arXiv:2302.11202v1 [math.RA] 22 Feb 2023

关于模的稳定—投射与内射—余稳定分解

DALI ZANGURASHVILI

Abstract. 本文证明：对于左遗传环，任意左模都能表示为一个稳定左模与不可分解投射左模的直和，当且仅当任意左模都能表示为一个稳定左模与一个投射左模的直和；而上述条件成立，当且仅当该环是左完美且右相容的。在此情况下，上述表示在同构意义下唯一；后一种表示还是函子性的。证明上述结论的关键，是一个纯粹的范畴论结果。这些结论尤其意味着，对于任意非域的主理想整环，其上的有限生成模基本定理不能推广到所有模的情形。此外，借助上述范畴论方法，我们为 Zheng-Xu He 的结果给出了一种新的证明：环的任意模存在唯一（在同构意义下）的内射—余稳定分解，当且仅当该环是左遗传且左诺特的。上述结论还特别意味着，若左遗传环上的左模范畴满足 Krull–Schmidt 性质，则该环是左阿廷的。本文还给出了环为左遗传、左完美且右相容（分别为左遗传且左诺特）的另一判据：要求模类对 $(Stable\ modules, Projective\ modules)$（分别为 $(Injective\ Modules, Costable\ Modules)$）构成预挠理论。这意味着，模类对 $(Stable\ modules, Projectivemodules)$ 构成挠理论，当且仅当该环是左遗传的，且该环作为自身上的左模时，其内射包是投射的。

关键词和短语：左遗传环、左完美右相干环、左诺特环、（余）稳定模、投射模、内射模、Freyd伴随函子定理、根基、（预）挠理论、Krull-Schmidt 范畴。

2020 年数学主题分类：16D70、16B50、16E60、18E40。

1. Introduction

本文中，“环”均指带单位元的结合环，“模”均指该环上的左模。

回顾一下，若一个模不含非零投射直和项，则称其为稳定模。若一个环是左遗传的，则任意小族稳定模的直和仍是稳定模（见下文第 3 节）。此外，每个不可分解模显然不是稳定模就是投射模。因此，正如 Alex Martsinkovsky 所指出的，若一个模有不可分解分解，则它既可以表示为一个稳定模与不可分解投射模的直和，也可以表示为一个稳定模与一个投射模的直和（我们分别称相应的分解为稳定模—不可分解投射模分解和稳定模—投射模分解）。类似地，若一个模有有限不可分解分解，则它既可以表示为不可分解内射模与一个余稳定模（即按 [7] 的意义为 i-约化的模）的直和，也可以表示为一个内射模与一个余稳定模的直和。所有模都具有后两种分解（即不可分解内射模-余稳定分解和内射-余稳定分解）的环，已由 He [7] 刻画。具体而言，He 证明，这些恰好是左诺特环。此外，He 证明，这类分解存在且在同构意义下唯一，当且仅当该环既是左遗传环又是左诺特环。

鉴于上述事实，自然会提出这样一个问题：刻画哪些环使得其上所有模都具有（在同构意义下唯一的）稳定模—投射模／稳定模—不可分解投射模分解。本文旨在对左遗传环给出这样的刻画。我们证明，对于这样的环，以下条件等价：

(i) 任意模都可以表示为一个稳定模与若干不可分解投射模的直和；

(ii) 任意模都可以表示为一个稳定模与一个投射模的直和；

(iii) 该环是左完美且右相容的。

我们还证明，当这些条件成立时，上述两种表示在同构意义下都是唯一的。条件 (ii) 中的表示还是函子性的。

我们证明的关键是一个纯粹的范畴论结果——关于某个

完备、良可控且共良可控范畴的满且充实子范畴的反射性的旧定理。我们给出了该定理的推广形式：以满足某个自然条件的因子分解系统存在这一要求，取代底范畴良可控性的要求；此外，还给出了一种形式的逆命题。通过应用上述论述、Chase [5], 关于投射模的直积为投射模的判据，以及Anderson 和 Fuller [1]关于投射模不可分解分解的结果，我们得到了对左遗传、左完美且右相干环的上述刻画。

注意到，主理想整环上有限生成模的基本定理导出了此类模的稳定-投射表示。因此，我们关于此类分解存在性的判据意味着：

—对于任何不是域的主理想整环，基本定理不能推广到该环上的所有模。

此外，应用“旧定理”及其逆命题的对偶、Bass 关于内射模的直和为内射的判据 [2], ，以及 Matlis 关于内射模不可分解分解的结果 [13], ，我们给出了 He 对左遗传左诺特环刻画的新证明。此外，我们还证明了此类环上模的内射余稳定表示具有函子性。

