 可缩而 γ_2 不可缩，令D_1 为由 γ_1围成的圆盘。如果 b_1 或 b_2 包含在 D_1中，那么 $D_1 \cup c \cup b_1 \cup b_2$变形收缩到 γ_2，因此存在一条位于 Σ_0中的不可缩简单闭曲线，它与 $D_1 \cup c \cup b_1 \cup b_2$不相交，这与假设矛盾。因此，$b_1$ 和 b_2 都必须位于 D_1的外侧，所以 $b_1 \cup D_1 \cup b_2$ 变形收缩到一条两个端点都在 γ_2上的弧。由假设可知，在 Σ_0的保向微分同胚意义下，$c \cup b_1 \cup b_2$ 由图 2 的情形（2）给出。

如果 c 由一条在 Σ_0中可缩的简单闭曲线 γ 组成，令 D 为 γ围成的圆盘，则 b_1 和 b_2 必为 $\Sigma_0 \backslash D$中两条不相交弧 r_1 和 r_2 的加厚。对于 $i = 1, 2$，令 r_i 为由 r_i 与 D中的一条弧并成的圆。由于 r_1和 r_2 是不相交弧，我们可以选取 D 中的弧，使得 r_1 和 r_2 要么不相交，要么在一点横截相交。由此可知，假设要求 r_1 和 r_2 必须在一点横截相交。因此，该构型在 Σ_0的保向微分同胚意义下由图 2 的情形 (3) 给出。

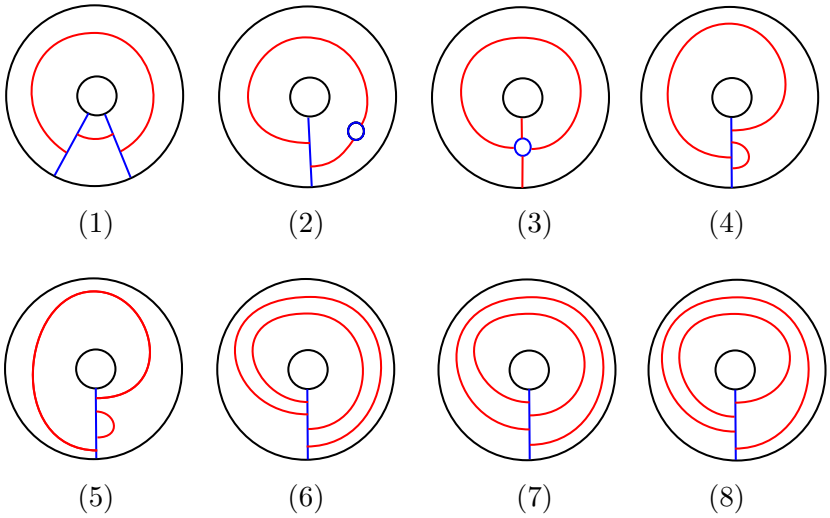

FIGURE 2. 所有可能的构型

如果 c由一条不可缩简单闭曲线组成，则可能的构型由图 2 的情形 (4)–(8) 给出。□

引理 4.5。 当 Σ 是环面或有限多个穿孔环面时，等式 (4.1) 成立。

证明。 若存在一条与$c \cup b_1 \cup b_2$不相交的不可缩简单闭曲线 $\gamma_0 \subset \Sigma_0$，我们可以沿着 γ_0 剖开 Σ_0，由引理 4.2 和引理 4.3 即可得到所需结论。因此，根据引理 4.4，我们只需考虑图 2 所示的 8 种情况。

在情形 (2)、(4)、(5)、(6)、(7)、(8) 中，(4.1) 两边均为零，因为引理 3.1 的情形 (3) 出现在等式两边。

对于情形 (1) 和 (3)，补集 $\Sigma\backslash(c \cup b_1 \cup b_2)$ 有两个连通分支。因此，再次根据引理 4.3，我们只需考虑每个连通分支上至多有一个穿孔的情况。

