arXiv:2302.11138v1 [math.GT] 22 Feb 2023

广义亚历山大夸希尔的良好对合

YUTA TANIGUCHI

Abstract. 具有良好对合的夸希尔称为对称夸希尔，可用于定义无定向结与链环的不变量。本文确定广义亚历山大 quandles 存在良好对合的充要条件。此外，我们在对称 quandle 同构意义下，对连通的广义亚历山大 quandle 的所有良好对合进行分类。

1. Introduction

quandle $[2,5]$ 是一个集合 X，其上定义了一个二元运算 $X\times X\to X$;$(x, y)\mapsto x^y$，并满足以下三个条件。

(Q1) 对每个 $x\in X$, $x^x=x$。(Q2) 存在一个二元运算 $X\times X\to X$; $(x,y)\mapsto x^{y^{-1}}$，使得对每个 $x,y\in X$，都有 $(x^y)^{y^{-1}}=(x^{y^{-1}})^y=x$。(Q3) 对每个 $x, y, z\in X$，都有 $(x^y)^z=(x^z)^{y^z}$。

这些公理由纽结理论中的 Reidemeister 变换所启发。在本文中，我们将 $(x^y)^z$ 记作 x^{yz}。如果对于任意的 x、$y\in X$，都有 $x^y=x^{y^{-1}}$，则 quandle X 是一个 kei 或对合夸希尔。

quandle X 的一个对合 ρ，若对每个 x、$y\in X$ 都满足 $\rho(x^y)=\rho(x)^y$ 以及 $x^{\rho(y)}=x^{y^{-1}}$，则称其为一个良好对合 [3]。当 ρ 是 quandle X的一个良好对合时，我们称二元组 (X,ρ) 为一个对称 quandle [4]。对称夸希尔的一个典型例子是 kei X 与恒等映射 $\mathrm{Id}_X\colon X\to X$所构成的二元组 (X,Id_X)（见 $[3,4]$）。

对称夸希尔之间的映射 $f\colon(X,\rho)\to(X',\rho')$，若 f是一个双射，且对任意 x、$y\in X$ 以及 $f\circ\rho=\rho'\circ f$，都有 $f(x^y)=f(x)^{f(y)}$，则称为一个对称 quandle 同构。当 (X,ρ) 与 (X',ρ') 之间存在对称 quandle 同构时，我们称 (X,ρ) 和 (X',ρ') 对称 quandle 同构，记为 $(X,\rho)\cong(X',\rho')$。

给定一个 quandle X，令 $\mathcal{SQ}(X)$ 表示所有 (X,ρ) 的对称 quandle 同构类的集合，即

$$\mathcal{SQ}(X):=\{(X,\rho)\mid \rho:\text{a good involution of } X\}/\cong.$$

于是，自然会产生以下问题:

2020 *Mathematics Subject Classification.* 20N02, 57K12.

Key words and phrases. quandle，良好对合，对称 quandle。

问题1.1. 确定 quandle X 存在良好对合的充要条件。

问题1.2. 确定 quandle X 的 $\mathcal{SQ}(X)$。

本文针对 quandle X 是某个群 G 与群自同构φ: $G \to G$ 所对应的广义亚历山大 quandle GAlex(G, φ) 时的问题1.1给出了答案。

定理 1.3. 设 G 为一个群， φ: $G \to G$ 为群自同构。当且仅当 quandle GAlex(G, φ) 是 kei 时，GAlex(G, φ) 存在良好对合。

此外，若广义亚历山大 quandle GAlex(G, φ) 是连通的，我们将确定集合 $\mathcal{SQ}$(GAlex(G, φ))（定理 2.5）。

2. 广义亚历山大 quandle 的良好对合

设 G 为一个群，且 $\varphi: G \to G$ 是一个群自同构。由 (G, φ) 构成的广义亚历山大 quandles 记作 GAlex(G, φ)，它是集合 G，其二元运算 $x^y := \varphi(x)\varphi(y^{-1})y$。注意，运算 $x^{y^{-1}}$ 由 $x^{y^{-1}} = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)y$给出。若群 G 是加法群，我们也称 GAlex(φ) 为 (G, φ) 的亚历山大 quandle。首先，我们将证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。若广义亚历山大 quandle GAlex(G, φ) 是 kei，则恒等映射 Id_G : $G \to G$ 是一个良好对合。因此，我们将证明仅当部分。