上述结果为一般问题给出了部分答案：

—如果左遗传环上的任意模都有有限不可分解分解，那么该环是左阿廷的。

在这方面，适宜在此提及 Anderson 和 Fuller 的结果：如果环上的任意模都有一个补直和项的分解（因而是不可分解的），那么该环是左阿廷的 [1]。

本文除了给出上述判据，以确定一个左遗传环是否为左完美且右相容外，还给出了这类环以及左诺特环的一些其他刻画。其中一种刻画指出，一个环是左遗传、左完美且右相容的，当且仅当这一对

$$(Stable\ Modules, Projective\ Modules) \tag{1.1}$$

模类构成预挠理论。对于左遗传诺特环，也证明了类似结果：当且仅当该环属于这一类时，

pair

$$(Injective\ Modules, Costable\ Modules) \tag{1.2}$$

模类构成预挠理论。为此，本文在任意左遗传环上的模范畴中引入了一种特定的幂等根基。

最后请注意，(1.2) 对是一个挠理论，当且仅当该环是半单的。至于 (1.1) 对，它是一个挠理论，当且仅当该环是左遗传的，且其内射包作为自身上的左模来看是投射的。这个结论由 Wu、Mochizuki 和 Jans 的论文主要结果 [15] 以及上述关于 (1.1) 对的结果推出。

作者谨向 Alex Martsinkovsky 和 Ma- muka Jibladze 致谢，感谢他们就本文主题进行的宝贵交流。

作者谨此感谢 Shota Rustaveli 格鲁吉亚国家科学基金会提供的经费支持（编号：FR-18-10849）。

2. Notation and blanket assumptions

设 Λ 为一个环，Λ-Mod 为 Λ-模的范畴。

本文中，若不致引起混淆，我们对模类及其在范畴 Λ-Mod 中对应的满子范畴使用相同的符号。此外，符号 ${}_\Lambda\Lambda$ 表示环 Λ，并将其视为自身上的左模。进一步地，对于模类 $\mathcal{C}$，符号 $\mathcal{C}^\perp$ 表示所有满足以下条件的模 N 所成的类：对于任意来自 $\mathcal{C}$ 的模 M，$Hom_\Lambda(M, N) = 0$；而 $\mathcal{C}^\top$ 表示所有满足以下条件的模 M所成的类：对于任意来自$\mathcal{C}$的模 N，$Hom_\Lambda(M, N) = 0$。

对于范畴 $\mathcal{C}$，符号 Epi（分别为 $Mono$）表示满同态（分别为单态射）类，而 $StrongEpi$（分别为 $StrongMono$）表示 $\mathcal{C}$中的强满态射（分别为强单态射）类。

3. The classes of stable and costable modules

在 [15], Wu、Mochizuki 和 Jans 指出，具有零对偶的模之类 Λ-Mod_{ZD} 在同态像、直和及扩张下封闭（但一般而言，在子模下并不封闭）。因此，它确定了范畴 Λ-Mod 上的某个幂等根基 R。注意，类 (Λ-Mod_{ZD})$^\perp$ 包含无挠模类，但一般而言并不与之相同，这一点可由 [15] 的定理（见第 8 页）得出。

在 [12], Martsinkovsky 和本文作者于引理 2.6 中指出，任何具有零对偶的模都是稳定的；若环是左遗传的，反之亦成立。因此，我们得到如下结论。

引理 3.1. 如果任意小族稳定Λ模的直和是稳定的，那么这些模全都是稳定的。若 Λ 是左遗传的，则反之亦然。在这种情况下，类 Λ-Mod_{St} 对（直和）、同态像和扩张封闭。

令 Λ-Mod_{St} 为稳定模的类/范畴，并令 Λ-Mod_{Pr} 为投射模的类/范畴。鉴于[12], 的引理 2.6，我们还给出以下容易验证的事实。

引理 3.2. 设 M 是一个模。对于以下条件，有

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftarrow (iii).$$

若 Λ 是左遗传的，则条件 (i)-(iii) 等价，因此 Λ-$Mod_{St} = (\Lambda\text{-}Mod_{Pr})^{\top}$:

(i) 模 M 是稳定的;

(ii) 不存在满同态 $M \twoheadrightarrow P$，其目标模 P 是非零投射模;

(iii) 不存在非零同态 $M \to P$ 具有投射P。

引理 3.2 意味着

引理 3.3. 对任意环 Λ，稳定模 Λ-Mod_{St} 的类在同态像下封闭。

考虑上述事实后，我们得到

命题 3.4. 设 Λ 为左遗传环。则

(a) 对任意模 M，R(M) 是 M 的最大稳定子模；(b) 模类 (Λ-Mod_{St}, (Λ-Mod_{St})$^{\perp}$) 在范畴 Λ-Mod 上构成一个预挠理论；(c) 子范畴 Λ-Mod_{St} of Λ-Mod 是余反射的；(d) 子范畴 (Λ-Mod_{St})$^{\perp}$ of Λ-Mod 是反射的；(e) 类 (Λ-Mod_{St})$^{\perp}$ 与所有满足 R(M) $= 0$ 的模 M 组成的类重合。

