arXiv:2302.11113v1 [math.OA] 22 Feb 2023

球面表示 C^*-流 III：权扩展分支图

上田芳道

Abstract. 我们将 Takesaki 和 Connes 关于 III 型因子结构分析的思想应用于研究渐近表示论中出现的链接（马尔可夫核的简称）。

Contents

1. 引言 1 2. 一般设定 2 3.ρ-扩展 3 4. 权扩展分支图 9 4.1. 权扩展分支图 9 4.2. 对应于（$\widetilde{\alpha}^{\gamma}$, β）-缩放迹的调和函数 12 4.3. 链接的权与权扩展分支图 15 5. 与 K_0-群的关系 17 6. 一个具体例子：U$_q(\infty)$ 21 6.1. 权群与权扩展分支系统 21 6.2. 权扩展的量子群解释 22 参考文献 24

1. Introduction

渐近表示论由 Vershik 和 Kerov 于 1980 年前后开创，研究有限群或紧群的归纳极限的酉特征。自该理论诞生以来，它便涉及多种算子代数工具，例如带有维数群的 AF 代数；参见例如 [8]。该理论中的主要分类问题（关于因子表示）是用分支图上的链接（或等价地，马尔可夫核）来描述的；参见例如 [8],[1]。对于无限对称群（对称群的归纳极限），其分支图是 Young 偏序集，而链接则由其重数函数得到。由此，研究普通群的渐近表示论，只需考察分支图即可。然而，也可以考虑与重数函数不相匹配的链接。这种链接自然地出现在量子群背景中，作为 q-变形的结果（见 [7],[11]）；在 [17, 18], 中，我们从一般算子代数背景下的 Olshanski 球表示论视角出发，建立了一个抽象框架来讨论这类链接。本文是对前述论文的补充，旨在介绍一种研究分支图上一般链接的新方法，并对其给出一种 K-理论解释。

我们的抽象框架自然引导我们采用 Takesaki 的思想 [12]，基于其著名的对偶定理，对 III 型因子进行一般结构分析；并采用 Connes 关于近周期权的思想 [4]，研究与重数函数不匹配的链接。具体而言，该框架从一个由带有连续流 $\alpha_n^t : \mathbb{R} \curvearrowright A_n$ 的原子型 W^*-代数构成的归纳序列 A_n 开始，然后取其归纳极限 $(A, \alpha^t) = \varinjlim (A_n, \alpha_n^t)$。我们将 Takesaki 对偶的构造应用于

Date：2023年2月23日。本研究得到了科学研究费补助金（B类）JP18H01122的支撑。

~归纳序列，得到一个新的归纳序列 A_n，其中的原子型 W^*-代数再次配备了 ~ 对离散子群 Γ 的作用 $\widetilde{\alpha}^{\gamma}_n$，该离散子群是乘法群 $\mathbb{R}^{\times}_{+}$ 的子群。取归纳极限 $(A,\widetilde{\alpha}^{\gamma})$ $=\varinjlim(\widetilde{A}_n,\widetilde{\alpha}^{\gamma}_n)$，并证明局部正规 (α^t,β)-KMS 态 $K^{\mathrm{ln}}_{\beta}(\alpha^t)$ 与 A 上的迹权 τ 仿射同构；这些迹权是局部正规、半有限的，并且在 $\widetilde{\alpha}^{\gamma}$ 作用下按适当方式缩放。第 3 节将阐述这一过程。随后，我们从分支图上的链接角度诠释这一过程，详见第 4 节。由此可知，对分支图上一般链接的研究可归结为对扩展分支图上由重数函数产生、且带有群作用的链接的研究。这一新方法使我们能够明确运用维数群的概念。只对链接研究感兴趣的读者可直接阅读第 4.3 节，其中介绍的方法不依赖任何算子代数。第 5 节考察本方法与 K-理论之间的关系。由此可得到一种将一般链接的研究与 K_0-群联系起来的方法。最后，第 6 节以无限维量子酉群 $\mathrm{U}_q(\infty)$ 为例考察本方法；该群的构造已在本系列论文第二部分中精确给出。由此可见，本方法在紧量子群的归纳极限类中是封闭的；它应被视为一种通过扩充相关代数，使特殊正元 $\rho_n\in\mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n))$、$n=0$、1、.....（例如参见 [18,公式 (4.5)]）构成归纳序列的方法。参见第 6.2 节。

我们采用以下记号规则：$\mathcal{F}\Subset\Gamma$ 表示 $\mathcal{F}$ 是集合 Γ的有限子集。对于 C^*代数 C，我们用 C_+ 表示其正元素锥。我们还要说明，关于算子代数的主要参考文献仍是 Bratteli–Robinson 的著作 [2, 3]，与我们前两篇论文 [17, 18], 一样；不过，对于 C^*-/W^*-代数上的权，以及所谓的 Tomita–Takesaki 理论及其在 III 型因子上的应用，我们还需参考 Takesaki 的第二卷著作 [14]。

2. 一般设置

设 A_n, $n=1,2,\dots$ 为具有可分前对偶的原子型 W^*代数，并令 $A_0=\mathbb{C}1$。我们假设 A_n 通过含幺正规嵌入 $A_n\hookrightarrow A_{n+1}$, $n=0,1,\dots$ 构成一个归纳序列。令$A=\varinjlim A_n$ 为归纳（直）极限 C^*代数。对于每个 n，我们用 $\mathfrak{Z}_n$ 表示 $\mathcal{Z}(A_n)$中的所有极小投影。

假设存在一个流 $\alpha\colon\ \mathbb{R}\curvearrowright A$，使得对每个 $t\in\mathbb{R}$ 和 $n\geq 0$（也就是说，α^t 是一个归纳流），$\alpha^t(A_n)=A_n$ 成立；此外，将 α^t 限制到每个 A_n 上所得的映射（记为 $\alpha^t_n\colon\ \mathbb{R}\curvearrowright A_n$）在 u 拓扑下连续。u 连续性假设使每个流 α^t_n 都固定 $\mathcal{Z}(A_n)$ 中的元素。详情见 [17, 引理 7.1]。因此，对每个 $z\in\mathfrak{Z}_n$、$n\geq 0$，将 α^t_n 限制到 zA_n 上便定义了一个“局部”流 α^t_z。

对每个 $z\in\mathfrak{Z}_n$，zA_n 都可与希尔伯特空间 $\mathcal{H}_z$ 上的所有有界算子 $B(\mathcal{H}_z)$ 等同，因为 A_n 是原子型。于是，对每个 $z\in\mathfrak{Z}_n$、$n\geq 0$，我们都能找到一个唯一的（相差一个正比例因子）伴随于 $zA_n=B(\mathcal{H}_z)$ 的非奇异正自伴算子 ρ_z，使得对每个 $t\in\mathbb{R}$，$\alpha^t_z=\mathrm{Ad}\rho_z^{it}$。本文中，我们只考虑所有 ρ_z 均可对角化的情形。当所有维数 $\dim(z):=\dim(\mathcal{H}_z)<\infty$ 时，这一条件成立。

对于归纳序列 A_n，我们按如下方式关联一个分支图及其重数函数。顶点集为 $\mathfrak{Z}=\bigsqcup_{n\geq 0}\mathfrak{Z}_n$，重数函数 $m\colon\bigsqcup_{n\geq 0}\mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n\to\mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$ 定义为：对于 $(z,z')\in\mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n$，通过 $A_n\hookrightarrow A_{n+1}$，$z'A_n=B(\mathcal{H}_{z'})$ 在 $zA_{n+1}=B(\mathcal{H}_z)$ 中的重数。我们注意到

$$\bigcup_{z'\in\mathfrak{Z}_n}\{z\in\mathfrak{Z}_{n+1};m(z,z')>0\}=\mathfrak{Z}_{n+1},\qquad\bigcup_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}}\{z'\in\mathfrak{Z}_n;m(z,z')>0\}=\mathfrak{Z}_n$$

对于所有 $n\geq 0$，以及

$$\mathrm{Tr}(zz')=m(z,z')\,\dim(z'),\qquad(z,z')\in\bigsqcup_{n\geq 0}\mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n \tag{2.1}$$

其中，Tr 表示 $zA_{n+1}=B(\mathcal{H}_z)$ 上的非归一化迹。我们还要指出，

$$\dim(z)=\sum_{z'\in\mathfrak{Z}_{n-1}}m(z,z')\dim(z')=\cdots=\sum_{z_i\in\mathfrak{Z}_i\,(i=1,\dots,n-1)}m(z,z_{n-1})\cdots m(z_2,z_1)m(z_1,1)$$

对每个 $z \in \mathfrak{Z}_n$ 都成立。边集定义为所有满足 $m(z,z') > 0$ 的 $(z,z') \in \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$。我们已知（见 [17, 第 9] 节），图 $(\mathfrak{Z}, m)$ 完全记住了归纳序列 A_n。

固定逆温度 $\beta \in \mathbb{R}$，使得对所有 $z \in \mathfrak{Z}_n$、$n \geq 1$，均有 $\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta}) < \infty$。对每个 $z \in \mathfrak{Z}_n$、$n \geq 0$，存在唯一的（忠实、正规）(α_z^t, β)-KMS 态 $\tau_z^\beta = \tau^{(\alpha_z^t,\beta)}$，定义在$zA_n = B(\mathcal{H}_z)$ 上，其表达式为

$$x \in B(\mathcal{H}_z) \mapsto \tau_z^\beta(x) := \frac{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta} x)}{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta})} \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

在下文中，我们记 $\dim_\beta(z) = \dim_{(\alpha^t,\beta)}(z) := \mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta})$。

在 [17, 18], $\varinjlim A_n$ 的情形下，我们讨论过局部正规 (α^t, β)-球面表示，其分类可通过 $\mathfrak{Z} = \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_n$ 上的链接来理解。在当前设定中，链接$\kappa = \kappa_{(\alpha^t,\beta)} : \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n \to [0,1]$ 定义为

$$\kappa(z,z') := \tau_z^\beta(zz') = \frac{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta} z')}{\dim_\beta(z)}, \qquad (z,z') \in \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n. \tag{2.3}$$

如果 $\beta = 0$ 且所有 $\dim(z) < \infty$，那么对每个 $z \in \mathfrak{Z}$，$\dim_\beta(z) = \dim(z)$ 都成立，而链接 $\kappa(z,z')$ 无非是

$$\mu(z,z') := \frac{1}{\dim(z)}\, m(z,z')\, \dim(z'), \qquad (z,z') \in \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n.$$

我们将这个特殊链接 $\mu : \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n \to [0,1]$ 称为标准链接（仅当所有 $\dim(z) < \infty$ 时才存在）。标准链接符合维数群的概念，但其他链接则不符合。因此，对于给定的分支图 $(\mathfrak{Z}, m)$，当所有 $\dim(z) < \infty$ 时，我们将其与标准链接 μ 关联；但即使 μ 不成立，也可以考虑 $(\mathfrak{Z}, m)$ 上的非标准链接。此外，我们在 [17,section 9] 中说明了，任意非标准链接如何在某一类 C^*-流的球面表示理论中出现。

3. ρ-EXTENSION

我们固定一族 $\rho = \{\rho_z\}_{z\in\mathfrak{Z}}$，如第 2 节所述，也就是说，每个 ρ_z^{it} 都实现了 α_n^t 到 zA_n 的限制 α_z^t，且所有 ρ_z 均可对角化。令 $\Gamma = \Gamma(\rho)$ 为由所有 ρ_z 的特征值在乘法群 $\mathbb{R}_+^\times = (0,\infty)$ 中生成的离散（可数）子群。令 $G = \widehat{\Gamma}$ 为 Γ 的对偶紧阿贝尔群。存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 G 的连续同态，其像稠密，并且当通过该同态将 $t \in \mathbb{R}$ 视为 G 的元素时，对每个 $\gamma \in \Gamma$，$\langle \gamma, t\rangle = \gamma^{it}$ 均成立，其中$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma \times G \to \mathbb{T}$ 是对偶配对。显然，实数 $\mathbb{R}$ 上的每个酉表示 $t \mapsto u_z(t) = \rho_z^{it}$，都可以利用 ρ_z 的谱分解唯一地扩张到 G 上，因此每个流 α_n^t 也都如此。

~对于每个 $n = 0, 1, \ldots,$ 我们取 W^*-交叉积 $A_n := A_n \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G$，其构造（例如参见[2, 定义 2.7.3]）现按一种便于使用的方式回顾如下。由于 A_n 具有可分前对偶，因而是 σ-有限的，所以 A_n 作用在一个希尔伯特空间 $\mathcal{K}_n$ 上，并具有分离且循环的向量。（例如参见 [2, 命题 2.5.6]。）设 $L^2(G;\mathcal{K}_n)$ 为 G 上关于 Haar概率测度dg的 $\mathcal{K}_n$值 L^2空间，它可视为赋予内积的 $\mathcal{K}_n$值连续函数 $C(G;\mathcal{K}_n)$ 的完备化，

$$(\xi \,|\, \eta) := \int_G (\xi(g) \,|\, \eta(g))_{\mathcal{K}_n}\, dg, \qquad \xi, \eta \in C(G;\mathcal{K}_n).$$

我们定义一个单射正规 $*$-同态 $\pi_{\alpha_n} : A_n \to B(L^2(G;\mathcal{K}_n))$，其定义如下

$$(\pi_{\alpha_n}(a)\xi)(g) := \alpha_n^{g^{-1}}(a)\xi(g), \qquad a \in A_n, \quad \xi \in C(G;\mathcal{K}_n) \subset L^2(G;\mathcal{K}_n).$$

设 $\lambda : G \curvearrowright L^2(G;\mathcal{K}_n)$ 为如下定义的酉表示

$$(\lambda(g_1)\xi)(g_2) := \xi(g_1^{-1}g_2), \qquad g_1, g_2 \in G, \quad \xi \in C(G;\mathcal{K}_n) \subset L^2(G;\mathcal{K}_n).$$

我们有一个自然的同一化 $L^2(G;\,\mathcal{K}_n) = \mathcal{K}_n \bar{\otimes} L^2(G)$，由下式给出

$$(\xi \otimes f)(g) = f(g)\xi, \qquad \xi \in \mathcal{K}_n, \quad f \in C(G) \subset L^2(G),$$

其中， $C(G) \subset L^2(G)$ 分别表示 G 上的连续函数以及关于 dg 的 G 上的 L^2-空间。通过此同一化，我们有

$$\lambda(g) := 1 \otimes \lambda_g, \qquad g \in G$$

借助 λ_g 的左正则表示 G。于是， W^*-交叉积 $A_n \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G$ 是由 $\pi_{\alpha_n}(A_n)$ 和 $\lambda(G)$ 在 $A_n \bar{\otimes} B(L^2(G))$ 中生成的 $A_n \bar{\otimes} B(L^2(G))$ 的 W^*-子代数，并满足协变关系

$$\lambda(g)\pi_{\alpha_n}(a) = \pi_{\alpha_n}(\alpha_n^g(a))\lambda(g), \qquad a \in A_n, \quad g \in G.$$

注：已知所得的 W^*-代数 $A_n \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G$（其代数结构）与表示 $A_n \subset B(\mathcal{K}_n)$ 的选取无关；参见第 X.1] 节 [14, 。

~我们注意到 $A_0 = \mathbb{C}1 \bar{\rtimes} G \cong \ell^\infty(\Gamma)$ 可表示为

$$e_\gamma = \int_G \overline{\langle \gamma, g \rangle}\, \lambda(g)\, dg \longleftrightarrow \delta_\gamma, \tag{3.1}$$

~其中 δ_γ 是位于 γ处的狄拉克函数。所谓的对偶作用 $\widetilde{\alpha}_n : \Gamma \curvearrowright A_n$ （例如参见 [2, 定义 2.7.3]）可以按如下方式构造：

$$\widetilde{\alpha}_n^\gamma(\pi_{\alpha_n}(a)) = \pi_{\alpha_n}(a), \quad \widetilde{\alpha}_n^\gamma(\lambda(g)) = \overline{\langle \gamma, g \rangle}\, \lambda(g) \qquad a \in A_n, \quad \gamma \in \Gamma, \quad g \in G, \tag{3.2}$$

并且，后一个关系可改写为

$$\widetilde{\alpha}_n^\gamma(e_{\gamma'}) = e_{\gamma\gamma'}, \qquad \gamma, \gamma' \in \Gamma. \tag{3.3}$$

~ ~由于对每个 $g \in G$， $\alpha_{n+1}^g = \alpha_n^g$ 在 A_n 上成立，因此我们有一个由下式确定的正规嵌入 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$

$$\pi_{\alpha_n}(a) \mapsto \pi_{\alpha_{n+1}}(a), \qquad a \in A_n. \tag{3.4}$$

~ ~因此， A_n 构成一个归纳序列，并令 $A := \varinjlim A_n$ 为归纳极限 C^*-代数。此外，由于

$$\begin{array}{ccc} A_n & \hookrightarrow & A_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\alpha_n}} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\alpha_{n+1}}} \\ \pi_{\alpha_n}(A_n) & \hookrightarrow & \pi_{\alpha_{n+1}}(A_{n+1}) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \widetilde{A}_n & \hookrightarrow & \widetilde{A}_{n+1}, \end{array}$$

