arXiv:2302.11194v1 [quant-ph] 22 Feb 2023

通过测量和反馈实现超窄线宽频率基准

Diego Barberena,[1]、2、 * Robert J. Lewis-Swan、[3,4] Ana Maria Rey、[1,2] 和 James K. Thompson[1] *JILA*、*NIST and Department of Physics*、 *University of Colorado*、 *Boulder*、 *Colorado 80309*、 *USA*
[2] *Center for Theory of Quantum Matter*、 *University of Colorado*、 *Boulder*、 *Colorado 80309*、 *USA*
[3] *Homer L. Dodge Department of Physics and Astronomy*、*The University of Oklahoma*、 *Norman*、*OK 73019*、 *USA*[4] *Center for Quantum Research and Technology*、 *The University of Oklahoma*、 *Norman*、*OK 73019*、 *USA*（日期：2023年2月23日）

在现代科学中，生成超窄线宽光源具有重要意义。其中一种光源是超辐射激光器，它依赖于由非相干光驱动的集体相互作用的超长寿命偶极子。在此，我们讨论一种通过在光学量子电动力学腔内相干驱动此类偶极子来生成光谱纯净光的不同方法。从腔中出射的光携带着有关驱动光与原子跃迁之间失谐的信息，但也会受到作用于原子-腔复合系统的所有退相干过程所产生的噪声影响。我们计算了这些影响，以获得在一系列输入光强和原子-光相互作用强度下频率估计与稳定的基本极限，并在使用碱土原子的先进腔实验中估计这些极限，同时确定有利的工作条件。我们发现，可实现的线宽与超辐射激光器的线宽相当。

I. 引言

具有高频率稳定性的相干光源是现代技术的重要组成部分。为满足这些需求，连续超辐射激光器 [1–9] 的方案有望提供一种改进的主动频率基准，使其基本不受腔频率噪声的影响，而腔频率噪声正是限制当今最稳定激光器性能的因素 [10]。这种装置由光学腔的一个电磁模式构成，该模式与原子系综发生集体相互作用；系综中的原子具有长寿命二能级跃迁（基态和激发态）。通过将原子从基态激发至一个会快速衰变到激发态的辅助第三能级，对原子进行非相干驱动；这一过程发生在腔线宽远大于裸原子线宽的条件下。当非相干泵浦率超过某一临界值时，非相干驱动与原子-光相互作用之间的相互影响会使原子阵列同步，从而迫使其集体发射相干光，其线宽由系统协同性与原子线宽的乘积决定。尽管超辐射激光器为量子计量学应用带来了巨大机遇，但强非相干泵浦的需求可能会使原子显著受热，令在光学跃迁中实现连续超辐射颇具挑战性。迄今为止，超辐射已在计量学相关跃迁中以脉冲方式实现 [11, 12], ，或在较宽线宽的跃迁中以准连续方式实现 [13]。本文分析同一系统的一种互补情形：以激光直接激发长寿命跃迁。随后，可以利用从腔中输出的光来估算驱动光与原子跃迁之间的失谐，并有望通过反馈方案实现频率稳定。

这一系统过去曾以协同荧光之名得到广泛研究，相关研究聚焦于其稳态性质 [14–16], 动力学 [17, 18], 双稳态与滞后 [19, 20], 输出光的关联函数 [21], 等；近期探测自由空间中超辐射相变 [14, 16]的实验 [22] 又使其重新受到关注。此前也有研究探讨了大输入场下的频率稳定 [23], ，此时原子系综处于强饱和状态；或探讨原子跃迁受运动影响的情形 [24, 25]。本文全面阐述这一系统在多种输入光强和有效原子-光相互作用条件下，提供驱动光频率信息的能力。要对此作出准确评估，需要考察两个方面：（1）系统对输入光频率涨落的光谱响应；（2）输出光的噪声性质。输出光会受到原子存在的影响，通常比纯相干光源的输出噪声大得多。

我们的结果使我们能够评估在不同参数范围内运行该系统对于频率稳定的优缺点。我们确定了反馈稳定后所发射光的光谱纯度，并观察到它可以与超辐射激光器产生的光相媲美。我们的分析还使我们得出结论

* diba2060@colorado.edu

：通过额外的去抽运过程人为提高有效自发辐射，有时可能有利于提升频率稳定性。

II. 理想模型

本节将分析在不存在单粒子退相干、且有恒定激光驱动 [的情况下，原子系综与腔量子电动力学模式之间的相互作用，见图1(a)]。我们首先讨论理想情况，因为这样公式不那么繁琐，也更容易清晰地阐述各个步骤背后的逻辑。第3节中加入额外的退相干会带来技术上的复杂性，但计算的基本思路仍然相同。理想情况也将作为一个基准，用于比较后续结果。

我们在此进行的分析分为四个部分。首先，在平均场近似下计算系统的非平衡稳态。其次，计算系统对两种扰动的线性响应：(i) 输入光频率的涨落；(ii) 输入光的量子噪声。第三，利用系统对(i)的输出光响应，构造一个估计量，以推断驱动光的频率；而(ii)则给出该估计量中的量子噪声，并提供衡量其效能的指标。最后，我们在闭环反馈中利用(i)，计算频率稳定的输入光源的有效线宽。

我们研究的系统由一组 N 二能级原子组成，其原子跃迁 ω_a 以集体方式耦合到一个共振频率为 ω_c 、功率衰减线宽为 κ [的腔量子电动力学模式]，见图1(a)。描述该系统的哈密顿量为（在 $\hbar = 1$的单位制下）：

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\omega_a}{2}(1+\sigma_i^z) + \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + g\sum_{i=1}^{N}(\hat{a}\hat{\sigma}_i^+ + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_i^-), \tag{1}$$

其中，$\hat{\sigma}^{x,\,i}{}^{\,y\,z}{}_{,}$ 是描述原子 i二能级系统的泡利矩阵，$\hat{a}$ ($\hat{a}^\dagger$) 是描述腔模的湮灭（产生）算符， $2g$ 是单光子拉比频率。我们进一步加入一个瞬时相位为 $\phi(t)$ 的激光驱动 [，即瞬时频率为 $\omega_d(t) = \dot{\phi}(t)$] ，光子通量为每秒 $\alpha_{\rm in}^2$ 个。为描述腔外光场的性质，我们使用海森堡-朗之万方程 [26],来描述系统在实验室参考系中的演化：

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{a} &= -\left(i\omega_c + \frac{\kappa}{2}\right)\hat{a} - ig\hat{S}^- + \sqrt{\kappa}\left[\alpha_{\rm in}e^{i\phi(t)} + \delta\hat{A}_{\rm in}(t)\right] \\
\partial_t \hat{S}^- &= -i\omega_a \hat{S}^- + 2ig\hat{S}_z\hat{a} \\
\partial_t \hat{S}_z &= ig(\hat{a}^\dagger \hat{S}^- - \hat{a}\hat{S}^+),
\end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\hat{S}_{x,\,y,\,z} = \sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}^{x,\,i}{}^{\,y\,z}{}_{/2,}$ 是集体自旋算符，而 $\delta\hat{A}_{\rm in}(t)$ 描述输入场^的量子涨落。形式上， $\delta A_{\rm in}$ 作用于与腔外连续模相关联的希尔伯特空间，并由无限过去 [26]中的海森堡算符构成。鉴于输入态为相干态，它完全由以下量刻画： $\langle\delta\hat{A}_{\rm in}(t)\rangle = 0$, 以及 $\langle\delta\hat{A}_{\rm in}(t)\delta\hat{A}^\dagger{}_{\rm in}(t')\rangle = \delta(t-t')$，其他所有二阶期望值均为 0。随后，可以利用输入输出关系计算描述无限未来腔外光场性质的输出场 $\hat{A}_{\rm out}(t) = \alpha_{\rm in}e^{i\phi(t)} + \delta\hat{A}_{\rm in}(t) - \sqrt{\kappa}\hat{a}$。