与稳定模的概念对偶，可以引入余稳定模的概念。显然，根据 He [7]，它等价于 i-约化模的概念（后者是 Kaplansky [8]所提出的约化阿贝尔群概念的一种推广）。

令 Λ-Mod_{Cost}表示这类模的类/范畴，令 Λ-Mod_{Inj}表示内射模的类/范畴。我们有

引理 3.5. 设 M 是一个模。对于以下条件，我们有

$$(i)\Leftrightarrow(ii)\Leftarrow(iii).$$

若 Λ 是左遗传的，则条件 (i)-(iii) 等价，因此 Λ-Mod_{Cost}=(Λ-Mod_{Inj})$^{\perp}$:

(i) 模 M 是余稳定的;

(ii) 不存在单态射 $I \rightarrowtail M$ ，其非零内射模为 I;

(iii) 不存在非零同态 $I \to M$ ，其内射模为 I。

由引理 3.5 可知

引理 3.6. 余稳定模的类 Λ-Mod_{Cost} 对子模封闭。若任意一族稳定Λ-模的直和是余稳定的，则这些模全都是余稳定模。若 Λ 是左遗传环，则类 Λ-Mod_{Cost} 对直积和扩张封闭。

由引理 3.6 可得，类 Λ-Mod_{Cost} 在 Λ-Mod 上确定了一个幂等根基 R′ 。

命题 3.7. 设 Λ 是一个左遗传环。那么

(a) 对任意模 M，子模 R′(M) 是所有满足余稳定 M/N 的子模 N 中最小的;

(b) 模类 (Λ-Mod_{Cost})$^{\top}$ 与 Λ-Mod_{Cost} 构成一个预挠理论;

(c) 范畴 Λ-Mod 的子范畴 Λ-Mod_{Cost} 是反射的; (d) 范畴 Λ-Mod 的子范畴 (Λ-Mod_{Cost})$^{\top}$ 是余反射的; (e) 类 (Λ-Mod_{Cost})$^{\top}$ 与所有满足 R′(M) $= M$ 的模 M 构成的类相同。

4. The 'old theorem'

回顾以下众所周知的事实：设 $\mathcal{C}$ 是一个完备的、良可控且共良可控的范畴，而 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满且重plete子范畴。如果 $\mathcal{X}$ 对积和子对象封闭，那么它就是反射子范畴。在 [6], 中，Freyd 将这一陈述称为"旧定理"，并且还指出，

这是他的伴随函子定理的直接推论。

下面我们给出其广义形式：将范畴 $\mathcal{C}$ 具有良可控性的要求，替换为存在一个分解系统 $(\mathbb{E},\mathbb{M})$，且 $\mathbb{E}\subseteq Epi$ 具有 $\mathcal{C}$ 的要求。我们还给出某种形式的逆命题。这些陈述可由 [17], 的备注 3.1(ii) 推出，但为方便读者，我们给出直接证明。请注意，在特殊情形下，若 $\mathcal{C}$ 是拓扑空间范畴，且相关的类为 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{M}$，则所得判据已由 Kennison 在论文 [9] 中给出（见定理 C）。

关于分解系统的定义，读者可参阅例如 [3]。回想一下，若 $(\mathbb{E},\mathbb{M})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的分解系统，则交集 $\mathbb{E}\cap\mathbb{M}$ 与 $\mathcal{C}$ 中所有同构组成的类重合。此外，若 $\mathbb{E}\subseteq Epi$，则态射类 $\mathbb{M}$ 满足左消去性质，即若 $gf\in\mathbb{M}$，则 $f\in\mathbb{M}$ （例如参见 [16]）。

对于 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 C，以 C 为定义域的 $\mathbb{E}$-态射类上存在一种自然的等价关系。若该等价关系下后一类的商是一个集合 [3]，则称范畴 $\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{E}$-余良幂的。

定理 4.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个完备范畴，且 $(\mathbb{E},\mathbb{M})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个分解系统，具有 $\mathbb{E}\subseteq Epi$。设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{E}$-余良幂的，且 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个满且重plete子范畴。以下条件等价：

(i) $\mathcal{X}$ 对积和 $\mathbb{M}$-子对象封闭（后者意指：若态射 $m: X\to X'$ 属于 $\mathbb{M}$，且 X' 是 $\mathcal{X}$ 中的一个对象，则 X 也是 $\mathcal{X}$ 中的一个对象）；

(ii) $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个反射子范畴，且反射单位的分量属于 $\mathbb{E}$;

(iii) $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个反射子范畴，并且对 $\mathbb{M}$-子对象封闭。