~ ~存在唯一的单射 $*$-同态 $\pi_\alpha := \varinjlim \pi_{\alpha_n} : A = \varinjlim A_n \to A = \varinjlim A_n$，使得对每个 $a \in A_n$ 和 $m \geq n$，在 A 中有 $\pi_\alpha(a) = \pi_{\alpha_m}(a)$。由 (3.3) 和 (3.4)，我们可以取归纳极限作用~ $\widetilde{\alpha} := \varinjlim \widetilde{\alpha}_n : \Gamma \curvearrowright A$，它在 $\pi_\alpha(A)$ 上平凡作用。

~ ~定义 3.1. 我们将上述 $(\widetilde{\alpha} : \Gamma \curvearrowright A = \varinjlim A_n)$ 称为 $(A, \alpha^t) = \varinjlim (A_n, \alpha_n^t)$ 的 ρ-扩张。

我们指出， Γ 并非流 α^t 的典范对象，因为它取决于 ρ_z 的选择。在下一节中，在对 $A = \varinjlim A_n$ 添加一项额外假设后，我们将选取 Γ 作为一个典范对象。

遵循算子代数中的一种标准策略（可追溯至 Takesaki 关于 III 型因子的结构定理，参见例如 [14, 第 XII.1] 节），我们将把 $K_\beta^{\ln}(\alpha^t)$ 解释为 A 上一类适当的迹权~。

我们先介绍 C^*-代数上的（迹）权所需的概念和事实（参见 [14, 第 VII 章] 以及 [13, 第 V.2]节）。 ψ 在 C^*-代数 C 上的一个权是指从 C_+ 到 $[0, +\infty]$ 的映射，满足

$$\psi(c_1 + c_2) = \psi(c_1) + \psi(c_2), \qquad c_1, c_2 \in C_+$$
$$\psi(tc) = t\psi(c), \qquad t \in [0, +\infty), \quad c \in C_+$$

按照约定， $0\times(+\infty)=0$。如果此外对任意$c\in C$都有 $\psi(c^*c)=\psi(cc^*)$，则称 ψ 为迹权。 ψ 的定义域 $\mathfrak{m}_\psi$ 定义为所有满足 $\psi(c_k^*c_k)<+\infty$，$k=1,2$ 的 $c_1^*c_2$ 的线性张成。由极化恒等式，我们可以将 ψ 延拓到 $\mathfrak{m}_\psi$，使其成为线性泛函。当 ψ 为迹权时， ψ具有如下性质：若 $c_i\in C$ 之一属于 $\mathfrak{m}_\psi$，则 $\psi(c_1c_2)=\psi(c_2c_1)$；参见 [13, 引理 V.2.16]的证明。当$C$ 为 W^*-代数时，若 $c_i\nearrow c$ 属于 C_+ 蕴含 $\psi(c_i)\nearrow\psi(c)$，则称 ψ 为正规；若 C由所有满足 $\psi(c)<+\infty$的 $c\in C_+$ 作为 W^*-代数生成，则还称其为半有限。

定义 3.2. (1) $(\widetilde{\alpha}^\gamma,\beta)$-缩放迹定义为迹权 $\tau\colon(\widetilde{A})_+\to[0,\infty]$，满足

(i) 对每个 $x\in A$ 和每个 n，映射 $y\in(A_n)_+\mapsto\tau(xyx^*)\in[0,+\infty]$ 是正规的；(ii) 对所有 $\gamma\in\Gamma$， $\tau\circ\widetilde{\alpha}^\gamma=\gamma^\beta\,\tau$；(iii) $\tau(e_1)=1$。所有 $(\widetilde{\alpha}^\gamma,\beta)$-缩放迹记为 $TW^{\ln}_\beta(\widetilde{\alpha}^\gamma)$。(2) 我们定义正规半有限权 $\mathrm{tr}_\beta:(\widetilde{A}_0)_+\to[0,\infty]$，使得对每个 $\gamma\in\Gamma$，$\mathrm{tr}_\beta(e_\gamma)=\gamma^\beta$。

注：(1) 中的 (iii)、(iv) 两项蕴含，对于每个 $\gamma\in\Gamma$， $\tau(e_\gamma)=\gamma^\beta$，因此 τ 在每个 A_n 上都是半有限的。事实上，令 $e_{\mathcal{F}}:=\sum_{\gamma\in\mathcal{F}}e_\gamma$，其中 $\mathcal{F}\Subset\Gamma$，我们看到 $\bigcup_{\gamma\in\mathcal{F}}e_{\mathcal{F}}(A_n)_+e_{\mathcal{F}}$ 在 $(\widetilde{A}_n)_+$ 中是 σ-弱稠密的，而 (iii)、(iv) 两项蕴含，对任意 $x\in(\widetilde{A}_n)_+$， $0\le\tau(e_{\mathcal{F}}xe_{\mathcal{F}})\le\|x\|\sum_{\gamma\in\mathcal{F}}\gamma^\beta<+\infty$。

引理 3.3. 对每个 $\omega\in K^{\ln}_\beta(\alpha^t)$，将 $\omega\bar{\otimes}\mathrm{id}:A_n\bar{\otimes}B(L^2(G))\to\mathbb{C}1\bar{\otimes}B(L^2(G))$（由 $x\mapsto1\otimes x$ 与正规切片映射 $R_\omega:A\bar{\otimes}B(L^2(G))$ 复合而成，该映射将 $a\otimes x$ 映至 $\omega(a)x$，例如参见 [15]）限制到 $\widetilde{A}_n=\widetilde{A}_n\bar{\rtimes}_{\alpha_n}G$，定义了唯一的正规条件期望 $E_{\omega,n}:\widetilde{A}_n\twoheadrightarrow\widetilde{A}_0$，使得对每个 $a\in A_n$，均有 $E_{\omega,n}(\pi_{\alpha_n}(a))=\omega(a)1$。于是，$E_{\omega,n+1}$ 在 $\widetilde{A}_n$ 上与 $E_{\omega,n}$ 重合，而从 $\widetilde{A}=\varinjlim\widetilde{A}_n$ 到 $\widetilde{A}_0$ 的归纳极限条件期望 $E_\omega:=\varinjlim E_{\omega,n}$ 定义良好。

证明。由于 $\mathbb{R}$ 在 G 中的像是稠密的，且对于所有 $t\in\mathbb{R}$， $\omega\circ\alpha^t=\omega$，我们有 $\omega\circ\alpha_n^g(a)=\omega(a)$，对所有 $g\in G$ 和 $a\in A_n$ 均成立。根据 [2, 定理 2.5.31(a)]，我们可以选取 ω 在 A_n 上限制的一个表示向量 $\xi\in\mathcal{K}_n$，使得对每个 $a\in A_n$， $\omega(a)=(a\,\xi\,|\,\xi)_{\mathcal{K}_n}$ 成立。根据定义，我们注意到，对于所有 $x\in A_n\bar{\otimes}B(L^2(G))$ 以及 f_1，$f_2\in L^2(G)$，$(R_\omega(x)f_1\,|\,f_2)_{L^2(G)}=(x\,\xi\otimes f_1\,|\,\xi\otimes f_2)_{\mathcal{K}_n\,\bar{\otimes}\,L^2(G)}$。根据恒等关系 $L^2(G;\mathcal{K}_n)=\mathcal{K}_n\bar{\otimes}L^2(G)$，我们有

$$\begin{aligned}(\pi_{\alpha_n}(a)\,\xi\otimes f_1\,|\,\xi\otimes f_2)_{\mathcal{K}_n\,\bar{\otimes}\,L^2(G)}&=\int_G(\alpha_n^{g^{-1}}(a)\xi\,|\,\xi)_{\mathcal{K}_n}\,f_1(g)\overline{f_2(g)}\,dg\\&=\int_G\omega(\alpha_n^{g^{-1}}(a))\,f_1(g)\overline{f_2(g)}\,dg\\&=\omega(a)\,(f_1\,|\,f_2)_{L^2(G)}\end{aligned}$$

对所有 $a\in A_n$ 和 f_1， $f_2\in C(G)\subset L^2(G)$。由此可得， $R_\omega(\pi_{\alpha_n}(a))=\omega(a)\,1_{L^2(G)}$，从而$(\omega\bar{\otimes}\mathrm{id})(\pi_{\alpha_n}(a))=\omega(a)\,1$ 对所有 $a\in A_n$ 均成立。由于 $\pi_{\alpha_n}(a)\lambda(g)$ 构成 $\widetilde{A}_n$ 的一个 σ- 弱稠密子集，因此可推出 $(\omega\bar{\otimes}\mathrm{id})(\widetilde{A}_n)=A_0$，从而将 $\omega\bar{\otimes}\mathrm{id}$ 限制在 $\widetilde{A}_n$ 上即可得到所需的条件期望 $E_{\omega,n}$。断言的其余部分显然成立。□

引理 3.4. 对于每个 $\omega\in K^{\ln}_\beta(\alpha^t)$，权 $\tau_\omega:=\text{迹}_\beta\circ\widetilde{E}_\omega:\widetilde{A}_+\to[0,\infty]$ 变为一个 $(\widetilde{\alpha}^\gamma,\beta)$-缩放迹。

证明。我们需要确认 τ_ω 满足定义 3.2(1) 的条件 (i)–(iv)。

我们注意到，将 ω限制到 A_n后变为$\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}\omega(z)\,\tau_z^\beta$（见 [17, 引理 7.3]）。我们令$s:=\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}\mathbf{1}_{(0,1]}(\omega(z))\,z\in\mathcal{Z}(A_n)$，它是将 ω 限制到 A_n所得映射的支撑投影，也就是说， ω 在 sA_n 上是忠实的，并在 $(1-s)A_n$上恒为零。容易验证， ω 满足 $(\alpha_n^{-\beta t},-1)$-KMS 条件，因此，根据 [3, 定理 5.3.10]，将 $\alpha_n^{-\beta t}$限制到 sA_n 所得的映射给出了与将 ω 限制到 sA_n 相关联的模自同构群。

我们注意到 $\pi_{\alpha_n}(s)=s\otimes1\in\mathcal{Z}(\widetilde{A}_n)$，因此根据其构造， $\pi_{\alpha_n}(s)\,\widetilde{A}_n=(sA_n)\,\bar{\rtimes}_{\alpha_n}G\subset(sA_n)\,\bar{\otimes}\,B(L^2(G))$。我们有一个双射的 $*$-同态 $\iota:\pi_{\alpha_n}(s)\,\widetilde{A}_0\to\widetilde{A}_0$，将 $\lambda^{(0)}(g)$ 发送到:=

对于任意 $g \in G$，$\pi_{\alpha_n}(s)\lambda(g) = s \otimes \lambda_g$ 到 $1 \otimes \lambda_g = \lambda(g)$。其中

$$e_\gamma^{(00)} := \int_G \overline{\langle \gamma, g\rangle}\lambda_g \, dg, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

我们注意到，对于每个 $\gamma \in \Gamma$，双射 $*$-同态 ι 会将 $e_\gamma^{(0)} := s \otimes e_\gamma^{(00)}$ 映射到 $1 \otimes e_\gamma^{(00)} = e_\gamma$。~暂且，我们将沿着 [16, 定理 1] 的证明思路，使用 $\pi_{\alpha_n}(s)A_n = (sA_n) \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G$，其生成元为 $\pi_{\alpha_n}(a)$ $(a \in sA_n)$，以及 $\lambda^{(0)}(g)$ $(g \in G)$ 或 $e_\gamma^{(0)}(\gamma \in \Gamma)$。

设 $\tilde{\omega}$ 为 $(sA_n) \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G$ 上由 ω 在 sA_n 上的限制构造出的对偶权（参见 [14,定义 X.1.16，引理 X.1.18]），它满足

$$\tilde{\omega}\Big(\Big(\int_G \lambda^{(0)}(g)\pi_{\alpha_n}(a(g))\,dg\Big)^*\Big(\int_G \lambda^{(0)}(g)\pi_{\alpha_n}(a(g))\,dg\Big)\Big) = \int_G \omega(a(g)^* b(g))\,dg$$

对于任意 σ-强*-连续函数 $a, b : G \to sA_n$，其中 $\tilde{\omega}$ 延拓到其定义域 $\mathfrak{m}_{\tilde{\omega}}$。~此外，其模自同构 σ_t^ω 满足

$$\sigma_t^{\tilde{\omega}}(\pi_{\alpha_n}(a)) = \pi_{\alpha_n}(\alpha_n^{-\beta t}(a)), \qquad \sigma_t^{\tilde{\omega}}(\lambda^{(0)}(g)) = \lambda^{(0)}(g)$$

对所有 $a \in sA_n$ 和 $g \in G$均成立。特别地，对于每个 $t \in \mathbb{R}$，我们得到 $\sigma_t^{\tilde{\omega}} = \mathrm{Ad}\lambda^{(0)}(-\beta t)$。此外，我们还有 $\tilde{\omega}(e_\gamma^{(0)}) = \tilde{\omega}(e_\gamma^{(0)} e_\gamma^{(0)}) = \int_G dg = 1$，因此，将 $\tilde{\omega}$ 限制到 $\lambda^{(0)}(G)''$ 后是半有限的。因此，竹崎定理 [14, 定理 IX.4.2] 保证存在唯一的忠实正规条件期望 $E : (sA_n) \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G \to \lambda^{(0)}(G)''$，满足 $\tilde{\omega} \circ E = \tilde{\omega}$。于是

$$\tilde{\omega}(E(\pi_{\alpha_n}(a))e_\gamma^{(0)}) = \tilde{\omega} \circ E(e_\gamma^{(0)}\pi_{\alpha_n}(a)e_\gamma^{(0)}) = \tilde{\omega}(e_\gamma^{(0)}\pi_{\alpha_n}(a)e_\gamma^{(0)}) = \int_G \omega(a)\,dg = \omega(a)\,\tilde{\omega}(e_\gamma^{(0)}),$$

这意味着，对于每个 $a \in sA_n$，有 $E(\pi_{\alpha_n}(a)) = \omega(a)1$，因为 $\tilde{\omega}(e_\gamma^{(0)}) = 1$。由于

$$\lambda^{(0)}(-\beta t) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle \gamma, -\beta t\rangle e_\gamma^{(0)} = \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{i(-\beta t)}\, e_\gamma^{(0)} = \Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{-\beta}\, e_\gamma^{(0)}\Big)^{it} =: H^{it}$$

（H 是一个伴随于 $\lambda^{(0)}(G)''$的非奇异正自伴算子），[14, 定理 VIII.3.14] 及其证明表明，在 $(sA_n) \bar{\rtimes}_{\alpha_n^g} G$ 上，半有限正规迹权可以定义为 $\tilde{\omega}(H^{-1}(\,\cdot\,))$（这需要一些论证；见 [14, 引理 VIII.2.8]）。于是，由于 H 伴随于 $\lambda^{(0)}(G)''$，我们可以很容易验证 $\tilde{\omega}(H^{-1}E(\,\cdot\,)) = \tilde{\omega}(H^{-1}(\,\cdot\,))$。我们注意到 $H^{-1}e_\gamma^{(0)} = \gamma^\beta\, e_\gamma^{(0)}$，因此对于每个 $\gamma \in \Gamma$，有 $\tilde{\omega}(H^{-1}e_\gamma^{(0)}) = \gamma^\beta\, \tilde{\omega}(e_\gamma^{(0)}) = \gamma^\beta$。

由于

$$\widetilde{E}_{\omega,n}(\pi_{\alpha_n}(a)\lambda(g)) = \omega(a)\lambda(g) = \omega(sa)\iota(\lambda^{(0)}(g)) = \iota(E(\pi_{\alpha_n}(s)\pi_{\alpha_n}(a)\lambda^{(0)}(g)))$$

对于任意的 $a \in A_n$ 和 $g \in G$，我们有 $\widetilde{E}_{\omega,\,n}(x) = \iota(E(\pi_{\alpha_n}(s)x))$，对每个 $x \in \widetilde{A}_n$均成立。由于对每个 $\gamma \in \Gamma$，$\mathrm{tr}_\beta(\iota(e_\gamma^{(0)})) = \mathrm{tr}_\beta(e_\gamma) = \gamma^\beta = \tilde{\omega}(H^{-1}e_\gamma^{(0)})$，我们还有 $\mathrm{tr}_\beta \circ \iota = \tilde{\omega}(H^{-1}(\,\cdot\,))$ 在 $(\widetilde{A}_0)_+$ 上成立。因此，我们得到

$$\mathrm{tr}_\beta \circ \widetilde{E}_{\omega,n}(x) = \mathrm{tr}_\beta(\iota(E(\pi_{\alpha_n}(s)x))) = \tilde{\omega}(H^{-1}E(\pi_{\alpha_n}(s)x)) = \tilde{\omega}(H^{-1}\pi_{\alpha_n}(s)x)$$