下文中，我们假设腔已锁定于驱动场 [$\omega_c = \omega_d(t) = \phi(t)$] ，并且接近与原子跃迁的共振 [，见图1(c)]。在驱动场/腔的旋转参考系中，运动方程呈现为更简单的形式：

$$\begin{aligned}
\partial_t \hat{a} &= -\frac{\kappa}{2}\hat{a} - ig\hat{S}^- + \sqrt{\kappa}\left[\alpha_{\rm in} + \delta\hat{A}_{\rm in}(t)\right] \\
\partial_t \hat{S}^- &= i\Delta_t \hat{S}^- + 2ig\hat{S}_z\hat{a} \\
\partial_t \hat{S}_z &= ig(\hat{a}^\dagger \hat{S}^- - \hat{a}\hat{S}^+),
\end{aligned} \tag{3}$$

其中 $\Delta_t \equiv \phi(t) - \omega_a = \omega_d(t) - \omega_a$ 是原子-驱动失谐，我们假设它很小。将驱动场锁定到原子上意味着 $\Delta_t = 0$, 但对于实际激光器， Δ_t 是一个波动量。因此，我们需要对其进行估算，并将其校正至 0 [见图1(d)]。

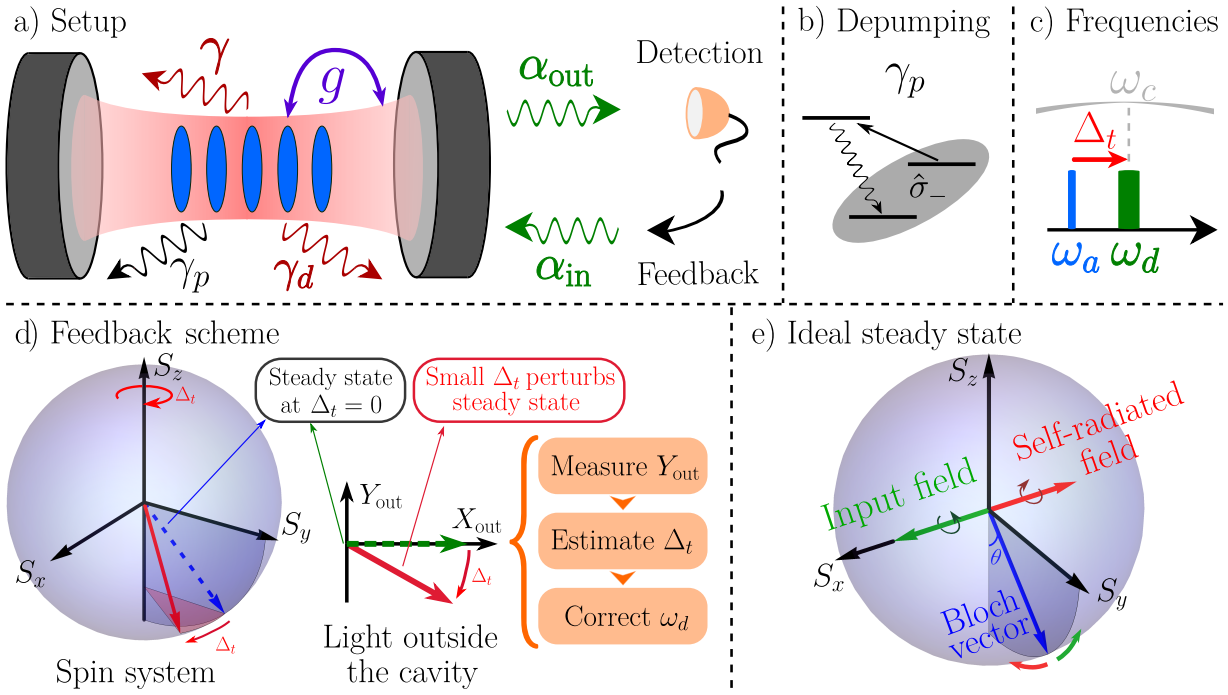


图1. (a) 系统示意图：腔由相干光 (α_{in}) 驱动，并以强度 g 与原子相互作用。原子受到退相干 (γ_d)、向自由空间的自发辐射 (γ) 以及额外去抽运过程 [γ_p，（见面板 (b)）] 的影响。从腔中射出的光 (α_{out}) 会被测量，并利用测量信息对输入光源施加反馈。(b) 可借助快速衰减的辅助第三能级来实现去抽运过程。(c) 腔的频率锁定到输入光 [$\omega_c = \omega_d(t)$]，其频率随时间波动。腔与原子跃迁的频率相差 Δ_t。(d) 反馈方案示意图：当 $\Delta_t = 0$ 时，系统达到稳态。微小的 Δ_t 会扰动这一条件，并在原子观测量和输出光场正交分量 Y_{out} 中体现出来。(e) 在理想系统中（没有单粒子退相干），稳态的特征是输入场与原子自辐射场所产生的力矩恰好相互抵消。

A. 平均场分析

将算符 ($\hat{a}, \hat{S}^-, \hat{S}_z, \hat{A}_{\text{out}}$) 替换为 c 数 $\hat{}$ ($\alpha, J, Z, \alpha_{\text{out}}$)，并在方程 (3) 中省略 $\delta A_{\text{in}}(t)$，即可得到平均场运动方程。在 $\Delta_t = 0$ 处，唯一稳定的稳态解出现在驱动阈值以下，$\alpha_{\text{in}} \leq \alpha_{\text{in}}^c = gN/(2\sqrt{\kappa})$，其特征如下：

$$\alpha = 0 \qquad J = -\frac{iN}{2}\sin\theta \qquad Z = -\frac{N}{2}\cos\theta \tag{4}$$

其中 $\sin\theta = \alpha_{\text{in}}/\alpha_{\text{in}}^c$。从物理上看，在反转数非零（$Z$）时，原子向腔内辐射的场恰好抵消了输入光产生的场。这使腔内光子数为零（$\alpha = 0$），集体布洛赫矢量则指向南半球上的某个角度（θ），如图1(e)所示。利用输入输出关系，我们发现 $\alpha_{\text{out}} = \alpha_{\text{in}}$，即所有光都被反射。

超过阈值 α_{in}^c 后，不存在稳定的稳态解，平均场理论预言系统会持续发生动力学振荡。系统向稳态弛豫的原因是量子涨落诱导的经典轨迹间扩散；经过极长时间后，这会使系统达到高度混合且 Z [14] 恰好为零的稳态。该量在阈值点连续但非解析，这令人联想到二阶相变，不过对称性破缺的概念与其他可观测量相关 [27, 28]。

B. 涨落

现在，我们围绕平均场稳态解对方程（3）进行线性化。用腔内场正交分量的涨落 $\hat{X} = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)/2$、$\hat{Y} = (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)/(2i)$ 以及输入场