设 ρ 是 GAlex(G, φ) 的一个良好对合。对于任意 $x \in$ GAlex(G, φ)，有$\rho(x) = \rho(x^x) = \rho(x)^x = \varphi(\rho(x))\varphi(x^{-1})x$。因此，对于任意 $x \in$ GAlex(G, φ)，有 $\varphi(\rho(x)^{-1})\rho(x) =\varphi(x^{-1})x$。

因此，我们看到

$$x^y = \varphi(x)\varphi(y^{-1})y = \varphi(x)\varphi(\rho(y)^{-1})\rho(y) = x^{\rho(y)} = x^{y^{-1}}$$

对于任意 x、$y \in$ GAlex(G, φ)，这意味着 GAlex(G, φ) 是一个 kei。 □

推论2.1. 设 G 是一个群， φ 是 G 的群自同构。如果 GAlex(G, φ) 不是 kei，则集合 $\mathcal{SQ}$(GAlex(G, φ)) 是空集。

证明. 该推论直接由定理 1.3 得出。 □

接下来，当 GAlex(G, φ) 连通时，我们将讨论广义亚历山大 quandle GAlex(G, φ) 的良好对合。quandle X 是连通的，是指对于任意 x、$y \in X$，存在元素 y_1、……、$y_n \in X$ 和 ε_1、……、$\varepsilon_n \in \{\pm 1\}$，使得 $x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_n^{\varepsilon_n}} = y$。

命题 2.2. 设 G 为一个群，且 $\varphi: G \to G$ 是一个群自同构。若 GAlex(G, φ) 是一个 kei 和连通 quandle，则存在一个双射

$$\{\rho : \text{good involutions of } \mathrm{GAlex}(G, \varphi)\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{r \in G \mid \varphi(r) = r, r^2 = e\}.$$

证明. 设 ρ: GAlex(G,φ) $\to$ GAlex(G,φ) 是一个良好对合，且 e 是 G 的单位元。令 $r := \rho(e)$。那么，有

$$\varphi(r) = \varphi(\rho(e)) = \varphi(\rho(e))\varphi(e^{-1})e = \rho(e)^e = \rho(e^e) = \rho(e) = r.$$

这意味着，对于任意 $x, y \in$ GAlex(G,φ)，都有

$$(rx)^y = \varphi(rx)\varphi(y^{-1})y = r\varphi(x)\varphi(y^{-1})y = r(x^y)$$

and

$$(rx)^{y^{-1}} = \varphi^{-1}(rx)\varphi^{-1}(y^{-1})y = r\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y^{-1})y = r(x^{y^{-1}}).$$

由于 GAlex(G,φ) 是连通的，对于每个 $x \in$ GAlex(G,φ)，存在 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$ GAlex(G,φ) 以及 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$，使得 $e^{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}} = x$。于是，我们得到

$$\begin{aligned} rx &= re^{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}} \\ &= (re)^{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}} \\ &= r^{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}} \\ &= \rho(e)^{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}} \\ &= \rho(e^{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}}) = \rho(x). \end{aligned}$$

因此，有 $\rho(x) = rx$。由于 ρ 是一个对合，我们有 $r^2 = e$。

设 r 是 G 的一个元素，满足 $\varphi(r) = r$ 且 $r^2 = e$。然后，我们定义一个映射 ρ_r: GAlex(G,φ) $\to$ GAlex(G,φ)，其定义为：对于任意 $x \in$ GAlex(G,φ)，$\rho_r(x) = rx$。我们将证明 ρ_r 是一个良好对合。显然，ρ_r 是一个对合。由于 $\varphi(r) = r$，对于任意 $x, y \in$ GAlex(G,φ)，我们有

$$\rho_r(x)^y = (rx)^y = \varphi(rx)\varphi(y^{-1})y = r\varphi(x)\varphi(y^{-1})y = r(x^y) = \rho_r(x^y)$$

and

$$x^{\rho_r(y)} = x^{ry} = \varphi(x)\varphi((ry)^{-1})ry = \varphi(x)\varphi(y^{-1}r^{-1})ry = \varphi(x)\varphi(y^{-1})y = x^y = x^{y^{-1}}.$$