~对每个 $x \in (A_n)_+$均成立。由于 τ_ω 与 A_n 上的 $\mathrm{tr}_\beta \circ E_{\omega,\,n}$ 重合，它必定是 A_n 上的正规半有限迹权~。

~任取 $x \in A$。选取一个序列 $x_k \in \bigcup_{n\geq 0} A_n$，使得当 $k \to \infty$ 时，$\|x_k - x\| \to 0$。

~对于 $(A_n)_+$ 中的任意网 $y_\lambda \nearrow y$，我们有

$$\limsup_\lambda |\phi(E_\omega(xy_\lambda x^*) - E_\omega(xyx^*))| \leq 2\|\phi\|\,\|y\|\,(\|x\| + \|x_k\|)\,\|x_k - x\| \overset{k\to\infty}{\to} 0$$

~对 A_0上的每个正规线性泛函 ϕ，由于 $x_k y_\lambda x_k^*$ 和 $x_k y x_k^*$ 落在某个 A_m 中，且对某个固定的 k 有 $m \geq n$，并且 E_ω 在 A_m 上的限制是正规的。因此我们得出 $E_\omega(xy_\lambda x^*) \nearrow E_\omega(xyx^*)$，~也就是说，$y \in A_0 \mapsto E_\omega(xyx^*) \in A_0$ 是一个正规映射。由此可知，得益于 tr_β的正规性，$\tau_\omega = \mathrm{tr}_\beta \circ E_\omega$ 满足性质 (i)。

~任取 $\mathcal{F}_1$、$\mathcal{F}_2 \Subset \Gamma$。对每个 k，$e_{\mathcal{F}_2}x_k e_{\mathcal{F}_1}$ 都落在某个 A_n中，而我们在上文证明的结果~ ~表明，$\tau_\omega(e_{\mathcal{F}_1}x_k^* e_{\mathcal{F}_2}x_k e_{\mathcal{F}_1}) = \tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x_k e_{\mathcal{F}_1}x_k^* e_{\mathcal{F}_2})$，因为 τ_ω 在 A_n上与 $\mathrm{tr}_\beta \circ E_\omega$相同$n$。根据~控制收敛定理（注意，前文已指出 $A_0 \cong \ell^\infty(\Gamma)$），我们有

$$\tau_\omega(e_{\mathcal{F}_1}x_k^* e_{\mathcal{F}_2}x_k e_{\mathcal{F}_1}) = \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_\omega(x_k^* e_{\mathcal{F}_2}x_k)e_{\mathcal{F}_1}) \to \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_\omega(x^* e_{\mathcal{F}_2}x)e_{\mathcal{F}_1}) = \tau_\omega(e_{\mathcal{F}_1}x^* e_{\mathcal{F}_2}x e_{\mathcal{F}_1}),$$
$$\tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x_k e_{\mathcal{F}_1}x_k^* e_{\mathcal{F}_2}) = \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_\omega(x_k e_{\mathcal{F}_1}x_k^*)e_{\mathcal{F}_2}) \to \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_\omega(x e_{\mathcal{F}_1}x^*)e_{\mathcal{F}_2}) = \tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x e_{\mathcal{F}_1}x^* e_{\mathcal{F}_2})$$

因为 $k \to \infty$。因此，我们得到，对于任意 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \Subset \Gamma$，$\tau_\omega(e_{\mathcal{F}_1}x^* e_{\mathcal{F}_2}x e_{\mathcal{F}_1}) = \tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x e_{\mathcal{F}_1}x^* e_{\mathcal{F}_2})$。由 tr_β 的正规性，我们有

$$\tau_\omega(e_{\mathcal{F}_1}x^* e_{\mathcal{F}_2}x e_{\mathcal{F}_1}) = \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_\omega(x^* e_{\mathcal{F}_2}x)e_{\mathcal{F}_1}) \nearrow \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_\omega(x^* e_{\mathcal{F}_2}x)) = \tau_\omega(x^* e_{\mathcal{F}_2}x)$$

因为 $\mathcal{F}_1 \nearrow \Gamma$。另一方面，根据 (i)，当 $\mathcal{F}_1 \nearrow \Gamma$ 时，我们有 $\tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x e_{\mathcal{F}_1}x^* e_{\mathcal{F}_2}) \nearrow \tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x x^* e_{\mathcal{F}_2})$。因此，对于任意 $\mathcal{F}_2 \Subset \Gamma$，$\tau_\omega(x^* e_{\mathcal{F}_2}x) = \tau_\omega(e_{\mathcal{F}_2}x x^* e_{\mathcal{F}_2})$。类似地，令 $\mathcal{F}_2 \nearrow \Gamma$ 取极限，我们得到 $\tau_\omega(x^*x) = \tau_\omega(xx^*)$。因此，$\tau_\omega$ 是一个迹权。

我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_\omega \circ \widetilde{\alpha}^\gamma(\pi_\alpha(a)\lambda(g)) &= \overline{\langle \gamma, g\rangle}\, \widetilde{E}_\omega(\pi_\alpha(a)\lambda(g)) = \overline{\langle \gamma, g\rangle}\, \widetilde{E}_{\omega,n}(\pi_{\alpha_n}(a)\lambda(g)) \\ &= \overline{\langle \gamma, g\rangle}\, \omega(a)\, \lambda(g) = \widetilde{\alpha}^\gamma(\widetilde{E}_{\omega,n}(\pi_{\alpha_n}(a)\lambda(g))) = \widetilde{\alpha}^\gamma \circ \widetilde{E}_\omega(\pi_\alpha(a)\lambda(g))\end{aligned}$$

~ ~对于任意 $a \in A_n$ 和 $g \in G$。因此，对每个 $\gamma \in \Gamma$，我们得到 $E_\omega \circ \widetilde{\alpha}^\gamma = \widetilde{\alpha}^\gamma \circ E_\omega$。此外，我们注意到，对于所有 γ、$\gamma' \in \Gamma$，$\mathrm{tr}_\beta \circ \widetilde{\alpha}^\gamma(e_{\gamma'}) = \mathrm{tr}_\beta(e_{\gamma\gamma'}) = \gamma^\beta \gamma'^\beta = \gamma^\beta \mathrm{tr}_\beta(e_{\gamma'})$。因此，我们得到 $\mathrm{tr}_\beta \circ \widetilde{\alpha}^\gamma = \gamma^\beta \mathrm{tr}_\beta$，从而 τ_ω 满足条件 (ii)。由定义 3.2(2)，条件 (iii) 显然成立。□

引理 3.5. 对每个 $\tau \in TW_\beta^{\ln}(\widetilde{\alpha}^\gamma)$，映射

$$a \in A_+ \mapsto \tau(e_1\pi_\alpha(a)) = \tau(\pi_\alpha(a)e_1) = \tau(e_1\pi_\alpha(a)e_1) \in [0, \infty)$$

可延拓到整个 A，并定义了 $K_\beta^{\ln}(\alpha^t)$ 的一个元素。

证明. 由于 $\tau(e_1) < +\infty$，对所有 $a \in A$，$\tau(e_1\pi_{\alpha_n}(a)) = \tau(\pi_{\alpha_n}(a)e_1) = \tau(e_1\pi_{\alpha_n}(a)e_1)$ 有意义。根据标准的普拉赫曼–林德洛夫方法，只需证明，对于任意 α_n^t-解析的 $a \in A_n$ 和任意 $b \in A_n$，有 $\tau(e_1\pi_{\alpha_n}(ab)) = \tau(\pi_{\alpha_n}(b\alpha_n^{i\beta}(a))e_1)$ $(= \tau(e_1\pi_{\alpha_n}(b\alpha_n^{i\beta}(a))))$。

对于每个 $\gamma \in \Gamma$，我们定义 $E_\gamma^{(n)}\colon\ A_n \to A_n$，如下

$$E_\gamma^{(n)}(a) := \int_G \overline{\langle \gamma, g\rangle}\, \alpha_n^g(a)\, dg, \qquad a \in A_n.$$

于是有

$$E_\gamma^{(n)}(a)^* = E_{\gamma^{-1}}^{(n)}(a^*) \tag{3.5}$$

对每个 $a \in A_n$ 都成立。注意，对每个 $a \in A_n$，$E_\gamma^{(n)}(\alpha_n^t(a)) = \gamma^{it} E_\gamma^{(n)}(a)$；此外，对于每个 α_n^t-解析的 $a \in A_n$，$z \mapsto E_\gamma^{(n)}(\alpha_n^z(a))$ 是整函数（注意：这可利用 [14,附录 A1] 轻易验证）。由复分析中的唯一性定理，我们得出

$$\gamma^{-\beta} E_\gamma^{(n)}(a) = E_\gamma^{(n)}(\alpha_n^{i\beta}(a)) \tag{3.6}$$

对每个 α_n^t-解析的 $a \in A_n$ 都成立。我们还注意到

$$e_1\pi_{\alpha_n}(a)e_\gamma = \pi_{\alpha_n}(E_{\gamma^{-1}}^{(n)}(a))e_\gamma \tag{3.7}$$

对每个 $a \in A_n$ 都成立。对这一恒等式取伴随，并结合 (3.5)，还可得

$$e_\gamma\pi_{\alpha_n}(a)e_1 = e_\gamma\pi_{\alpha_n}(E_\gamma^{(n)}(a)) \tag{3.8}$$

对每个 $a \in A_n$ 都成立。

设 $a \in A_n$ 是任意一个 α_n^t-解析元素，$b \in A_n$ 是 A_n 的任意元素。那么我们有

$$\tau(e_1\pi_{\alpha_n}(ab)) = \tau(e_1\pi_{\alpha_n}(a)\pi_{\alpha_n}(b)e_1) = \tau(\pi_{\alpha_n}(b)e_1\pi_{\alpha_n}(a)) \qquad \text{(trace property)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau(\pi_{\alpha_n}(b)e_1\pi_{\alpha_n}(a)e_\gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau(\pi_{\alpha_n}(bE^{(n)}_{\gamma^{-1}}(a))e_\gamma) \qquad \text{(use (3.7))} \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau\circ\widetilde{\alpha}^{\gamma}(\pi_{\alpha_n}(bE^{(n)}_{\gamma^{-1}}(a))e_1) \quad \text{(use (3.3))} \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{\beta}\,\tau(\pi_{\alpha_n}(bE^{(n)}_{\gamma^{-1}}(a))e_1) \quad \text{(use item (ii) in Defition 3.2(1))} \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau(\pi_{\alpha_n}(b(\gamma^{\beta}\,E^{(n)}_{\gamma^{-1}}(a)))e_1) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau(\pi_{\alpha_n}(bE^{(n)}_{\gamma^{-1}}(\alpha_n^{i\beta}(a))e_1) \qquad \text{(use (3.6))} \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma} \tau(\pi_{\alpha_n}(b)e_{\gamma^{-1}}\pi_{\alpha_n}(\alpha_n^{i\beta}(a))e_1) \quad \text{(use (3.8))} \\
&= \tau(\pi_{\alpha_n}(b\alpha_n^{i\beta}(a))e_1)
\end{aligned}
$$

因此，证明完毕。 □

到目前为止，我们构造了两个映射

$$
\begin{aligned}
&\omega \in K^{\ln}_{\beta}(\alpha^t) \mapsto \tau_\omega = \mathrm{tr}_\beta\circ\widetilde{E}_\omega \in TW^{\ln}_{\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma}), \\
&\tau \in TW^{\ln}_{\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma}) \mapsto (a \mapsto \omega_\tau(a) := \tau(e_1\pi_\alpha(a))) \in K^{\ln}_{\beta}(\alpha^t).
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

由于对所有 $a\in A$, $\tau_\omega(e_1\pi_\alpha(a)) = \omega(a)$，因此 (3.9) 中的第一个映射是单射。我们还指出，由于 $\tau(e_1) < +\infty$, (3.9) 中的 ω_τ 在整个 A 上都有意义。

引理 3.6. 对每个 $\tau\in TW^{\ln}_{\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma})$，都有 $\tau = \tau_{\omega_\tau}$。

证明. 对任意 $a\in A_+$、 $g\in G$ 和 $\gamma\in\Gamma$，我们有

$$
\begin{aligned}
\tau(\pi_\alpha(a)\lambda(g)e_\gamma) &= \tau(\pi_\alpha(a)\,\langle\gamma,g\rangle\,e_\gamma) = \langle\gamma,g\rangle\,\tau(e_\gamma\pi_\alpha(a)e_\gamma) \\
&= \langle\gamma,g\rangle\,\tau\circ\widetilde{\alpha}^{\gamma}(e_1\pi_\alpha(a)e_1) = \langle\gamma,g\rangle\,\gamma^{\beta}\,\tau(e_1\pi_\alpha(a)e_1) \\
&= \langle\gamma,g\rangle\,\gamma^{\beta}\,\omega_\tau(a) = \langle\gamma,g\rangle\,\omega_\tau(a)\,\mathrm{tr}_\beta(e_\gamma) = \mathrm{tr}_\beta(\widetilde{E}_{\omega_\tau}(\pi_\alpha(a))\lambda(g)e_\gamma).
\end{aligned}
$$

因此，对任意 $x\in A$ 和 $\gamma\in\Gamma$, $\tau(xe_\gamma) = \tau_{\omega_\tau}(xe_\gamma)$ 成立。因此，对任意 $x\in A$ 及任意有限的 $\mathcal{F}\Subset\Gamma$，我们有 $\tau(xe_{\mathcal{F}}) = \tau_{\omega_\tau}(xe_{\mathcal{F}})\widetilde{\ }$。根据迹性质以及 $\tau(e_{\mathcal{F}}) < +\infty$，再由定义 3.2(1) 的 (i) 项可得，

$$
\tau(xe_{\mathcal{F}}) = \tau(e_{\mathcal{F}}xe_{\mathcal{F}}) = \tau(x^{1/2}e_{\mathcal{F}}x^{1/2}) \nearrow \tau(x)
$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对每个 $x\in A_+$ 都有 $\mathcal{F}\nearrow\Gamma$。我们还得到 $\tau_{\omega_\tau}(xe_{\mathcal{F}}) =$ 迹$_\beta(E_{\omega_\tau}(x)e_{\mathcal{F}}) \nearrow$迹$_\beta(E_{\omega_\tau}(x)) = \tau_{\omega_\tau}(x)$，对每个 $x\in A_+$，都有 $\mathcal{F}\nearrow\Gamma\widetilde{\ }$。由此可得， $\tau = \tau_{\omega_\tau}$ 成立。□

总结以上讨论，我们得到以下定理：

定理 3.7。式 (3.9) 中的映射互为逆映射。因此， $K^{\ln}_{\beta}(\alpha^t)$ 和 $TW^{\ln}_{\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma})$ 仿射同构。

借助该定理， $TW^{\ln}_{\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma})$ 上的一种自然拓扑由以下收敛关系定义：$\tau_i\to\tau$在 $TW_{\ln^\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma})$ 中意味着，对于每个 $a\in A$，都有 $\tau_i(e_1\pi_\alpha(a)) \to \tau(e_1\pi_\alpha(a))$。由定义 3.2(1) 的 (ii) 项可知， $\tau_i\to\tau$在 $TW_{\ln^\beta}(\widetilde{\alpha}^{\gamma})$ 中蕴含对任意 $\mathcal{F}\Subset\Gamma$ 和 $x\in\widetilde{A}$，都有 $\tau_i(e_{\mathcal{F}}x) \to \tau(e_{\mathcal{F}}x)$，因此对所有 $x\in A_+$， $\widetilde{\ }\liminf_i \tau_i(x) \geq \tau(x)$。

4. Weight-extended branching graph

在上一节中，我们将对局部正规 (α^t,β)-KMS 态的研究转化为对 $A=\varinjlim A_n$ 上 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }(\widetilde{\alpha}^\gamma,\beta)$-缩放迹的研究。在这里，我们将把这一过程转化为标准链接的表述。为此，我们必须假设所有 $\dim(z)$ $<\infty$。于是我们可以逐个选取 ρ_z，使得 $\mathrm{Tr}(\rho_z)=\mathrm{Tr}(\rho_z^{-1})$。在这样的选取下，$\rho=\{\rho_z\}_{z\in\mathfrak{Z}}$ 由流 α^t 唯一确定，因此 $\Gamma=\Gamma(\rho)$ 和 $G=\widehat{\Gamma}$ 都是与 α^t 关联的典范对象。因此，我们将这个 Γ 称为权群，并将 ρ-扩张 $(\widetilde{\alpha}:\ \Gamma\curvearrowright A=\varinjlim A_n)$ 在这种情况下称为权扩张。请注意，这里对 Γ 的选取与 Connes 所提出的 III 型因子的所谓离散分解中所用的选取并不完全相同（参见例如 [16]，其中对它的处理与本文的讨论相契合）。