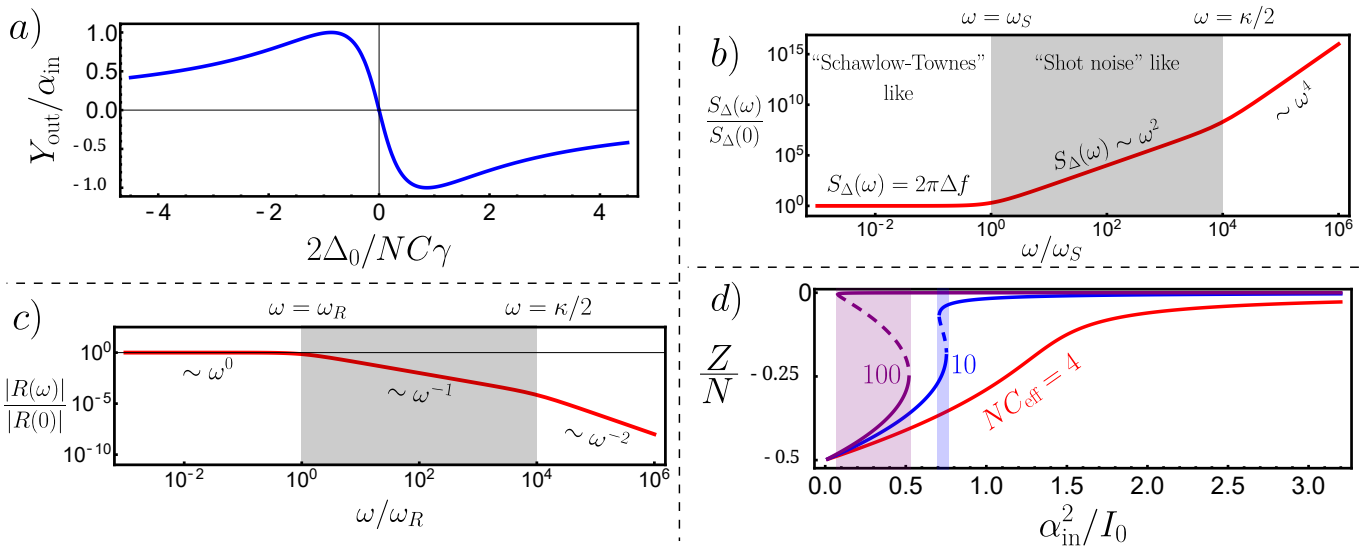


图 2. (a) 固定 $\alpha_{\rm in}=\alpha_{\rm in}^c/\sqrt{2}$ 时，系统对静态原子-驱动失谐（Δ_0）的响应（输出光的 $\hat{}Y$ 正交分量）。(b) 反馈稳定后频率涨落的代表性谱密度。(c) 系统对频率涨落的代表性响应。(d) 存在单粒子退相干时，稳态原子反转数 Z/N 随输入光强的变化，对应有效协同性 $NC_{\rm eff}=4$ 的三个不同值：10、100（分别以红色、蓝色和紫色表示）。实线表示稳定解，虚线表示不稳定解。双稳态区域以阴影标出。

正交分量 $\delta\hat{}X_{\rm in}=(\delta\hat{}A_{\rm in}+\delta\hat{}A^{\dagger}{}_{\rm 内})/2$, $\delta\hat{}Y_{\rm in}=(\delta\hat{}A_{\rm in}-\delta\hat{}A^{\dagger}{}_{\rm 内})/(2i)$，以及垂直于平均场布洛赫矢量的自旋涨落：$S_x$ 和 $S_\perp=S_y\cos\theta+S_z\sin\theta$。由此得到以下几组相互解耦的线性方程：

$$\partial_t\begin{pmatrix}\hat{S}_x\\ \hat{Y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & gN\cos\theta\\ -g & -\frac{\kappa}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{S}_x\\ \hat{Y}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{N}{2}\Delta_t\sin\theta\\ \sqrt{\kappa}\delta\hat{Y}_{\rm in}\end{pmatrix},\qquad \partial_t\begin{pmatrix}\hat{S}_\perp\\ \hat{X}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & gN\\ -g\cos\theta & -\frac{\kappa}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{S}_\perp\\ \hat{X}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{\kappa}\delta\hat{X}_{\rm in}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

$\hat{}\,\hat{}\,\hat{}$ 沿平均场布洛赫矢量方向的分量，$S_{||}=S_z\cos\theta-S_y\sin\theta$，由于布洛赫球的曲率 $[\delta\hat{}S_{||}=1/2-(\hat{}S_x^2+\hat{}S_\perp^2)/N]$，仅对二阶涨落敏感。根据线性化方程和输入输出关系，我们可以得到输出场傅里叶模的表达式，定义为 $A_{\rm out}(\omega)=\hat{}A_{\rm out}(t)\,dt$，类似地定义 $\Delta(\omega)$ $\delta\hat{}A_{\rm in}(\omega)$，$\hat{a}(\omega)$ 和 $\hat{}S_{x,\ y,\ z}(\omega)$。忽略瞬态效应 [29]:

$$\hat{Y}_{\rm out}(\omega)=-\frac{(gN\sin\theta\sqrt{\kappa}/2)}{(i\omega-\lambda_+)(i\omega-\lambda_-)}\Delta(\omega)+\frac{(i\omega+\lambda_+)(i\omega+\lambda_-)}{(i\omega-\lambda_+)(i\omega-\lambda_-)}\delta\hat{Y}_{\rm in}(\omega), \tag{6}$$

其中 $\lambda_\pm=(\kappa/4)\pm\sqrt{(\kappa/4)^2-g^2N\cos\theta}$。输出光场正交分量 $\hat{}\,Y_{\rm out}$ 有两项贡献：一项与 $\Delta(\omega)=\int e^{i\omega t}\Delta_t\,dt$（信号）成正比，另一项与 $\delta\hat{}Y_{\rm in}(\omega)$（噪声）成正比。

$\lambda_\pm$ 的实部是系统的衰减常数。最小的衰减常数决定系统弛豫到稳态所需的时间。当 $\alpha_{\rm in}\to\alpha_{\rm in}^c$ $(\theta\to\pi/2)$ 时，这个时间尺度会无限增大，使得稳态条件更难实现。在 $g\sqrt{N}\ll\kappa$ 的极限下（这与窄线宽跃迁有关），这些常数变为 $\lambda_+\approx\kappa/2$ 和 $\lambda_-\approx 2g^2N\cos\theta/\kappa$（因此 $\lambda_+\gg\lambda_-$）。组合量 g^2/κ 经常出现，通常改写为 $4g^2/\kappa\equiv C\gamma$，其中 γ 是该相变的自然线宽，$C=4g^2/(\kappa\gamma)$ 是协同性，仅取决于腔几何结构。

方程 (6) 将稳态下量子可观测量的涨落与输入场的涨落联系起来 $\hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,(\delta X_{\rm in},\,\delta Y_{\rm in})$。例如，$Y_{\rm out}$ 的方差定义了 $S_{Y_{\rm out}}(\omega)$，即输出光的噪声谱密度，定义如下：

$$\langle\delta\hat{Y}_{\rm out}(\omega)\delta\hat{Y}_{\rm out}(\omega')\rangle\equiv\frac{2\pi S_{Y_{\rm out}}(\omega)\,\delta(\omega+\omega')}{4}. \tag{7}$$

利用 $\langle\delta\hat{}Y_{\rm in}(\omega)\delta\hat{}Y_{\rm in}(\omega')\rangle=2\pi\delta(\omega+\omega')/4$ 和 $\langle\delta\hat{}Y_{\rm in}(\omega)\rangle=0$，可得 $S_{Y_{\rm out}}(\omega)=1$，其数值对应于散粒噪声。对于 $S_{X_{\rm out}}(\omega)$也有类似结果，这表明输出光处于相干态 [30]。

C. 频率估计

从式（6）可以看出，稳态输出光场正交分量 $\hat{Y}_{\rm out}$ 携带了有关驱动失谐 Δ_t的信息。这表明该系统可用作被动频率基准，其原理与拉姆齐光谱学类似：在经过操作时间 T后，测量携带有关 Δ_t 信息的可观测量。在存在静态失谐 $\Delta_t=\Delta_0$ $[\Delta(\omega)=2\pi\Delta_0\delta(\omega)]$, 的情况下，最直接的做法是根据 $Y_{\rm out}$ 随时间的平均值构造 Δ_0 的 $\hat{}$ 估计量。在该线性区域内：

$$\hat{Y}_{\rm est}\equiv\frac{1}{T}\int_0^T\hat{Y}_{\rm out}(t)\,dt\longrightarrow\langle\hat{Y}_{\rm est}\rangle=\frac{\Delta_0}{2g\cot\theta/\sqrt{\kappa}}. \tag{8}$$

对于通过求解有限静态 $\hat{}\Delta_t=\Delta_0$下的平均场方程得到的 $\Delta_0\lesssim NC\gamma$ [条件，这一线性关系成立，见图 2(a)], , 超过该条件后会观察到典型的色散响应。对有限时间内的 $Y_{\rm est}$ 进行实际测量会受到输出光涨落所产生的量子噪声影响，而这些涨落与方程 (6) 中的 $\delta Y_{\rm in}(\omega)$ 有关。积分时间为 T 后的估计量方差由方程 (6) 计算得出：

$$\langle\delta\hat{Y}_{\rm est}^2\rangle\equiv\left\langle(\hat{Y}_{\rm est}-\langle\hat{Y}_{\rm est}\rangle)^2\right\rangle=\frac{S_{\rm Y_{out}}(0)}{4T}=\frac{1}{4T}, \tag{9}$$