回顾一下，n 表示 Σ_0上的穿孔数。对于满足 $n = 0$ 或 2 的情形（1），以及情形（3），存在一个 Σ_0 的保向微分同胚，它保持 c和 Σ不变，在 c上保向，并交换 b_1 和 b_2。因此（4.1）成立。

对于满足 $n = 1$的情形（1），直接验证（4.1）的两边均为零即可。□

4.3. P **命题 4.1 的证明**。现在我们证明一般情形下的命题 4.1。

不失一般性，我们可以假设 c 的每个连通分支都与 b_1 和b_2 有非平凡交，并且 $c \cup b_1 \cup b_2$ 是连通的。

在此情形下，$c\cup b_1\cup b_2$ 与三个圆的楔和同伦等价。因此，其欧拉示性数为 -2。

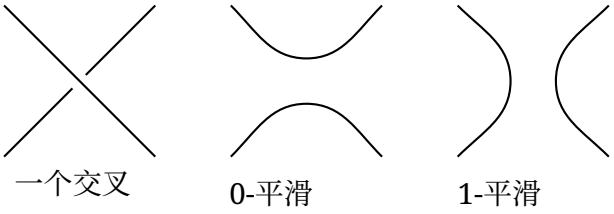

FIGURE 3. 两种平滑

令 N 为 Σ 中 $c \cup b_1 \cup b_2$ 的一个闭正则邻域。按如下方式从 N 得到 Σ'：对于 ∂N 的每个连通分支 γ，若 γ 在 Σ 中可缩，但在 N 中不可缩，则 γ 在 Σ 中围成一个圆盘 D_γ，使得 $D \cap N = \gamma$。定义 Σ' 为 N 与上述所有圆盘 D_γ 的并。则 Σ' 在 Σ 中的嵌入是 π_1–单射。由于 $\chi(N) = -2$，Σ' 的亏格为 0 或 1。因此，根据前面的结果，(4.1) 在 Σ' 上成立。于是由引理 4.3，所需等式在 Σ 上也成立。

5. KHOVANOV HOMOLOGY

假设 $L \subset (-1,\ 1) \times \Sigma$ 是一个链环。对于每个 λ，我们利用映射 T_λ为 L定义一个同调不变量。

假设链环 L 由 Σ 上的图 D 给出，且有 k 个交叉，并固定这些交叉的一个排序。对于 $v = (v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots,\ v_k) \in \{0,\ 1\}^k$，通过 v 次操作，依次对 D 的交叉进行0平滑和1平滑（见图3），可将其变为 Σ中的嵌入闭1维流形。将所得平滑图记为 D_v。

每当 u 由 v 将一个坐标从0改为1得到时，在交叉附近就存在一条带b，使得 v 可由 u 沿 b进行带手术得到。定义d^λ_{vu}：$V(D_v) \to V(D_u)$ 为 $T_\lambda(b)$。令 e_i 为 $\mathbb{Z}^k$的第 i个标准基向量。定义

$$\mathrm{CKh}_{\Sigma,\lambda}(L) = \bigoplus_{v\in\{0,1\}^k} V(D_v),$$

并按如下方式在 $\mathrm{CKh}_\Sigma(L)$ 上定义一个自同态

$$\mathcal{D}_{\Sigma,\lambda} = \sum_i \sum_{u-v=e_i} (-1)^{\sum_{i<j\leqslant c} v_j} d_{vu}.$$

根据（4.1），我们有 $\mathcal{D}^2_{\Sigma,\ \lambda} = 0$。

我们在 $\mathrm{CKh}_{\lambda,\ \Sigma}(L)$ 上定义量子分次和同调分次如下。对于每个圆 γ，如果 γ 是不可缩的，则将 $V(\gamma)$ 上的量子分次定义为零。如果γ 是可缩的，则将 $\mathbf{v}(\gamma)_+$ 的量子分次定义为 1，并将 $\mathbf{v}(\gamma)_-$ 的量子分次定义为 -1。随后，该分次扩展为 $\mathrm{CKh}_{\lambda,\ \Sigma}(L)$上的分次。将 $V(D_v) \subset \mathrm{CKh}_{\lambda,\ \Sigma}(L)$ 的同调分次定义为 v中各坐标之和。