证明。 (i)⇒(ii)：设 C 是 $\mathcal{C}$中的一个对象。对于任意一个ϖ 的等价类，其中的态射属于 $\mathbb{E}$，定义域为 C，余域属于 $\mathcal{X}$，取一个代表元 e_ϖ。考虑乘积 $X=\prod_\varpi codom\ e_\varpi$。注意， X 是子范畴 $\mathcal{X}$中的一个对象。态射族e_ϖ 诱导出一个态射 $\varrho: C\to X$。考虑 ϱ的（$\mathbb{E},\mathbb{M}$）-分解me 。显然，态射 e 的余域 X' 是 $\mathcal{X}$中的一个对象。我们断言， e 是从对象 C 到子范畴 $\mathcal{X}$的泛态射。事实上，考虑任意一个 $f: C\to Y$，其中 Y 属于 $\mathcal{X}$。设 $m'e'$ 是 f 的（$\mathbb{E},\mathbb{M}$）-分解，且 $e': C\twoheadrightarrow Y'$。那么 Y'也是 $\mathcal{X}$中的一个对象。不失一般性，我们可以假设

e'的等价类 ϖ 的代表元 e_ϖ 就是它本身 e'。因此$\pi_{e'}\varrho = e'$，其中 $\pi_{e'}$ 是典范投影 $X \to codom\ e'$。于是（$m'\pi_{e'}m$）$e = f$。

(ii)⇒(iii)：取一个态射 $m: X \to X'$ from $\mathbb{M}$，其中 X' 属于子范畴 $\mathcal{X}$。设 η 为反射 r 的单位。存在一个态射 $h: r(X) \to X'$，使得 $m = h\eta_X$。于是 $\eta_X \in \mathbb{M}$。这意味着 η_X 是一个同构，因此 X 是 $\mathcal{X}$ 的一个对象。

蕴含关系 (iii)⇒(i) 是众所周知的。 □

注意，定理 4.1 蕴含“旧定理”，因为任何完备良幂范畴都有分解系统 $(StrongEpi, Mono)$（例如参见 [3]）。

5. Left hereditary left perfect right coherent rings

我们以以下众所周知的定理开始本节。

定理 5.1。（Chase [5]）一个环是左完美且右相容的，当且仅当任意小族投射模的直积是投射模。

回顾一下，Λ-Mod_{St} 表示稳定模的全子范畴，而 Λ-Mod_{Pr}表示 Λ-Mod的投射模全子范畴。

定理 5.2。对于环 Λ，下面的条件 (i)-(xv) 等价：

(i) 环 Λ 是左遗传、左完美且右相容的；

(ii) Λ-Mod的子范畴 Λ-Mod_{Pr}是满反射的；

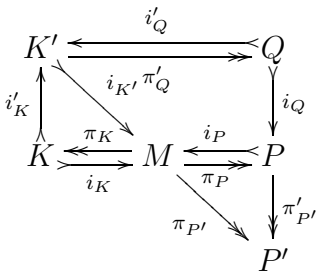
(iii) 环 Λ是左遗传的，且Λ-Mod 的子范畴 Λ-Mod_{Pr}是反射的；

(iv) 环 Λ 是左遗传的；此外，对于任意模 M，存在一个表示 $M \approx K \oplus P$，使得 P 是投射的；如果 $M \approx K' \oplus P'$ 是一个表示，且其 P' 是投射的，那么存在一个投射模 Q，使得 $P \approx P' \oplus Q$、 $K' \approx K \oplus Q$ 成立，并且满足以下等式：

$$i_P i_Q = i_{K'} i'_Q,\ \pi_P i_{K'} = i_Q \pi'_Q,\ \pi'_{P'}\pi_P = \pi_{P'},\ i_{K'} i'_K = i_K;$$

这里，带有下标（也可能带撇号）的字母 i 表示下标所示模的典范嵌入；类似地，带有下标（也可能带撇号）的字母 π 表示

相关的典范投影：



(5.1)

(v) 环 Λ 是左遗传的；此外，对于任意模 M，存在一个表示 $M \approx K \oplus P$，使得 P 是投射的；若$M \approx K' \oplus P'$是一个其 P'为投射的表示，则存在一个单态射 $m: K \rightarrowtail K'$，满足 $i_{K'}m = i_K$；

(vi) 该环是左遗传的，且任意模都可以表示为一个稳定模与一个投射模的直和；

(vii) 该环是左遗传的，且任意模都可以表示为一个稳定模与一个投射模的直和；这种表示在以下意义下是唯一的：若 $M \approx S \oplus P$ and$M \approx S' \oplus P'$with stable $S$and S', and projective $P$and P', 则存在一个与典范嵌入相容的同构 $S \to S'$，以及一个与典范投影相容的同构 $P \to P'$；