4.1. 权扩展分支图。设

$$\rho_z=\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma\,p_z(\gamma)$$

为谱分解（注意，由于 $\dim(z)<+\infty$，$p_z(\cdot)$ 的支撑是 Γ 的有限子集）。于是

$$u_z(g)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle\gamma,g\rangle\,p_z(\gamma),\qquad g\in G,$$

并将 $p_z(\gamma)$、$u_z(g)$ 视为 $zA_n\subset A_n$ 的元素，我们有

$$u_n(g)=\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}u_z(g)=\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle\gamma,g\rangle\,p_z(\gamma)\in A_n,\qquad g\in G.$$

由下式定义的酉算子 U 作用于 $L^2(G;\mathcal{K}_n)$ 上：

$$(U\xi)(g)=u_n(g)\xi(g),\qquad \xi\in C(G;\mathcal{K}_n)\subset L^2(G;\mathcal{K}_n)$$

具有这一性质

$$U\pi_{\alpha_n}(a)U^*=a\otimes 1,\qquad U\lambda(g)U^*=u_n(g)\otimes\lambda_g \tag{4.1}$$

对于任意的 $a\in A_n$ 和 $g\in G$，其中我们按照第 3 节的方式将 $L^2(G;\mathcal{K}_n)=\mathcal{K}_n\bar{\otimes}L^2(G)$ 视为相同。参见例如 [14,定理 X.1.7(ii)]。我们注意到

$$Ue_\gamma U^*=\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}\sum_{\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma}\int_G\langle\gamma^{-1}\gamma_1\gamma_2,g\rangle\,dg\,p_z(\gamma_1)\otimes e^{(00)}_{\gamma_2}=\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}\sum_{\gamma'\in\Gamma}p_z(\gamma\gamma'^{-1})\otimes e^{(00)}_{\gamma'} \tag{4.2}$$

对每个 $\gamma\in\Gamma$ 都成立。

引理 4.1。存在唯一的双射 $*$-同态

$$\Phi_n:\widetilde{A}_n\longrightarrow\bigoplus_{(z,\gamma)\in\mathfrak{Z}_n\times\Gamma}zA_n\quad\left(\cong\bigoplus_{(z,\gamma)\in\mathfrak{Z}_n\times\Gamma}B(\mathcal{H}_z)\right)$$

使得

$$\Phi_n(\pi_{\alpha_n}(a))(z,\gamma'):=za,\qquad \Phi_n(e_\gamma)(z,\gamma'):=p_z(\gamma\gamma'^{-1}) \tag{4.3}$$

对任意的 $a\in A_n$、$z\in\mathfrak{Z}_n$ 以及 γ、$\gamma'\in\Gamma$ 均成立。映射 Φ_n 将对偶作用 $\widetilde{\alpha}^\gamma$ 与作用在右坐标上的 Γ 的平移作用相交织，即

$$\Phi_n(\widetilde{\alpha}^\gamma(x))(z,\gamma')=\Phi_n(x)(z,\gamma^{-1}\gamma') \tag{4.4}$$

$\widetilde{\ }$对任意 $x\in A_n$、$z\in\mathfrak{Z}_n$ 和 γ、$\gamma'\in\Gamma$ 均成立。

证明。注意，$A_n\bar{\otimes}L(G)\cong A_n\bar{\otimes}\ell^\infty(\Gamma)\cong\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}A_n\cong\bigoplus_{(z,\gamma)\in\mathfrak{Z}_n\times\Gamma}zA_n$ by

$$a\otimes\lambda_g\leftrightarrow\sum_{\gamma\in\Gamma}\langle\gamma,g\rangle\,a\otimes\delta_\gamma\leftrightarrow(\langle\gamma,g\rangle\,a)_{\gamma\in\Gamma}=(\langle\gamma,g\rangle\,za)_{(z,\gamma)\in\mathfrak{Z}_n\times\Gamma},\qquad a\in A_n,\quad g\in G$$

其中 $L(G) := \lambda(G)''$ 作用于 $L^2(G)$。因此，$\mathrm{Ad}U$ 与此双射 $*$-同态的复合给出了所需的 Φ_n。由 (4.1) 和 (4.2) 可得

$$\Phi_n(e_\gamma)(z,\gamma') = (Ue_\gamma U^*)(z,\gamma') = p_z(\gamma\gamma'^{-1})$$

对每个 $\gamma \in \Gamma$ 均成立。因此，我们已确认 (4.3) 确实成立。由于 e_γ 是 $\lambda(g)$ ($g \in G$) 的谱投影，显然 (4.3) 完全确定了 Φ_n。

我们有

$$\Phi_n(\widetilde{\alpha}_n^\gamma(\pi_{\alpha_n}(a)))(z,\gamma') = \Phi_n(\pi_{\alpha_n}(a))(z,\gamma') = za = \Phi_n(\pi_{\alpha_n}(a))(z,\gamma^{-1}\gamma'),$$
$$\Phi_n(\widetilde{\alpha}_n^\gamma(e_{\gamma''}))(z,\gamma') = \Phi_n(e_{\gamma\gamma''})(z,\gamma') = p_z(\gamma\gamma''\gamma'^{-1}) = p_z(\gamma''(\gamma^{-1}\gamma')^{-1}) = \Phi_n(e_{\gamma''})(z,\gamma^{-1}\gamma')$$

（注意，Γ 是交换的）。因此 (4.4) 成立。 □

~ ~ 接下来，我们按照引理 4.1 的描述考察包含关系 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$。特别要注意的是，该引理指出，归纳序列 A_n 同样由有限维原子型 W^*-代数组成。

由于对每个 $g \in G$，$\alpha_{n+1}^g = \alpha_n^g$ 都在 A_n 上成立，这归功于 $\mathbb{R}$ 在 G 中的稠密性，我们观察到 $g \in G \mapsto w_{n+1,n}(g) := u_n(g)^* u_{n+1}(g) \in (A_n)' \cap A_{n+1}$ 给出了一个酉表示。由于所有满足 $(z,z') \in \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$ 的 $zz' \neq 0$ 构成了 $(A_n)' \cap A_{n+1}$ 的一组完备的极小中心投影，我们得到一个酉表示

$$g \in G \mapsto w_{z,z'}(g) := zz' w_{n+1,n}(g) = u_z(g)u_{z'}(g)^* = u_{z'}(g)^* u_z(g) \in zz'((A_n)' \cap A_{n+1})$$

对每个满足 $zz' \neq 0$ 的 $(z,z') \in \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$。由于 $w_{z,z'}(g)$ 是紧阿贝尔群的酉表示，因此它具有如下形式的谱分解：

$$w_{(z,z')}(g) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle \gamma, g\rangle\, q_{(z,z')}(\gamma), \qquad g \in G, \tag{4.5}$$

其中 $q_{(z,z')}(\gamma)$ 构成 $zz'((A_n)' \cap A_{n+1})$ 的一个由投影组成的单位分解。由于对每个 $t \in \mathbb{R}$，$\alpha_{n+1}^t = \alpha_n^t$ 在 A_n 上成立，因此我们看到，对每个满足 $zz' \neq 0$ 的 $(z,z') \in \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$，$\rho_z \rho_{z'} = \rho_{z'}\rho_z$ 在 zA_{n+1} 中成立。因此，$w_{z,z'}(t)$ 的生成元应为 $\rho_z \rho_{z'}^{-1} = \rho_{z'}^{-1}\rho_z$，于是我们得到 $q_{(z,z')}(\gamma)$ 关于 $p_z(\gamma)$ 的如下显式描述：

$$q_{(z,z')}(\gamma) = \sum_{\gamma'\in\Gamma} p_z(\gamma\gamma')p_{z'}(\gamma') = \sum_{\gamma'\in\Gamma} p_{z'}(\gamma')p_z(\gamma'\gamma), \qquad \gamma \in \Gamma. \tag{4.6}$$

~我们定义元素 $a \otimes \delta_\gamma \in \Phi_n(A_n)$，其中 $a \in A_n$ 和 $\gamma \in \Gamma$ 为

$$(a \otimes \delta_\gamma)(z',\gamma') := \delta_\gamma(\gamma')\, z'a, \qquad (z',\gamma') \in \mathfrak{Z}_n \times \Gamma,$$

其中，δ_γ 表示在 γ处的狄拉克函数。我们注意到，$z \otimes \delta_\gamma$、$(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n \times \Gamma$构成 $\Phi_n(A_n)$ 的一组完备的极小中心投影~。

引理 4.2. 由 $\widetilde{A}_n \hookrightarrow \widetilde{A}_{n+1}$得到的嵌入 $\iota_{n+1,n} = \Phi_{n+1} \circ \Phi_n^{-1}$: $\Phi_n(\widetilde{A}_n) \hookrightarrow \Phi_{n+1}(\widetilde{A}_{n+1})$ 将每个满足 $(z',\gamma') \in \mathfrak{Z}_n \times \Gamma$ 的 $z' \otimes \delta_{\gamma'}$ 映射为

$$\iota_{n+1,n}(z' \otimes \delta_{\gamma'}) = \sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}\\ m(z,z')>0}} \sum_{\gamma\in\Gamma} q_{(z,z')}(\gamma'\gamma^{-1}) \otimes \delta_\gamma. \tag{4.7}$$

特别地，

$$(z \otimes \delta_\gamma)\, \iota_{n+1,n}(z' \otimes \delta_{\gamma'}) = \begin{cases} q_{(z,z')}(\gamma'\gamma^{-1}) \otimes \delta_\gamma & (m(z,z') > 0), \\ 0 & (m(z,z') = 0) \end{cases} \tag{4.8}$$

对于每一对 $((z,\gamma),(z',\gamma')) \in (\mathfrak{Z}_{n+1} \times \Gamma) \times (\mathfrak{Z}_n \times \Gamma)$。

证明。任取一对 $(z',\gamma') \in \mathfrak{Z}_n \times \Gamma$。根据引理 4.1 的证明，我们有

$$\Phi_n\Big(\int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, \pi_{\alpha_n}(u_{z'}(g)^*)\, \lambda(g)\, dg\Big) = z' \otimes \delta_{\gamma'}.$$

注意到

$$\begin{array}{ll} \int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, \pi_{\alpha_n}(u_{z'}(g)^*)\, \lambda(g)\, dg & \text{in } \widetilde{A}_n \\ \Vert & \\ \int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, \pi_{\alpha_{n+1}}(u_{z'}(g)^*)\, \lambda(g)\, dg & \text{in } \widetilde{A}_{n+1} \\ \updownarrow & \\ \int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, (u_{z'}(g)^* u_{n+1}(g)) \otimes \lambda_g\, dg & \text{in } A_n \bar{\otimes} L(G). \end{array}$$

由 (4.5) 及引理 3.4 的证明（公式 $\lambda_g e_\gamma^{(00)} = \langle \gamma, g\rangle\, e_\gamma^{(00)}$），可得

$$\begin{aligned} \int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, (u_{z'}(g)^* u_{n+1}(g)) \otimes \lambda_g\, dg &= \sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}\\ m(z,z')>0}} \int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, w_{(z,z')}(g) \otimes \lambda_g\, dg \\ &= \sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}\\ m(z,z')>0}} \sum_{\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma} \int_G \langle \gamma'^{-1}\gamma_1\gamma_2, g\rangle\, q_{(z,z')}(\gamma_1) \otimes e_{\gamma_2}^{(00)}\, dg \\ &= \sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}\\ m(z,z')>0}} \sum_{\gamma\in\Gamma} q_{(z,z')}(\gamma'\gamma^{-1}) \otimes e_\gamma^{(00)}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\Phi_{n+1}\Big(\int_G \overline{\langle \gamma', g\rangle}\, \pi_{\alpha_n}(u_{z'}(g)^*)\, \lambda(g)\, dg\Big) = \sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}\\ m(z,z')>0}} \sum_{\gamma\in\Gamma} q_{(z,z')}(\gamma'\gamma^{-1}) \otimes \delta_\gamma.$$

因此，我们得到 (4.7)，它显然蕴含 (4.8)。 □

上述引理立即推出以下命题：

命题 4.3。 A_n 的极小中心投影标记为 $\mathfrak{Z}_n := \mathfrak{Z}_n \times \Gamma$，对应于 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n$ 的维数变为 $\dim(z)$（即不依赖于 γ）。

T 及 归纳序列 A_n 的分支图 $(\mathfrak{Z}, \tilde{m})$ 由以下内容给出： $\mathfrak{Z} := \bigsqcup_{n\ge 0} \mathfrak{Z}_n$ 以

$$\begin{aligned} \tilde{m}((z,\gamma),(z',\gamma')) &= \frac{\mathrm{Tr}(\iota_{n+1,n}(z'\otimes\delta_{\gamma'})(z,\gamma))}{\dim(z')} \\ &= \begin{cases} \frac{\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma^{-1}\gamma'))}{\dim(z')} & (m(z,z')>0), \\ 0 & (m(z,z')=0) \end{cases} \end{aligned}$$

对于任意 $((z,\gamma),(z',\gamma')) \in \mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n$，都有 $n\ge 0$。特别地，$(\mathfrak{Z},\tilde{m})$ 上的标准链接 $\tilde{\mu}$ 变为

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma')) &= \tilde{m}((z,\gamma),(z',\gamma'))\, \frac{\dim(z')}{\dim(z)} \\ &= \begin{cases} \frac{\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma^{-1}\gamma'))}{\dim(z)} & (m(z,z')>0), \\ 0 & (m(z,z')=0) \end{cases} \end{aligned}$$

对任意的 $((z,\gamma),(z',\gamma')) \in \mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n$, $n\ge 0$。

特别地，重数函数 $\tilde{m}$ 和标准链接 $\tilde{\mu}$ 在平移作用~ T 下是不变的：$\Gamma \curvearrowright \mathfrak{Z}$ 定义为 $T_\gamma(z,\gamma') := (z, \gamma\gamma')$，也就是说，

$$\tilde{\mu} \circ (T_\gamma^{-1} \times T_\gamma^{-1}) = \tilde{\mu}, \quad \tilde{m} \circ (T_\gamma^{-1} \times T_\gamma^{-1}) = \tilde{m}, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

注 4.4. 引理 4.1 表明

$$\widetilde{A}_n \cong \Phi_n(\widetilde{A}_n) = \bigoplus_{(z,\gamma)\in \mathfrak{Z}_n\times\Gamma} {}^{z\otimes\delta_\gamma}_{z}A_n \quad \text{with } {}_zA_n = B(\mathcal{H}_z),$$

其中，符号 $z\otimes\delta_\gamma$ over $_zA_n$ 表示直和项 $_zA_n$的中心支撑投影。其中心值迹 ctr_n 由下式给出

$$\mathrm{ctr}_n(x)(z,\gamma) = \frac{\mathrm{Tr}(x(z,\gamma))}{\dim(z)}, \qquad x \in \Phi_n(\widetilde{A}_n), \quad (z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n \times \Gamma, \tag{4.9}$$

其中 Tr 表示 $_zA_n = B(\mathcal{H}_z)$ 上的非归一化迹。（参见 [13, 定理 V.2.6]；其唯一性保证上述映射确为中心值迹。）我们注意到

$$\mathrm{ctr}_{n+1}(\iota_{n+1,n}(z'\otimes\delta_{\gamma'}))(z,\gamma) = \tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma')) \tag{4.10}$$

~ ~对每一对 $((z,\gamma),(z',\gamma')) \in \mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n$, $n\geq 0$均成立。这与 [18, 方程(3.7)], 一致，而自然的条件期望起到了 $E^{(\alpha_n^t,\beta)}$ 在 [18] 中的作用；在当前语境下，它们是 $\widetilde{A}_n$的中心值迹。

4.2. 对应于 $(\widetilde{\alpha}^\gamma,\beta)$-缩放迹的调和函数。到目前为止，我们已经描述了与 A_n, $n\geq 0$相关联的分支图 $(\mathfrak{Z},\tilde{m})$。借助这一描述，我们将把 $(\widetilde{\alpha}^\gamma,\beta)$-迹 $TW_\beta^{\ln}(\widetilde{\alpha}^\gamma)$ 转化为定义在 $(\widetilde{\mathfrak{Z}},\tilde{m})$ 上的一类调和函数。

引理 4.5. 对每个 $\tau \in TW_{\ln\beta}(\widetilde{\alpha}^\gamma)$，存在唯一的函数 $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}[\tau]$：$\widetilde{\mathfrak{Z}} := \bigsqcup_{n\geq 0}\widetilde{\mathfrak{Z}}_n \to [0,+\infty)$，使得

$$\tau(x) = \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\nu}(z,\gamma)\,\frac{\mathrm{Tr}(\Phi_n(x)(z,\gamma))}{\dim(z)}, \qquad x \in \widetilde{A}_n. \tag{4.11}$$

函数 $\tilde{\nu}$ 具有以下性质：

(i) $\tilde{\nu}(z',\gamma') = \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde{\nu}(z,\gamma)\,\tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))$ *for all* $(z',\gamma') \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_n$, $n\geq 0$.