在 $\mathrm{CKh}_{\lambda,\Sigma}(L)$ 上还定义了一种分次，定义如下。对于每个圆γ，若 γ 可缩，则将 $V(\gamma)$ 上的分次定义为零。若 γ 不可缩，则对 γ的每种定向 $\mathfrak{o}$，将$\mathbf{v}(\gamma)_\mathfrak{o}$ 的分次定义为 $\gamma_\mathfrak{o}$的基本类。

按照标准约定，我们用花括号 $\{l\}$ 表示量子分次的平移 l（即将每个齐次元素的量子分次增加 l）；用方括号 $[l]$ 表示同调分次的平移 l。

定理 5.1。.....的同调

$$\Big(\mathrm{CKh}_{\lambda,\Sigma}(L)[-n_-]\{n_+-2n_-\},\mathcal{D}_{\Sigma,\lambda}\Big)$$

作为一个 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$ 分次模，与图或交叉的排序无关，其中 n_+ 和 n_- 分别表示图中的正交叉数和负交叉数。

证明。证明与文献 [BN02]中标准 Khovanov 同调在 Reidemeister 变换下不变性的证明相同。除了 (3.1) 和 (4.1) 之外，证明中所需的关于带同态 $T_\lambda(b)$ 的唯一性质如下：

(1) 若 γ 是可缩圆，则 $V(\gamma)$ 的秩为 2，且有两个生成元 $\mathbf{v}(\gamma)_\pm$。(2) 假设沿 b 进行带手术，将两个圆 γ_1 和 γ_2 合并为 γ，其中 γ_1是可缩的。那么 γ_2 和 γ 同伦的，且此同痕定义了一个典范同构 $\iota\colon V(\gamma_2)\to V(\gamma)$。于是对所有 $x\in V(\gamma_2)$，都有 $T_\lambda(b)(\mathbf{v}(\gamma_1)_+\otimes x)=\iota(x)$。(3) 假设沿 b 进行带手术，将一个圆 γ 分裂为两个圆 γ_1 和 γ_2，其中 γ_1是可缩的。那么 γ_2 和 γ 同伦的，且此同痕定义了一个典范同构 $\iota\colon V(\gamma)\to V(\gamma_2)$。于是复合映射

$$V(\gamma)\xrightarrow{T_\lambda(b)}V(\gamma_1)\otimes V(\gamma_2)\xrightarrow{/\mathbf{v}(\gamma_1)_+=0}\mathrm{span}\{\mathbf{v}(\gamma_1)_-\}\otimes V(\gamma_2)$$

由与$\mathbf{v}(\gamma_1)_-$的张量积给出，其中上面的第二个映射是一个商映射。

唯一值得指出的是，[BN02]第 3.5.5 节中“转置”映射的定义有一处笔误。顶层上的映射 Υ 应将一对 (β_1,γ_1) 的商像映射到一对 (β_2,γ_2) 的商像，使得 $\gamma_1+\tau_1\beta_1=\gamma_2+\tau_2\beta_2$。上一句中斜体标出的短语以及最后一个等式在 [BN02]中均有遗漏。□

定义 5.2。我们将.....的同调定义为

$$\Big(\mathrm{CKh}_{\lambda,\Sigma}(L)[-n_-]\{n_+-2n_-\},\mathcal{D}_{\Sigma,\lambda}\Big)$$

作为一个 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus H_1(\Sigma;\,\mathbb{Z})$ 模，称为 $L\subset(-1,1)\times\Sigma$的 Khovanov 不变量，记为 $\Sigma\mathrm{Kh}_\lambda(L;R)$。