(viii) 该环是左遗传的，而且任意模都可以表示为一个稳定模与不可分解投射模的直和；

(ix) 该环是左遗传的，而且任意模 M 都可以表示为一个稳定模 S 与不可分解投射模 P_i ($i \in \mathfrak{A}$) 的直和；这种表示在以下意义下是唯一的：若 M 是一个稳定模 S'与不可分解投射模 P'_i ($i \in \mathfrak{B}$) 的直和，则存在一个与典范嵌入相容的同构 $S \to S'$、一个双射 $\sigma: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 以及同构 $P_i \to P'_{\sigma(i)}$ ($i \in \mathfrak{A}$)，使得诱导的同构 $\oplus_{i\in\mathfrak{A}} P_i \to \oplus_{i\in\mathfrak{B}} P'_i$ 与典范投影 $M \twoheadrightarrow \oplus_{i\in\mathfrak{A}} P_i$和 $M \twoheadrightarrow \oplus_{i\in\mathfrak{B}} P'_i$相容；此外，分解 $\oplus_{i\in\mathfrak{B}} P_i$ 补足了模 $N = \oplus_{i\in\mathfrak{A}} P_i$的直和项；

(x) 环 Λ 是左遗传的，而且，此外，任意模 M 都有一个表示 $M =$ R(M) $\oplus P$，其中带有一个投射模 P；

(xi) 环 Λ 是左遗传的，而且，此外，对于任意模 M，模 $M/\mathrm{R}(M)$ 都是投射的；

(xii) 环 Λ 是左遗传的，而且对于任意模 M，$\mathrm{R}(M) = 0$ 当且仅当 M 是投射的；

(xiii) 环是左遗传的，而且，类 $(\Lambda\text{-}Mod_{St})^{\perp}$与所有投射模组成的类相同；

(xiv) 模类对 $(\Lambda\text{-}Mod_{St}, \Lambda\text{-}Mod_{Pr})$ 是一个预挠理论；

(xv) $\Lambda\text{-}Mod_{St} = (\Lambda\text{-}Mod_{Pr})^{\top}$ *and* $\Lambda\text{-}Mod_{Pr} = (\Lambda\text{-}Mod_{St})^{\perp}$.

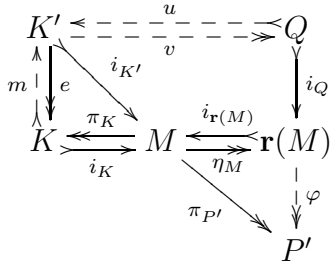
证明。(i)⇔(ii)⇔(iii) 的等价性直接由定理 5.1 和定理 4.1 得出（取 $\mathbb{E} = Epi$ 和 $\mathbb{M} = Mono$）。

(ii)⇒(iv)：首先注意，环 Λ 是左遗传的。现在令

$$\mathbf{r} : \Lambda\text{-}Mod \to \Lambda\text{-}Mod_{Pr} \tag{5.2}$$

是反射子，且 η是反射的单位。令 $M \approx K \oplus \mathrm{r}(M)$ 为由同态 $\eta_M : M \twoheadrightarrow \mathrm{r}(M)$ 诱导的表示。考虑任意一个满足 projectiveP' 的表示 $M \approx K' \oplus P'$。存在同态 $\varphi : \mathrm{r}(M) \to P'$，使得 $\varphi\eta_M = \pi_{P'}$（见下文图 (5.3)）。这意味着存在 $m : K \to K'$，使得$i_{K'}m = i_K$。此外，φ是满同态，因此，对于 $\mathrm{r}(M)$ 的子模 $Q = Ker\ \varphi$，有 $\mathrm{r}(M) = P' \oplus Q$。特别地，这意味着 Q 是投射的。

此外，我们有 $\varphi = \varphi\eta_M i_{\mathbf{r}(M)} = \pi_{P'} i_{\mathbf{r}(M)}$。因此存在同态 $u : Q \to K'$，使得 $i_{K'}u = i_{\mathbf{r}(M)} i_Q$；又由于 $\varphi\eta_M i_{K'} = 0$，存在同态 $v : K' \to Q$，使得 $i_Q v = \eta_M i_{K'}$。令 $e = \pi_K i_{K'}$:



(5.3)

因此，五元组 (K', K, Q, m, e, u, v) 是一个双积。事实上，等式 $em = 1_K$ 和 $eu = 0$ 显然成立。此外，我们有 $i_Q vu = i_Q$。这意味着 $vu = 1_Q$。类似地，$i_Q vm = 0$，由此可得 $vm = 0$。最后，容易验证 $i_{K'}(me + uv) = (i_K\pi_K + i_{\mathbf{r}(M)}\eta_M)i_{K'} = i_{K'}$，从而得到 $me + uv = 1_{K'}$。因此 $K' \approx K \oplus Q$。

蕴含关系 (iv)⇒(v) 显然成立。

(v)⇒(vi)：该模 K 显然是稳定的。

(vi)⇒(ii)：设 $M = S \oplus P$ 具有稳定模 S 和投射模 P。典范投影 π_P： $S \oplus P \twoheadrightarrow P$ 是从 M 到子范畴 Λ-Mod_{Pr} 的泛态射。事实上，若 f： $M \to P'$ 是一个具有投射模 P' 的同态，则根据引理 3.2，有 $fi_S = 0$。因此存在一个同态ψ： $P \to P'$，使得 $\psi\pi_P = f$。