因此，对合 ρ_r 是一个良好对合。根据上述讨论，我们可以看出，映射 $r \mapsto \rho_r$ 是双射。□

备注 2.3. 在命题 2.2 中，广义亚历山大 quandle 连通这一假设是必要的。对于加法群 G，我们将群自同构 $G \to G; g \mapsto -g$ 记为 inv(G)。我们考虑 quandle R_4 =($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, inv($\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$))，它称为 4 阶二面体夸得尔。众所周知，quandle R_4 并不连通。根据 [4]，R_4 有四个良好对合。然而，集合 $\{r \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \mid \text{inv}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})(r) = r, 2r = 0\}$ 等于集合 $\{0, 2\} \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。

设 X 是一个 quandle。映射 $f: X \to X$ 是 quandle 自同构，当且仅当它是双射且对于任意 $x, y \in X$，都有 $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$。为了确定集合 $\mathcal{SQ}$(GAlex(G,φ))，我们证明以下引理。

引理 2.4（参见 [1]）。设 G 为一个群，且 $\varphi: G \to G$ 为一个群自同构。假设 GAlex(G,φ) 是一个连通 quandle。设 f: GAlex(G,φ) $\to$ GAlex(G,φ) 为一个 quandle 自同构。那么，由 $f_\#(x) = f(x)f(e)^{-1}$ 定义的映射 $f_\#$: GAlex(G,φ) $\to$ GAlex(G,φ) 是 G 的群自同构。

证明。设 $f\colon \mathrm{GAlex}(G,\varphi) \to \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$ 是一个 quandle 自同构。首先，我们将证明映射 $f_\#\colon \mathrm{GAlex}(G,\varphi) \to \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$；$x \mapsto f(x)f(e)^{-1}$ 也是一个 quandle 自同构。对于任意 $x, y \in \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$，我们有

$$\begin{aligned} f_\#(x)^{f_\#(y)} &= (f(x)f(e)^{-1})^{f(y)f(e)^{-1}} \\ &= \varphi(f(x)f(e)^{-1})\varphi((f(y)f(e)^{-1})^{-1})f(y)f(e)^{-1} \\ &= \varphi(f(x)f(e)^{-1})\varphi(f(e)f(y)^{-1})f(y)f(e)^{-1} \\ &= \varphi(f(x))\varphi(f(y)^{-1})f(y)f(e)^{-1} \\ &= (f(x)^{f(y)})f(e)^{-1} = f(x^y)f(e)^{-1} = f_\#(x^y). \end{aligned}$$

因此，映射 $f_\#$ 是 quandle 自同构。注意，$f_\#(e) = e$，且 $f_\#$ 是双射。由于对于任意 $x \in \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$，都有 $\varphi(x) = x^e$，因此

$$f_\#(\varphi(x)) = f_\#(x^e) = f_\#(x)^{f_\#(e)} = f_\#(x)^e = \varphi(f_\#(x))$$

对于任意 $x \in \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$。

设 x 和 y 是 $\mathrm{GAlex}(G,\varphi)$ 中的元素。由于 $\mathrm{GAlex}(G,\varphi)$ 是连通的，存在 $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$ 以及 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$，使得 $y = e^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_n^{\varepsilon_n}}$。利用关系 $e^{e^{\pm 1}} = e$，我们可以假设 $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0$。