注记 5.3。当 $\lambda=0$ 时，微分映射 $\mathcal{D}_{\Sigma,\,\lambda}$ 与 [APS04] 中定义的 Asaeda–Przytycki–Sikora 同调的微分映射相同。当 $R=\mathbb{Z}$、$\lambda=1$，且 Σ 是带孔圆盘时，同调 $\Sigma\mathrm{Kh}_\lambda$ 恢复了 Winkeler [Win21] 定义的不变量。

6. Motivation from instanton homology

本节将阐述从瞬子同调定义 $T_\lambda(b)$ 的动机。我们还将证明以下检测结果：

定理 6.1. 设 Σ 是一个零亏格曲面，且 $L \subset (-1,1)\times\Sigma$ 是一个链环。那么 秩$_{\mathbb{Z}/2}\,\Sigma\mathrm{Kh}_1(L;\mathbb{Z}/2) \geqslant 2,$，当且仅当 L 同伦于 Σ中的一个嵌入纽结时，等号成立。

Remark 6.2. 根据 Winkeler [Win21 的谱序列和定理 1.3]，我们有

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/2}\,\Sigma\mathrm{Kh}_0(L;\mathbb{Z}/2) \geqslant \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/2}\,\Sigma\mathrm{Kh}_1(L;\mathbb{Z}/2).$$

因此，定理 6.1 改进了 [LXZ22a 的定理 1.2]。

设 R 是一个闭的定向曲面，并设 L 是 $(-1,1)\times R$中的一个链环。设 p 是 R 上的一点，且该点不在 L 到 R的投影上。在 [LXZ22a], 中，作者研究了瞬子同调群

$$\Sigma\mathrm{HI}_{R,p}(L) = \mathrm{I}(S^1\times R, L, S^1\times\{p\}|\{t_*\}\times R),$$

其中 S^1 被视为 $[-1,\ 1]$ 在将 -1 与 1 等同后得到的商空间，而 $t_*\in S^1$是一个固定的基点。

设 c 是 R中的一个嵌入的 1 维流形，且 b 是附着在 c 上的一条带，并且与 p不相交。那么沿着 b 进行带手术，便定义了一个从 c 到 c_b 的链环协边，其中它们是 $(-1,\ 1)\times R$中的链环。因此，它诱导出一个 Floer 同调群的协边映射（相差一个符号）。

$$\Sigma\mathrm{HI}(b) : \Sigma\mathrm{HI}_{R,p}(c) \to \Sigma\mathrm{HI}_{R,p}(c_b).$$

如 [LXZ22a，命题 6.12], 中所述，映射 $\Sigma\mathrm{HI}(b)$ 是 Kronheimer–Mrowka 谱序列一个变体的第二页的组成部分。在 [LXZ22a，命题 6.11], 中，多个特殊情形下的协边映射 $\Sigma\mathrm{HI}(b)$ 已得到计算；除以 i 的整数次幂相乘以及适当的变量替换外，它们都具有与 $T_\lambda(b)$ 相同的结构。这一计算促成了同调不变量 $\Sigma\mathrm{Kh}_\lambda$的定义。很自然地，我们猜想 Kronheimer–Mrowka 谱序列的第二页与系数环为 $\mathbb{C}$ 的同调 $\Sigma\mathrm{Kh}_\lambda$ 同构，其中 $\lambda\neq 0$满足某个条件。

为了证明定理 6.1，我们证明以下技术性结果，从而细化 [LXZ22a] 中的一些计算。令 $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_4$ 表示 [LXZ22a 第 6] 节中的常数。根据 [LXZ22a，引理 6.9], ，总可以对瞬子同调群的生成元重新缩放，使得 $\lambda_1=\pm 1, \lambda_3=\pm 1$。

引理 6.3。假设选择 [LXZ22a，第 5.2 节。1] 中定义的生成元 w_0 ，使其满足 $\lambda_1=\pm 1$, $\lambda_3=\pm 1$。则 $\lambda_2=\pm\lambda_4$。