对于蕴含关系 (iv)⇒(vii)，只需注意到条件 (iv) 中的模K 是稳定的。蕴含关系 (vii)⇒(vi) 是显然的。

蕴含关系 (i)⇒(viii) 由 [1] 的定理 6 得出（以及由上文证明的 (i) 蕴含 (vi) 这一事实）。蕴含关系 (viii)⇒(vi) 是显然的。

由 [1] 的定理 2、6（以及如上所示，(i) 蕴含 (vii)）可得蕴含关系 (i)⇒(ix)。(ix)⇒(vi) 的蕴含关系显然。

(iv)⇒(x)：我们已经知道，表示 $M \approx K \oplus P$ 中的模 K 是稳定的。假设 M 的一个稳定子模 S 通过嵌入 i： $S \rightarrowtail M$ 给出。由引理 3.2， $\pi_P i = 0$，因此存在一个单态射 φ： $S \rightarrowtail K$，使得 $i_K\varphi = i$。于是， K 是 M 的最大稳定子模。

蕴含关系 (x)⇒(xi)⇒(xii) 显然。

由命题 3.4(e) 可得等价关系 (xii)⇔(xiii)，而由命题 3.4(b) 可得蕴含关系 (xiii)⇒(xiv)。

蕴含关系 (xiv)⇒(iii) 可由挠理论中的众所周知的事实推出。这些事实也蕴含等价关系 (xiv)⇔(xv)。□

推论 5.3. 设 Λ 是左遗传、左完美且右相干的环。那么，对于任意模 M，子模 R(M) 是具有投射 M/N 的子模 N 中最小的一个。

注 5.4. 设 Λ 是左遗传、左完美且右相干的环。模 M 的稳定-投射表示实际上具有如下形式

$$M \approx \mathbf{R}(M) \oplus \mathbf{r}(M), \tag{5.4}$$

因此它是函子性的（这里 r 是反射子（5.2））。然而，当且仅当环是半单环时，这个表示才是自然的。事实上，设图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\approx} & \mathbf{R}(M) \oplus \mathbf{r}(M) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{R}(f)\oplus\mathbf{r}(f)} \\ M' & \xrightarrow{\approx} & \mathbf{R}(M') \oplus \mathbf{r}(M') \end{array} \tag{5.5}$$

对任意 f 都交换，并假设存在一个非投射模 M'。取满同态 f: $M \twoheadrightarrow M'$，其中 $M \twoheadrightarrow M'$ 是投射模 M。模 R(M) 为零。根据定理 5.2，R(M') 不为零。因此，R(f) $\oplus$ r(f) 不可能是满同态，由此得到矛盾。

定理 5.5. 设 Λ 是一个非域的主理想整环。那么，关于有限生成 Λ 模的基本定理不能推广到所有 Λ 模的情形。

证明。回顾一下，任何完全诺特环都是阿廷环。此外，阿廷整环是域。现在只需注意到，基本定理中提到的模表示会导出稳定-投射表示，因为整环上的任何挠模都是稳定的。□

注 5.6. 对于整数环，定理 5.5 中的陈述是众所周知的。例如，它可由 Abel p 群能够表示为循环群的直和这一事实的 Kulikov判据推出 [10]。

此外，定理 5.2 和本文的主要结果 [15] （见第 8 页的定理以及注 1、2）蕴含

定理 5.7. 对于一个环 Λ，模类 (Λ-Mod_{St}, Λ-Mod_{Pr}) 构成一个挠理论，当且仅当 Λ 是左遗传的，且模 ${}_\Lambda\Lambda$ 的内射包是投射的。

证明. 只需注意，如果环 Λ 是左遗传的，且模 ${}_\Lambda\Lambda$ 的内射包是投射的，那么 Λ 是左完美且右相容的 [4] （另见 [12]）。□

定理 5.7 立即推出下文的推论 5.8。特别地，由此得到关于其条件 (i) 和 (iii) 等价性的新证明，而这一结果由 Colby 和 Rutter 给出 [4]。值得注意的是，他们在同一篇论文中还给出了满足这些条件的左遗传环的内在描述。在 [12], 中，Martsinkovsky 和本文作者从该环的投射稳定范畴角度刻画了这类环。

推论 5.8. 设 Λ 为左遗传的。那么，以下条件等价：

(i) 模 ${}_\Lambda\Lambda$ 的内射包是投射的；(ii) 子范畴 Λ-Mod_{Pr} 在本质扩张下封闭；(iii) 子范畴 Λ-Mod_{Pr} 在内射包下封闭。