由此可以计算灵敏度：

$$\delta\Delta_0^2=\frac{\langle\delta\hat{Y}_{\rm est}^2\rangle}{(\partial_{\Delta_0}\langle\hat{Y}_{\rm est}\rangle)^2}=\frac{g^2(\cot\theta)^2}{\kappa T}=\frac{C\gamma(\cot\theta)^2}{4T}. \tag{10}$$

举例来说，考虑在 $\theta=45^\circ$ 下运行时，一秒积分时间后的 $^1S_0\rightarrow{}^3P_0$ 转变，发生于 ^{87}Sr（$\lambda_a=698$ nm）。使用 [13, 31], 中的腔参数，这对应于 $\delta\Delta_0/\omega_a\approx10^{-17}$ 的相对频率分辨率。在实验中，通过外差探测装置实现对 $\hat{}$ $Y_{\rm out}$ 的此类测量，其中输入光场充当本地振荡器。

D. 通过反馈实现稳定

腔外的光可用于闭环反馈，从而实现自动频率稳定。如上一节所示，我们可以估算激光驱动与原子跃迁之间的失谐，进而利用这一信息校正激光驱动的频率。然而，输出光是一个波动量，因此反馈过程会在校正频率中引入噪声。本节旨在按照参考文献 [32] 中的讨论，估算这种噪声的大小。

我们从式 (6) 中给出的输出正交分量 $\hat{}$ $Y_{\rm out}(\omega)$ 的表达式开始：

$$\hat{Y}_{\rm out}(\omega)=\underbrace{-\frac{\left(gN\sin\theta\sqrt{\kappa}/2\right)}{\left(i\omega-\lambda_+\right)\left(i\omega-\lambda_-\right)}}_{R(\omega)}\hat{\Delta}(\omega)+\underbrace{\frac{\left(i\omega+\lambda_+\right)\left(i\omega+\lambda_-\right)}{\left(i\omega-\lambda_+\right)\left(i\omega-\lambda_-\right)}}_{\hat{N}(\omega)}\delta\hat{Y}_{\rm in}(\omega), \tag{11}$$

其中， $R(\omega)$ 是信号 $\hat{}$ $Y_{\rm out}(\omega)$ 对扰动 $\hat{}\Delta(\omega)$ 的响应，而 $\hat{}N(\omega)$ 描述了 $Y_{\rm out}(\omega)$ 的量子涨落。还请注意，我们现在将 $\Delta(\omega)$ 写作算符，因为我们考虑的是反馈过程的稳态，此时输入 Δ 已包含量子噪声的影响。

我们假设反馈信号是通过线性滤波器 $\beta(\omega)$ 从输出光中获得的，由此得到第二个方程 $\Delta_{\rm feed}(\omega)=\beta(\omega)Y_{\rm out}(\omega)$。最后，我们得到第三个关系式，将无反馈时的裸失谐 $[\Delta_{\rm bare}(\omega)]$与修正后的失谐联系起来： $\Delta(\omega)=\Delta_{\rm bare}(\omega)-\Delta_{\rm feed}(\omega)$。由这三个方程，我们可以得到 $\Delta(\omega)$ 与 $\Delta_{\rm bare}(\omega)$ 之间的直接关系：

$$\hat{\Delta}(\omega)=\frac{1}{1+R(\omega)\beta(\omega)}\Delta_{\rm bare}(\omega)-\frac{\beta(\omega)}{1+R(\omega)\beta(\omega)}\hat{N}(\omega)\approx\frac{1}{R(\omega)\beta(\omega)}\Delta_{\rm bare}(\omega)-\frac{\hat{N}(\omega)}{R(\omega)}, \tag{12}$$

其中在最后一个等式中，我们假设对于所关注的频率（即低于反馈回路的单位增益频率）， $|\beta(\omega)R(\omega)|\gg1$ 。如果原始激光驱动本身已有噪声，那么 $\Delta_{\rm bare}(\omega)$ 就会变成随机量。

然而，反馈过程会将该噪声抑制一个很大的因子 $R(\omega)\beta(\omega)$，同时引入额外噪声 $\delta\Delta(\omega) = -N(\omega)/R(\omega)$：

$$\delta\hat{\Delta}(\omega) \approx \frac{\big(i\omega+\lambda_+\big)\big(i\omega+\lambda_-\big)}{gN\sqrt{\kappa}\sin\theta/2}\hat{Y}_{\rm in}(\omega) \tag{13}$$

采用二阶平均：

$$\langle\delta\hat{\Delta}(\omega)\delta\hat{\Delta}(\omega')\rangle = 2\pi\delta(\omega+\omega')\left[\frac{\big(\omega^2+\lambda_+^2\big)\big(\omega^2+\lambda_-^2\big)}{g^2N^2\kappa\sin\theta^2}\right]. \tag{14}$$

$2\pi\delta(\omega+\omega')$前的系数定义了频率涨落的谱密度 $S_\Delta(\omega)$ [23, 32]。在 $\kappa \gg g\sqrt{N}$ 的极限下，其形式为：

$$S_\Delta(\omega) = 2\pi\Delta f\left[1+\left(\frac{\omega}{\kappa/2}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\omega}{\omega_S}\right)^2\right], \tag{15}$$

$\omega_S \ll \kappa/2$ [见图 2(b)]。$\omega = 0$ 处 $S_\Delta(\omega)$ 的值决定了有效线宽 Δf。在这一理想情形下，$\Delta f = C\gamma\cot\theta^2/4$，其标度关系与超辐射激光器研究中出现的相同 [1]。当 $\theta \to \pi/2$ ($\alpha_{\rm in} \to \alpha_{\rm in}^c$) 时，$\Delta f$ 趋近于 0，因此最终受到有限尺寸效应的限制。拐角频率$\omega_S = NC\gamma\cos\,\theta/2$ 标志着 $S_\Delta(\omega)$ 从常数行为转变为 $\sim\omega^2$ 行为的临界点；在实际激光器中，这两种行为分别对应肖洛-汤斯噪声底和散粒噪声（由有限的激光输出功率导致）。

反馈回路的构造 [即对 $\beta(\omega)$] 的具体选择，也需要有关响应函数 $|R(\omega)|$ 的信息，以确保低频增益较大 [$R(0)\beta(0)$] 并保持回路稳定。在这种情况下，$|R(\omega)|$ 的行为如 [见方程 11]

$$|R(\omega)| \propto \frac{1}{\big[1+(2\omega/\kappa)^2\big]^{1/2}\big[1+(\omega/\omega_R)^2\big]^{1/2}} \tag{16}$$

其示意图见图 2(c)。在这种理想情况下，ω_R 也等于 $NC\gamma\cos\,\theta/2$，不过这并非普遍情况。此外，要对 Δf、ω_S 和 ω_R 进行现实的计算，必须在分析中纳入单粒子退相干源。

III. 非理想模型

在任何现实系统中都存在退相干和非相干衰减，这些过程会改变系统的稳态及其对扰动的线性响应。这些效应体现在取代方程 (3) 的海森堡-朗之万方程中：

$$\begin{aligned}
\partial_t\hat{a} &= -\frac{\kappa}{2}\hat{a} - ig\hat{S}^- + \sqrt{\kappa}\big[\alpha_{\rm in}+\delta\hat{A}_{\rm in}(t)\big]\\
\partial_t\hat{S}^- &= i\Delta_t\hat{S}^- + 2ig\hat{S}_z\hat{a} - \left(\frac{\gamma+\gamma_d+\gamma_p}{2}\right)\hat{S}^- + \sqrt{N\gamma}\hat{F}_\gamma^-(t) + \sqrt{N\gamma_p}\hat{F}_{\gamma_p}^-(t) + \sqrt{N\gamma_d}\hat{F}_{\gamma_d}^-(t)\\
\partial_t\hat{S}_z &= ig(\hat{a}^\dagger\hat{S}^- - \hat{a}\hat{S}^\dagger) - (\gamma+\gamma_p)\left(\hat{S}_z+\frac{N}{2}\right) + \sqrt{N\gamma}\hat{F}_\gamma^z(t) + \sqrt{N\gamma_p}\hat{F}_{\gamma_p}^z(t),
\end{aligned} \tag{17}$$