*Pro*证明。考虑图 4 中的两条带，并应用 $\Sigma\mathrm{HI}($ 的 TQFT 性质 $b)$. □

引理 6.4. 系数 λ_2 和 λ_4 均非零。

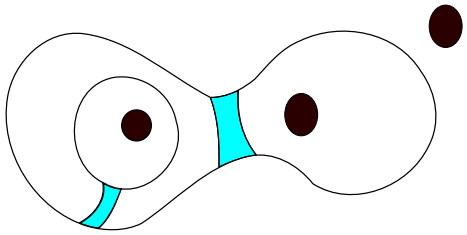

FIGURE 4. 两条带

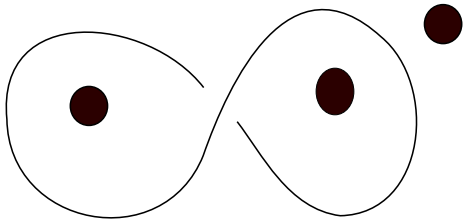

FIGURE 5. 纽结 K 在 $(-1,\ 1)\times\Sigma$

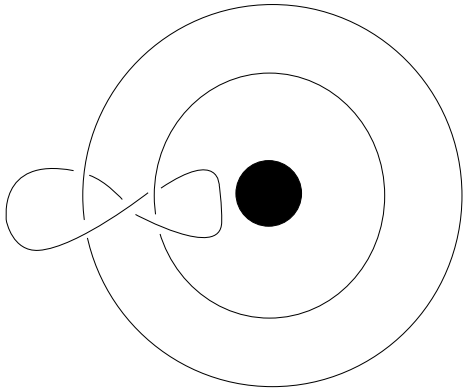

FIGURE 6. 环带链环 L

证明. 我们继续使用 [LXZ22a 第 6]节中的记号。根据[LXZ22a 引理 6.4], 的证明，我们可知只需证明

$$\mathrm{SHI}([-1.1]\times\Sigma,\{0\}\times\Sigma,K)\leqslant 4.$$

其中 K 是图5所示的纽结。

设 L 为图6所示的加厚环带中的链环。在加厚环带中选取一个经向圆盘，使其与 L 交于两点。沿此圆盘分解加厚环带，得到其中含有缠结 T的乘积缝合加厚圆盘。根据 [LXZ22b，定理2，带有缠结 T 的该缝合流形的缝合瞬子Floer同调同构于AHI$(L,\ 2)$ 其中AHI$(L,\ 2)$ 表示

环形瞬子Floer同调中Alexander分级为2的连通分支。缠结 T 具有两个乘积竖直分支。我们去除这两个竖直分支的管状邻域，并在每个邻域的边界上添加一个子午缝合，从而得到其中含有纽结 K' 的缝合流形 M' 。此外，根据 [XZ19，引理7及其证明，这一过程不会改变缝合瞬子Floer同调。因此我们有

$$\mathrm{SHI}(M', \gamma_{M'}, K') \cong \mathrm{AHI}(K, 2).$$

注意，在缝合瞬子Floer同调的定义中， (M', K') 和(M, K) 这一对可以赋予相同的闭合，因此它们的缝合瞬子同调同构。由此可得

$$\mathrm{SHI}([-1,1] \times \Sigma, \{0\} \times \Sigma, K) \cong \mathrm{AHI}(L, 2) \tag{6.1}$$

直接计算可得

$$\mathrm{AKh}(L, 2; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^4$$

其中，AKh$(L$,2; $\mathbb{C})$ 表示 L 的环带 Khovanov 同调中 Alexander分级为 2 且系数环为 $\mathbb{C}$ 的部分。根据 [Xie21，定理 5.16], ，可得

$$\dim \mathrm{AHI}(L, 2; \mathbb{C}) \leqslant \dim \mathrm{AKh}(L, 2; \mathbb{C}) = 4.$$