(ii) $\tilde{\nu}(z,\gamma) = \gamma^\beta \tilde{\nu}(z,1)$ *for all* $(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}$.

(iii) $\tilde{\nu}(1,1) = 1$.

证明. 为简便起见，记 $\tau_n := \tau\circ\Phi_n^{-1}$，它应当是 $\Phi_n(\widetilde{A}_n)$ 上的正规半有限迹权。~由于所有的 $z\otimes\delta_\gamma$ 构成 $\Phi_n(A_n)$ 的一族完备正交极小中心投影，我们~观察到，对于任意 $(z,\gamma)\in\mathfrak{Z}_n$，有 $\tau_n(z\otimes\delta_\gamma) < +\infty$。因此，

$$a \in ({}^{z\otimes\delta_\gamma}_{z}A_n)_+\Big(\subset \Phi_n(\widetilde{A}_n)_+\Big) \mapsto \tau_n(a) \in [0,+\infty)$$

（关于直和项的这一记号，见注 4.4）与 $_zA_n = B(\mathcal{H}_z)$ 上归一化迹 $\mathrm{Tr}(\,\cdot\,)/\dim(z)$ 的唯一一个非负标量倍数相同。于是，该非负标量给出所需的数 $\tilde{\nu}(z,\gamma)$，也就是说，由半有限性和正规性可得

$$\tau_n(x) = \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tau_n((z\otimes\delta_\gamma)x) = \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\nu}(z,\gamma)\frac{\mathrm{Tr}(x(z,\gamma))}{\dim(z)} \Big(= \tau_n(\mathrm{ctr}_n(x))\Big)$$

对所有 $x\in\Phi_n(A_n)_+$ 均成立。因此可得（4.11）。

条目 (i)：我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(z',\gamma') &= \tau_n(z'\otimes\delta_{\gamma'}) \\ &= \tau_{n+1}(\iota_{n+1,n}(z'\otimes\delta_{\gamma'}))\end{aligned}$$

$$= \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde{\nu}(z,\gamma)\frac{\mathrm{Tr}(\iota_{n+1,n}(z'\otimes\delta_{\gamma'})(z,\gamma))}{\dim(z)}$$
$$= \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde{\nu}(z,\gamma)\,\tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))$$

由命题 4.3（以及注 4.4）可知。

条目 (ii)：我们观察到

$$\Phi_n(\widetilde{\alpha}^\gamma(\Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_1)))(z',\gamma') = \Phi_n(\Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_1))(z',\gamma^{-1}\gamma') = (z\otimes\delta_\gamma)(z',\gamma')$$

对于 $(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n$。因此我们有 $\widetilde{\alpha}^\gamma(\Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_1)) = \Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_\gamma)$，从而

$$\tilde{\nu}(z,\gamma) = \tau(\Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_\gamma)) = \tau(\widetilde{\alpha}^\gamma(\Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_1))) = \gamma^\beta\,\tau(\Phi_n^{-1}(z\otimes\delta_1)) = \gamma^\beta\,\tilde{\nu}(z,1)$$

根据定义 3.2(1) 的条目 (ii)。

条目 (iii)：这不过是定义 3.2(1) 的条目 (iii)，即 $\tau(e_1) = 1$。 □

我们注意到

$$\sum_{z\in\mathfrak{Z}_n}\frac{\dim_\beta(z)}{\dim(z)}\,\tilde{\nu}(z,1) = 1, \qquad n\geq 0,$$

这由上面的 (i)–(iii) 项根据命题 4.3 得出。

定义 4.6. 归一化的 β-幂缩放 $\tilde{\mu}$-调和函数是指满足命题 4.5 中 (i)–(iii) 项的函数 $\tilde{\nu}\colon \widetilde{\mathfrak{Z}}\to[0,+\infty)$。我们用 $H_1^+(\tilde{\mu})^\beta$ 表示所有归一化的 β-幂缩放$\tilde{\mu}$-调和函数。

下文中，我们将在 [17, 第 7] 节使用 κ-调和函数的概念及记号 $H_1^+(\kappa)$。

定理 4.7. 存在唯一的仿射同构 $\nu\in H_1^+(\kappa)\longleftrightarrow\tilde{\nu}\in H_1^+(\tilde{\mu})^\beta$，满足

$$\dim_\beta(z)\,\tilde{\nu}(z,\gamma) = \dim(z)\,\nu(z)\,\gamma^\beta, \qquad (z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}.$$

证明. 我们首先断言

$$\frac{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta}x)}{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta}z')} = \frac{\mathrm{Tr}(\rho_{z'}^{-\beta}x)}{\dim_\beta(z')}, \qquad x\in z'A_n = B(\mathcal{H}_{z'})\hookrightarrow zA_{n+1} = B(\mathcal{H}_z) \tag{4.12}$$

对任意一对 $(z,z')\in\mathfrak{Z}_{n+1}\times\mathfrak{Z}_n$，其中 $m(z,z')>0$，上述结论成立。事实上，左端定义了 $z'A_n = B(\mathcal{H}_{z'})$ 上的一个 $(\alpha^t_{z'},\beta)$-KMS 态，而 $(\alpha^t_{z'},\beta)$-KMS 态的唯一性证明了这一断言。

任意选取 $\nu\in H_1^+(\kappa)$，我们将证明

$$\tilde{\nu}(z,\gamma) := \frac{\dim(z)}{\dim_\beta(z)}\,\nu(z)\,\gamma^\beta$$

定义了 $H_1^+(\tilde{\mu})^\beta$ 的一个元素。引理 4.5 的 (ii) 项显然成立，而 ν 的归一化性质显然蕴含引理 4.5 的 (iii) 项。因此，只需证明引理 4.5 的 (i) 项。我们有

$$\sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}}\tilde{\nu}(z,\gamma)\,\tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma)) = \sum_{\substack{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}\\ m(z,z')>0}}\frac{\dim(z)}{\dim_\beta(z)}\,\nu(z)\,\gamma^\beta\,\frac{\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma^{-1}\gamma'))}{\dim(z)}$$
$$= \frac{1}{\dim_\beta(z)}\sum_{\substack{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}\\ m(z,z')>0}}\nu(z)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^\beta\,\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma^{-1}\gamma')).$$

现在，我们注意到

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^\beta\,\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma^{-1}\gamma')) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^\beta\sum_{\gamma''\in\Gamma}\mathrm{Tr}(p_z(\gamma^{-1}\gamma'\gamma'')p_{z'}(\gamma''))$$

$$
\begin{aligned}
&= \gamma'^{\beta} \sum_{\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma} \gamma_1^{-\beta}\gamma_2^{\beta}\mathrm{Tr}(p_z(\gamma_1)p_{z'}(\gamma_2)) \\
&= \gamma'^{\beta}\,\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta}\rho_{z'}^{\beta}) \\
&= \dim_\beta(z)\,\tau_z^{\beta}(zz')\frac{\dim(z')\,\gamma'^{\beta}}{\dim_\beta(z')}
\end{aligned}
$$

由 (4.12) 得。由于 $\kappa(z,z') = \tau_z^{\beta}(zz')$，且 $zz' = 0$ 当且仅当 $m(z,z') = 0$，我们得出结论：

$$
\begin{aligned}
\sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde\nu(z,\gamma)\,\tilde\mu((z,\gamma),(z',\gamma)) &= \frac{\dim(z')\,\gamma'^{\beta}}{\dim_\beta(z')} \sum_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}} \nu(z)\,\tau_z^{\beta}(zz') \\
&= \frac{\dim(z')\,\gamma'^{\beta}}{\dim_\beta(z')}\nu(z') = \tilde\nu(z',\gamma').
\end{aligned}
$$

因此，$\tilde\nu$ 满足引理 4.5 的条件 (i)。

任取 $\tilde\nu \in H_1^+(\tilde\mu)^\beta$，我们将证明

$$
\nu(z) := \frac{\dim_\beta(z)}{\dim(z)}\tilde\nu(z,1)
$$

定义了 $H_1^+(\kappa)$ 的一个元素。

我们首先注意到

$$
\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}} \nu(z)\kappa(z,z') &= \sum_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}} \tilde\nu(z,1)\frac{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta}z')}{\dim(z)} \\
&= \sum_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}} \tilde\nu(z,1)\frac{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta}\rho_{z'}^{\beta})\,\dim_\beta(z')}{\dim(z)\,\mathrm{Tr}(\rho_{z'}^{-\beta}\rho_{z'}^{\beta})} \qquad \text{(use (4.12))} \\
&= \sum_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}} \tilde\nu(z,1)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{-\beta}\frac{\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma))}{\dim(z)}\frac{\dim_\beta(z')}{\dim(z')} \\
&= \frac{\dim_\beta(z')}{\dim(z')} \sum_{z\in\mathfrak{Z}_{n+1}} \tilde\nu(z,1)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma^{\beta}\,\frac{\mathrm{Tr}(q_{(z,z')}(\gamma^{-1}))}{\dim(z)} \\
&= \frac{\dim_\beta(z')}{\dim(z')} \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde\nu(z,\gamma)\tilde\mu((z,\gamma),(z',1)) \quad \text{(by Proposition 4.3)} \\
&= \frac{\dim_\beta(z')}{\dim(z')}\tilde\nu(z',1) = \nu(z').
\end{aligned}
$$

因此，ν 是 κ-调和的。此外，$\tilde\nu$所要求的引理 4.5 的(iii)项清楚地表明，ν 是正规的。因此证明完毕。□

截至目前，我们得到了如下图表：

$$
\begin{array}{ccc}
K_\beta^{\mathrm{ln}}(\alpha^t) & \overset{(a)}{\longleftrightarrow} & TW_\beta^{\mathrm{ln}}(\widetilde{\alpha}^\gamma) \\
{\scriptstyle(b)}\uparrow\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(c)} \\
H_1^+(\kappa) & \underset{(d)}{\longleftrightarrow} & H_1^+(\tilde\mu)_\beta,
\end{array}
$$

其中，对应关系(a)–(d)的建立如下。

(a) 定理 3.7；(b) [17, 命题3.7]；(c) 引理 4.5；

(d) 定理 4.7。

我们将考察映射 (d) $\to$ (b) $\to$ (a) 的复合。

任意选取 $\tilde{\nu} \in H_1^+(\tilde{\mu}, \beta)$。由定理 4.7 可知，存在唯一的 $\nu \in H_1^+(\kappa)$，使得

$$\nu(z) = \frac{\dim_\beta(z)}{\dim(z)} \tilde{\nu}(z, 1), \qquad z \in \mathfrak{Z}.$$

于是，由 [17, 命题 3.7] 可知，存在唯一的 $\omega \in K_\beta^{\ln}(\alpha^t)$，使得

$$\omega(a) = \sum_{z \in \mathfrak{Z}_n} \nu(z)\, \tau_z^\beta(za) = \sum_{z \in \mathfrak{Z}_n} \frac{\dim_\beta(z)}{\dim(z)} \tilde{\nu}(z, 1)\, \tau_z^\beta(za), \qquad a \in A_n,\ n \geq 0.$$

最后，有了这个 ω，由定理 3.7 可得唯一的 $\tau_\omega = \text{迹}_\beta \circ \widetilde{E}_\omega \in TW_\beta^{\ln}(\widetilde{\alpha}^\gamma)$。因此，所得的 τ_ω 具有

$$\tilde{\nu}[\tau_\omega](z, \gamma) = \tau_\omega(\Phi_n^{-1}(z \otimes \delta_\gamma)) = \mathrm{tr}_\beta(E_\omega(\Phi_n^{-1}(z \otimes \delta_\gamma))).$$

由引理 4.2 的证明可知

$$\Phi_n^{-1}(z \otimes \delta_\gamma) = \int_G \overline{\langle \gamma, g \rangle}\, \pi_{\alpha_n}(u_z(g)^*)\, \lambda(g)\, dg = \sum_{\gamma_1^{-1}\gamma_2 = \gamma} \pi_{\alpha_n}(p_z(\gamma_1)) e_{\gamma_2}.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}[\tau_\omega](z, \gamma) &= \sum_{\gamma_1^{-1}\gamma_2 = \gamma} \dim_\beta(z)\, \tilde{\nu}(z, 1) \frac{1}{\dim(z)} \tau_z^\beta(p_z(\gamma_1))\, \gamma_2^\beta \\
&= \sum_{\gamma_1^{-1}\gamma_2 = \gamma} \dim_\beta(z)\, \tilde{\nu}(z, 1) \frac{1}{\dim(z)} \frac{\gamma_1^{-\beta} \mathrm{Tr}(p_z(\gamma_1))}{\dim_\beta(z)}\, \gamma_2^\beta \\
&= \tilde{\nu}(z, 1)\, \gamma^\beta \sum_{\gamma_1} \frac{\mathrm{Tr}(p_z(\gamma_1))}{\dim(z)} \\
&= \tilde{\nu}(z, 1) \gamma^\beta = \tilde{\nu}(z, \gamma).
\end{aligned}$$

由此可知，映射 (d) $\to$ (b) $\to$ (a) 的复合恰好是映射 (c) 的逆映射。因此，我们得到了以下定理：

定理 4.8. 引理 4.5 中得到的映射 $\tau \in TW_{\ln\beta}(\widetilde{\alpha}^\gamma) \mapsto \tilde{\nu}[\tau] \in H_1^+(\tilde{\mu})^\beta$ 是一个仿射同构。

4.3. 链接的权与权扩展分支图。读者或许会问，如何从给定的链接 $(\mathfrak{Z}, \kappa)$ 而非归纳的 C^*-流 α^t 构造带有 Γ-作用的分支图 $(\mathfrak{Z}, \tilde{m})$。借助 [17, 节 9] 即可完成这一构造：首先从 $(\mathfrak{Z}, \kappa)$ 构造一个归纳的 C^*-流，然后将本文迄今为止的讨论应用于该流。这里我们将不借助任何 C^*-流，直接阐述这一过程。这似乎也有其独立的研究价值。

我们首先指出，对链接的分析不取决于边上的重数；因此，为简单起见，我们将忽略 $\mathfrak{Z}$ 上的重数函数。这里应当指出，$m(z, z') > 0$ 当且仅当 $\kappa(z, z') > 0$，因此，边 $(z, z') \in \bigsqcup_{n \geq 0} \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$ 由 $\kappa(z, z')$ 的正性决定。此外，我们假设

$$\bigcup_{z' \in \mathfrak{Z}_n} \{z \in \mathfrak{Z}_{n+1}; \kappa(z, z') > 0\} = \mathfrak{Z}_{n+1}, \qquad \bigcup_{z \in \mathfrak{Z}_{n+1}} \{z' \in \mathfrak{Z}_n; \kappa(z, z') > 0\} = \mathfrak{Z}_n$$

对所有 $n \geq 0$ 均成立。（非正式地说，这一假设意味着 $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ 对每个 $n \geq 0$ 都是一个含幺嵌入。）我们将假设我们的链接满足这些要求。

由于 (2.3) 中 κ 的定义涉及逆温度 β，我们必须指定这个 β。在下文中，我们非正式地假定逆温度已选定为 $\beta = -1$。

定义 4.9. 对每个 $z \in \mathfrak{Z}_n$, $n \geq 0$ ，我们将其 κ-维数定义为

$$\kappa\text{-}\dim(z) := \sqrt{\sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n) \\ z_0=1, z_n=z \\ \kappa(z_{k+1},z_k)>0\,(k=0,1,\ldots,n-1)}} \frac{1}{\kappa(z_n,z_{n-1})\kappa(z_{n-1},z_{n-2})\cdots\kappa(z_1,z_0)}} \tag{4.13}$$

其中 κ- 维数(1) := 1。接着，我们将 (z,z') 处的权 $\in \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$, $n \geq 0$ 定义为

$$\rho(z,z') := \kappa\text{-}\dim(z)\,\kappa(z,z')\frac{1}{\kappa\text{-}\dim(z')}. \tag{4.14}$$

由 $\mathbb{R}_+^\times$ 中所有满足 $(z,z') \in \mathfrak{Z}_{n+1} \times \mathfrak{Z}_n$, $n \geq 0$ 的正权 $\rho(z,z') > 0$ 生成的可数离散子群 $\Gamma(\kappa)$，称为 κ 的权群。

根据定义，当且仅当 $\kappa(z,z') = 1$ 时， $\rho(z,z') > 0$。这一构造的动机来自 [17, 命题 9.5] 以及 (4.5)、(4.6)。