注 5.9. 设 Λ 是左遗传环，且模 ${}_\Lambda\Lambda$ 的内射包是投射的。容易看出，挠理论 (Λ-Mod_{St}, Λ-Mod_{Pr}) 与使模 ${}_\Lambda\Lambda$ 无挠的最大挠理论一致；Utumi 在 [14] 、Lambek 在 [11] 中考察了这一挠理论。关于此挠理论可除的模恰好是内射模。任意投射模的可除包都是其内射包。

定理 5.7 的进一步推论将在我们的下一篇论文中给出。

6. Left hereditary left Noetherian rings

第 5 节中用于刻画左遗传、左完美且右相干环的范畴论方法，为证明 He 关于环的刻画提供了一种新方法：在这类环上，所有模都有唯一的内射-余稳定分解。在给出证明之前，先回顾下面这个著名定理。

定理 6.1。（Bass [2]）一个环是左诺特环，当且仅当任意小族内射模的直和仍是内射模。

回顾一下，Λ-Mod_{Inj} 表示内射模的全子范畴，而 Λ-Mod_{Cost} 表示 Λ-Mod 的余稳定模全子范畴。

定理 6.2。对于一个环 Λ，下面的条件 (i)-(xv) 等价：

(i) 环 Λ 是左遗传且左诺特的；

(ii) Λ-Mod的子范畴 Λ-Mod_{Inj}是单同态余反射的；

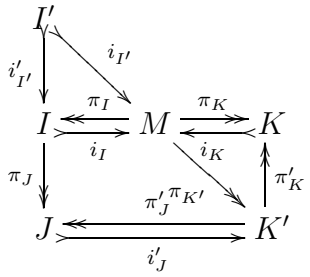
(iii) 环 Λ 是左遗传的，且Λ-Mod 的子范畴 Λ-Mod_{Inj} 是余反射的；

(iv) 环 Λ 是左遗传的；此外，对任意模 M，存在一个表示 $M \approx I \oplus K$，使得 I 是内射的；并且若$M \approx I' \oplus K'$ 是一个表示且 I'是内射的，则存在一个内射模 J，使得 $I \approx I' \oplus J$、$K' \approx K \oplus J$，并且满足以下等式：

$$\pi'_J\pi_{K'} = \pi_J\pi_I,\ \pi_{K'}i_I = i'_J\pi_J,\ i_Ii'_{I'} = i_{I'}, \pi'_K\pi_{K'} = \pi_K;$$

这里，带有下标（也可能带有撇号）的字母 i 表示相关的典范嵌入，而带有下标（

也可能带有撇号）的字母 {v2} 表示相关的典范投影：



(6.1)

(v) 环 Λ 是左遗传的；此外，对于任意模 M，都存在一个表示 $M \approx I \oplus K$，使得 I 是内射的；如果 $M \approx I' \oplus K'$ 是一个表示且其内射部分为 I'，那么存在一个满态射 $e\colon\ K' \twoheadrightarrow K$，并且该满态射与典范投影相容；

(vi) 环是左遗传的，并且任意模都可以表示为一个内射模与一个余稳定模的直和；

(vii) 环是左遗传的，并且任意模都可以表示为一个内射模与一个余稳定模的直和；这种表示在以下意义下是唯一的：如果 $M \approx I \oplus C$ 和$M \approx I' \oplus C'$ 分别具有内射的 I 和 I' 以及余稳定的 C 和 C'，那么存在一个同构 $I \to I'$，其与典范嵌入相容；还存在一个同构 $C \to C'$，其与典范投影相容；

(viii) 该环是左遗传的，而且每个模都可以表示为内射不可分解模与一个余稳定模的直和；

(ix) 该环是左遗传的，而且每个模都可以表示为内射不可分解模 $I_i (i \in \mathfrak{A})$ 与一个余稳定模 C 的直和；这种表示在如下意义下是唯一的：若 M 是内射不可分解模 I'_i $(i \in \mathfrak{B})$ 与一个余稳定模 C' 的直和，则存在一个与典范投影相容的同构 $C \to C'$，一个双射 $\sigma\colon\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$，以及同构 $I_i \to I'_{\sigma(i)}$ $(i \in \mathfrak{A})$，使得所诱导的同构 $\oplus_{i\in\mathfrak{A}} I_i \to \oplus_{i\in\mathfrak{B}} I'_i$ 与典范嵌入 $\oplus_{i\in\mathfrak{A}} I_i \rightarrowtail M$ 和 $\oplus_{i\in\mathfrak{B}} I'_i \rightarrowtail M$ 相容；此外，分解 $\oplus_{i\in\mathfrak{B}} I_i$ 补足了模 $N = \oplus_{i\in\mathfrak{A}} I_i$ 的直和项；