对于每个 $z \in \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$，我们可以看到

$$\varphi(x)e^z = \varphi(x)\varphi(e)\varphi(z^{-1})z = \varphi(x)\varphi(z^{-1})z = x^z$$

and

$$\varphi^{-1}(x)e^{z^{-1}} = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(e)\varphi^{-1}(z^{-1})z = \varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(z^{-1})z = x^{z^{-1}}.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}} y_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} y_n^{\varepsilon_n}} &= \varphi^{\varepsilon_n}(x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}} y_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}})e^{y_n^{\varepsilon_n}} \\ &= \varphi^{\varepsilon_n}(\varphi^{\varepsilon_{n-1}}(x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}}})e^{y_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}})e^{y_n^{\varepsilon_n}} \\ &= \varphi^{\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n}(x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}}})\varphi^{\varepsilon_n}(e^{y_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}})e^{y_n^{\varepsilon_n}} \\ &= \varphi^{\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n}(x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}}})e^{y_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} y_n^{\varepsilon_n}} \\ &= \varphi^{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}(x)e^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_n^{\varepsilon_n}} = xe^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_n^{\varepsilon_n}} = xy. \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} f_\#(xy) &= f_\#(x^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_n^{\varepsilon_n}}) \\ &= f_\#(x)^{f_\#(y_1)^{\varepsilon_1}\cdots f_\#(y_n)^{\varepsilon_n}} \\ &= f_\#(x)e^{f_\#(y_1)^{\varepsilon_1}\cdots f_\#(y_n)^{\varepsilon_n}} \\ &= f_\#(x)f_\#(e)^{f_\#(y_1)^{\varepsilon_1}\cdots f_\#(y_n)^{\varepsilon_n}} \\ &= f_\#(x)f_\#(e^{y_1^{\varepsilon_1}\cdots y_n^{\varepsilon_n}}) = f_\#(x)f_\#(y). \end{aligned}$$

这意味着 $f_\#$ 是一个群自同构。 □

设 $f\colon \mathrm{GAlex}(G,\varphi) \to \mathrm{GAlex}(G,\varphi)$ 是一个 quandle 自同构，$\mathrm{Aut}(G)$ 是 G 的自同构群。根据引理 2.4 的证明，群自同构 $f_\#\colon G \to G$；$x \mapsto f(x)f(e)^{-1}$ 满足 $\varphi \circ f_\# = f_\# \circ \varphi$。因此，我们通过 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\varphi) := \{\psi \in \mathrm{Aut}(G) \mid \psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi\}$ 定义子群 $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\varphi)$。它

很容易看出，子集 $\{r \in G \mid \varphi(r) = r, r^2 = e\}$ 在$C_{\mathrm{Aut}(G)}(\varphi)$ 的作用下是闭的。

定理 2.5. 设 G 是一个群，$\varphi\colon G \to G$ 是一个群自同构。假设 GAlex(G, φ) 是一个 kei 且是连通 quandle。那么，存在一个双射

$$\mathcal{SQ}(\mathrm{GAlex}(G, \varphi)) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{r \in G \mid \varphi(r) = r, r^2 = e\}/C_{\mathrm{Aut}(G)}(\varphi).$$

证明. 设 r_1 和 r_2 是 $\{r \in G \mid \varphi(r) = r, r^2 = e\}$ 的元素。假设存在一个元素 $f \in C_{\mathrm{Aut}(G)}(\varphi)$，使得 $f(r_1) = r_2$。注意，f 是 GAlex(G, φ) 的一个 quandle 自同构。设 ρ_{r_1} 和 ρ_{r_2} 是由 $\rho_{r_i}(x) = r_i x$ $(i = 1, 2)$ 定义的 GAlex(G, φ) 的良好对合。则有

$$f(\rho_{r_1}(x)) = f(r_1 x) = f(r_1)f(x) = r_2 f(x) = \rho_{r_2}(f(x))$$

对于任意 $x \in$ GAlex(G, φ)。因此，对称 quandle (GAlex(G, φ) ρ_{r_1}) 和 (GAlex(G, φ) ρ_{r_2}) 同构。