因此，方程 (6.1) 蕴含

$$\dim \mathrm{SHI}([-1,1] \times \Sigma, \{0\} \times \Sigma, K) \leqslant 4.$$

因此我们得到 $\lambda_2 \neq 0$。由于 $\lambda_4 = \pm\lambda_2$，我们还有 $\lambda_4 \neq 0$。 □

定理 6.1 的证明。回忆一下，当 Σ 是亏格为零的紧曲面时， $V(-)$ 上存在一个分次，使得 $T_0(b)$ 是次数为零的齐次元素，而 $T_1(b)$ 是次数为 -1的齐次元素。由于 $\lambda_2 \neq 0$，我们可以在次数 k处，将 LXZ22a] 中的映射 $\Theta_{w_0,\sigma}$ 乘以因子λ_2^k 进行重新缩放。根据 LXZ22a 第 6], 节中的讨论，存在一个以 $\mathbb{C}$ 系数定义的链复形的谱序列，其收敛到 I($[-1$, $1] \times \Sigma, \{0\} \times \partial\Sigma, L)$；其第二页 (E_2, d_2) 与链复形 $(\mathrm{CKh}_{\Sigma,1}(L), \mathcal{D}_{\Sigma,1})$ 同构，但微分映射的各个连通分支可能相差整数次幂的 i 倍。换言之，存在一个以 $\mathbb{Z}[i]$ 系数定义的链复形 $(C$, $d)$ ，将系数约化为 $\mathbb{C}$ 时，它与 (E_2, d_2) 同构；将系数约化为 $\mathbb{Z}[i]/(i-1) \cong \mathbb{Z}/2$ 时，它与链复形 $(\mathrm{CKh}_{\Sigma,1}(L), \mathcal{D}_{\Sigma,1})$ 同构。由泛系数定理，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}/2} \Sigma\mathrm{Kh}_{\Sigma,1}(L; \mathbb{Z}/2) &\geqslant \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}[i]} H(C, d) = \dim_{\mathbb{C}} H(E_2, d_2) \\ &\geqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{I}([-1,1] \times \Sigma, \{0\} \times \partial\Sigma, L), \end{aligned}$$

所需结果由 [LXZ22a, 定理 1.3]得出。 □

References

[APS04] Marta M. Asaeda、J
´
Categorification of the Kauffman ozef H. Przytycki 和 *bracket skein module of I-bundles over surfaces* **4** 2004 1177 1210 Adam S. Sikora, , Algebr. Geom. Topol. ( ), – . MR2113902[BN02] Dror Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, 代数与几何拓扑**2** (2002), 第 1 期, 337–370. [Kho00] Mikhail Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial* **101** 2000 3, , Duke Math. J. ( ), 第 – 期. MR[LXZ22a] Zhenkun Li、Yi Xie 和 Boyu Zhang, *Instanton homology and knot detection on thickened surfaces* 2208 13963 2022 , arXiv 预印本 arXiv: . ( ). [LXZ22b] , *On Floer minimal knots in sutured manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **9**(2022), 499–516. MR4432446[Win21] Zachary Winkeler, *Khovanov homology for links in thickened multipunctured disks*, arXiv 预印本 arXiv:2106.03834 (2021). [Xie21] Yi Xie, *Instantons and annular Khovanov homology* **388** 2021 107864, , Adv. Math. ( ), 论文 51 4281775 编号 . MR[XZ19] Yi Xie 和 Boyu Zhang, *Instanton Floer homology for sutured manifolds with tangles*, arXiv:1907.00547 (2019)。

Department of Mathematics, Stanford University, California 94305, USA*Email address*: zhenkun@stanford.eduBeijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing 100871 ,
China*Email address*: yixie@pku.edu.cnMathematics Department, University of Maryland at College Park, Maryland 20742, USA*Email address*: bzh@umd.edu