下面给出一个断言，它非正式地对应于 $\mathrm{Tr}(\rho_z) = \mathrm{Tr}(\rho_z^{-1})$。

引理 4.10。我们有

$$\begin{aligned}\kappa\text{-}\dim(z) &= \sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n) \\ z_0=1, z_n=z}} \rho(z_n,z_{n-1})\rho(z_{n-1},z_{n-2})\cdots\rho(z_1,z_0) \\ &= \sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n) \\ z_0=1, z_n=z \\ \kappa(z_{k+1},z_k)>0\,(k=0,1\ldots,n-1)}} \frac{1}{\rho(z_n,z_{n-1})\rho(z_{n-1},z_{n-2})\cdots\rho(z_1,z_0)}\end{aligned}$$

对于每个 $z \in \mathfrak{Z}_n$、 $n \geq 1$。

证明。通过对 n 进行归纳法即可轻松证明这一点。显然，对于每个 $z \in \mathfrak{Z}_1$， $\kappa\text{-}\dim(z) = \kappa(z,1) = \rho(z,1) = 1$ 成立。从 n 到 $n+1$ 的归纳过程如下。利用对于每个 $z \in \mathfrak{Z}_{n+1}$ 都成立的 $\sum_{z' \in \mathfrak{Z}_n} \kappa(z,z') = 1$ 这一链接性质，我们很容易看出第一个恒等式成立。计算

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n+1) \\ z_0=1, z_{n+1}=z \\ \kappa(z_{k+1},z_k)>0\,(k=0,1\ldots,n)}} \frac{1}{\rho(z_{n+1},z_n)\rho(z_n,z_{n-1})\cdots\rho(z_1,z_0)} \\ &= \frac{1}{\kappa\text{-}\dim(z)} \sum_{\substack{z_n \in \mathfrak{Z}_n \\ \kappa(z,z_n)>0}} \frac{\kappa\text{-}\dim(z_n)}{\kappa(z,z_n)} \sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n-1) \\ z_0=1 \\ \kappa(z_{k+1},z_k)>0\,(k=0,1\ldots,n-1)}} \frac{1}{\rho(z_n,z_{n-1})\cdots\rho(z_1,z_0)} \\ &= \frac{1}{\kappa\text{-}\dim(z)} \sum_{\substack{z_n \in \mathfrak{Z}_n \\ \kappa(z,z_n)>0}} \frac{\kappa\text{-}\dim(z_n)^2}{\kappa(z,z_n)} \qquad \text{(by induction hypothesis)} \\ &= \frac{1}{\kappa\text{-}\dim(z)} \sum_{\substack{z_n \in \mathfrak{Z}_n \\ \kappa(z,z_n)>0}} \frac{1}{\kappa(z,z_n)} \sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n-1) \\ z_0=1 \\ \kappa(z_{k+1},z_k)>0\,(k=0,1\ldots,n-1)}} \frac{1}{\kappa(z_n,z_{n-1})\cdots\kappa(z_1,z_0)} \\ &= \frac{1}{\kappa\text{-}\dim(z)} \sum_{\substack{z_k \in \mathfrak{Z}_k (k=0,1\ldots,n+1) \\ z_0=1, z_{n+1}=z \\ \kappa(z_{k+1},z_k)>0\,(k=0,1\ldots,n)}} \frac{1}{\kappa(z_{n+1},z_n)\kappa(z_n,z_{n-1})\cdots\kappa(z_1,z_0)} \\ &= \kappa\text{-}\dim(z).\end{aligned}$$

因此得证。 □

命题 4.3 提示我们如下定义所需的新分支图。

定义 4.11。 κ 的权扩展分支图（$\mathfrak{Z}, \tilde{m}$）定义为$\mathfrak{Z} = \bigsqcup_{n\geq 0} \mathfrak{Z}_n$，其中$\mathfrak{Z}_n := \mathfrak{Z}_n \times \Gamma$ 且

$$\tilde{m}((z,\gamma),(z',\gamma')) := \begin{cases} 1 & (\gamma^{-1}\gamma' = \rho(z,z') > 0), \\ 0 & (otherwise). \end{cases} \tag{4.15}$$

这个重数函数 $\tilde{m}$ 在右侧坐标上关于 Γ 的平移作用下保持不变，即对于每个 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\tilde{m} \circ (T_\gamma^{-1} \times T_\gamma^{-1}) = \tilde{m}$。

由于我们已隐含地假设所有 $m(z,z')$ 都是 0 或 1，因此在此语境中， $z \in \mathfrak{Z}_n \subset \mathfrak{Z}$ 的维数 $\dim(z)$ 应为满足 $z_k \in \mathfrak{Z}_k$ 且 $\kappa(z_{k+1}, z_k) > 0$ 的所有路径 $(z_n, \ldots, z_1, 1)$ 的总数。(z,γ) 的维数 $\dim(z,\gamma)$ 定义为以 (z,γ) 为终点并始于第 0 阶段 $\mathfrak{Z}_0$ （此时不再是单元素集）的所有路径的总数。下面给出一个引理。

引理 4.12。$\dim(z,\gamma) = \dim(z)$ 始终成立。

证明。设 $((z_n,\gamma_n)\ldots,(z_1,\gamma_1),(1,\gamma_0))$ 是 $\mathfrak{Z}$ 中的一条路径，它终止于 (z_n,γ_n)，起始于 $\mathfrak{Z}_0$。那么，对于每个 $k = 0,\ldots,n-1$，只要满足 $z_0 := 1$，$m(z_{k+1}, z_k) = 1$ 就成立。此外，还应有 $\gamma_1 = \gamma_0/\rho(z_1,1)$、 $\gamma_2 = \gamma_1/\rho(z_2,z_1) = \gamma_0/\rho(z_2,z_1)\rho(z_1,1)$、 $\ldots$、 $\gamma_n = \gamma_0/\rho(z_n,z_{n-1})\cdots\rho(z_1,1)$。这意味着，每条路径都由 $\mathfrak{Z}$ 中的路径 $(z_n,\ldots,z_1,1)$ 以及关系 $\gamma_0 = \gamma_n\rho(z_n,z_{n-1})\cdots\rho(z_1,1)$ 唯一确定。因此，所需结论必然成立。□

这个引理表明，关于（$\mathfrak{Z}$, $\tilde{m}$）的标准链接 $\tilde{\mu}$ 应当是

$$\tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma')) = \begin{cases} \frac{\dim(z')}{\dim(z)} & (\tilde{m}((z,\gamma),(z',\gamma')) = 1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{4.16}$$

经过上述准备，定理 4.7 实际上在当前设置下仍然成立，其中 $\beta = -1$ 和 $\dim^\beta(z) = \kappa\text{-}\dim(z)$。现在其证明已是一个简单的练习。

5. Relation to K_0-groups

K_0-群或维数群在渐近表示论中扮演着表示环的角色，但它们并不适用于 C^*-流的球面表示（一般的链接也如此）。因此，在我们先前的论文 [18], 中，我们引入了一种通过算子系统来取代 K_0-群的方法，以研究归纳 C^*-流。这里，我们将在所有 $\dim(z) < +\infty$ 的假设下，给出一种将局部正规（α^t, β）-KMS 态 $K_\beta^{\ln}(\alpha^t)$ 与 K-理论中的 ρ-扩张（$\tilde{\alpha} : \Gamma \curvearrowright A = \varinjlim A_n$）联系起来的方法。

我们将研究 K_0-群 $K_0(A)$ 及其正锥 $K_0(A)_+$ （属于 $A = \varinjlim A_n$）。根据 K-理论中的一个标准事实（例如，参见 [6, 命题 8.1]），我们有 $K_0(A)_+ = \varinjlim K_0(A_n)_+$。因此，我们首先必须计算每一对 $K_0(A_n)_+ \subset K_0(A_n)$，然后对每个嵌入 $K_0(A_n) \hookrightarrow K_0(A_{n+1})$ 进行处理。

第一项任务只需使用 [10, 命题 6.1] 即可完成，如下所示。将每个 A_n 转换为

$$\Phi_n(\widetilde{A}_n) = \bigoplus_{(z,\gamma)\in\mathfrak{Z}_n} B(\mathcal{H}_z)^{z\otimes\delta_\gamma}$$

由引理 4.1（记号见注 4.4）可知。根据 [10, 命题 6.1(iv)]，由中心值迹 $\mathrm{ctr}^n(= \mathrm{tr}_{\mathcal{Z}(\Phi_n(\widetilde{A}_n))}$ 在 [10] 中诱导的维数函数 $\mathrm{cdim}_n := \dim_{\mathcal{Z}(\Phi_n(\widetilde{A}_n))}$， K_0-群 $K_0(\Phi_n(A_n))$ 同构于

$$\begin{aligned} &\widetilde{\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \\ &:= \left\{ f : \widetilde{\mathfrak{Z}}_n \to \mathbb{Q} \ ; \ f(z,\gamma) \in \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \text{ for each } (z,\gamma) \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_n \text{ and } \sup_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} |f(z,\gamma)| < +\infty \right\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

~ ~它位于中心 $\ell^\infty(\mathfrak{Z}_n) = \mathcal{Z}(\Phi_n(A_n))$ 中。这里，中心的这一识别由 $\delta_{(z,\gamma)} = z \otimes \delta_\gamma$ 给出。我们将进一步考察 cdim_n。在此情形下， K_0-群是~ ~中投影的穆雷–冯·诺依曼等价类 $[P]_n$ 的格罗滕迪克群，位于 $\mathbb{M}_\infty(\Phi_n(A_n)) := \bigcup_{m\geq 1} M_m(\mathbb{C})\otimes\Phi_n(A_n)$ 中； $M_m(\mathbb{C}) \otimes \Phi_n(A_n) \hookrightarrow M_{m+1}(\mathbb{C}) \otimes \Phi_n(A_n)$ 这一嵌入是上角嵌入。其加法（半群运算）定义为

$$[P]_n + [Q]_n := \left[\begin{bmatrix} P & \\ & Q \end{bmatrix}\right]_n.$$

于是，映射 $[P]_n \mapsto (\text{迹} \otimes \mathrm{ctr}_n)(P)$ 是良定义的，因为迹是非归一化迹。这个映射正是维数函数 cdim_n。[10, 命题 6.1(ii)] 中的交换图以及相关 W^*-代数的有限性表明，由正~ ~ ~锥 $K_0(\Phi_n(A_n))_+$ 所产生的序是 $\ell^\infty(\mathfrak{Z}_n)$ 上自然的逐点序。因此， $K_0(\Phi_n(A_n))_+$ $(\subset K_0(\Phi_n(A_n)))$ 通过 cdim_n 同构于

$$\left[\tilde{\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}\right]_+ := \left\{ f \in \tilde{\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \quad ; \quad f(z,\gamma) \geq 0 \text{ for each } (z,\gamma) \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_n \right\}. \tag{5.2}$$

~ ~接下来，我们研究描述 (5.1) 中的嵌入 $K_0(\Phi_n(A_n)) \hookrightarrow K_0(\Phi_n(A_{n+1}))$。根据引理 4.2，该嵌入为 $\iota^*_{n+1,n}$ ，其中 $\iota_{n+1,n} = \Phi_{n+1} \circ \Phi_n^{-1}$。因此我们需要计算

$$\iota^{**}_{n+1,n} := \mathrm{cdim}_{n+1} \circ \iota^*_{n+1,n} \circ (\mathrm{cdim}_n)^{-1} : \tilde{\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \to \tilde{\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}}} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}.$$

由于 $\iota_{n+1,n}$ 且中心值迹是正规的，只需针对每个~ $(1/\dim(z))\delta_{(z,\gamma)} = (1/\dim(z))\, z \otimes \delta_\gamma$ 且满足 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n$来计算此映射。此外，我们注意到

$$\mathrm{cdim}_{n+1} \circ \iota^*_{n+1,n} \circ (\mathrm{cdim}_n)^{-1}(z \otimes \delta_\gamma) = \dim(z) \times \mathrm{cdim}_{n+1} \circ \iota^*_{n+1,n} \circ (\mathrm{cdim}_n)^{-1}\Big(\frac{1}{\dim(z)} z \otimes \delta_\gamma\Big)$$

因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{cdim}_{n+1} \circ \iota^*_{n+1,n} \circ (\mathrm{cdim}_n)^{-1}\Big(\frac{1}{\dim(z)} z \otimes \delta_\gamma\Big) &= \frac{1}{\dim(z)}\, \mathrm{cdim}_{n+1} \circ \iota^*_{n+1,n} \circ (\mathrm{cdim}_n)^{-1}(z \otimes \delta_\gamma) \\
&= \frac{1}{\dim(z)}\, \mathrm{cdim}_{n+1} \circ \iota^*_{n+1,n}([z \otimes \delta_\gamma]_n) \\
&= \frac{1}{\dim(z)}\, \mathrm{cdim}_{n+1}([\iota_{n+1,n}(z \otimes \delta_\gamma)]_n) \\
&= \frac{1}{\dim(z)}\, \mathrm{ctr}_{n+1}(\iota_{n+1,n}(z \otimes \delta_\gamma)) \\
&= \mathrm{ctr}_{n+1}\Big(\iota_{n+1,n}\Big(\frac{1}{\dim(z)}\, z \otimes \delta_\gamma\Big)\Big).
\end{aligned}$$

因此，我们得出所需的嵌入映射 $\iota^{**}_{n+1,n}$ 正是正规映射~ ~ ~$\mathrm{ctr}_{n+1} \circ \iota_{n+1,n} : \mathcal{Z}(\Phi_n(A_n)) \to \mathcal{Z}(\Phi_{n+1}(A_{n+1}))$ 在 $\mathrm{cdim}_n(K_0(\Phi_n(A_n)))$ 的值域上的限制。实际上，对于一个 $f \in \tilde{\prod}_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}$，我们有

$$\begin{aligned}
\iota^{**}_{n+1,n}(f)(z,\gamma) &= \sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} f(z',\gamma')\, \mathrm{ctr}_{n+1}(\iota_{n+1,n}(z' \otimes \delta_{\gamma'}))(z,\gamma) \\
&= \sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))\, f(z',\gamma')
\end{aligned} \tag{5.3}$$

由 (4.10) 得。此 计算表明，嵌入 $\iota^{**}_{n+1,\ n}$ 是 $\infty \times \infty$ matr 的左乘 ix

$$\big[\tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))\big]_{\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}\times\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}$$

在描述 (5.1) 中。由于 $\tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma')) \geq 0$，该嵌入保正。综上所述，我们得出：

命题 5.1. $(K_0(A) \supset K_0(A)_+, [1])$ 计算为

$$(\mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_+, 1) := \varinjlim \left(\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \supset \left[\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \right]_+ , \mathbf{1} \right)$$

沿着嵌入 $\iota^{**}_{n+1,n} = \mathrm{ctr}_{n+1} \circ \iota_{n+1,n}$, $n = 0, 1, \ldots$，其中 $\mathbf{1}$ 是常值函数，即 $\mathbf{1}(z,\gamma) = 1$ 对所有 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n$ 均成立。

注 5.2. 对每个 n，映射

$$f \in \prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \mapsto \{(z,\gamma) \mapsto \dim(z) f(z,\gamma)\} \in \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}$$

是一个单射群同态，其像恰好是

$$\left\langle \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \right\rangle := \left\{ h \in \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} ; \sup_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{|h(z,\gamma)|}{\dim(z)} < +\infty \right\}. \tag{5.4}$$

通过这些映射，$(K_0(A) \supset K_0(A)_+, [1])$ 可识别为

$$\varinjlim \left(\left\langle \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \right\rangle, \left\langle \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \right\rangle_+, \dim \right) \tag{5.5}$$

alon g 是从 $\left\langle \mathbb{Z}^{\mathfrak{Z}_n} \right\rangle$ 到 $\left\langle \mathbb{Z}^{\mathfrak{Z}_{n+1}} \right\rangle$ 的映射，其定义为 $\infty \times \infty$ 矩阵的左乘 x

$$\left[\tilde{m}((z,\gamma),(z',\gamma')) \right]_{\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}\times\widetilde{\mathfrak{Z}}_n},$$

其中

$$\left\langle \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \right\rangle_+ := \left\{ h \in \left\langle \mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \right\rangle ; h(z,\gamma) \geq 0 \text{ for all } (z,\gamma) \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_n \right\}$$

并且对每个 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n$，均有 $\dim(z,\gamma) = \dim(z)$。这种描述与 AF 代数的维数群完全一致。这里的一个额外特点是，$\left\langle \mathbb{Z}^{\mathfrak{Z}_n} \right\rangle$ 是一个比 $\mathbb{Z}^{\widetilde{\mathfrak{Z}}_n}$ 小得多的集合，但 $\widetilde{\mathfrak{Z}}_n$ 为有限集的情形除外。

接下来，我们考察作用 $\widetilde{\alpha}^\gamma : \Gamma \curvearrowright A$ 在 $\mathfrak{D}$ 上的表现。令 $(\widetilde{\alpha}^\gamma)^*$ 为由 $\widetilde{\alpha}^\gamma$ 典范诱导出的 $K_0(A)$ 的自同构。