(x) 环 Λ 是左遗传的，而且任何模 M 都有一个表示 $M = I \oplus M/\mathrm{R}'(M)$，其中包含一个内射模 I；

(xi) 环 Λ 是左遗传的，而且对于任意模 M，模 R′(M) 都是内射的；

(xii) 环 Λ 是左遗传的，而且对于任意模 M，R′(M) $= M$ 当且仅当 M 是内射的；

(xiii) 环是左遗传的，并且类 (Λ-Mod_{Cost})$^{\top}$ 与所有内射模的类相同；

(xiv) 模类对 (Λ-Mod_{Inj}, Λ-Mod_{Cost}) 是一个预挠理论；

$$(xv)\ \Lambda\text{-}Mod_{Cost} = (\Lambda\text{-}Mod_{Inj})^{\perp}\ and\ \Lambda\text{-}Mod_{Inj} = (\Lambda\text{-}Mod_{Cost})^{\top}.$$

证明。(i)⇔(ii)⇔(iii) 的等价性直接由定理 6.1 和定理 4.1 的对偶得到。(i)⇒(viii) 的蕴含关系由 Matlis 根据定理 2.5 得出，而 (vii)⇒(ix) 的蕴含关系由 Anderson 和 Fuller 根据定理 2、8 得出。其他所有蕴含关系的证明都类似于定理 5.2 中相应蕴含关系的证明。

□

推论 6.3. 设 Λ 是左遗传左诺特环。那么，i-约化模构成的类在直积和扩张下封闭。

推论 6.4. 设 Λ 是左遗传左诺特环。对于任意模 M，子模 R′(M) 是 M 的最大内射子模。

注记 6.5. 设 Λ 是左遗传左诺特环。模 M的内射余稳定表示实际上具有如下形式

$$M \approx \mathbf{c}(M) \oplus (M/\mathbf{R}'(M)), \tag{6.2}$$

因此它是函子性的。这里，c 是余反射子

$$\Lambda\text{-}Mod \to \Lambda\text{-}Mod_{Inj}.$$

然而，当且仅当该环是半单环时，这个表示才是自然的。这一点可以类似于注记 5.3 中的相应命题容易地证明（对于 f，取模 M的本质扩张 $M \rightarrowtail I(M)$）。

注意，(Λ-Mod_{Inj}, Λ-Mod_{Cost}) 这一对（出现在定理 6.2 的条件 (xiv) 中）是挠理论，当且仅当环 Λ是半单环。

最后请注意，引理 3.1、定理 5.2 和定理 6.2 立即推出以下结论

定理 6.6. 如果左遗传环上的任意模都有有限不可分解分解，那么 Λ 是左完美且左诺特的，因此它是左阿廷的。

References

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller, 《具有补足直和项分解的模》, 《代数学杂志》22(1972), 241-253。[2] H. Bass, 《环的整体维数》, 博士论文, 芝加哥大学, 1959。[3] F. Borceux, 《范畴代数手册》第1卷《范畴论基础》, 《数学及其应用百科全书》第50卷。剑桥大学出版社, 剑桥, 1994。[4] R. R. Colby, E. A. Rutter, 《QF-3代数的推广》, 《美国数学会汇刊》153(1971), 371-386。[5] S. U. Chase, 《模的直积》, 《美国数学会汇刊》97(1960), 457-473。[6] P. J. Freyd, 《阿贝尔范畴：函子理论导论》, Harper and Row出版社, 纽约, 1964。[7] Z. X. He, 《诺特环与遗传环的刻画》, 《美国数学会会刊》3(1985), 414-416。[8] I. Kaplansky, 《无限阿贝尔群》, 密歇根大学出版社, 安娜堡, 1969。[9] J. F. Kennison, 《一般拓扑学及其他领域中的反射函子》, 《美国数学会汇刊》118(1965), 303-315。[10] L. Ia. Kulikov, 《任意基数阿贝尔群理论》, 《数学文集》9(1941), 165-181。[11] T. Y. Lambek, 《挠理论、加性语义与商环》, Springer-Verlag, 柏林、海德堡、纽约, 1071。[12] A. Martsinkovsky, D. Zangurashvili, 《左遗传环的稳定范畴》, 《纯粹与应用代数》219(2015), 4061-4089。[13] E. Matlis, 《诺特环上的内射模》, 《太平洋数学杂志》8(1958), 第3期, 511-528。[14] Y. Utumi, 《关于商环》, 《大阪数学杂志》8(1956), 1-18。[15] L. E. T. Wu, H. Y. Mochizuki, J. P. Jans, 《QF-3环的刻画》, 《名古屋数学杂志》27(1966), 7-13。[16] D. Zangurashvili, 《分解系统的若干构造》, 《范畴理论与应用》12, 第11期(2004), 326-354。[17] D. Zangurashvili, 《有效余下降态射、合并与分解系统》, 《纯粹与应用代数》209(2007), 255-267。

作者地址：Dali Zangurashvili, 第比利斯国立大学 A. Razmadze 数学研究所, Aleksidze 街 1 号, 第比利斯 0193, 格鲁吉亚, 电子邮箱：dali.zangurashvili@tsu.ge