其中 γ_d 是退相干速率，γ 是相变的自然自发辐射率，γ_p 是图1(b)中所示去抽运过程的速率，F_γ^-和 F_γ^z是与自发辐射相关的噪声算符（注意 F_γ^z 是厄米算符），而 $F_{\gamma_d}^-$ 是与退相干相关的噪声算符。我们还加入了一个额外的去抽运过程 γ_p，并引入了相关噪声算符 $F_{\gamma_p}^-$和 $F_{\gamma_p}^z$。该过程可通过相干驱动快速衰减的辅助第三能级 [来实现，见图 1(b)]。原则上，噪声算符是根据导致相应衰减过程的自由度定义的，但通常难以直接观测，不像 $A_{\rm out}(t)$。实际上，我们主要关心它们对系统的影响，这些影响由其最低阶关联函数描述。唯一非零的关联函数（相差厄米共轭）为 [33, 34]:

$$\begin{aligned}
\langle\hat{F}_\gamma^-(t)\hat{F}_\gamma^+(t')\rangle &= \langle\hat{F}_{\gamma_p}^-(t)\hat{F}_{\gamma_p}^+(t')\rangle = \delta(t-t')\\
\langle\hat{F}_\gamma^-(t)\hat{F}_\gamma^z(t')\rangle &= \langle\hat{F}_{\gamma_p}^-(t)\hat{F}_{\gamma_p}^z(t')\rangle = \tfrac{\langle\hat{S}^-\rangle}{N}\delta(t-t')\\
\langle\hat{F}_\gamma^z(t)\hat{F}_\gamma^z(t')\rangle &= \langle\hat{F}_{\gamma_p}^z(t)\hat{F}_{\gamma_p}^z(t')\rangle = \left(\tfrac{\langle\hat{S}_z\rangle}{N}+\tfrac{1}{2}\right)\delta(t-t')
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\langle\hat{F}_{\gamma_d}^-(t)\hat{F}_{\gamma_d}^+(t')\rangle &= \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\langle\hat{S}_z\rangle}{N}\right)\delta(t-t')\\
\langle\hat{F}_{\gamma_d}^+(t)\hat{F}_{\gamma_d}^-(t')\rangle &= \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\langle\hat{S}_z\rangle}{N}\right)\delta(t-t').
\end{aligned} \tag{18}$$

与理想情况类似，该系统存在共振协同荧光 [19]。与上一节一样，我们首先在平均场近似下研究该系统，然后计算输出光相对于稳态的涨落，并分析这些非相干过程如何改变我们关于频率估计和反馈的结果。

A. 平均场分析

再次，我们将 $(\hat{a},\ \hat{S}^-,\ \hat{S}_z,\ \hat{A}_{\rm out})$ 替换为 c 数 $(\alpha,\ J,\ Z,\ \alpha_{\rm out})$，并忽略所有噪声算符。所得方程是非线性的，但其稳态解可以用 $z = Z/N$ 参数化，形式如下：

$$\alpha = \frac{2\alpha_{\rm in}}{\sqrt{\kappa}\left(1-2NC_{\rm eff}z\right)} \qquad \frac{J}{N} = i\sqrt{\frac{\gamma+\gamma_p}{\Gamma}}\left(\frac{\alpha_{\rm in}}{\sqrt{16I_0}}\right)\left(\frac{2NC_{\rm eff}z}{1-2NC_{\rm eff}z}\right) \qquad \alpha_{\rm out} = \alpha_{\rm in}\left(\frac{2zNC_{\rm eff}+1}{2zNC_{\rm eff}-1}\right), \tag{19}$$

其中，$C_{\rm eff} \equiv 4g^2/(\Gamma\kappa) = C\gamma/\Gamma$ 是有效腔协同性，$\Gamma = \gamma+\gamma_d+\gamma_p$ 是总退相干率，$I_0 = N^2C_{\rm eff}(\gamma+\gamma_p)/16$ 和 z 满足：

$$\frac{\alpha_{\rm in}^2}{8I_0} = -\frac{(z+1/2)}{z}\left(z-\frac{1}{2NC_{\rm eff}}\right)^2. \tag{20}$$

$\alpha_{\rm in}^2$ 的自然尺度由 I_0 设定，并通过 $I_0 = (\alpha_{\rm in}^c)^2(\gamma+\gamma_p)/\Gamma$ 与理想阈值场（$\alpha_{\rm in}^c$）相关联。理想模型中相变的命运取决于 $NC_{\rm eff}$ 的值。当 $NC_{\rm eff} < 8$ 时，方程 (20) 只有一个实数解，平均场可观测量是输入场强度 $\alpha_{\rm in}$ [的平滑函数；$NC_{\rm eff} = 4$] 的情形见图 2(d)。值得注意的是，存在一个“暗点”，此时 $\alpha_{\rm out} = 0$，即没有光从腔中射出；$z = -1/($ $2NC_{\rm eff})$] 的情形见方程 (19)。在协同共振荧光的背景下，正如之前在参考文献 [14, 16, 19], 中所讨论的，这一参数区间内观察到的平滑行为，体现了退相干消除无退相干时所观察到的相变。

当 $NC_{\rm eff} > 8$ 时，存在一些输入场振幅 $\alpha_{\rm in}$，使得 z 有三个实数解。其中两个对应于稳定稳态，另一个位于不稳定分支 [，对于 $NC_{\rm eff} = 10$，参见图 2(d) 100] [19]。这会导致双稳态：

$$\frac{1}{16}\left(1-\sqrt{1-\frac{8}{NC_{\rm eff}}}\right)\left(3+\sqrt{1-\frac{8}{NC_{\rm eff}}}\right)^3 < \frac{2\alpha_{\rm in}^2}{I_0} < \frac{1}{16}\left(1+\sqrt{1-\frac{8}{NC_{\rm eff}}}\right)\left(3-\sqrt{1-\frac{8}{NC_{\rm eff}}}\right)^3 \tag{21}$$

在极限 $NC_{\rm eff} \gg 1$ 下，上限和下限分别变为 $16/(NC_{\rm eff})$ 和 1 [35],。这种双稳态行为伴随着稳定解之间的大幅不连续跃变，因此会出现滞后 [19]，而非理想情况下观察到的平滑二级相变 [14]。为避免与这些切换相关的大幅涨落，最好在非双稳态区域内工作。

B. 涨落

我们对任意一个平均场稳态解附近的式（17）进行线性化，并考察 $\hat{Y}$、$\hat{Y}_{\rm out}$ 和 $\hat{S}_x$，它们携带有关 Δ_t的信息。它们满足：

$$\partial_t\begin{pmatrix}\hat{S}_x\\ \hat{Y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{\Gamma}{2} & -2gNz\\ -g & -\frac{\kappa}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{S}_x\\ \hat{Y}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(iJ)\Delta_t + \sqrt{N\gamma}\hat{X}_\gamma(t) + \sqrt{N\gamma_p}\hat{X}_{\gamma_p}(t) + \sqrt{N\gamma_d}\hat{X}_{\gamma_d}(t)\\ \sqrt{\kappa}\delta\hat{Y}_{\rm in}\end{pmatrix}, \tag{22}$$