命题 5.3. 由 $(\widetilde{\alpha}^\gamma)^*$ 经由 $K_0(A) \cong \mathfrak{D}$ 得到的 $\mathfrak{D}$ 的自同构 $(\widetilde{\alpha}^\gamma)^{**}$ 如下所示。对于每个 $n \geq 0$，有

$$(\widetilde{\alpha}^\gamma)^{**}(\iota^{**}_n(f)) = \iota^{**}_n(f \circ T_\gamma^{-1}), \qquad \gamma \in \Gamma, \quad f \in \prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)},$$

其中 ι^{**}_n: $\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \to \mathfrak{D}$ 是典范群同态。

证明。由于 $\widetilde{\alpha}^\gamma$ 是归纳作用，$\widetilde{\alpha}^\gamma$ 在每个 A_n 上的限制都有意义，并诱导出 $\widetilde{\alpha}^\gamma$ 的自同构

$$\left(K_0(\widetilde{A}_n) \xrightarrow{\Phi^*_n} K_0(\Phi_n(\widetilde{A}_n)) \xrightarrow{\mathrm{cdim}_n} \right) \prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)} \quad \left(\subset \mathcal{Z}(\Phi_n(\widetilde{A}_n)) \right),$$

这是我们需要计算的量。它不过是 $\mathrm{cdim}_n \circ (\widetilde{\alpha}^\gamma)^* \circ (\mathrm{cdim}_n)^{-1}$，并且可以像上文那样证明，它与 $\Phi_n \circ \widetilde{\alpha}^\gamma \circ \Phi_n^{-1}$ 在 $\prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}$ $(\subset \mathcal{Z}(\Phi_n(\widetilde{A}_n)))$ 上的限制一致。由 (4.4) 可得

$$(\Phi_n \circ \widetilde{\alpha}^\gamma \circ \Phi_n^{-1})(z' \otimes \delta_\gamma) = z' \otimes \delta_{\gamma\gamma'},$$

因此我们得出

$$(\widetilde{\alpha}^{\gamma})_n^{**}(f) = f \circ T_{\gamma}^{-1}, \qquad \gamma \in \Gamma, \quad f \in \prod_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}. \tag{5.6}$$

由于

$$\begin{aligned}
(\iota_{n+1,n}^{**} \circ (\widetilde{\alpha}^{\gamma''})_n^{**}(f))(z,\gamma) &= \sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))\, f(T_{\gamma''}^{-1}(z',\gamma')) \qquad \text{(by (5.3))} \\
&= \sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\mu}(T_{\gamma''}^{-1}(z,\gamma), T_{\gamma''}^{-1}(z',\gamma'))\, f(T_{\gamma''}^{-1}(z',\gamma')) \quad \text{(by Proposition 4.3)} \\
&= \iota_{n+1,n}^{**}(f)(T_{\gamma''}^{-1}(z,\gamma)) \\
&= ((\widetilde{\alpha}^{\gamma''})_{n+1}^{**} \circ \iota_{n+1,n}^{**}(f))(z,\gamma)
\end{aligned}$$

~对于每个 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_{n+1}$ 和 $\gamma'' \in \Gamma$，归纳极限 $\varinjlim (\widetilde{\alpha}^{\gamma})_n^{**}$ 在 $\mathfrak{D}$ 上是良定义的。因此，不难看出，这与 $(\widetilde{\alpha}^{\gamma})^{**}$ 一致。□

下面给出一个命题。

命题 5.4. 设 $\mathcal{W}_{\beta}^{\ln}(\tilde{\mu})$ 是所有满足下列条件的加性映射 $\psi : \mathfrak{D}_+ \to [0,\infty]$

(i) $\psi \circ (\widetilde{\alpha}^{\gamma})^{**} = \gamma^{\beta}\, \psi$ *for all* $\gamma \in \Gamma$,

(ii) *For each* n, *if* $f_k \nearrow f$ *in* $\left[\tilde{\prod}_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}\right]_+$ *pointwisely as functions over* $\widetilde{\mathfrak{Z}}_n$, *then* $\psi \circ \iota_n^{**}(f_k) \nearrow \psi \circ \iota_n^{**}(f)$ *as* $k \to \infty$.

(iii) $\psi(\iota_0^{**}(\delta_{(1,1)})) = 1$.

那么存在唯一的仿射双射 $\tilde{\nu} \in H_1^+(\tilde{\mu})_{\beta} \mapsto \psi_{\tilde{\nu}} \in \mathcal{W}_{\beta}^{\ln}(\tilde{\mu})$，使得

$$\psi_{\tilde{\nu}}(\iota_n^{**}(\delta_{(z,\gamma)})) = \tilde{\nu}(z,\gamma)$$

~对所有的 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n$, $n \geq 0$。

证明。任取 $\tilde{\nu} \in H_1^+(\tilde{\mu})_{\beta}$。我们注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\nu}(z',\gamma')\, f(z',\gamma') &= \sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde{\nu}(z,\gamma)\, \tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))\, f(z',\gamma') \\
&= \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde{\nu}(z,\gamma) \sum_{(z',\gamma')\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\mu}((z,\gamma),(z',\gamma'))\, f(z',\gamma') \\
&= \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_{n+1}} \tilde{\nu}(z,\gamma)\, \iota_{n+1,n}^{**}(f)(z,\gamma)
\end{aligned}$$

对每个 $f \in \left[\tilde{\prod}_{(z,\ \gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}\right]_+$。因此

$$\iota_n^{**}(f) \quad \text{with} \quad f \in \left[\tilde{\prod}_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \frac{\mathbb{Z}}{\dim(z)}\right]_+ \quad \mapsto \quad \sum_{(z,\gamma)\in\widetilde{\mathfrak{Z}}_n} \tilde{\nu}(z,\gamma)\, f(z,\gamma)$$

定义了一个良定义的加法映射 ψ_{ν}，从 $\mathfrak{D}_+$ 到 $[0,\infty]$。$\tilde{\nu}$ 满足定义 4.6 的性质 (ii)，意味着 $\psi_{\tilde{\nu}}$ 满足此处的性质 (i)。根据定义，显然 $\psi_{\tilde{\nu}}$ 满足性质 (ii)、(iii)。

任取 $\psi \in \mathcal{W}_{\beta}^{\ln}(\tilde{\mu})$ 和此处的性质 (i)，我们可以轻易确认这个 $\psi_{\tilde{\nu}_{\psi}}$ 满足定义 4.6 的性质 (i)。此外，~对于每个 $(z,\gamma) \in \mathfrak{Z}_n$, $n \geq 0$，我们有

$$\tilde{\nu}_{\psi}(z,\gamma) = \psi(\iota_n^{**}(\delta_{(z,\gamma)}) = \psi(\iota_n^{**}(T_{\gamma}^{-1}(\delta_{(z,1)}))) = \psi((\widetilde{\alpha}^{\gamma})^{**}(\iota_n^{**}(\delta_{(z,1)}))) = \gamma^{\beta}\, \psi(\iota_n^{**}(\delta_{(z,1)})) = \gamma^{\beta}\, \tilde{\nu}_{\psi}(z,1),$$

这意味着 $\tilde{\nu}_{\psi}$ 满足定义 4.6 的条件 (ii)。最后，$\tilde{\nu}_{\psi}(1,1) = \psi(\iota_0^{**}(\delta_{(1,1)})) = 1$。至此，证明完成。□

这个命题与定理 4.7 一起，给出了从 K_0-群的角度对 $K_\beta^{\mathrm{ln}}(\alpha^t)$ 或 $H_1^+(\kappa)$ 的一种解释。事实上，我们有

定理 5.5. 对应关系 $\omega \in K_\beta^{\mathrm{ln}}(\alpha^t) \mapsto \psi_\omega \in \mathcal{W}_\beta^{\mathrm{ln}}(\tilde{\mu})$ 定义如下

$$\psi_\omega(\iota_n^{**}(\delta_{(z,\gamma)})) = \frac{\dim(z)}{\dim_\beta(z)}\,\omega(z)\,\gamma^\beta, \qquad (z,\gamma) \in \widetilde{\mathfrak{Z}}_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

是一个仿射同构。特别地，每个 $\psi \in \mathcal{W}_\beta^{\mathrm{ln}}(\tilde{\mu})$ 都唯一确定一个 $\omega_\psi \in K_\beta^{\mathrm{ln}}(\alpha^t)$，使得

$$\omega_\psi(a) = \sum_{z \in \mathfrak{Z}_n} \psi(\iota_n^{**}(\delta_{(z,1)}))\,\frac{\mathrm{Tr}(\rho_z^{-\beta} z a)}{\dim(z)}, \qquad a \in A_n, \quad n = 0, 1, \dots,$$

而且 $K_\beta^{\mathrm{ln}}(\alpha^t)$ 中的任意元素都以这种方式得到。

注记 5.6. 令 $\mathcal{W}_\beta(K_0(\widetilde{A}))$ 表示所有满足以下条件的加性映射 $\psi\colon K_0(\widetilde{A})_+ \to [0,\infty]$：对所有 $\gamma \in \Gamma$，都有 $\psi \circ (\alpha^\gamma)^* = \gamma^\beta\,\psi$。于是我们看到，$\mathcal{W}_\beta^{\mathrm{ln}}(\tilde{\mu})$ 通过 $\mathfrak{D} \cong K_0(\widetilde{A})$ 嵌入 $\mathcal{W}_\beta(K_0(\widetilde{A}))$。注意，$\mathcal{W}_\beta(K_0(\widetilde{A}))$ 仅取决于 $\widetilde{A}$，但 $\mathcal{W}_\beta^{\mathrm{ln}}(\tilde{\mu})$ 并非如此。

6. A concrete example: $\mathrm{U}_q(\infty)$

我们将以无限维量子酉群 $\mathrm{U}_q(\infty)$ 为例说明本文的方法，其表述沿用我们先前的论文 [18]（请注意，在 [7],[11]中采用的 q-变形约定与量子酉群 $\mathrm{U}_q(n)$ 的标准参考文献并不一致，不过由此产生的结果差异很小，即 [7] 中的 $q \rightsquigarrow q^{-1/2}$ 和 [11]中的 $q \rightsquigarrow q^{-1}$）。也就是说，我们直接沿用 [18, 第 4.2] 节中的记号。不过，希腊字母表 Γ 在该文中所表示的含义与本文不同。

6.1. 权群与权扩展分支系统。首先，我们必须求出 ρ_λ 的特征值，以确定第 4 节中的权群 Γ。这里我们注意到，ρ_λ、$\lambda \in \mathbb{S}_n$自然满足 $\mathrm{Tr}(\rho_\lambda) = \mathrm{Tr}(\rho_\lambda^{-1})$。

引理 6.1。权群 Γ 为 $q^{\mathbb{Z}} := \{q^k; k \in \mathbb{Z}\}$。

证明。由 [18, 方程 (4.17)] 可得

$$\rho_\lambda = \pi_\lambda(K_1^{-n+1} K_2^{-n+3} \cdots K_n^{n-1}), \qquad \lambda \in \mathbb{S}_n.$$

不可约表示 π_λ, $\lambda \in \mathbb{S}_n$必须满足：$\pi_\lambda(K_i)$'s可同时对角化，其特征值形如 q^k，其中至少包含 q^{λ_i}，对应于 $\pi_\lambda(K_i)$。因此，$\rho_{(1,0)}$ $((1,0) \in \mathbb{S}_2)$有一个特征值 q^{-1}。由此可得 $\Gamma = q^{\mathbb{Z}}$。□

$q^{\mathbb{Z}}$ 的对偶可识别为一维环面 $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| = 1\}$，其对偶配对为$\langle q^k, \zeta\rangle = \zeta^k$，对任意 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $\zeta \in \mathbb{T}$均成立。从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{T}$ 的典范满群同态由 $t \mapsto q^{it}$给出。

归纳序列 $W^*(\mathrm{U}_q(n))$，$n = 0$，1，.....，由 W^*-交叉积 $W^*(\mathrm{U}_q(n)) \bar{\rtimes}_{\vartheta_n^\xi} \mathbb{T}$给出。根据命题 4.3，其分支图由 $\bigsqcup_{n\geq 0} \mathbb{S}_n \times q^{\mathbb{Z}}$ 给出，而重数函数则通过求出 $\mathcal{H}_\lambda \overset{\pi_\lambda}{\curvearrowleft} U_q\mathfrak{gl}(n+1)$ 上的谱分解 $\rho_\lambda \rho_{\lambda'}^{-1}$（其中 $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{S}_{n+1} \times \mathbb{S}_n$, $\lambda' \prec \lambda$,$n \geq 0$）计算得到。与 [18, 第 4.4 节5] 一样，我们得到

$$\rho_\lambda \rho_{\lambda'}^{-1} = \pi_{\lambda'}(K_1^{-1} \cdots K_n^{-1}) \otimes \pi_{(|\lambda|-|\lambda'|)}(K_1^n) \tag{6.1}$$

（相差一个酉等价），其中右侧是 $U_q\mathfrak{gl}(n) \otimes U_q\mathfrak{gl}(1)$ 的表示。由于从 $U_q\mathfrak{gl}(n) \hookrightarrow U_q\mathfrak{gl}(n+1)$ 出发的分支规则与经典情形相同，因此是无重数的，我们得到 $\rho_\lambda \rho_{\lambda'}^{-1}$ 具有 $\gamma\, z_\lambda z_{\lambda'}$ 的形式，其中 $\gamma > 0$ 为正标量，并且还得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(z_\lambda z_{\lambda'}) &= s_{\lambda'}(1, \dots, 1)\, s_{(|\lambda|-|\lambda'|)}(1) = s_{\lambda'}(1, \dots, 1) = \dim(\lambda'), \\
\mathrm{Tr}(\rho_\lambda \rho_{\lambda'}^{-1}) &= s_{\lambda'}(q^{-1}, \dots, q^{-1})\, s_{(|\lambda|-|\lambda'|)}(q^n) \\
&= q^{n|\lambda|-(n+1)|\lambda'|} s_{\lambda'}(1, \dots, 1) = q^{n|\lambda|-(n+1)|\lambda'|} \dim(\lambda').
\end{aligned}$$

由此可得 $\gamma = q^{n|\lambda|-(n+1)|\lambda'|}$，进而

$$q_{(\lambda,\lambda')}(q^k) = \begin{cases} z_\lambda z_{\lambda'} & (k = n|\lambda| - (n+1)|\lambda'|), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases} \tag{6.2}$$

因此，我们得到

$$\tilde{m}((\lambda, q^k), (\lambda', q^\ell)) = \begin{cases} 1 & (\ell - k = n|\lambda| - (n+1)|\lambda'|), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{6.3}$$

（注意，$n|\lambda| - (n+1)|\lambda'| = [\lambda', (|\lambda| - |\lambda'|)]$；关于这一术语，见 [18, 第 4.4 节。5] ）因此，我们已完全确定了 $W^*(\mathrm{U}_q(n))$、$n = 0$、1、..... 的分支图。结合 [18, 公式（4.16）]，我们注意到，这一计算与第 4.3 节中的构造一致。这并不令人意外，因为这项计算以及链接 [18, 公式（4.16）] 的计算都只使用了分支规则。

6.2. 权扩张的量子群解释。我们说明，代数 $W^*(\mathrm{U}_q(n)) = W^*(\mathrm{U}_q(n)) \bar{\rtimes}_{\vartheta_n^\zeta} \mathbb{T}$ 来自一个紧量子群。De Commer 的一份未发表手稿中曾出现过一个类似（但并不相同）的代数 [5], , 其中 $q^{\mathbb{Z}}$ 被替换为 $q^{2\mathbb{Z}}$。

令 $(\mathbb{C}[\mathbb{T}], \Delta_{\mathbb{T}}, S_{\mathbb{T}}, \varepsilon_{\mathbb{T}})$ 为与一维环面 $\mathbb{T}$ 相关联的 Hopf $*$-代数，即，$\mathbb{C}[\mathbb{T}]$表示连续函数 $C(\mathbb{T})$ 中的所有 Laurent 多项式 $\sum_k c_k \chi_k$ ($c_k \in \mathbb{C}$)，其中 $\chi_k(\zeta) = \zeta^k$属于 $\zeta \in \mathbb{T}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，并且

$$\Delta_{\mathbb{T}}(\chi_k) = \chi_k \otimes \chi_k, \qquad S_{\mathbb{T}}(\chi_k) = \chi_{-k}, \qquad \varepsilon_{\mathbb{T}}(\chi_k) = 1.$$

由于 $S_{\mathbb{T}}^2 = \mathrm{id}$，$\mathcal{U}(\mathbb{T})$ 的 Woronowicz 特征或特殊正元（即$\mathbb{C}[\mathbb{T}]$的代数对偶）依据 [9, 命题 1.7.9] 必须是平凡的。