设 ρ_1 和 ρ_2 是 GAlex(G, φ)的良好对合。假设存在一个对称 quandle 同构，从 (GAlex(G, φ) ρ_{r_1}) 到 (GAlex(G, φ) ρ_{r_2})，记为 f。由于 f是 GAlex(G, φ)的 quandle 自同构，映射$f_\#\colon G \to G; x \mapsto f(x)f(e)^{-1}$属于 $C_{\mathrm{Aut}_G}(\varphi)$（引理 2.4）。令$r_1 := \rho_1(e)$且 $r_2 := \rho_2(e)$，则有 $\rho_1(x) = r_1 x$ 且 $\rho_2(x) = r_2 x$。于是，对任意 $x \in$ GAlex(G, φ)，有

$$f(\rho_1(x)) = f_\#(r_1 x)f(e)^{-1} = f_\#(r_1)f_\#(x)f(e)^{-1}$$

and

$$\rho_2(f(x)) = r_2 f_\#(x)f(e)^{-1}.$$

由于 $f \circ \rho_1 = \rho_2 \circ f$，我们有 $f_\#(r_1) = r_2$。因此，我们看到，命题 2.2 中构造的双射诱导了 $\mathcal{SQ}$(GAlex(G, φ)) 与$\{r \in G \mid \varphi(r) = r, r^2 = e\}/C_{\mathrm{Aut}(G)}(\varphi)$之间的双射。□

例 2.6. 设 n 是一个正整数。我们将 S^1 视为 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，并将 $(S^1)^n$ 记作 T_n。我们来考察亚历山大 quandle $X =$GAlex$(T_n, \mathrm{inv}(T_n))$ 的良好对合。注意，quandle X 是一个 kei，也是一个连通 quandle。回忆一下，对于任意 $x \in T_n$，inv$(T_n)(x) = -x$。因此，我们看到

$$\begin{aligned}&\{r \in T_n \mid \mathrm{inv}(T_n)(r) = r, 2r = 0\}\\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in T_n \mid x_i \in \{0, 1/2\}\ (i = 1, \ldots, n)\}.\end{aligned}$$

根据命题 2.2，quandle X 有 2^n 个良好对合。

接下来，我们来考察集合 $\mathcal{SQ}(X)$。我们定义映射 $E_{ij}\colon T_n \to T_n$ 为

$$E_{ij}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n).$$

于是，我们看到 E_{ij} 是 $C_{\mathrm{Aut}(T_n)}$(inv(T_n)) 的一个元素。令 H 为由 $\{E_{ij} \mid i \neq j\}$ 生成的 $C_{\mathrm{Aut}(T_n)}$(inv(T_n)) 的子群。不难验证，下面的等式成立：

$$\begin{aligned}&\{\psi(1/2, 0, \ldots, 0) \in T_n \mid \psi \in H\}\\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in T_n \mid x_i \in \{0, 1/2\}\ (i = 1, \ldots, n)\}\backslash\{(0, \ldots, 0)\}.\end{aligned}$$

由于 $C_{\mathrm{Aut}(T_n)}(\mathrm{inv}(T_n))$ 的一个元素是群自同构，$(0, \ldots, 0)$ 的轨道等于 $\{(0, \ldots, 0)\}$。

因此，集合 $\{r \in T_n \mid \mathrm{inv}(T_n)(r) = r, 2r = 0\}/C_{\mathrm{Aut}(T_n)}(\mathrm{inv}(T_n))$ 由 2 个元素组成。根据定理 2.5，$\mathcal{SQ}(X)$ 的基数等于 2。

Acknowledgements

作者谨此感谢鎌田聖一提出的多项意见。本研究得到日本学术振兴会科学研究费助成事业项目编号 21J21482 的资助。

References

[1] A. Higashitani, H. Kurihara, *Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations*，预印本，见 arXiv:2210.16763。[2] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*，J. Pure Appl. Algebra，23，第 1 期（1982），37–65。[3] S. Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*，载于 Intelligence of Low Dimensional Topology 2006，2007，第 101-108 页。[4] S. Kamada, K. Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*，Trans. Am. Math. Soc. 362，（10）（2010），5501-5527。[5] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*，Mat. Sb.，161，第 1 期（1982），78–88。

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University, 1-1, Machikaneyama, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan
Email address: yuta.taniguchi.math@gmail.com