其中，$\hat{F}_\gamma^x = (\hat{F}_\gamma^- + \hat{F}_\gamma^+)/2$、$\hat{F}_{\gamma_p}^x = (\hat{F}_{\gamma_p}^- + \hat{F}_{\gamma_p}^+)/2$ 和 $\hat{F}_{\gamma_d}^x = (\hat{F}_{\gamma_d}^- + \hat{F}_{\gamma_d}^+)/2$ 是相应的正交噪声算符。随后，我们可以通过 $\hat{Y}_{\rm out} = \delta\hat{Y}_{\rm in} - \sqrt{\kappa}\hat{Y}$ 计算 $\hat{Y}_{\rm out}$ 的行为。在频域中，忽略瞬态行为：

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{\rm out}(\omega) = &-\frac{2g\sqrt{\kappa}(iJ)}{(i\omega-l_+)(i\omega-l_-)}\Delta(\omega) + \frac{(i\omega+m_+)(i\omega+m_-)}{(i\omega-l_+)(i\omega-l_-)}\delta\hat{Y}_{\rm in}(\omega)\\ &+ \frac{(\kappa/2)\sqrt{NC_{\rm eff}\Gamma}}{(i\omega-l_+)(i\omega-l_-)}\left[\sqrt{\gamma}\hat{F}_\gamma^x(\omega) + \sqrt{\gamma_p}\hat{F}_{\gamma_p}^x(\omega) + \sqrt{\gamma_d}\hat{F}_{\gamma_d}^x(\omega)\right],\end{aligned} \tag{23}$$

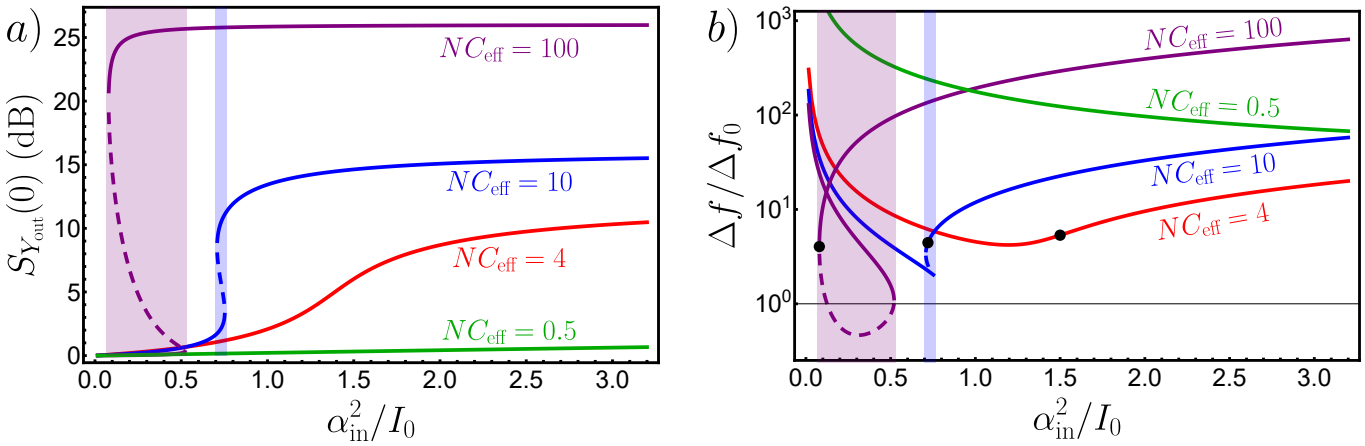


图 3。（a）输出正交分量 $\hat{Y}_{\rm out}$ 的功率谱密度随输入光强 $\alpha_{\rm in}^2$ 的变化，其中 $NC_{\rm eff}=0.5$，4、10、100（分别对应绿色、红色、蓝色和紫色）。实线表示稳定解，虚线表示不稳定解。双稳态区域以阴影标出。（b）有效线宽，以 $\Delta f_0=(4\pi)^{-1}(C\gamma/4)[\Gamma/(\gamma_p+\gamma)]$为单位测量。每个 $NC_{\rm eff}$ 的“暗点”以黑色圆圈标出（绿色曲线不存在暗点）。

其中 $l_\pm=\frac{\kappa+\Gamma}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{\kappa-\Gamma}{4}\right)^2+2g^2Nz}$ 和 $m_\pm=\frac{\kappa-\Gamma}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{\kappa+\Gamma}{4}\right)^2+2g^2Nz}$。由于存在额外的耗散源，最小衰减常数 l_- 发生了变化，且始终为有限值。在极限 $g\sqrt{N}$，$\Gamma\ll\kappa$ 下，这些常数简化为 $l_+\approx m_+\approx\kappa/2$、$l_-\approx\Gamma(1-2NC_{\rm eff}z)/2$ 和 $m_-\approx-\Gamma(1+2NC_{\rm eff}z)/2$。

噪声谱密度 $\hat{Y}_{\rm out}$ 在 $\omega=0$ 处可由公式（23）计算得到：

$$S_{Y_{\rm out}}(0)=\frac{(1+2NC_{\rm eff}z)^2}{(1-2NC_{\rm eff}z)^2}+\frac{4NC_{\rm eff}}{(1-2NC_{\rm eff}z)^2} \tag{24}$$

并在图 3(a) 中表示为 $\alpha_{\rm in}^2/I_0$的函数。绝对最小噪声随着 $NC_{\rm eff}$的增加而降低，但处于双稳态区域内。在这些区域之外，减小 $NC_{\rm eff}$ 会使噪声更接近散粒噪声水平。

C. 通过反馈实现稳定

应用第（II D）节中的公式，可得以下有效线宽：

$$2\pi\Delta f=\left(\frac{C\gamma}{4}\right)\left(\frac{\gamma+\gamma_p+\gamma_d}{\gamma+\gamma_p}\right)\left[\frac{(1+2NC_{\rm eff}z)^2+4NC_{\rm eff}}{2(NC_{\rm eff}+2NC_{\rm eff}z)(-2NC_{\rm eff}z)}\right], \tag{25}$$

它由 z 参数化，因此是输入场强$\alpha_{\rm in}^2$ 的隐函数（因为 z 取决于 $\alpha_{\rm in}$）。为使讨论更清晰，我们将式（25）表示为三个不同因子的乘积。第一个因子是理想情形和超辐射激光器中都存在的缩放因子。当 $\gamma_d\gg\gamma+\gamma_p$时，第二个因子 $\Gamma/(\gamma+\gamma_p)$ 会显著增大有效线宽，这是因为辐射偶极矩 $J\propto\sqrt{(\gamma+\gamma_p)/\Gamma}$ [减小了，见式（19）]。在这些条件下，当自然 γ 较小时，可调节的去泵浦速率就具有优势，窄线宽跃迁便是如此。若 $\gamma_p\gg\gamma_d$，则 $(\gamma+\gamma_p)/\Gamma\approx1$，不会造成增大。第三个因子涵盖了在不同 $\alpha_{\rm in}$ 下运行的所有影响，难以事先估算。根据 $\alpha_{\rm in}$，它可以约为 1，也可以远大于 1，下一小节将对此进行说明。

在图 3(b) 中，我们展示了不同 $NC_{\rm eff}$ 值下 Δf 随输入光强的变化，并以 $\Delta f_0=(4\pi)^{-1}(C\gamma/4)[\Gamma/(\gamma+\gamma_p)]$ 归一化。当 $NC_{\rm eff}>8$ 时，使 Δf 最小的 $\alpha_{\rm in}$ 落在双稳态区域内。在这些区域之外，对于固定的 $\alpha_{\rm in}^2/I_0$，我们发现采用较为适中的 $NC_{\rm eff}$ 值更为合适。$NC_{\rm eff}$ 也不宜过度降低，因为通过输出光获取的信号幅度也会随之减小，从而对 Δf [产生不利影响；相关情况见图 3(b) 中的 $NC_{\rm eff}=0.5$]。