我们定义新的 Hopf $*$-代数 $(\mathbb{C}[\mathrm{U}_q(n) \times \mathbb{T}], \Delta_{n,\mathbb{T}}, S_{n,\mathbb{T}}, \varepsilon_{n,\mathbb{T}})$ 为 $\mathbb{C}[\mathrm{U}_q(n) \times \mathbb{T}] := \mathbb{C}[\mathrm{U}_q(n)] \otimes \mathbb{C}[\mathbb{T}]$（代数张量积），并且

$$\Delta_{n,\mathbb{T}} := \Sigma_{23} \circ (\Delta_n \otimes \Delta_{\mathbb{T}}), \qquad S_{n,\mathbb{T}} := S_n \otimes S_{\mathbb{T}}, \qquad \varepsilon_{n,\mathbb{T}} := \varepsilon_n \otimes \varepsilon_{\mathbb{T}},$$

其中 Σ 是张量翻转映射，我们使用了腿记号。酉表示 $U \otimes \chi_k$ 的矩阵元与 $(\mathbb{C}[\mathrm{U}_q(n)], \Delta_n)$ 的有限维酉表示 U 以及 $k \in \mathbb{Z}$ 的矩阵元显然作为代数生成 $\mathbb{C}[\mathrm{U}_q(n) \times \mathbb{T}]$，因此该 Hopf $*$-代数确实根据 [9, 定理 1.6.7] 定义了一个紧量子群。相应的 C^*- 代数显然是 $C(\mathrm{U}_q(n)) \otimes C(\mathbb{T})$，由于核性具有唯一的 C^*- 张量积。此外，酉不可约表示 $U_\lambda \otimes \chi_k$、$(\lambda, k) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{Z}$ 很容易证明彼此不等价；通过著名的正交关系和 Peter–Weyl 型定理（参见 [9, 定理 1.4.3(ii) 以及推论 1.5.5] 后的讨论），我们可以证明它们构成一族完备的互不等价酉不可约表示。因此，

$$\mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n) \times \mathbb{T}) = \prod_{(\lambda,m) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{Z}} B(\mathcal{H}_{(\lambda,m)}) \qquad \text{with} \quad \mathcal{H}_{(\lambda,m)} := \mathcal{H}_\lambda, \tag{6.4}$$

因此

$$W^*(\mathrm{U}_q(n) \times \mathbb{T}) = \bigoplus_{(\lambda,m) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{Z}} B(\mathcal{H}_{(\lambda,m)}) = W^*(\mathrm{U}_q(n)) \bar{\otimes} \ell^\infty(\mathbb{Z}), \tag{6.5}$$

显然同构于 $\widetilde{W^*(\mathrm{U}_q(n))}$，由引理 4.1 的 Φ_n 可得。

选取一个 $x \in W^*(\mathrm{U}_q(n)) \subset \mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n))$ 和一个 $\zeta \in \mathbb{T}$。我们通过 $\zeta(f) := f(\zeta)$ 将 ζ视为 $\mathcal{U}(\mathbb{T})$ 的一个元素，其中每个 $f \in C(\mathbb{T})$ 都属于该集合。对于任意 $a, b \in \mathbb{C}[\mathrm{U}_q(n)]$ 和 $k, \ell \in \mathbb{Z}$，我们有

$$\begin{aligned} (\hat{\Delta}_{n,\mathbb{T}}(x \otimes \zeta))((a \otimes \chi_k) \otimes (b \otimes \chi_\ell)) &= (x \otimes \zeta)(ab \otimes \chi_{k+\ell}) \\ &= x(ab)\zeta^{k+\ell} \\ &= \hat{\Delta}_n(x)(a \otimes b)\, \hat{\Delta}_{\mathbb{T}}(\chi_k \otimes \chi_\ell) \\ &= (\hat{\Delta}_n(x)_{13} \hat{\Delta}_{\mathbb{T}}(\zeta)_{24})((a \otimes \chi_k) \otimes (b \otimes \chi_\ell)), \end{aligned}$$

因此

$$\hat{\Delta}_{n,\mathbb{T}}(x\otimes\zeta)=\hat{\Delta}_n(x)_{13}\hat{\Delta}_{\mathbb{T}}(\zeta)_{24}=\hat{\Delta}_n(x)_{13}(1\otimes\zeta\otimes 1\otimes\zeta)\in\mathcal{U}((\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})^2). \tag{6.6}$$

我们注意到

$$\zeta=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\zeta(\chi_k)\,\delta_k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\zeta^k\,\delta_k\in\ell^\infty(\mathbb{Z})\subset\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}=\mathcal{U}(\mathbb{T}).$$

由于 $\hat{}\,\Delta_n(x)\in W^*(\mathrm{U}_q(n))\,\bar{\otimes}\,W^*(\mathrm{U}_q(n))$，且 $\zeta\in\mathbb{T}$ 生成 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ 作为 W^*-代数，因此我们得出，$\hat{}\,\Delta_{n,\,\mathbb{T}}$ 在 $W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$ 上的限制与单射正规 $*$-同态一致

$$\Sigma_{23}\circ(\hat{\Delta}_n\,\bar{\otimes}\,\hat{\Delta}_{\mathbb{T}}):W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})\to(W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T}))^{\bar{\otimes}2}.$$

也容易看出，$\hat{}\varepsilon_{n,\mathbb{T}}$ 和 $\hat{}S_{n,\mathbb{T}}$ 在 $\mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n))\otimes\mathcal{U}(\mathbb{T})$ 上的限制（自然地嵌入 $\mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n)\ \hat{\times}\ \hat{}\,\mathbb{T})$ 中）恰好分别是 $\hat{}\varepsilon_n\otimes\hat{}\varepsilon_{\mathbb{T}}$ 和 $S_n\otimes S_{\mathbb{T}}$。特别地，$\hat{}\varepsilon_{n,\mathbb{T}}$ 在$W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$ 上的限制是 $\hat{}\varepsilon_n\,\bar{\otimes}\,\hat{}\varepsilon_{\mathbb{T}}$。由于 $\mathcal{F}(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})=\mathcal{F}(\mathrm{U}_q(n))\otimes c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$（代数张量积），且包含所有有限支撑双序列 $c_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z})$，我们有 $\hat{}S^2_{n,\mathbb{T}}=\hat{}S^2_n\otimes\mathrm{id}$ 在 $\mathcal{F}(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$ 上。

根据定义，$(U_\lambda\otimes\chi_k)^{\mathrm{cc}}=U_\lambda^{\mathrm{cc}}\otimes\chi_k$，因此由命题 1.4.4]，对每个 $(\lambda,k)\in\mathbb{S}_n\times\mathbb{Z}$，都有 $\rho_{(\lambda,k)}=\rho_\lambda\otimes 1$ [9,。因此，$\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T}$ 的特殊正元必定是 $\rho_n\otimes\hat{}1\in\mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n))\otimes\mathbb{C}1\subset\mathcal{U}(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$。由此可知，酉反粒子 $R_{n,\,\mathbb{T}}$ 在 $\hat{}\,\hat{}W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$ 上的限制与 $R_n\,\bar{\otimes}\,S_{\mathbb{T}}$ 一致。

将引理 4.1 中的 Φ_n 视为从 $W^*(\mathrm{U}_q(n))$ 到 $W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})=W^*(\mathrm{U}_q(n))$ 的映射（见 ($^\infty(\mathbb{Z})$ 6.5)），我们观察到

$$\Phi_n(\pi_{\vartheta_n}(x))=x\otimes 1,\qquad \Phi_n(\lambda(q^{it}))=\rho_n^{it}\otimes q^{it},\qquad x\in W^*(\mathrm{U}_q(n)),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{6.7}$$

因此，通过 Φ_n，Hopf $*$-代数结构 ($\hat{}\Delta_{n,\mathbb{T}}$, $\hat{}R_{n,\mathbb{T}}$, $\vartheta^t_{n,\mathbb{T}}=\mathrm{Ad}(\rho_n^{it}\otimes 1)\,\varepsilon_{n,\mathbb{T}}$) 从 $W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$ 转移到 W^* $(\mathrm{U}_q(n)$ 上，具体如下。为简便起见，记 $\tilde{\Delta}_n:=(\Phi_n^{\bar{\otimes}2})^{-1}\circ\hat{}\Delta_{n,\mathbb{T}}\circ\Phi_n$, $\tilde{R}_n:=\Phi_n^{-1}\circ\hat{}R_{n,\mathbb{T}}\circ\Phi_n$, $\tilde{\vartheta}^t_n:=\Phi_n^{-1}\circ\vartheta^t_{n,\mathbb{T}}\circ\Phi_n$（注意，这与第 3 节中的 $\tilde{\alpha}^\gamma_n$ 不对应），并记 $\tilde{\varepsilon}^t_n:=\hat{}\varepsilon_{n,\mathbb{T}}\circ\Phi_n$。于是有

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_n(\pi_{\vartheta_n}(x)\lambda(q^{it}))&=\pi^{\bar{\otimes}2}_{\vartheta_n}(\hat{\Delta}_n(x))\,(\lambda(q^{it})\otimes\lambda(q^{it})),\\
\tilde{R}_n(\pi_\vartheta(x)\lambda(q^{it}))&=\lambda(q^{-it})\,\pi_{\vartheta_n}(\hat{R}_n(x)),\\
\tilde{\vartheta}^t_n(\pi_{\vartheta_n}(x)\lambda(q^{it}))&=\pi_{\vartheta_n}(\vartheta^t_n(x))\lambda(q^{it})),\\
\tilde{\varepsilon}_n(\pi_{\vartheta_n}(x)\lambda(q^{it}))&=\hat{\varepsilon}_n(x)
\end{aligned}$$

对任意 $x\in W^*(\mathrm{U}_q(n))$ 和 $t\in\mathbb{R}$ 均成立。因此，$W^*(\mathrm{U}_q(n))$ 具有紧量子群 $\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T}$ 的群W^*-代数的自然结构。

容易看出，$q^k\in q^{\mathbb{Z}}$的对偶作用作用于生成元 $x\otimes\delta_m\in W^*(\mathrm{U}_q(n))\,\bar{\otimes}\,\ell^\infty(\mathbb{Z})=W^*(\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T})$，其作用方式为 $x\otimes\delta_m\mapsto x\otimes\delta_{m+k}$。

到目前为止，我们已经看到，每个 $W^*(\mathrm{U}_q(n))$ 都成为一个“紧量子群”。此外，上述计算表明，所得量子群结构与嵌入 $W^*(\mathrm{U}_q(n))\hookrightarrow W^*(\mathrm{U}_q(n+1))$，$n\geq 0$相容。该嵌入在 $W^*(\mathrm{U}_q(n))\times\mathbb{T}$，$n=0,1,\ldots$，上的解释为

$$\begin{aligned}
x\otimes 1=\Phi_n(\pi_{\vartheta_n}(x))&\mapsto\Phi_{n+1}(\pi_{\vartheta_{n+1}}(x))=x\otimes 1\qquad(x\in W^*(\mathrm{U}_q(n))),\\
\rho_n^{it}\otimes q^{it}=\Phi_n(\lambda(q^{it}))&\mapsto\Phi_{n+1}(\lambda(q^{it}))=\rho_{n+1}^{it}\otimes q^{it}\qquad(t\in\mathbb{R}),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

换言之，

$$x\otimes q^{it}\mapsto(x(\rho_n^{-1}\rho_{n+1})^{it})\otimes q^{it}\qquad(x\in W^*(\mathrm{U}_q(n)),\ t\in\mathbb{R}). \tag{6.9}$$

这里我们指出，参见 [18, 第 4.2 节。1], ,

$$(\rho_n^{-1}\rho_{n+1})^{it}=(\rho_{n+1}\rho_n^{-1})^{it}=\rho_n^{-it}\rho_{n+1}^{it}=\rho_{n+1}^{it}\rho_n^{-it}\in W^*(\mathrm{U}_q(n))'\cap W^*(\mathrm{U}_q(n+1))$$

对每个 $t\in\mathbb{R}$ 都成立。也就是说，$\mathrm{U}_q(n)\times\mathbb{T}\hookrightarrow\mathrm{U}_q(n+1)\times\mathbb{T}$ 的嵌入选择并非标准。因此，尽管 ρ_n, $n=0,1,\ldots$ 并不以任何意义构成归纳序列，但 $\rho_n^{it}\otimes q^{it}$, $n=0,1,\ldots$

借助 $\mathcal{B}(\mathrm{U}_q(\infty)) = \varinjlim W^*(\mathrm{U}_q(n))$ 的权扩张，它们确实构成了归纳序列。这得益于著名的 Fell 吸收原理！

最后，投影 $e_{q^k}(n)$ 属于 $L(\mathbb{T}) := \lambda(\mathbb{T})'' \subset \widetilde{W^*(\mathrm{U}_q(n))}$ 变为

$$e_{q^k}(n) := \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \sum_{\lambda\in\mathbb{S}_n} p_\lambda(q^{k-\ell}) \otimes \delta_\ell \tag{6.10}$$

属于 $W^*(\mathrm{U}_q(n)) \times \mathbb{T}$，其中两个求和可以交换，且 $\rho_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^k\, p_\lambda(q^k)$（有限和；注意，除有限多个外，所有 $p_\lambda(q^k) = 0$）是第 4 节中的谱分解。事实上，对于任意 $x \in z_\lambda W^*(\mathrm{U}_q(n))$，我们有

$$e_1(n)(x\otimes 1)e_1(n) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} (p_\lambda(q^{-\ell})xp_\lambda(q^{-\ell})) \otimes \delta_\ell,$$

and

$$\mathrm{ctr}_n(e_1(n)(x\otimes 1)e_1(n)) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{\mathrm{Tr}(p_\lambda(q^{-\ell})\, x)}{\dim(\lambda)} (1\otimes\delta_\ell).$$

因此，若我们在 $1\otimes\delta_\ell$ 处赋值 $q^{-\ell}$，则上述元素变为 $\mathrm{Tr}(\rho_\lambda x)/\dim(\lambda)$。这让我们得以更仔细地考察量子群背景下定理 3.7 背后的技巧。

注 6.2。本小节中的讨论完全一般。实际上，对于任意紧量子群的归纳序列，都可以采用相同的量子群解释；在上述内容中，一维环面 $\mathbb{T}$ 及其对偶 $\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ 应分别替换为权群 Γ 及其本身 Γ 的对偶 G。

References

[1] A. Borodin 和 G. Olshanski, *Representations of the infinite symmetric group.* 剑桥高级数学研究丛书，160。剑桥大学出版社，剑桥，2017。[2] O. Bratteli 和 D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. 1.* 第二版。物理学文本与专著。施普林格出版社，纽约，1987。[3] O. Bratteli 和 D.W. Robinson, *Operator algebras and Quantum Statistical Mechanics. 2.* 第二版。物理学文本与专著。施普林格出版社，柏林，1997。[4] A. Connes, 《几乎周期态与 III_1 型因子》, *J. Funct. Anal.*, 16（1974），415–445。[5] K. De Commer, 《嵌入代数量子群中的代数量子超群》。未完成的手稿，可通过互联网获取。[6] E.G. Effros, *Dimensions and C*-Algebras.* CBMS 数学区域会议丛书，46。数学科学会议委员会，华盛顿特区，1981。[7] V. Gorin, 《 q-Gelfand–Tsetlin 图、吉布斯测度与 q-Toeplitz 矩阵》。*Adv. Math.* **229**（2012），201–266。[8] S.V. Kerov, *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis.* 《美国数学会数学专著汇刊》219，美国数学会，2003。[9] S. Neshveyev 和 L. Tuset, *Compact Quantum Groups and Their Representation Categories.* Cours Sp´ecialis´es，20，法国数学会，巴黎，2013。[10] H. Reich, 《有限 von Neumann 代数伴随算子代数的 K-理论与 L-理论》。*K-theory*，24（2001），303–326。[11] R. Sato, 《分支图上的量子化 Vershik–Kerov 理论与量子化中心测度》。*J. Funct. Anal.* **277**（2019），2522–2557。[12] M. Takesaki, 《交叉积的对偶性与 III 型 von Neumann 代数的结构》。*Acta Math.*，131（1973），249–310。[13] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I.* 《数学科学百科全书》124，算子代数与非交换几何，5，施普林格出版社，柏林，2002。[14] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II.* 《数学科学百科全书》125，算子代数与非交换几何，6，施普林格出版社，柏林，2003。[15] J. Tomiyama, 《论 von Neumann 代数的张量积》。*Pacific J. Math.* **30**（1969），263–270。[16] Y. Ueda, 《III 型自由积因子的离散核心》。*Amer. J. Math.*，138（2016），367–394。[17] Y. Ueda, 《 C^*-流的球面表示 I》。*Münster J. Math.*，即将出版。[18] Y. Ueda, 《 C^*-流的球面表示 II：表示系统与量子群框架》。*SIGMA*，18（2022），050，43 页。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, 464-8602, Japan
Email address: ueda@math.nagoya-u.ac.jp