D. 工作状态

我们在此描述对应于不同 $\alpha_{\rm in}$ 值的两种可能工作状态，讨论可实现的有效线宽 Δf，并计算拐角频率 ω_S 和 ω_R。

1. Strong input field

这里我们取 $\alpha_{\rm in}^2 \gg I_0 = N^2 C_{\rm eff}(\gamma_p+\gamma)/16$，这一情形此前已在参考文献 [23], 中分析，并得出 $z \sim 1/\alpha_{\rm in}^2 \to 0$、 $\alpha_{\rm out} \approx -\alpha_{\rm in}$ 和 J（偶极矩） $\sim 1/\alpha_{\rm in}$。由于 J 会随着 $\alpha_{\rm in}$ 增大而减小，因此估算频率涨落所需的信号幅度也会降低，而输出光中的噪声不会发生显著变化 [，参见 $z=0$] 中的式（24）。有效线宽为：

$$2\pi\Delta f = \frac{C\gamma}{4}\left(\frac{\Gamma}{\gamma_p+\gamma}\right)\left(\frac{\alpha_{\rm in}^2}{4I_0}\right)\left(1+4NC_{\rm eff}\right) \tag{26}$$

在这种情况下，除了 $\Gamma/(\gamma+\gamma_p)$ 之外，还存在一个与输入强度成正比的额外因子；按假设，该因子远大于 1。这就是参考文献 [23], 中得到的线宽，但不包括因子 $(1+4NC_{\rm eff})$；该因子计入了单粒子退相干过程带来的额外噪声。即使在 $NC_{\rm eff}>8$ 时，强输入场区域也不存在双稳态；如果无法或不便操控 $NC_{\rm eff}$ ，这将很有优势。另一方面，可实现的有效线宽也会受到额外因子 $(1+4NC_{\rm eff})$ 的惩罚。

与理想情况不同，现在 ω_S 和 ω_R 并不相同。在极限 $g\sqrt{N}$， $\Gamma \ll \kappa$ 下，它们分别为 $\omega_S = \Gamma\sqrt{NC_{\rm eff}+1/4}$ 和 $\omega_R = \Gamma/2$。理想情况下，希望 ω_S 较大；这可以通过增大 $NC_{\rm eff}$ 来实现，但代价是线宽增大Δf，也可以通过调整去泵浦速率 γ_p 来实现。最后一项重要信息是：在线性近似成立的条件下，失谐量 Δ_t 的大小估计。考虑静态失谐 Δ_0 并求解平均场方程，可得到一条类似图 2(a) 的色散曲线，但其最大值出现在$\Delta_0 \approx NC_{\rm eff}\Gamma\alpha_{\rm in}/\sqrt{8I_0} = NC\gamma\alpha_{\rm in}/\sqrt{8I_0}$，而非 $\Delta_0 \approx NC\gamma$（理想情况）。因此，与理想情况相比，线性在更大的 Δ_t 范围内成立，但代价是斜率较小，灵敏度也较低。

2. Dark point

这对应于没有光从腔外逸，即 $\alpha_{\rm out}=0$。在这一工作点，有效线宽为：

$$2\pi\Delta f = \frac{C\gamma}{2}\left(\frac{\Gamma}{\gamma+\gamma_p}\right)\left(\frac{NC_{\rm eff}}{NC_{\rm eff}-1}\right). \tag{27}$$

且仅在 $NC_{\rm eff}>1$ 时存在。在这种情况下，除了 Γ/γ 之外，还有第三个因子；当$NC_{\rm eff} \gtrsim 2$时，该因子的量级为一。因此，只要 $\gamma+\gamma_p$ 和 Γ 相当，可实现的线宽就能与超辐射激光器的线宽（$\sim C\gamma$） [1],处于同一量级。再次考虑 Ref. [31] 的腔中的 ^{87}Sr 原子的 $^1S_0 \to {}^3P_0$ 相变。取 $g = 2\pi\times 4$ Hz、 $\kappa = 2\pi\times 160$ kHz、 $\gamma_d = 2\pi\times 3$ Hz、人工增大的自发辐射率$\gamma_p+\gamma=\gamma_d$ 以及 $N=10^5$ 个原子，在 $NC_{\rm eff}\approx 6.6$ 时可得到 $\Delta\nu = 0.5$ 毫赫兹。

在近似条件 $g\sqrt{N}$， $\Gamma \ll \kappa$ 下，拐角频率现在分别为 $\omega_S = \sqrt{NC_{\rm eff}\Gamma^2} = \sqrt{NC\gamma}\Gamma$ 和 $\omega_R = \Gamma$。在避免双稳态（$NC_{\rm eff}<8$）的同时增大 ω_S，需要提高去泵浦速率 γ_p。此外， γ_p 还会增强 ω_R；当 $\gamma_d=\gamma_p=0$ 时，其值可小至 γ，从而放宽对反馈回路增益的技术限制。还需注意的是，如果施加足够强的去泵浦，使得 $\Gamma \sim NC\gamma/2$，那么 $\omega_S \sim NC\gamma$，这与最佳泵浦速率下超辐射激光器的˜结果类似。最后，对较大静态失谐 Δ_0 的响应（$Y_{\rm out}$）仍呈色散型，如图 2(a) 所示，其最大值出现在 $\Delta_0 \approx NC_{\rm eff}\Gamma = NC\gamma$ （类似于理想情况）。

这个“暗点”体现了系统在最小值附近的特性 Δf [参见图 3(b)], ，通过观察反射强度即可轻松识别。数值上，我们发现，当 $2<NC_{\rm eff}<8$ 时，式（27）与最优值 Δf 的差距至多为 2 倍。

IV. 结论与展望

我们计算了在不同输入光强和原子-光相互作用强度下，量子电动力学腔内由原子系综稳定的激光的有效线宽；原子-光相互作用强度以协作参数 $NC_{\rm eff}$ 衡量。我们发现，采用适中的 $NC_{\rm eff}\in[2,8]$ 值更为理想；只要总退相干率与有效自发辐射率处于同一量级，有效线宽就可与超辐射激光器的线宽相当。这些预测为实现超窄线宽光提供了一种互补方案：该方案无需强非相干泵浦，而是采用相干驱动和反馈，因此为实验生成长寿命连续相干光提供了更灵活、更易于实现的途径，适用于长寿命的

偶极子。此外，通过连续原子装载方案 [9]，可以解决腔内原子有限寿命所带来的问题。

使用碱土原子和最先进的腔，采用此配置可实现的线宽处于毫赫兹范围。若要进一步改进，则需要降低比值 g^2/κ，同时保持 NC_{eff} 不变；这可以通过增加原子数量来实现。

V. 致谢

我们感谢 E. Y. Song 和 A. Ludlow 仔细审阅手稿并提出意见，也感谢 J. R. K. Cline 和 D. J. Young 的有益讨论。本研究获得美国空军科学研究办公室资助（项目编号 FA9550-18-1-0319）、美国国防高级研究计划局（经美国陆军研究办公室资助，项目编号 W911NF-16-1-0576）、美国陆军研究办公室个人研究员项目（项目编号 W911NF-19-1- 0210）、美国国家科学基金会 PHY1820885、NSF JILA-PFC PHY-1734006 和 NSF QLCI-2016244 项目、美国能源部量子系统加速器（QSA）项目以及 NIST 的支持。

表 1. 参数列表 I

g 单光子拉比频率		$\omega_a, \omega_c, \omega_d$	原子、腔和驱动频率
κ 腔功率衰减率		$\Delta_t = \omega_d - \omega_a$	驱动-原子失谐
γ 自发辐射率		$\Gamma = \gamma + \gamma_p + \gamma_d$	总退相干率
γ_p 去泵浦速率		$C = 4g^2/(\kappa\gamma)$	腔协同性
γ_d 退相干速率		$C_{\mathrm{eff}} = C\gamma/\Gamma$	有效协同性
N 原子数		$\alpha_{\mathrm{in}}^c = gN/(2\sqrt{\kappa})$	理想临界输入场
Δf有效线宽		$I_0 = (\alpha_{\mathrm{in}}^c)^2(\gamma + \gamma_p)/\Gamma$	输入场尺度

表2. 参数和变量列表 II（O 代表任意变量）

$\hat{a} = \hat{X} + i\hat{Y}$	腔内场	α	平均场腔内场
$\hat{S}_z, \hat{S}^- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$	原子变量	$Z = Nz, J$	平均场原子变量
$\hat{A}_{\mathrm{in}} = \hat{X}_{\mathrm{in}} + i\hat{Y}_{\mathrm{in}}$	输入场	α_{in}	平均场输入场
$\hat{A}_{\mathrm{out}} = \hat{X}_{\mathrm{out}} + i\hat{Y}_{\mathrm{out}}$	输出场	α_{out}	平均场输出场
$\hat{F}_\gamma^z, \hat{F}_\gamma^- = \hat{F}_\gamma^x - i\hat{F}_\gamma^y$	γ引起的噪声	$\hat{F}_{\gamma_d}^- = \hat{F}_{\gamma_d}^x - i\hat{F}_{\gamma_d}^y$	由 γ_d引起的噪声
$\hat{F}_{\gamma_p}^z, \hat{F}_{\gamma_p}^- = \hat{F}_{\gamma_p}^x - i\hat{F}_{\gamma_p}^y$	由 γ引起的噪声 $_p$	$\hat{S}_O(\omega)$	O的噪声谱密度
$R(\omega)$	响应函数方程（16）	$O(\omega) = \int e^{i\omega t} O(t)\, dt$	O的傅里叶变换
ω_S	$S_\Delta(\omega)$ 的拐角频率	ω_R	$R(\omega)$ 的拐角频率

[1] D. Meiser、J. Ye、D. R. Carlson 和 M. J. Holland，《毫赫兹线宽激光器的前景》，《物理评论快报》**102**，163601（2009）。[2] J. Chen，《主动光学钟》，《中国科学通报》**54**，348（2009）。[3] J. G. Bohnet、Z. Chen、J. M. Weiner、D. Meiser、M. J. Holland 和 J. K. Thompson，《腔内光子数少于一个的稳态超辐射激光器》，《自然》**484**，78（2012）。[4] M. A. Norcia 和 J. K. Thompson，《超辐射交叉区中的冷锶激光器》，《物理评论X》**6**，011025（2016）。[5] M. A. Norcia、M. N. Winchester、J. R. K. Cline 和 J. K. Thompson，《锶毫赫兹线宽钟跃迁上的超辐射》，《科学进展》**2**，e1601231（2016）。[6] S. A. Sch¨affer、M. Tang、M. R. Henriksen、A. A. Jørgensen、B. T. R. Christensen 和 J. W. Thomsen，《冷冷热锶系综中窄跃迁上的激射》，《物理评论A》**101**，013819（2020）。[7] Y. Zhang、C. Shan 和 K. Mølmer，《暗原子-光子缀饰态实现的超窄线宽超辐射激射》，《物理评论快报》**126**，123602（2021）。[8] G. A. Kazakov 和 T. Schumm，《利用原子系综顺序耦合的主动光学频率标准》，《物理评论A》**87**，013821（2013）。[9] J. R. K. Cline、V. M. Sch¨afer、Z. Niu、D. J. Young、T. H. Yoon 和 J. K. Thompson，《原子与高精细度光学腔之间的连续集体强耦合》（2022）。[10] T. Kessler、T. Legero 和 U. Sterr，《重新审视光学腔中的热噪声》，J. Opt. Soc. Am. B **29**，178（2012）。[11] M. A. Norcia、J. R. K. Cline、J. A. Muniz、J. M. Robinson、R. B. Hutson、A. Goban、G. E. Marti、J. Ye 和 J. K. Thompson，《锶钟跃迁超辐射的频率测量》，《物理评论X》**8**，021036（2018）。

[12] T. Laske、H. Winter 和 A. Hemmerich，《钙原子超辐射激光器中的脉冲延迟时间统计》，《物理评论快报》123，103601（2019）。[13] M. A. Norcia 和 J. K. Thompson，《锶禁戒跃迁上的强耦合与非破坏性原子计数》，《物理评论A》93，023804（2016）。[14] H. J. Carmichael，《协同共振荧光稳态的解析与数值结果》，《物理学杂志B：原子与分子物理》13，3551（1980）。[15] P. D. Drummond，《协同共振荧光的可观测量与矩》，《物理评论A》22，1179（1980）。[16] D. F. Walls，《n 个相干驱动二能级原子的协同荧光》，《物理学杂志B：原子与分子物理》13，2001（1980）。[17] S. L. Mielke、G. T. Foster、J. Gripp 和 L. A. Orozco，《原子-腔耦合系统的时间响应》，《光学快报》22，325（1997）。[18] P. Drummond 和 H. Carmichael，《沃尔泰拉循环与协同荧光临界点》，《光学通信》27，160（1978）。[19] R. Bonifacio 和 L. Lugiato，《共振荧光中的协同效应与双稳态》，《光学通信》19，172（1976）。[20] J. Gripp、S. L. Mielke、L. A. Orozco 和 H. J. Carmichael，《多原子系统中真空拉比峰的非谐性》，《物理评论A》54，R3746（1996）。[21] G. T. Foster、S. L. Mielke 和 L. A. Orozco，《腔量子电动力学中的强度关联》，《物理评论A》61，053821（2000）。[22] G. Ferioli、A. Glicenstein、I. Ferrier-Barbut 和 A. Browaeys，《自由空间中非平衡超辐射相变的观测》（2022）。[23] M. J. Martin、D. Meiser、J. W. Thomsen、J. Ye 和 M. J. Holland，《腔量子电动力学中超窄光学跃迁对激光稳频的极端非线性响应》，《物理评论A》84，063813（2011）。[24] P. G. Westergaard、B. T. R. Christensen、D. Tieri、R. Matin、J. Cooper、M. Holland、J. Ye 和 J. W. Thomsen，《光学腔中窄线宽原子的运动依赖非线性色散观测》，《物理评论快报》114，093002（2015）。[25] D. A. Tieri、J. Cooper、B. T. R. Christensen、J. W. Thomsen 和 M. J. Holland，《利用腔量子电动力学系统中的饱和吸收实现激光稳频》，《物理评论A》92，013817（2015）。[26] C. W. Gardiner 和 M. J. Collett，《阻尼量子系统中的输入与输出：量子随机微分方程和主方程》，《物理评论A》31，3761（1985）。[27] J. Hannukainen 和 J. Larson，《耗散驱动的量子相变与对称性破缺》，《物理评论A》98，042113（2018）。[28] V. Link、K. Luoma 和 W. T. Strunz，《利用量子轨迹揭示非平衡相变的本质》，《物理评论A》99，062120（2019）。[29] 输出信号 $\hat{Y}_{\mathrm{out}}(\omega)$ 的表达式似乎遗漏了来自原子投影噪声的独立贡献，但这种说法并不正确。稳态下的原子投影噪声完全由动力学噪声（$\delta\hat{A}_{\mathrm{in}}$）决定；计算 $\hat{S}_x(\omega)$ 的稳态值并注意到，利用 $\delta\hat{A}_{\mathrm{in}}$ 的关联函数可恢复 $\hat{S}_x$ 的正确方差（与 [14–16] 一致），进一步证实了这一点。[30] O. Somech 和 E. Shahmoon，《经典辐射的宏观自旋的量子纠缠态》（2022）。[31] M. A. Norcia、R. J. Lewis-Swan、J. R. K. Cline、B. Zhu、A. M. Rey 和 J. K. Thompson，《锶超辐射激光器中的腔介导集体自旋交换相互作用》，《科学》361，259（2018）。[32] F. Riehle，*Frequency Standards*（Wiley-VCH 出版社，魏恩海姆，德国，2004）。[33] D. A. Tieri、M. Xu、D. Meiser、J. Cooper 和 M. J. Holland，《从激射到稳态超辐射的跨越理论》（2017）。[34] P. Meystre 和 M. Sargent，*Elements of Quantum Optics*，第4版，由 P. Meystre 和 M. Sargent III 编（施普林格，柏林，德国，2007）。[35] K. Tucker、D. Barberena、R. J. Lewis-Swan、J. K. Thompson、J. G. Restrepo 和 A. M. Rey，《通过集体动力学促进自旋压缩，并考虑单粒子退相干》，《物理评论A》102，051701（2020）。